<u>*Odkształcenia sprężyste MES*</u>

Dominik Marek

1.Problem:

Odkształcenia sprężyste:

$$-\frac{d}{dx}\left(E(x)\frac{du(x)}{dx}\right)=0$$

$$u(2)=3$$

$$\frac{du(0)}{dx}+u(0)=10$$

$$E(x)=\begin{cases}2\ dla\ x\ \in[0,1]\\6\ dla\ x\ \in(1,2]\end{cases}$$

Gdzie u poszukiwana funkcja:

$$[0,2]\ni x\mapsto u(x)\in\mathbb{R}$$

2.Rozwiązanie:

Rozpoczynamy od stworzenia sformułowania słabego. Korzystając z faktu, że z prawej strony mamy warunek Dirichleta, więc za przestrzeń funkcji V przyjmujemy te, które zerują się na prawym brzegu (na lewym niekoniecznie).

Szukać będziemy rozwiązania postaci $u=w+\tilde{u}$, *gdzie* $w\in V$, *zaś* $\tilde{u}$, *(tzw. shift) to pewna funkcja spełniająca warunek brzegowy :* $u(2)=3$. *Zatem :*

$$w\in V=\{f\in H^1: f(2)=0\}$$

$$w(2)=0$$

Za funkcję u możemy przyjąć : $u=w+3$

$$-\big(E(x)u'(x)\big)'=0$$

Mnożymy równanie przez dowolną funkcję $v\in V$ *i całkujemy:*

$$-\int_0^2\big(E(x)u'(x)\big)'v\,dx=\int_0^2 0\cdot v\,dx$$

$$-\int_0^2 \left(E(x)u'(x)\right)' v\,dx = 0$$

$$-E(x)u'(x)v|_0^2 + \int_0^2 E(x)u'(x)\,v'dx = 0$$

$$-E(2)u'(2)v(2) + E(0)u'(0)v(0) + \int_0^2 E(x)u'(x)\,v'dx \ = 0$$

$$v(2) = 0$$

$$u'(0) = 10 - u(0)$$

$$2v(0)[10 - u(0)] + \int_0^2 E(x)u'(x)\,v'dx \ = 0$$

Podstawiamy $u = w + 3$

$$2v(0)[10 - w(0) - 3] + \int_0^2 E(x)\,w'(x)\,v'dx \ = 0$$

$$20v(0) - 2v(0)w(0) - 6v(0) + \int_0^2 E(x)\,w'(x)\,v'dx \ = 0$$

$$-2v(0)w(0) + \int_0^2 E(x)\,w'(x)\,v'dx \ = -14v(0)$$

$$B(w, v) = \ -2v(0)w(0) + \int_0^2 E(x)\,w'(x)\,v'dx$$

$$\tilde{L}(v) = -14v(0)$$

Pamiętamy, że ze względu na niezerowy warunek Dirichleta z jednej strony przyjęliśmy rozwiązanie postaci $u = w + \tilde{u}$, *zatem powyższą równość możemy zapisać jako*

$$B(w + \tilde{u}, v) = L(v)$$

Korzystając z liniowości B względem pierwszego argumentu mamy

$$B(w, v) = L(v) - B(\tilde{u}, v)$$

Ostatecznie otrzymuje równanie postaci:

$$B(w, v) = \tilde{L}(v)$$

Rozwiązaniem naszego równania będzie $w \in V: \forall v \in V.$

Ostatecznie otrzymamy rozwiązanie postaci : $u = w + 3.$