<table>
<tr><td>Wydział

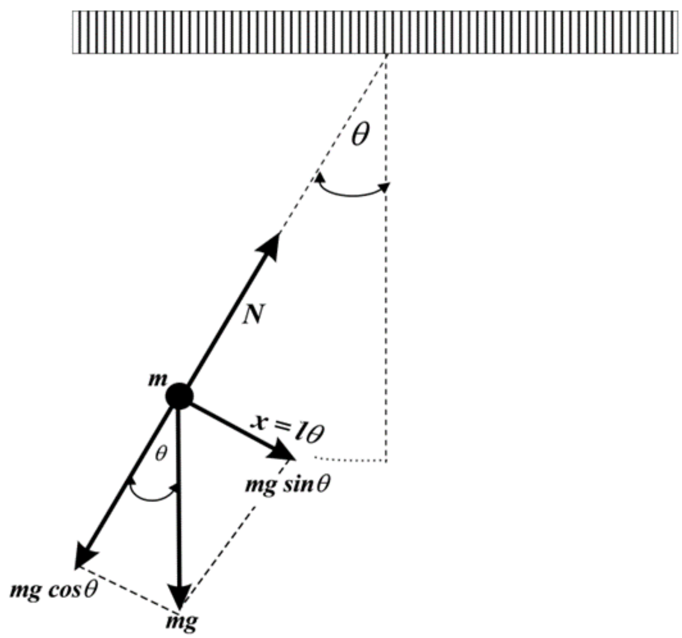
WI</td><td colspan="2">Imię i nazwisko 1.Dominik Marek
2.Maciej Nowakowski</td><td>Rok

II</td><td>Grupa

8</td><td>Zespół

4</td></tr>
<tr><td>PRACOWNIA FIZYCZNA WFiIS AGH</td><td colspan="4">Temat: Opracowanie danych pomiarowych</td><td>Nr ćwiczenia</td></tr>
<tr><td>Data wykonania</td><td>Data oddania</td><td>Zwrot do popr.</td><td>Data oddania</td><td>Data zaliczenia</td><td>OCENA</td></tr>
</table>

Oznaczenia, podstawowe definicje i wzory



[1]

Wykorzystane oznaczenia:

m – masa wahadła
t – czas
T – okres wahadła
u_g – niepewność pomiarowa przyspieszenia ziemskiego
u_l – niepewność pomiarowa długości wahadła

l – długość wahadła
ω – częstość ruchu okresowego
g – przyspieszenie ziemskie

u_T – niepewność pomiarowa czasu

Cel Ćwiczenia

• Zapoznanie się typowymi metodami używanymi przy opracowywaniu danych pomiarowych.
• Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego.

Opis ćwiczenia

W tym ćwiczeniu wykorzystaliśmy wahadło fizyczne skonstruowane z nierozciągliwej nici i bardzo małej zawieszonej na nici metalowej nakrętki. Dzięki temu mogliśmy potraktować je w przybliżeniu jako wahadło matematyczne, co umożliwiło dokonanie pomiarów czasu wahnięć wahadła przy bardzo małych kątach wychylenia wahadła, a następnie wyliczenia przyspieszenia ziemskiego z pomocą niżej wypisanych wzorów.

Aparatura pomiarowa:

- Linijka o dokładności 1mm.
- Stoper o dokładności 0.01s.

Wzory:

Okres ruchu wahadła w przybliżeniu ruchu harmonicznego (tzw. małe drgania):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

Wzór na niepewność wyniku wynikającego ze wzoru (1) utworzony z pomocą wykorzystania prawa przenoszenia niepewności:

$$u_g^2 = \left(\frac{4\pi^2}{T^2}u_l\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 * l}{T^3}u_t\right)^2 \qquad (2)$$

Wzór estymatora odchylenia standardowego średniej:

$$u_{T\acute{s}r} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} \qquad (3)$$

Wzór na niepewność standardową przy dokładności Δ:

$$u_s = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \qquad (4)$$

Podejście I – Pojedynczy pomiar.

Wykonanie ćwiczenia:

Dokonujemy pomiaru długości wahadła (l) za pomocą linijki mierząc odległość od środka masy ciężkości odważnika do punktu styku linki z metalowym ramieniem lampy, na którym była zawieszona. W kolejnym kroku dokonujemy pomiaru czasu jaki zajmuje naszemu wahadłowi wykonanie dziesięciu wahnięć. Czas wahnięć liczymy za pomocą stopera. Sprawdzamy błąd pomiarowy wynikający z dokładności sprzętu i czasu reakcji człowieka.
Przekształcamy wzór (1) otrzymując wzór:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{5}$$

przy użyciu, którego można wyliczyć g za pomocą wartości uzyskanych podczas pomiarów.

Wyniki pomiarów:

l[mm]	t[s]	T[s]
305	11,05	1,105

Opracowanie wyników:

Z czasu dziesięciu wahnięć wahadła wyliczono pojedynczy okres wahadła dzieląc po prostu całkowity czas przez 10. Korzystając ze wzoru (2) otrzymuje się niepewność pomiarową $u_g = 0{,}56\,\frac{m}{s^2}$, a ze wzoru (5) przyspieszenie ziemskie wyszło $9{,}86\frac{m}{s^2}$.

Podejście II – Wiele pomiarów.

Wykonanie ćwiczenia:

Pomiary dokonano tak jak w podejściu I, ale dokonano ich dziesięciokrotnie, aby zmniejszyć niepewność pomiarową dzięki użyciu wzoru estymatora średniej standardowej (3).

Wyniki pomiarów:

We wszystkich pomiarach długość wahadła była równa 305mm.

Nr. pomiaru	Czas 10 wahnięć t[s]	T[s]
1	10,85	1,085
2	10,62	1,062
3	10,68	1,068
4	10,89	1,089
5	10,67	1,067
6	10,75	1,075
7	10,67	1,067
8	11,07	1,107
9	10,80	1,080
10	10,87	1,087

Opracowanie wyników:

Najpierw należy wyznaczyć niepewność pomiarową wynikającą z wzoru (3). Na początku wyliczony zostaje średni okres $\bar{T} = 1{,}079$, oraz wyrażenie $\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2 = 0{,}0017$ dla n=10 oznaczającego liczbę wszystkich prób. Następnie wyliczona zostaje wartość $u_{Tśr}$.

$$u_{Tśr} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}0017}{90}} = 0.0043s$$

Niepewność pomiarowa długości wahadła jest wyliczona z wzoru (4) i wynosi:

$$u_l = \frac{1mm}{\sqrt{3}} = 0{,}577mm$$

Niepewność złożona z $u_g$jest wyliczana z wzoru (2) i wynosi:

$$u_g = 0{,}11\frac{m}{s^2}$$

Niepewność rozszerzona dla k=2 wynosi zatem:

$$U_g = k * u_g = 0{,}22\frac{m}{s^2}$$

Wyliczana jest wartość g ze wzoru (5), do którego za T podstawiane jest wyliczone wcześniej $\bar{T}$:

$$g = \frac{4\pi^2}{1{,}079^2} * 0{,}305 = 10{,}34\frac{m}{s^2}$$

Więc wyliczone $g = 10{,}34 \pm 0{,}22\frac{m}{s^2}$, co jest niezgodne z wartością prawdziwą wynoszącą $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.

<u>Podejście III – Metoda najmniejszych kwadratów</u>

Przebieg doświadczenia:

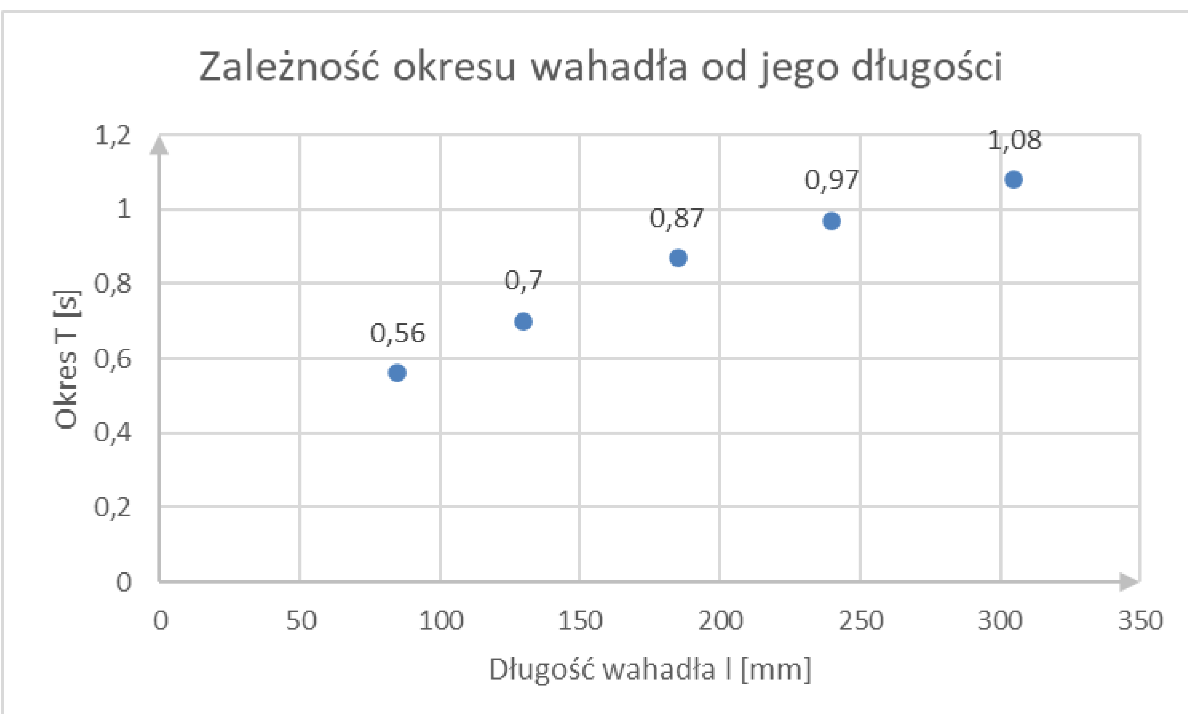
Analogicznie jak we wcześniejszym ćwiczeniu wykonujemy piętnaście pomiarów, jednak w tym podejściu wykorzystamy różne długości wahadła (*l*). Dla każdej z pięciu długości wahadła mierzymy czas (*t*), w jakim to wahadło wykona dziesięć okresów.

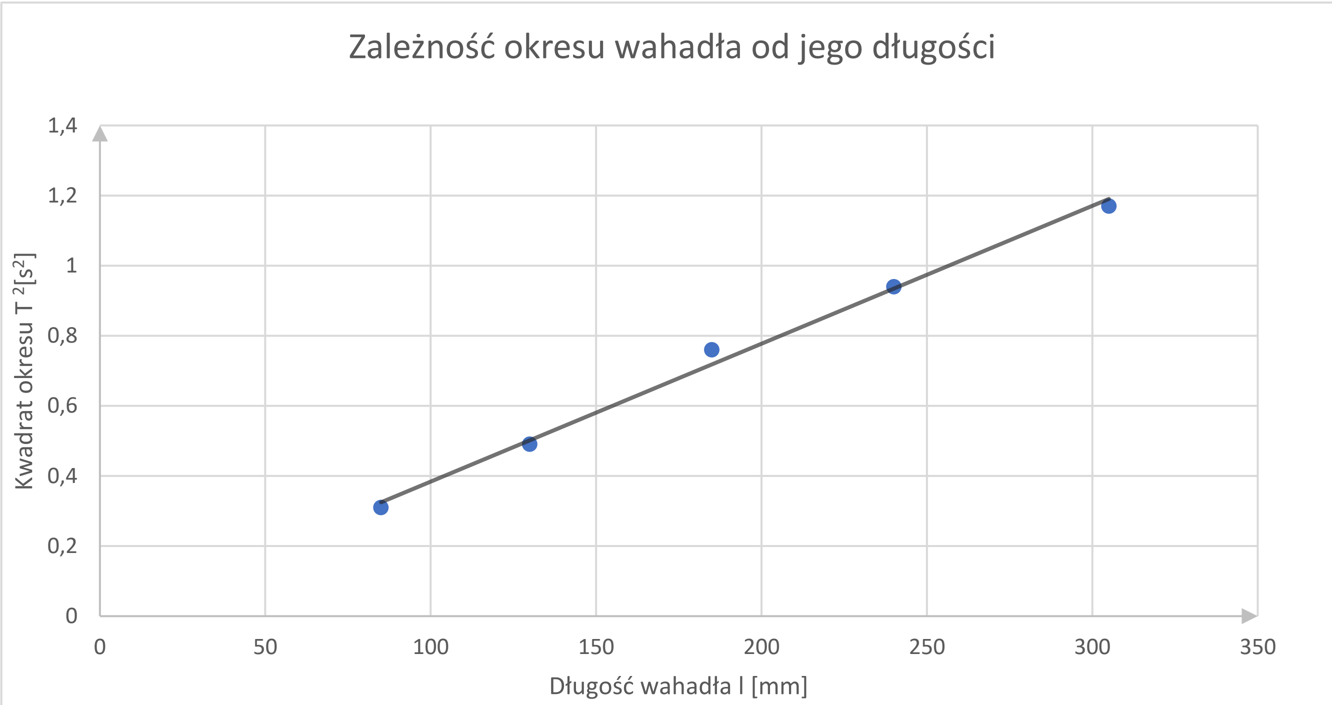
Czynność tą powtarzamy trzykrotnie, a następnie z otrzymanych czasów wyznaczymy ich średnią arytmetyczną, którą wykorzystujemy do obliczenia jednego okresu wahadła ($T_{iśr}$[s]) oraz jego kwadratu. Otrzymane wyniki pozwolą zastosować metodę najmniejszych kwadratów.

Wyniki pomiarów:

Numer pomiaru	Długość wahadła *l* [mm]	Czas dziesięciu okresów *t* [s]	Czas jednego okresu T [s]	Średni okres dla danego *L* T_{isr} [s]	Kwadrat okresu $T_i^2 [s^2]$
1	85	5,59	0,56	T_1 = 0,56	T_1^2 = 0,31
1	85	5,67	0,57		
1	85	5,54	0,55		
2	130	7,01	0,7	T_2 = 0,7	T_2^2 = 0,49
2	130	7,07	0,71		
2	130	7,04	0,7		
3	185	8,67	0,87	T_3 = 0,87	T_3^2 = 0,76
3	185	8,79	0,88		
3	185	8,63	0,86		
4	240	9,59	0,96	T_4 =0,97	T_4^2 =0,94
4	240	9,67	0,97		
4	240	9,8	0,98		
5	305	10,89	1,09	T_5 = 1,08	T_5^2 = 1,17
5	305	10,75	1,08		
5	305	10,81	1,08		

Opracowanie wyników:





Wzór (1) można przekształcić do zależności liniowej: $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$

Z tej zależności wynika, że kwadrat okres jest wprost proporcjonalny do długości wahadła, zatem możemy wyprowadzić równanie:

$$T^2 = al, \text{ gdzie a} = \frac{4\pi^2}{g}$$

Prosta z powyższego wykresu postaci y = ax + b, dana jest równaniem:

y = 0,0039x - 0,0338

Odczytujemy z powyższego równania współczynnik kierunkowy prostej

$$a = 0{,}0039 \frac{s^2}{mm} = 3{,}9 \frac{s^2}{m}$$

Korzystając z zależności, obliczamy przyspieszenie ziemskie:

$$a = \frac{4\pi^2}{g}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = 10{,}9 \frac{m}{s^2}$$

Za pomocą arkusza kalkulacyjnego została określona niepewność dopasowania równa:

$$u(a) = 0{,}0001672 \frac{s^2}{mm} \approx 0{,}17 \frac{s^2}{m}$$

Na podstawie prawa przenoszenia nierówności obliczamy:

$$u_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial a} u_a\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-4\pi^2}{a^2} u_a\right)^2} = \left|-\frac{4\pi^2}{a^2} u_a\right| = 0{,}44 \frac{m}{s^2}$$

Finalnie otrzymujemy:

$$g = 10{,}09 \pm 0{,}44 \frac{m}{s^2}$$

Zatem na wynik jest zgodny z wartością tabelaryczną, dla Krakowa wynoszącą $g = 9{,}811 \frac{m}{s^2}$ [2].

Wnioski:

Metody zastosowane w podejściach I, II, III dają wyniki różne od wartości tabelarycznej $g = 9{,}811 \frac{m}{s^2}$, ale w większości przypadków zawierające poprawną wartość w zakresie niepewności pomiarowej. Różnice wyników są efektem następujących czynników:

- Niedokładność przyrządów pomiarowych.
- Niedokładność ludzka wynikająca z czasu reakcji człowieka podczas dokonywanych pomiarów stoperem oraz błąd wyznaczenia środka masy metalowej nakrętki, pełniącej rolę odważnika.
- Potraktowanie użytego wahadła fizycznego jako wahadło matematyczne.
- Sposób mocowania linki na ramieniu lampy powodował zmiany położenia punktu styku linki z ramieniem w trakcie wahnięć co powodowało delikatne zmiany długości poruszającej się linki w trakcie ruchu.

Podsumowując. Wynik uzyskany w metodzie I, mimo że był najbliższy wartości tabelarycznej, to był najbardziej podatny, na błędy pomiarowe, co skutkowało największą wartością niepewności pomiarowej. Kolejne metody dzięki zastosowaniu bardziej zaawansowanych metod zmniejszyły wartości niepewności pomiarowych.

Bibliografia

[1] – http://www.ftj.agh.edu.pl/wfitj/dydaktyka/zeszyt.pdf str.25

[2] – https://yadda.icm.edu.pl/baztech/element/bwmeta1.element.baztech-article-PWAB-0031-0014/c/httpwww_rog_gik_pw_edu_plphocadownloadnr8814.pdf str.3