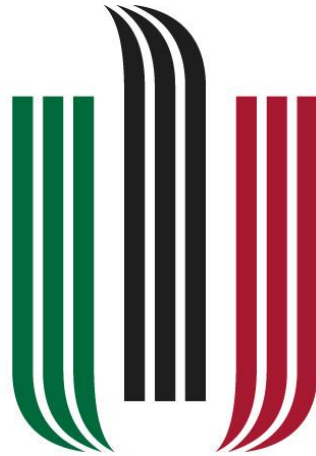


# Laboratorium X

*Teoria śladów*

*Dominik Marek*

*16 grudnia 2024*



# AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA  
W KRAKOWIE**

## 1. Zadania

Cz. I.

### Zadanie 1

Rozważmy zbiór zmiennych („bazę danych”)  $\{x, y, z\}$

i następujący zbiór akcji („transakcji”) modyfikujących wartości tych zmiennych:

- (a)  $x := x + y$
- (b)  $y := y + 2z$
- (c)  $x := 3x + z$
- (d)  $z := y - z$ .

Akcje możemy wykonywać współbieżnie z następującym zastrzeżeniem: akcja zmieniająca wartość zmiennej nie może być wykonana współbieżnie z akcją odczytującą lub modyfikującą stan tej samej zmiennej. W języku teorii śladów: dwie akcje są zależne jeśli obie operują na tej samej zmiennej, a przynajmniej jedna z nich modyfikuje wartość tej zmiennej.

### **Zadanie 1a**

W alfabecie  $A = \{a, b, c, d\}$  określ relacje zależności i niezależności.

### **Zadanie 1b**

Wyznacz ślad wyznaczony przez słowo  $w = baadcb$  względem powyższej relacji niezależności.

### **Zadanie 1c**

Wyznacz postać normalną Foaty śladu  $[w]$  można skorzystać z algorytmu z pracy Volker Diekert, Yves Métivier : Partial Commutation and Traces str 11

### **Zadanie 1d**

Narysuj graf zależności Diekerta (w postaci zminimalizowanej - bez krawędzi "przechodnich") dla słowa  $w$ .

### **Zadanie 2**

Dany jest zbiór akcji:

- (a)  $x \leftarrow y + z$
- (b)  $y \leftarrow x + w + y$
- (c)  $x \leftarrow x + y + v$
- (d)  $w \leftarrow v + z$
- (e)  $v \leftarrow x + v + w$
- (f)  $z \leftarrow y + z + v$ .

### **Zadanie 2a**

W alfabecie  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$  określ relacje zależności i niezależności.

### **Zadanie 2b**

Wyznacz postać normalną Foaty śladu  $[u]$ ,  $u = acdcfbbe$

### **Zadanie 2c**

Narysuj graf zależności Diekerta (w postaci zminimalizowanej - bez krawędzi "przechodnich") dla słowa  $u$ .

## **2.Rozwiązania**

### 1a.

Aby określić relacje zależności i niezależności w alfabecie  $A=\{a, b, c, d\}$ , analizujemy wpływ każdej akcji na zmienne  $x, y, z$  oraz określamy, które akcje mogą być wykonywane współbieżnie, a które nie.

#### Definicje:

1. Zależność: Akcje są zależne, jeśli obie operują na tej samej zmiennej, a przynajmniej jedna z nich ją modyfikuje.
2. Niezależność: Akcje są niezależne, jeśli nie są zależne.

#### Analiza akcji:

1. Akcja a:  $x := x + y$ 
  - Odczyt:  $x, y$
  - Modyfikacja:  $x$
2. Akcja b:  $y := y + 2z$ 
  - Odczyt:  $y, z$
  - Modyfikacja:  $y$
3. Akcja c:  $x := 3x + z$ 
  - Odczyt:  $x, z$
  - Modyfikacja:  $x$
4. Akcja d:  $z := y - z$ 
  - Odczyt:  $y, z$
  - Modyfikacja:  $z$

#### Relacje zależności:

- Między a i innymi akcjami:
  - a i b: Zależne (a odczytuje  $y$ , które b modyfikuje).
  - a i c: Zależne (a i c modyfikują  $x$ ).
  - a i d: Niezależne (a odczytuje  $y$ , ale nie odczytuje ani modyfikuje  $z$ ).
- Między b a innymi akcjami:
  - b i c: Niezależne (b nie operuje na  $x$ ).
  - b i d: Zależne (b odczytuje  $z$ , a d modyfikuje  $z$ ).

- **Miedzy c a innymi akcjami:**

- c i d: Zależne (c odczytuje z, który jest modyfikowany przez d).

**Relacje zależności i niezależności:**

**Zależność (D):**

$$D = \Sigma^2 - I$$

$D = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$

**Niezależność (I):**

$I = \{(a, d), (d, a), (c, b), (b, c)\}$

**1b.**

Aby wyznaczyć ślad wyznaczony przez słowo **w=baadcb** względem relacji niezależności, należy:

1. Rozważyć porządek liter w **www**: Rozpoczynamy od słowa **w=baadcb**
2. Zidentyfikować litery, które mogą być zamienione miejscami zgodnie z relacją niezależności. Niezależne litery nie wpływają na siebie, więc ich kolejność nie zmienia wyniku.

**Procedura:**

1. Identyfikacja możliwych zamian:
  - Literę można zamienić z inną tylko wtedy, gdy są niezależne.
  - Przechodzimy przez słowo od lewej do prawej, sprawdzając, które litery można zamienić miejscami.
2. Budowanie zbioru wszystkich możliwych słów:
  - Dla każdej permutacji słowa **www**, sprawdzamy kolejne zamiany zgodnie z I.
  - Powtarzamy ten proces dla wszystkich uzyskanych słów, dopóki nie zostaną wygenerowane wszystkie możliwe permutacje.

**Wyznaczanie śladu dla  $w=baadcb$ :**

1. Zamiana a z d:

badacb

2. Zamiana c z b:

badabc

3. Druga zamiana a z d:

bdaacb

4. Zamiana c z b:

bdaabc

5. Zamiana c z b w słowie wejściowym:

baadbc

Zbiór wszystkich słów:

Po zakończeniu generowania ślad zawiera wszystkie permutacje zgodne z I:

{baadcb, badacb, badabc, bdaacb, bdaabc, baadbc }.

1.c

**Warstwy Foaty:**

- **(b)** : Na początku można wykonać b, ponieważ nie ma żadnych poprzedników zależnych od b.
- **(ad)**: Następnie można równocześnie wykonać a i d, ponieważ są od siebie niezależne.
- **(a)**: Kolejne a jest wykonywane osobno, ponieważ nie można go połączyć z b lub c w tej samej warstwie.
- **(bc)**: Na końcu można wykonać b i c równocześnie, ponieważ są od siebie niezależne.

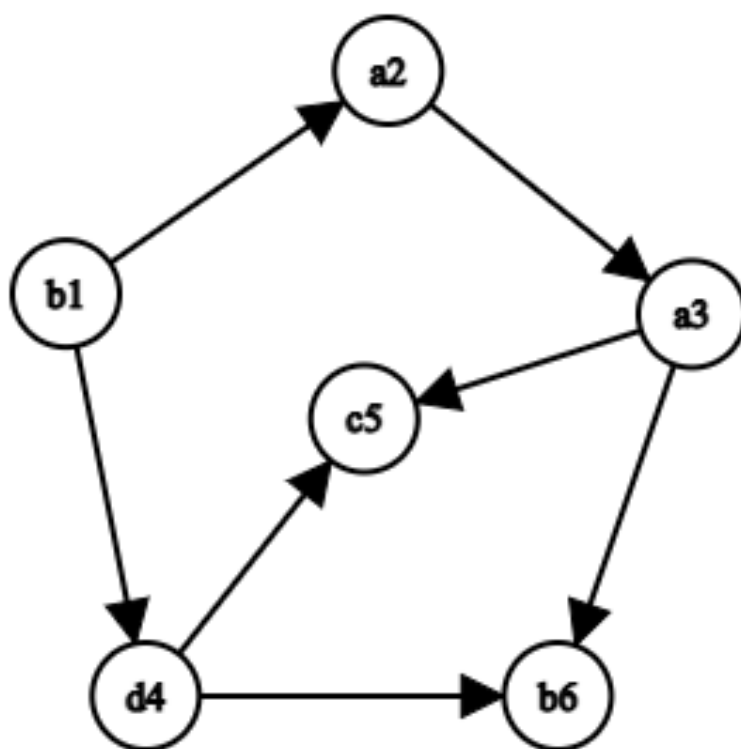
Zgodnie z relacją zależności i niezależności postać normalna Foaty wygląda następująco:

$$FNF([w])=(b)(ad)(a)(bc)$$

1d.

Analiza słowa  $w=baadcb$

- b1 jest zależne od a2,d4
- a2 jest zależne od a3,c5.
- a3 jest zależne od c5, b6
- d4 jest zależne od c5,b6.



*Rysunek 1: Graf zależności Dikerta*

2a.

Wyznaczamy najpierw zbiór relacji niezależności:

- Akcje **a**:  $x \leftarrow y + z$  i **d**:  $w \leftarrow v + z$  są niezależne bo modyfikują różne zmienne
- Akcje **b**:  $y \leftarrow x + w + y$  i **e**:  $v \leftarrow x + v + w$  są niezależne bo modyfikują różne zmienne
- Akcje **c**:  $x \leftarrow x + y + v$  i **d**:  $w \leftarrow v + z$  są niezależne bo modyfikują różne zmienne
- Akcje **c**:  $x \leftarrow x + y + v$  i **f**:  $z \leftarrow y + z + v$  są niezależne bo modyfikują różne zmienne

$$I = \{(a, d), (d, a), (b, e), (e, b), (c, d), (d, c), (c, f), (f, c)\}$$

$$D = \Sigma^2 - I$$

$$D = \{$$

(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, f), (c, a), (c, b), (c, c), (c, e),  
(d, b), (d, d), (d, e), (d, f), (e, a), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, a), (f, b), (f, d), (f, e), (f, f)

}

2b.

$$u = acdcfbbe$$

Warstwy Foaty:

1. **(ad)**: a i d są niezależne, więc mogą być w tej samej grupie.
2. **(c)**: Pierwsze c musi być w osobnej grupie, bo nie można go łączyć z f, które jeszcze nie jest dostępne.
3. **(cf)**: Drugie c i f są niezależne, więc tworzą grupę (cf).
4. **(be)**: Pierwsze b i e są niezależne, więc tworzą grupę (be).
5. **(b)**: Ostatnie b jest zależne od wcześniejszego b, więc musi być w osobnej grupie.

Postać normalna Foaty dla  $u=acdcfbbe$ :

$$FNF(u)=(ad)(c)(cf)(be)(b)$$

**2c.**

Zapisujemy jakie krawędzie wychodzą z danego wierzchołka:

**a1:** c2, c4, f5, b6, b7, e8

**c2:** c4, b6, b7, e8

**d3:** f5, b6, b7, e8

**c4:** b6, b7, e8

**f5:** b6, b7, e8

**b6:** b7,

**b7:** -

**e8:** -

**Następnie usuwamy krawędzie redundantne**

**a1:** usuwamy b6, b7, b8

**c2:** usuwamy b6, b7, e8

**d3:** usuwamy b6, b7, e8

**c4:** usuwamy b7

**f5:** usuwamy b7

Finalnie otrzymujemy zbiór wierzchołków z następującymi krawędziami:

**a1:** c2, f5

**c2:** c4

**d3:** f5

**c4:** b6, e8

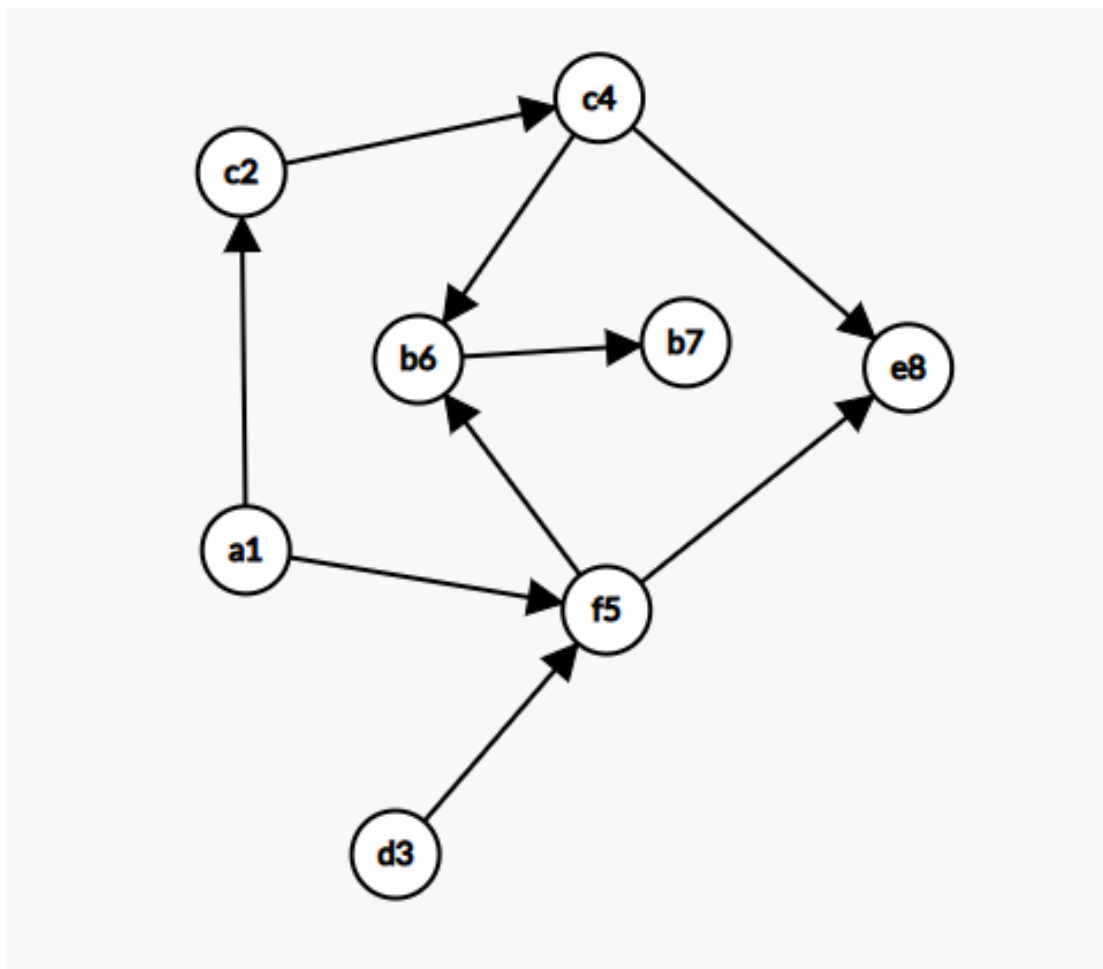
**f5:** b6, e8

**b6:** b7,

**b7:** -

**e8:** -





*Rysunek 2: Graf zależności Dikerta*

### ***3. Bibliografia***

- <https://www.researchgate.net/publication/280851316> Partial Commutation and Traces
- <https://web.archive.org/web/20170908153838/https://pdfs.semanticscholar.org/d67a/c4c1e5967f7e114f390245f28909f259c034.pdf>
- [https://www.mimuw.edu.pl/~sl/teaching/22\\_23/TW/LITERATURA/book-of-traces-intro.pdf](https://www.mimuw.edu.pl/~sl/teaching/22_23/TW/LITERATURA/book-of-traces-intro.pdf)