Modelación del juego de Nim por medio de árboles dirigidos

1st David Felipe Martinez
MACC
Universidad del Rosario
Bogotá, Colombia

2nd Nicolas Rojas Gutierrez
MACC
Universidad del Rosario
Bogotá, Colombia

***Resumen*—En el presente documento, se ilustrará como la teoría de grafos puede usarse para modelar de manera efectiva juegos sencillos con reglas definidas. Más específicamente, se tomará como ejemplo el juego de Nim, sobre el cual se trabajará con una estrategia que permitirá ganar el juego siempre que sea posible. De esta forma, por medio del uso de herramientas provistas por la teoría de grafos, se demostrará la eficacia de esta estrategia y las situaciones en las que sea posible su uso.**

I. Introducción

En el estudio de la teoría de juegos, es común el empleo de grafos para lograr una representación más eficaz y fácil de trabajar de la mayoría de los juegos que sean observados desde el punto de vista matemático. Esto se debe a que las interacciones entre jugadores, las transiciones entre las distintas etapas del juego, o los cambios en el entorno global donde se desarrolla el juego, pueden ser representados por aristas y nodos en grafos dirigidos, o en ocasiones, en grafos no dirigidos. Más concretamente, en el caso de las etapas del juego, se emplean árboles dirigidos en los cuales cada nodo es una situación concreta, y las aristas son las transiciones entre dichas situaciones. Otras características de los grafos, como pesos o etiquetas, suelen variar dependiendo de los detalles del juego sobre el cual se trabaje.

Un ejemplo de juego que ha sido tradicionalmente estudiado desde la matemática es el juego de Nim. Las reglas del juego son sencillas:

- Hay dos jugadores, que son oponentes entre sí. Si bien se han originado variantes con más de dos jugadores, estas no son tan frecuentemente utilizadas y sus detalles pueden derivarse de la versión tradicional con dos jugadores.
- Se da una cantidad inicial de monedas común para los dos jugadores (M). Ambos jugadores trabajan sobre la misma pila de monedas.
- Se da una cantidad máxima de monedas que pueden ser retiradas, común para los dos jugadores (N). Cada jugador, en su turno, elige retirar una cantidad de monedas entre uno y N.
- El juego finaliza cuando no queda ninguna moneda en la pila. En este caso, pierde el jugador que haya retirado la última moneda.

Con las reglas del juego ya establecidas, es posible llevar a cabo su modelación por medio de grafos, de la siguiente manera:

- Cada $estado$ del juego es la cantidad de monedas que queda en la pila, en cada instante de la partida. Dicho estado será representado por un nodo, cuya etiqueta es un número entero indicando la cantidad de monedas disponibles.
- Como cada jugador realiza un movimiento a la vez, de a turnos, y además no se puede aumentar el número de monedas en la pila, el tipo de grafo a utilizar será el de árbol dirigido.
- La raíz del árbol es la cantidad inicial de monedas M. A partir de ahí, los hijos de cada nodo serán los posibles estados en los que puede quedar el juego después de que el jugador de turno realice su movimiento, teniendo en cuenta la cantidad máxima N.

De esta forma, se podrá analizar el juego de Nim únicamente revisando los nodos y aristas del correspondiente árbol dirigido.

II. Estrategia

A continuación, se presentará una estrategia que permitirá ganar al jugador que la utilice, siempre y cuando las condiciones iniciales lo permitan. En primer lugar, se realizan ciertas observaciones útiles para enclarecer las características del árbol correspondiente a una partida de Nim.

- Cada nodo tiene, a lo sumo, N hijos. Un nodo solo tendrá una cantidad de hijos menor a N si se encuentra en los dos últimos niveles del árbol. Si se encuentra en el último nivel, el nodo es una hoja y no tendrá ningún hijo.
  Esto se da porque, de acuerdo a las reglas del juego, un jugador puede, en su turno, retirar una cantidad de monedas entre 1 y N. Cada posible decisión del jugador se traduce como un nodo en el árbol.
- Los niveles impares del árbol representan el momento en el que el primer jugador va a retirar monedas, y los niveles pares representan el instante en el que el segundo jugador va a realizar su movimiento. De esta forma, los niveles se alternan entre las jugadas de los dos jugadores. Esto también implica que el primer jugador decide por cual de los nodos disponibles en los niveles pares continuará la partida, y similarmente hará el segundo jugador sobre los niveles impares del árbol.
- Un jugador ganará en el momento en que quede una sola moneda en la pila de monedas, ya que el otro jugador

se verá obligado a retirarla y perderá la partida. Es decir, cada jugador deberá tomar la cantidad de monedas que le permita guiar la partida hacia un nodo etiquetado con 1, para ganar el juego.

Estas observaciones permitiran analizar y comprobar la efectividad de la siguiente estrategia.

Estrategia: Siempre que sea posible, elegir el nodo etiquetado con $k(N+1)+N+2, k \in \mathbb{N}$

Para explicar el funcionamiento de esta estrategia, será necesario demostrar su efectividad siguiendo los siguientes pasos.

Lema 1. *El jugador habrá ganado si elige el nodo etiquetado con $N+2$.*

Demostración. Suponga que el jugador A elige el nodo etiquetado con $N+2$. Luego, el jugador B podrá elegir los nodos etiquetados con $N+1, N, ..., 3, 2$. Sea X la etiqueta del nodo elegido por el jugador B. Observe que el máximo posible valor de X es $N+1$, ya que la mínima cantidad de monedas que un jugador puede retirar es 1. En este caso, si A retira N monedas, será equivalente a elegir el nodo 1 como el próximo estado del juego, y B habrá perdido.
Por otro lado, el mínimo valor de X es 2, ya que la máxima cantidad posible de monedas retiradas es N. Así, si A retira 1 moneda, quedará 1 moneda en la pila y B habrá perdido.
De esta forma, para todo $2 \leq X \leq N+1$, A ganará si retira una cantidad de monedas igual a $X-1$. Esto es posible porque $1 \leq X-1 \leq N$, y como $X-(X-1)=1$, entonces A habrá elegido el nodo etiquetado con 1. □

Lema 2. *El jugador podrá elegir el nodo etiquetado con $N+2$ si previamente ha elegido el nodo etiquetado con $2N+3=1(N+1)+N+2$.*

Demostración. Suponga que el jugador A elige el nodo etiquetado con $2N+3$. Sea X la etiqueta del nodo elegido inmediatamente después por el jugador B. Observe que, como la cantidad máxima de monedas que se puede retirar es N, y la cantidad mínima es 1, entonces $N+3 \leq X \leq 2N+2$. De esta forma, para todo X, A podrá elegir el nodo etiquetado con $N+2$ si retira una cantidad de monedas igual a $X-N-2$. Esto es posible ya que, por las cotas de X ya dadas, $1 \leq X-N-2 \leq N$. Entonces, $X-(X-N-2)=N+2$, el cual es hijo de X por las cotas anteriormente dadas, será el nodo elegido por A en el árbol. □

Lema 3. *Para todo $k>1$, el jugador podrá elegir el nodo etiquetado con $(k-1)(N+1)+N+2$ si previamente ha elegido el nodo etiquetado con $k(N+1)+N+2$.*

Demostración. Suponga que el jugador A elige el nodo etiquetado con $k(N+1)+N+2$. Sea X la etiqueta del nodo elegido inmediatamente después por B. Observe que, como la cantidad máxima de monedas que se puede retirar es N, y la cantidad mínima es 1, entonces $k(N+1)+2 \leq X \leq k(N+1)+N+1$. De esta forma, para todo X, A podrá elegir el nodo etiquetado con $(k-1)(N+1)+N+2$ si retira una cantidad de monedas igual a $X-(k-1)(N+1)-N-2$. Esto es posible ya que, por las cotas de X ya dadas,

$$k(N+1)+2-(k-1)(N+1)-N-2=(k-k+1)(N+1)-N= \\ N+1-N=1 \leq X-(k-1)(N+1)-N-2 \leq \\ k(N+1)+N+1-(k-1)(N+1)-N-2= \\ (k-k+1)(N+1)-1=N+1-1=N$$

En consecuencia, $X-(X-(k-1)(N+1)-N-2)=(k-1)(N+1)+N+2$ es la etiqueta de un nodo hijo del nodo etiquetado con X en el árbol, y será elegido por A. □

Teorema 1 (Eficacia de la estrategia presentada)**.** *El jugador ganará si, siempre que sea posible, elige los nodos etiquetados con $k(N+1)+N+2$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$*

Demostración. Suponga que el jugador A, en algún momento del juego, elige un nodo etiquetado con $k(N+1)+N+2$, para algún $k>1$. Luego, por el lema 3, podrá posteriormente elegir el nodo etiquetado con $(k-1)(N+1)+N+2$. Si $k-1 \neq 1$, el proceso puede repetirse hasta que el jugador A elija el nodo etiquetado con $(N+1)+N+2=2N+3$. El lema 3 asegura que esto puede pasar sin importar los nodos elegidos por el jugador B en sus respectivos turnos. Una vez A halla elegido el nodo $2N+3$, por el lema 2 se sigue que puede posteriormente elegir el nodo etiquetado con $N+2$. Luego, por el lema 1, puede elegir el nodo marcado con 1 y, en consecuencia, habrá ganado el juego de Nim. □

El teorema 1 indica que, si algún jugador elige un nodo $k(N+1)+N+2$, y continúa realizando este tipo de elección, podrá en algún momento elegir el nodo marcado con 1 y la partida estará ganada, sin importar la cantidad de monedas que el otro jugador retire en cualquier momento de la partida. Como N puede tener cualquier valor, esta estrategia es válida para cualquier juego de Nim.

III. Limitaciones de la estrategia

La estrategia presentada indica que, para ganar una partida del juego de Nim, es suficiente ser el primer jugador en elegir un nodo de tipo $k(N+1)+N+2$. Además, la demostración del teorema 1 permite concluir que, una vez hecha esta elección, el otro jugador no podrá realizar otra elección del mismo tipo ni podrá evitar que su oponente continue siguiendo la estrategia hasta realizar la elección del nodo 1. No obstante, el papel que tome cada jugador en estos casos dependerá no sólo de la cantidad máxima de monedas a retirar N, sino también de la cantidad inicial M. De hecho, dados estos valores, es posible determinar cual de los dos jugadores será el primero en tener la oportunidad de elegir un nodo de la forma $k(N+1)+N+2$. Para hallar la posibilidad de cada jugador de ser el primero en elegir uno de los nodos ganadores, tomemos el jugador A como el primero en realizar una jugada, y al jugador B como el segundo en retirar monedas. Observe que, al momento de comenzar la partida, la cantidad de monedas es M y el jugador A es el que tomará la decisión inicial. Para analizar mejor esta situación, se presentan los siguientes lemas:

Lema 4. *Si un jugador tiene la opción de elegir un nodo de la forma $k(N+1)+N+2$, pero elige un nodo diferente, el oponente podrá elegir un nodo de este tipo en la jugada inmediatamente posterior.*

Demostración. Suponga que el jugador A puede elegir un nodo de tipo $k(N+1)+N+2$, pero opta por un nodo diferente. Sea X la etiqueta del nodo elegido por A. Observe que, como ambos nodos tienen un mismo padre, entonces $|X-(k(N+1)+N+2)|<N$. Se presentan los siguientes casos.

1. Si $X>k(N+1)+N+2$, entonces $X-(k(N+1)+N+2)<N$. Luego, $X-N<(k(N+1)+N+2)$. Por lo tanto, el nodo etiquetado con $k(N+1)+N+2$ es hijo del nodo etiquetado con X. Es decir, B tendrá la opción de elegir un nodo de tipo $k(N+1)+N+2$.
2. Si $X<k(N+1)+N+2$, entonces $X-N-1<(k-1)(N+1)N+2$. Luego, como $N,k\in\mathbb{N}$, se tiene que $X-N\leq(k-1)(N+1)+N+2$. Por lo tanto, el nodo etiquetado con $(k-1)(N+1)+N+2$ es hijo del nodo etiquetado con X. Es decir, B tendrá la opción de elegir un nodo de tipo $l(N+1)+N+2$, para $l\in\mathbb{N}$.

En cualquiera de los dos casos, B podrá elegir un nodo de tipo $k(N+1)+N+2$ en la jugada inmediatemente posterior a la de A. $\square$

Lema 5. *Si un jugador no tiene la opción de elegir un nodo de la forma $k(N+1)+N+2$, el oponente tendrá esta misma opción en la jugada inmediatamente posterior.*

Demostración. Suponga que el jugador A no puede elegir un nodo de tipo $k(N+1)+N+2$. Sea X el nodo en el que el juego se encuentra actualmente. Entonces, $X-N>k(N+1)+N+2$. Sea Y la etiqueta del nodo elegido por A. Observe que $X-N\leq Y\leq X-1$. Entonces, $X-2N\leq Y-N\leq X-1-N$. Luego, $X-1-N=X-(N+1)$ es la etiqueta de un nodo que podrá ser escogido por B en cualquier caso. Como $X-(X-(N+1))=N+1=k(N+1)+N+2-((k-1)(N+1)+N+2)$, y suponemos que no existe un nodo de tipo ganador entre X y $X-N$, entonces habrá un nodo de este tipo entre Y y $Y-N$. Por lo tanto, B podrá elegir un nodo de tipo $k(N+1)+N+2$ en la jugada inmediatemente posterior a la de A. $\square$

Teorema 2 (Limitaciones de la estrategia)**.** *Si no se escoge un nodo $k(N+1)+N+2$ en un nivel p del árbol, un nodo similar se podrá escoger en el nivel $p+1$.*

Demostración. Suponga que no fue escogido un nodo de la forma $k(N+1)+N+2$ en el nivel p del árbol que representa al juego de Nim. Si este nodo existía en dicho nivel, por el lema 4, entonces un nodo de forma similar podrá ser escogido en el nivel $p+1$ del árbol. En caso contrario, por el lema 5, un nodo de tipo $k(N+1)+N+2$ existirá igualmente en el nivel $p+1$ del árbol. $\square$

El teorema 2 indica que, para que la estrategia tenga resultados, esta se deberá seguir hasta el final del juego. En caso contrario, el oponente tendrá la oportunidad de elegir uno de los nodos indicados por la estrategia y podrá ganar la partida. Adicionalmente, dicho teorema muestra la forma de conocer cual jugador será el primero en poder elegir un nodo $k(N+1)+N+2$ desde el inicio del juego.

Ya que un jugador puede elegir un nodo ganador siempre que el oponente no haya escogido uno en la jugada inmediatamente anterior, se deduce que el primer nodo $k(N+1)+N+2$ podrá se escogido en los dos primeros movimientos de la partida. Es decir, si el jugador A no decide o no puede comenzar a seguir la estrategia en su primera jugada, el jugador B podrá hacerlo. Por consiguiente, el resultado final del juego de Nim puede decidirse luego del primer movimiento de cada jugador.

Adicionalmente, el teorema de las limitaciones de la estrategia permite deducir que un nodo ganador no podrá ser escogido si y sólo si el nodo actual en el que se ubica el juego ya es un nodo ganador. Por un lado, esto se debe a que no importan las decisiones del jugador B si el jugador A ya está eligiendo los nodos indicados. Por otro lado, que la decisión indicada por la estrategia no exista en el nivel actual del árbol quiere decir que esta decisión si existió en el nivel inmediatamente anterior, y que fue tomada. De esto, se concluye la siguiente observación relacionada con la cantidad inicial de monedas M y la posibilidad de ganar de cada jugador:

Observación: Sea A el jugador que inicia la partida del juego de Nim. A podrá ganar la partida desde su comienzo siguiendo la estrategia si y sólo si no existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $M=k(N+1)+N+2$. En caso contrario, su oponente B ganará la partida.

IV. Simulación

Para realizar la simulación del juego de Nim, y comprobar en la práctica la estrategia presentada, se diseñó un programa en Python que permite visualizar el árbol de la partida al mismo tiempo que ésta se va realizando. Para que la inteligencia diseñada siguiera la estrategia presentada anteriormente, se ponderaron las aristas del árbol del juego de la siguiente manera:

$$w(ij)=\begin{cases}1, & \text{si } j=k(N+1)+N+2, \text{ para algún } k\in\mathbb{N}\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Así, el programa buscará si existe una arista con peso $w(ij)=1$ saliendo del nodo i donde el juego está ubicado, cada vez que tenga que retirar monedas. Si dicha arista existe, el programa eligirá el nodo j indicado por la misma. En caso contrario, escogerá cualquiera de las otras aristas al azar, ya que, como se demostró anteriormente, no importa la decisión tomada si el oponente ya está siguiendo con éxito la estrategia presentada. Además, para comprobar el funcionamiento de la inteligencia, se diseñó un programa basado en backtracking que juegue el juego de Nim. De esta forma, se busca verificar que la inteligencia basada en la estrategia presentada, trabajando sobre un árbol ponderado, bajo las condiciones de la cantidad inicial de monedas M ya establecidas anteriormente, pueda ganar una partida contra un jugador que utilice backtracking para jugar.

V. Resultados

Luego de realizar varias pruebas con distintas condiciones iniciales, se verifica que ambas inteligencias, la que actúa siguiendo la ponderación del árbol y la que sigue el backtracking, pueden ganar o perder de acuerdo a las condiciones establecidas anteriormente, dependiendo de los valores iniciales de M y N. Es decir, si M es de la forma $k(N+1)+N+2$, la inteligencia que realice el segundo movimiento siempre gana la partida. En caso contrario, el jugador que realice el primer movimiento gana la partida, sin importar las decisiones tomadas por el segundo jugador.

Dado que el backtracking siempre toma la decisión que permita ganar, en caso de existir, se puede concluir que la estrategia presentada funciona adecuadamente en la práctica. Adicionalmente, calcular la ponderación del árbol buscando la lista de los nodos ganadores, es mucho menos costoso desde el vista computacional con respecto a realizar búsquedas exhaustivas cada vez que es necesario tomar una decisión. Es decir, si se toma en cuenta la efectividad computacional de programar la estrategia de los nodos ganadores y de diseñar una inteligencia basada en backtraking, es altamente preferible seguir el método presentado en este documento.

VI. Conclusiones

En conclusión, la modelación del juego de Nim utilizando árboles, permite encontrar de forma relativamente sencilla métodos eficientes para ganar una partida, o para conocer la posibilidad de ganarla incluso antes de que comience. Utilizar grafos para estudiar el juego puede derivar en observaciones importantes sobre la naturaleza del juego, como es el caso de los nodos de la forma $k(N+1)+N+2$. Adicionalmente, observar el desarrollo del juego como una transición entre nodos por medio de aristas dirigidas ayuda en gran manera a encontrar los métodos matemáticos para tener un buen desempeño en el juego de Nim, aplicar los mismos en un ambiente práctico, y delimitar las situaciones en los que estos conservan su efectividad.

Referencias

[1] D. B. West, Introduction to Graph Theory, University of Illinois, 2002

[2] M. H. Albert, R. J. Nowakowski, Nim Restrictions, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 2004