3η Σειρά Ασκήσεων

Ονομα: Μαυρογιώργης Δημήτρης
ΑΜ: 2016030016
ΤΗΛ 311 - Στατιστική Μοντελοποίηση και Αναγνώριση Προτύπων
Πολυτεχνειο Κρητης

June 30, 2021

Άσκηση 1: Feature Selection-Classification-Cross Validation-Overfitting

Στην πρώτη άσκηση ασχοληθήκαμε με την τεχνική του leave-one-out(cross validation) εξαιτίας του μικρού αριθμού δειγμάτων ατόμων που είχαν διαγνωστεί με αυτισμό(15 άτομα) και φυσιολογικών ατόμων(10 άτομα). Σύμφωνα με την τεχνική του cross validation χωρίζουμε τα δείγματα σε 2 ομάδες εκ των οποίων η πρώτη αποτελείται από N-1 δείγματα, τα οποία χρησιμοποιούνται για το training, και η δεύτερη από 1 μόνο δείγμα, το οποίο χρησιμοποιείται για testing. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται N φορές και κάθε φορά αφήνουμε ένα διαφορετικό δείγμα εκτός εκπαίδευσης του μοντέλου μας. Στο τέλος, για τον υπολογισμό του accuracy παίρνουμε τη μέση τιμή των N αποτελεσμάτων που προέκυψαν.

Classification without feature selection

Στην πρώτη περίπτωση δημιουργούμε με εντελώς τυχαίο τρόπο 1000 χαρακτηριστικά για 25 άτομα.Αυτό που πρέπει να αναμένουμε είναι ότι τα τυχαία χαρακτηριστικά δεν μας δίνουν καμία πληροφορία για ένα άτομο και ο ταξινομητής που θα εκπαιδευτεί με αυτά τα δεδομένα θα προβλέπει την κατηγορία ενός ατόμου με πιθανότητα κοντά στο 0.5. Αυτό το γεγονός επαληθεύεται και από την εκτέλεση του κώδικα που μας δώθηκε όπου προκύπτει το τελικό accuracy του SVM ταξινομητή να είναι 0.56 ή 56%.

```
Classify without feature selection
accuracy :0.56
```

Figure 1: Αποτελέσματα από το console της Matlab

Classification with feature selection inside the cross validation

Στη δεύτερη περίπτωση δοκιμάσαμε να κάνουμε feature selection με μια απλή μέθοδο με την οποία επιλέγουμε τα χαρακτηριστικά που έχουν καλύτερη συσχέτιση με τα labels των δεδομένων μας. Πιο συγκεκριμένα, με τη συνάρτηση similarityMeasure() που μας δώθηκε μετράμε την ομοιότητα μεταξύ των feature και των label χρησιμοποιώντας τους συντελεστές συσχέτισης Pearson. Έπειτα, παίρνουμε τα 100 χαρακτηριστικά που έχουν τη το μεγαλύτερο συντελεστή και σε συνδυασμό με το cross validation κάνουμε train και υπολογίζουμε το συνολικό accuracy του ταξινομητή μας. Αυτή η

επίλογή των 100 καλύτερων χαρακτηριστικών γίνεται μέσα στο cross validation, δηλαδή επαναλαμβάνεται N φορές.

Το συνολικό accuracy του SVM ταξινομητή είναι περίπου 0.6 ή 60%, γεγονός που είναι αναμενόμενο, καθώς τα εντελώς τυχαία χαρακτηριστικά που δημιουργήσαμε δεν μας δίνουν κάποια χρήσιμη πληροφορία για το εάν ένα άτομο έχει διαγωνστεί με αυτισμό ή είναι φυσιολογικό.

```
Classify with feature selection inside the cross validation
accuracy :0.6
```

Figure 2: Αποτελέσματα από το console της Matlab

Classification with feature selection outside the cross validation

Στη τρίτη και τελευταία περίπτωση κάνουμε πάλι την επιλογή χαρακτηριστικών που αναφέρθηκε στην προηγούμενη περίπτωση, με μοναδική διαφορά ότι αυτή η επιλογή χαρακτηριστικών γίνεται εκτός του cross validation, δηλαδή επαναλαμβάνεται 1 φορά. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε σε αυτή την περίπτωση για το accuracy του SVM ταξινομητή είναι 1 ή 100%, δηλαδή έχουμε το φαινόμενο του overfitting και ο ταξινομητής μας μας μαθαίνει πολύ καλά και με μεγάλη λεπτομέρεια τα training δεδομένα σε βαθμό που επηρεάζει την απόδοση του μοντέλου σε test δεδομένα. Αυτό σημαίνει ότι οι τυχαίες διακυμάνσεις στα δεδομένα εκπαίδευσης συλλέγονται και μαθαίνονται ως τάσεις από το μοντέλο.

```
Classify with feature selection outside the cross validation
accuracy :1
```

Figure 3: Αποτελέσματα από το console της Matlab

Άσκηση 2: Υλοποίηση ενός απλού νευρωνικού δικτύου

Σε αυτή την άσκηση δημιουργήσαμε ένα απλό νευρωνικό δίκτυο το οποίο είχε μία είσοδο x και μία έξοδο y. Το νευρωνικό δίκτυο που υλοποιήσαμε φαίνεται παρακάτω

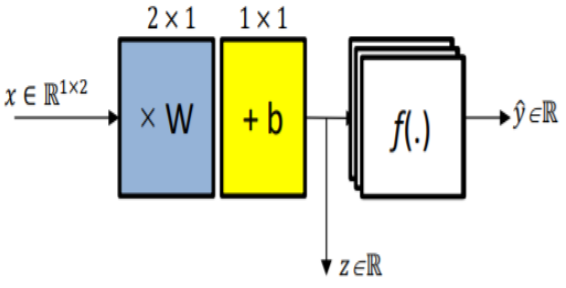


Figure 4: Simple Neural Network

και ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{y}^{(i)} = f(x^{(i)} \cdot W + b)$$

όπου $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ είναι ένα δείγμα, $W \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $b \in \mathbb{R}$ και $f(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$

Το σφάλμα που υπάρχει ανάμεσα στην πρόβλεψη $haty^{(i)}$ και στην τιμή $y^{(i)}$ που αντιστοιχεί στα δεδομένα $x^{(i)}$ μετριέται με τη συνάρτηση cross-entropy η οποία είναι η εξής

$$J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; W, b) = -y^{(i)} \cdot \ln(\hat{y}^{(i)}) - (1 - y^{(i)}) \cdot \ln(1 - \hat{y}^{(i)}) \qquad \textit{σχέση (1)}$$

Για να έχουμε αριθμητική ευστάθεια, υπολογίζουμε την cross-entropy για ένα σύνολο δειγμάτων B (batch) και υπολογίσουμε το μέσο όρο

$$J(Y, \hat{Y}; W, b) = \frac{1}{B} \sum_i (-y^{(i)} \cdot \ln(\hat{y}^{(i)}) - (1 - y^{(i)}) \cdot \ln(1 - \hat{y}^{(i)})) \qquad \textit{σχέση (2)}$$

Αν θέσουμε $z^{(i)} = x^{(i)} \cdot W + b$, έχουμε $\hat{y}^{(i)} = f(z^{(i)})$ οπότε η μέση τιμή της συνάρτηση cross-entropy γίνεται

$$\begin{aligned}
J(Y, \hat{Y}; W, b) &= \frac{1}{B} \sum_i \left(-y^{(i)} \cdot \ln\left(\hat{y}^{(i)}\right) - \left(1 - y^{(i)}\right) \cdot \ln\left(1 - \hat{y}^{(i)}\right) \right) \\
&= \frac{1}{B} \sum_i \left(-y^{(i)} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-z^{(i)}}}\right) - \left(1 - y^{(i)}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{1 + e^{-z^{(i)}}}\right) \right) \\
&= \frac{1}{B} \sum_i \left(-y^{(i)} \cdot \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-z^{(i)}}}\right) - \left(1 - y^{(i)}\right) \cdot \ln\left(\frac{e^{-z^{(i)}}}{1 + e^{-z^{(i)}}}\right) \right) \\
&= \frac{1}{B} \sum_i \left(y^{(i)} \cdot \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) - \left(1 - y^{(i)}\right) \cdot \left(-z^{(i)}\right) + \left(1 - y^{(i)}\right) \cdot \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) \right) \\
&= \frac{1}{B} \sum_i \left(y^{(i)} \cdot \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) + z^{(i)} - y^{(i)} \cdot z^{(i)} + \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) - y^{(i)} \cdot \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) \right) \\
&= \frac{1}{B} \sum_i \left(z^{(i)} - y^{(i)} \cdot z^{(i)} + \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) \right)
\end{aligned}$$

Αν παραγωγίσουμε τη σχέση συνάρτηση J ως προς $z^{(i)}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(y^{(i)}, \hat{y}^{(i)}; W, b)}{\partial z^{(i)}} &= \frac{\partial \left(z^{(i)} - y^{(i)} \cdot z^{(i)} + \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) \right)}{\partial z^{(i)}} \\
&= 1 - y^{(i)} + \frac{-e^{-z^{(i)}}}{1 + e^{-z^{(i)}}} \\
&= -y^{(i)} + \frac{1}{1 + e^{-z^{(i)}}} \\
&= -y^{(i)} + f(z^{(i)}) \\
&= -y^{(i)} + \hat{y}^{(i)}, \qquad \textit{όπου} \quad i \in batch
\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των $\frac{\partial J}{\partial W}$ και $\frac{\partial J}{\partial b}$ έχουμε ότι η παράγωγος ενός αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των παραγώνων. Οπότε για την πρώτη παράμετρο προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(Y, \hat{Y}; W, b)}{\partial W} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{B} \sum_i \left(z^{(i)} - y^{(i)} \cdot z^{(i)} + \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) \right) \right)}{\partial W} \\
&= \frac{1}{B} \sum_i \frac{\partial \left(z^{(i)} - y^{(i)} \cdot z^{(i)} + \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) \right)}{\partial W} \\
&= \frac{1}{B} \sum_i \left(\frac{\partial \left(z^{(i)} - y^{(i)} \cdot z^{(i)} + \ln\left(1 + e^{-z^{(i)}}\right) \right)}{\partial z^{(i)}} \cdot \frac{\partial z^{(i)}}{\partial W} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(Y,\hat{Y};W,b)}{\partial W} &= \frac{1}{B}\sum_i \left(\frac{\partial\left(z^{(i)} - y^{(i)}\cdot z^{(i)} + \ln\left(1+e^{-z^{(i)}}\right)\right)}{\partial z^{(i)}} \cdot \frac{\partial\left(x^{(i)}\cdot W + b\right)}{\partial W} \right) \\
&= \frac{1}{B}\sum_i \left(\left(-y^{(i)} + \hat{y}^{(i)}\right)\cdot {x^{(i)}}^T \right) \\
&= \frac{1}{B}\cdot \begin{bmatrix} -y^{(1)}+\hat{y}^{(1)} & -y^{(2)}+\hat{y}^{(2)} & \cdots & -y^{(B)}+\hat{y}^{(B)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {x^{(1)}}^T \\ {x^{(2)}}^T \\ \vdots \\ {x^{(B)}}^T \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{B}\cdot \frac{\partial J(Y,\hat{Y};W,b)}{\partial z}\cdot x^T
\end{aligned}$$

Επιπλέον, για τη δεύτερη παράμετρο έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(Y,\hat{Y};W,b)}{\partial b} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{B}\sum_i\left(z^{(i)} - y^{(i)}\cdot z^{(i)} + \ln\left(1+e^{-z^{(i)}}\right)\right)\right)}{\partial b} \\
&= \frac{1}{B}\sum_i \left(\frac{\partial\left(z^{(i)} - y^{(i)}\cdot z^{(i)} + \ln\left(1+e^{-z^{(i)}}\right)\right)}{\partial z^{(i)}} \cdot \frac{\partial z^{(i)}}{\partial b} \right) \\
&= \frac{1}{B}\sum_i \left(\left(-y^{(i)} + \hat{y}^{(i)}\right)\cdot \frac{\partial\left(x^{(i)}\cdot W + b\right)}{\partial b} \right) \\
&= \frac{1}{B}\sum_i \left(\left(-y^{(i)} + \hat{y}^{(i)}\right)\cdot 1 \right) \\
&= \frac{1}{B}\sum_i \left(-y^{(i)} + \hat{y}^{(i)}\right)
\end{aligned}$$

Όσον αφορά τη συνάρτηση forward, αυτό που κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε την είσοδο x του νευρωνικου δικτύου με τα βάρη W και στη συνέχεια, αφού προστεθεί και το bias b, το αποτέλεσμα που προκύπτει δίνεται ως είσοδος με τη συνάρτηση sigmoid, ενώ επιστρέφουμε το το αποτέλεσμά της.

Κατόπιν, υπολογίζουμε την απώλεια μεταξύ της εξόδου y και της πρόβλεψης $\hat{y}$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση το $cross\_entropy$, στην οποία υλοποιήθηκε η σχέση (1).

Στη συνέχεια, στη συνάρτηση backward αυτό που υπολογίζουμε είναι τις παραγώγους τις συνάρτησης κόστους ως προς z, W και b, ενώ επιστρέφουμε τις παραμέτρους $\frac{\partial J}{\partial W}$ και $\frac{\partial J}{\partial b}$.

Τέλος, στη συνάρτηση $update\_weights$ κάνουμε ανανέωση τα βάρη W και το bias b του νευρωνικού μας δικτύου χρησιμοποιώντας την τεχνική του gradient descent.

Από την προσομοίωση του νευρωνικού δικτύου προκύπτει ότι για αριθμό epoch 55, η απώλεια πέφτει από περίπου 0.53261 στο 0.35443. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκε το trained model για να γίνει πρόβλεψη της πιθανότητας και αυτό που βλέπουμε είναι ότι για βαθμούς 45 και 85 η πιθανότητα είναι περίπου 0.5321 ή 53.21%. Τέλος, το accuracy των trained examples του νευρωνικού μετά την πρόβλεψη είναι 0.89 ή 89%, γεγονός που φαίνεται από το παρακάτω figure στο οποίο φαίνεται ότι 4 δείγματα της μπλε κλάσης έχουν προβλεφθεί ως δείγματα της κόκκινης κλάσης, ενώ 7 δείγματα της κόκκινης κλάσης έχουν προβλεφθεί ως δείγματα της μπλέ κλάσης, δηλαδή συνολικά σε 11 από τα 100 δείγματα η πρόβλεψη είναι λανθασμένη.

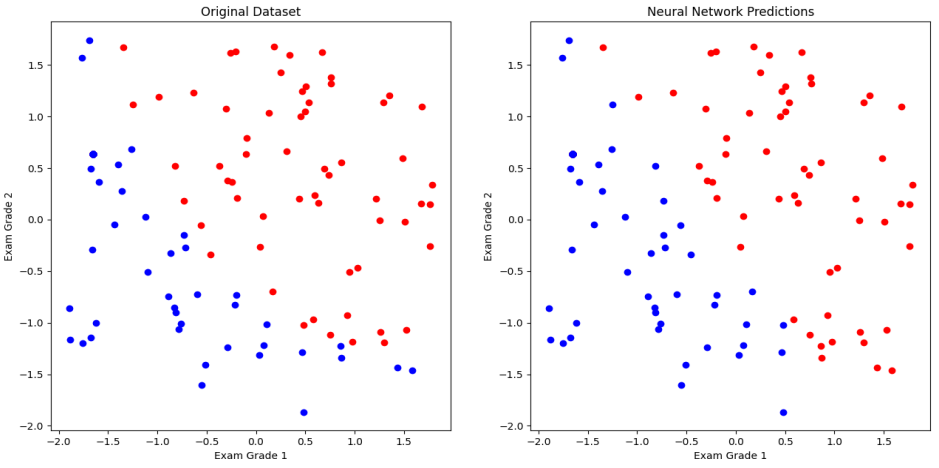


Figure 5: Dataset and neural network predictions - 55 Epochs

Αν αλλάξουμε τον αριθμό των epochs από 55 σε 400 θα παρατηρήσουμε ότι η απώλεια μειώνεται από περίπου 0.58489 σε 0.234561. Ειδικότερα, όσο περισσότερα epochs έχουμε τόσο μειώνεται η απώλεια του νευρωνικού δικτύου. Παράλληλα, η πιθανότητα για βαθμούς 45 και 85 αυξάνεται στο 0.6293 ή 62.93%. Τέλος, το συνολικό accuracy του νευρωνικού δικτύου αυξάνεται από 0.89 στο 0.9, όμως είναι μια πολύ μικρή αύξηση.

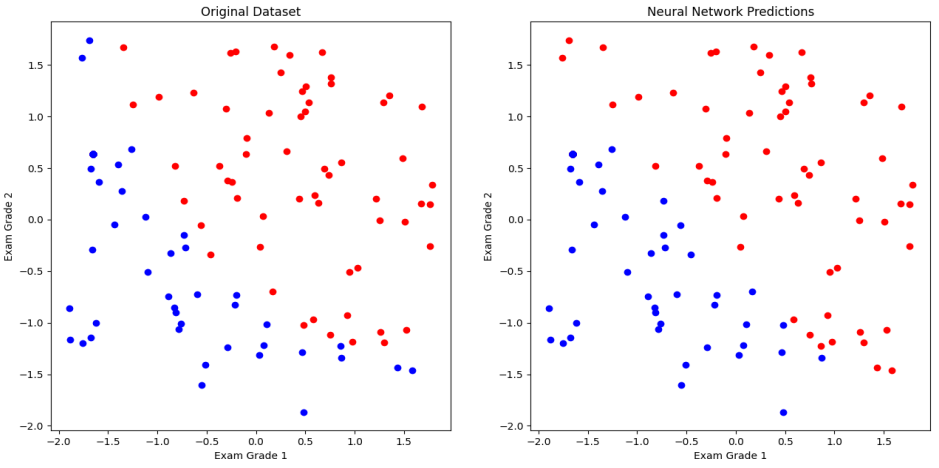


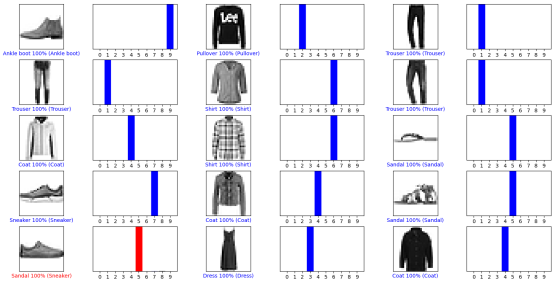
Figure 6: Dataset and neural network predictions - 400 Epochs

Άσκηση 3: Convolutional Neural Networks for Image Recognition

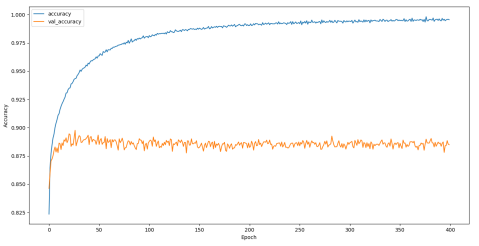
Σε αυτή την άσκηση δοκιμάσαμα διάφουρους ταξινομητές των νευρωνικών δικτύων χρησιμοποιώντας δεδομένα από τη βάση fashion-MNIST, η οποία περιέχει 10 κατηγορίες οι οποίες είναι T-shirt/top, Trouser, Pullover, Dress, Coat, Sandal, Shirt, Sneaker, Bag και Ankle boot. Πιο συγκεκριμένα μας δώθηκε ένα αρχείο fashion.py στο οποίο ήταν υλοποιημένος ένας ταξινομητής με dense νευρωνικό δίκτυο και δοκιμάσαμε με αριθμό epochs 400 να τρέξουμε το πρόγραμμα για κάποιους αλγορίθμους βελτιστοποίησης. Αυτοί οι αλγόριθμοι ήταν ο adam, sgd, rmsprop, nadam, adamax, και ftr. Τέλος, για κάθε μία περίπτωση αλγορίθμου βελτιστοποίησης τυπώσαμε κάποια δεδομένα πρόβλεψης και σε ένα άλλο διάγραμμα απεικονίσαμε το accuracy και validation accuracy συναρτήσει των epochs.

Figure 7: Initial Dataset

Adam Optimizer



(a) Adam Probabilities



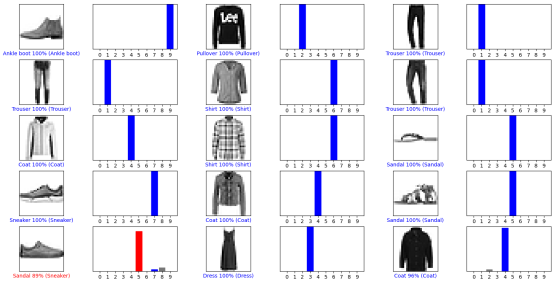
(b) Adam Accuracy

Αποτελέσματα του βελτιστοποιητή adam:

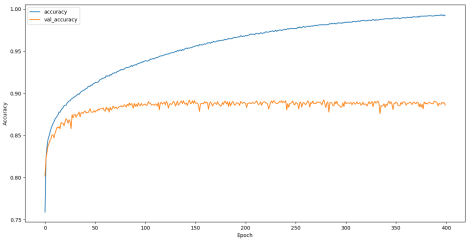
Loss: 1.8922

Accuracy: 0.8849

Sgd Optimizer



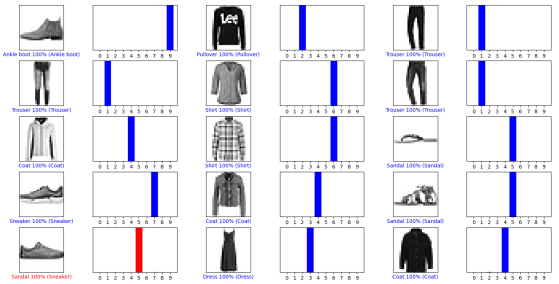
(a) Sgd Probabilities



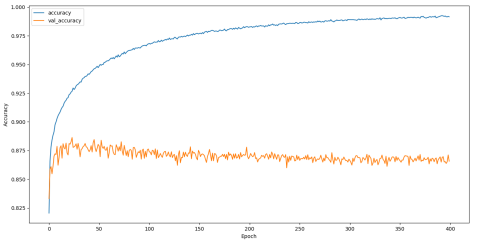
(b) Sgd Accuracy

Αποτελέσματα του βελτιστοποιητή sgd:
Loss: 0.5127
Accuracy: 0.8859

Rmsprop Optimizer



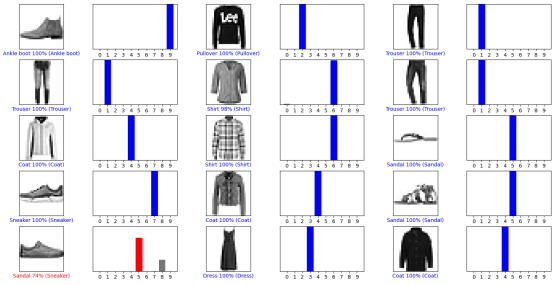
(a) Rmsprop Probabilities



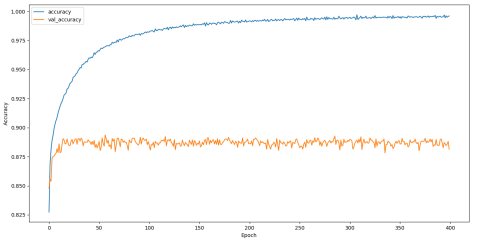
(b) Rmsprop Accuracy

Αποτελέσματα του βελτιστοποιητή rmsprop:
Loss: 4.4947
Accuracy: 0.8658

Nadam Optimizer



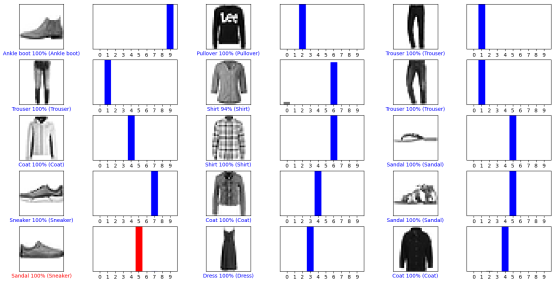
(a) Nadam Probabilities



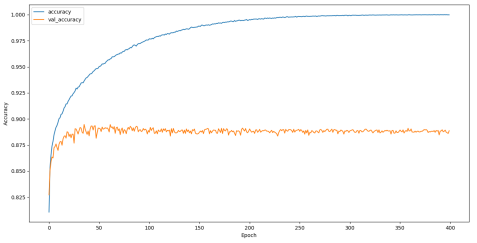
(b) Nadam Accuracy

Αποτελέσματα του βελτιστοποιητή nadam:
Loss: 1.9973
Accuracy: 0.8813

Adamax Optimizer



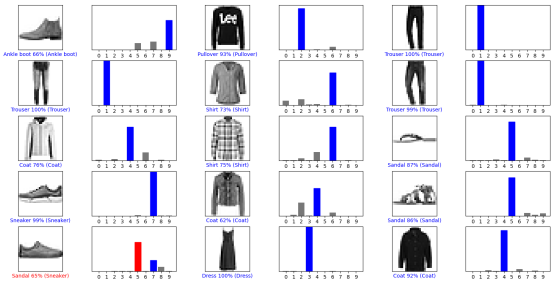
(a) Adamax Probabilities



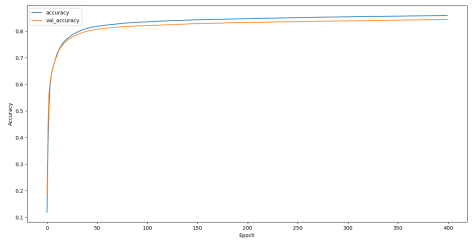
(b) Adamax Accuracy

Αποτελέσματα του βελτιστοποιητή adamax:
Loss: 0.9727
Accuracy: 0.8887

Ftrl Optimizer



(a) Adamax Probabilities



(b) Adamax Accuracy

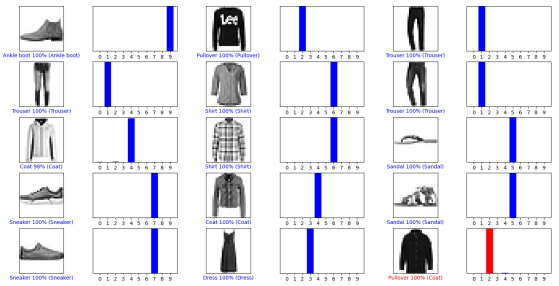
Αποτελέσματα του βελτιστοποιητή ftrl:
Loss: 0.4453
Accuracy: 0.8440

Αρχικά, αυτό που παρατηρούμε από τα διαγράμματα accuracy και validation accuracy συναρτήσει των epochs για τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης adam είναι ότι το accuracy τείνει στη μονάδα, ενώ το validation είναι λίγο πάνω το 0.85 και ελάχιστα κάτω από 0.9.

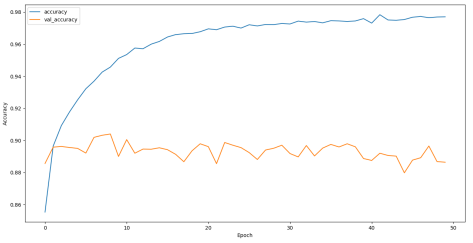
Παράλληλα, παρατηρώντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, βλέπουμε ότι οι αλγόριθμοι που έχουν τα καλύτερα accuracy είναι ο adam, sgd, nadam και adamax. Πιο συγκεκριμένα, όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι έχουν accuracy πάνω από 0.88, ενώ με πολύ μικρή διαφορά είναι είναι καλύτερος ο adamax. Ωστόσο, στον adamax παίρνει πολύ περισσότερο αριθμό epochs για να φτάσει σε αυτό το accuracy. Επιπλεόν, παρατηρούμε ότι ο adam φτάνει στο accuracy του σε πολύ μικρότερο αριθμό epochs. Συνεπώς, επειδή τα accuracy αυτών των αλγορίθμων παρουσιάζουν ελάχιστες διαφορές και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο adam φτάνει γρηγορότερα σε αυτό το accuracy, ο καταλληλότερος αλγόριθμος στο πρόβλημά μας είναι ο adam.

Τέλος, όσον αφορά τους υπόλοιπους αλγορίθμους βλέπουμε ότι ο αμέσω καλύτερος αλγόριθμος με accuracy περίπου 0.8658 είναι ο rmsprop, ενώ ο χειρότερος αλγόριθμος βελτιστοποίησης για το πρόβλημά μας είναι ο ftrl, του οποίου το accuracy έιναι 0.844.

CNN with adam optimizer



(a) Adam Probabilities



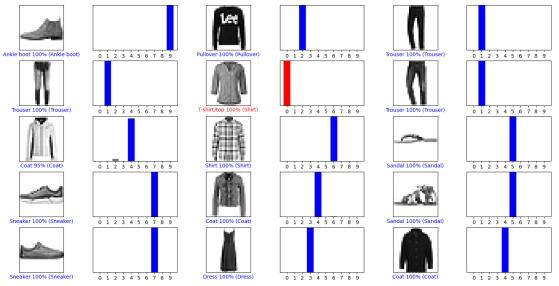
(b) Adam Accuracy

Figure 14: CNN - Without Batch Noramlization, Activation ReLU and Dropout

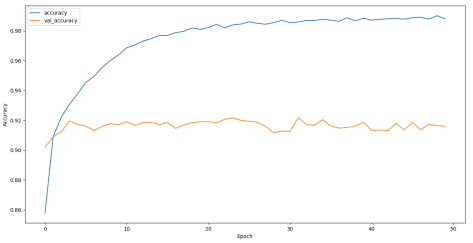
Αποτελέσματα χωρίς Batch Normalization, Activation ReLU και Dropout:

Loss: 1.1351

Accuracy: 0.8864



(a) Adam Probabilities



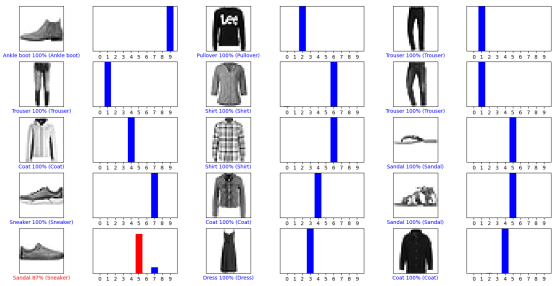
(b) Adam Accuracy

Figure 15: CNN - With Activation ReLU, Without Batch Noramlization and Dropout

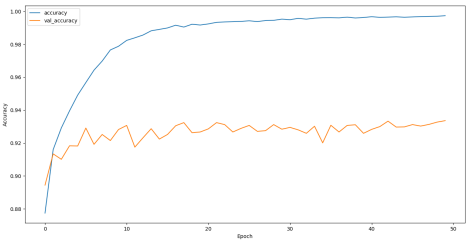
Αποτελέσματα με Activation ReLU, χωρίς Batch Normalization και Dropout:

Loss: 0.6968

Accuracy: 0.9160



(a) Adam Probabilities



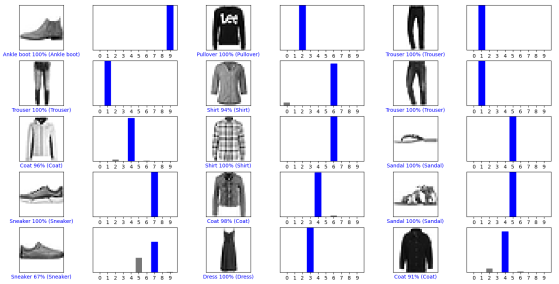
(b) Adam Accuracy

Figure 16: CNN - With Batch Noramlization, Activation ReLU, Without Dropout

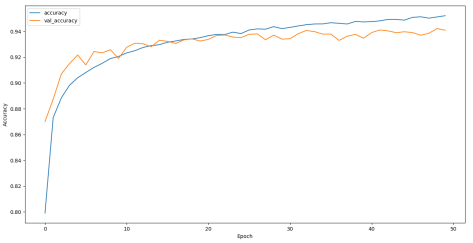
Αποτελέσματα με Batch Normalization, Activation ReLU, χωρίς Dropout:

Loss: 0.4598

Accuracy: 0.9336



(a) Adam Probabilities



(b) Adam Accuracy

Figure 17: CNN - With Batch Normalization, Activation ReLU and Dropout

Αποτελέσματα με Batch Normalization, Activation ReLU και Dropout:
Loss: 0.1575
Accuracy: 0.9409

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε ότι έχουμε τα χειρότερα αποτελέσματα, όταν δεν έχουμε κάποιο activation function, batch normalization και dropout. Ειδικότερα, έχουμε το μεγαλύτερο loss που κυμαίνεται περίπου στο 1.1351 και το μικρότερο accuracy περίπου στο 0.8864.

Όταν χρησιμοποιούμε activation function ReLU, βλέπουμε ότι υπάρχει μια βελτίωση στα αποτελέσματα και το loss μειώνεται στο 0.6968, ενώ το accuracy αυτξάνεται στο 0,916. Παράλληλα, παρατηρούμε ότι ότα χρησιμοποιούμε batch normalization και στη συνέχεια activation function ReLU, έχουμε ακόμη καλύτερα αποτελέσματα και το loss μειώνεται στο 0.4598 και το accuracy αυξάνεται στο 0.9336.

Με την ολοκλήρωση του νευρωνικού δικτύου και την προσθήκη dropout, έχουμε τα καλύτερα αποτελέσματα ως προς την αναγνώριση εικόνων. Το γεγονός αυτό φαίνεται και από το loss το οποίο είναι περίπου 0.1575, ενώ το accuracy γίνεται περίπου 0.9409, δηλαδή έχουμε το μικρότερο loos και το μεγαλύτερο accuracy από όλες τις παραπάνω περιπτώσεις.

Τέλος, αυτό που παρατηρούμε από τα διαγράμματα accuracy και validation accuracy συναρτήσει των epochs, είναι ότι υπάρχει μία σύγκλισή τους καθώς πηγαίνουμε από τη μη χρήση batch normalization, activation function ReLU και dropout στη χρήση αυτών, δηλαδή το accuracy και validation accuracy τείνουν να ταυτιστούν.