

Parcial 1: Señales y Sistemas 2025-II

Nombre: Dahl Ayloni Naya D
CC: 1125408613

1. La distancia medida entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; Se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = A e^{-j\omega_0 t}$$

$$x_2(t) = B e^{j\omega_0 t}$$

Con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. Compruebe sus resultados con Python.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Esto es igual a la potencia del error la cual sabemos que es:

$$\bar{P}_e = \bar{P}_{x_1} = \frac{1}{T} \int_T x_1(t) x_1^*(t) dt + \bar{P}_{x_2}$$

Luego es sencillo calcular cada una por aparte:

$$\bar{P}_{x_1} = \frac{1}{T} \int_T |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T (A e^{-j\omega_0 t}) (A e^{j\omega_0 t})^* dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} A^2 dt = \frac{1}{T} A^2 t \Big|_{t=-T/2}^{t=T/2} = \frac{A^2}{T} \left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{A^2 T}{T} = \underline{\underline{A^2}}$$

$$\bar{P}_{x_2} = \frac{1}{T} \int_T (B e^{j\omega_0 t}) (B e^{-j\omega_0 t})^* dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_T B^2 e^{j\omega_0 t - j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} B^2 \int_{T/2}^{T/2} dt$$

$$\frac{B^2}{T} \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right] = \underline{B^2}$$

$$-\frac{2}{T} \int_T (A e^{j\omega_0 t}) (B e^{j\omega_0 t})^* dt = -\frac{2}{T} \int_T A B e^{-j\omega_0 t} dt$$

$$= -\frac{2AB}{T} \int_T e^{-j\omega_0 t} dt$$

Hay 2 casos posibles

Caso 1: $n = -m$ ambos lobanjos coinciden. Entonces $(1)(1) + (1)(1) = 2$

Luego:

$$-\frac{2AB}{T} \int_T e^{-j\omega_0 t} dt = -\frac{2AB}{T} \int_T e^{-j\omega_0(n-m)} dt$$

$$-\frac{2AB}{T} \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right] = -\frac{2AB}{T} [T] = -2AB$$

Caso 2: $n \neq -m$

Luego

$$-\frac{2AB}{T} \int_T e^{-j\omega_0 t} dt = -\frac{2AB}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega_0 t} dt$$

$$-\frac{2AB}{T} \left(\frac{e^{-j\omega_0 t}}{-j\omega_0} \right) \Big|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$-\frac{2AB}{T} \left[\cos(\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + j \sin(\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} \right]$$

Pero como $n, m \in \mathbb{Z}$ luego

$$n+m = p \rightarrow p \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{2AB}{T} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T} \frac{1}{2} p\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{1}{2} p\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \left(-\frac{1}{2}\right)p\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T} \left(-\frac{1}{2}\right)p\right) \right]$$

$$-j\omega_0 p$$

$$-\frac{2AB}{T} \left[\cos(\pi p) - j \sin(\pi p) - \cos(-\pi p) + j \sin(-\pi p) \right]$$

Como $\cos(\theta)$ es par, luego

$$(v_1)(x) = \cos(-x)$$

Entonces

$$= -\frac{2AB}{T} \left[\cos(\pi p) - \cos(\pi p) - j\sin(\pi p) + j\sin(-\pi p) \right]$$

$$= -\frac{2AB}{T} \left[j\sin(-\pi p) - j\sin(\pi p) \right]$$

Por su parte $\sin(\pi p)$ $p \in \mathbb{Z}$ es igual a 0 por definición y circulo unitario entonces:

$$= -\frac{2AB}{T} \left[0 \right] = 0$$

De esta forma \bar{P}_e para estas 2 señales tiene 2 valores posibles

Caso 1: $n = -m$

$$\bar{P}_e = A^2 + B^2 - 2AB$$

Caso 2: $n \neq -m$

$$\bar{P}_e = A^2 + B^2$$

Caso 2: $n \neq -m$

$$\bar{P}_e = A^2 + B^2$$

El problema nos dice que

$$J^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{n-m} = \bar{P}_e$$

Luego

$$J(x_1, x_2) = \sqrt{\bar{P}_e}$$

Así que si $n = -m$

$$J(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}$$

y si $n \neq -m$

$$J(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2}$$

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor analógico digital con frecuencia de muestreo de 5kHz y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Realizar la simulación del proceso de discretización (induyendo al menos tres períodos $x(t)$). En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

Primeros verificamos que la señal sea periódica

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = 1000\pi \\ w_2 = 3000\pi \\ w_3 = 11000\pi \end{array} \right\} \frac{w_1}{w_2} = \frac{1000\pi}{3000\pi} = \frac{1}{3}; \frac{w_1}{w_3} = \frac{1000\pi}{11000\pi} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{3000\pi}{11000\pi} = \frac{3}{11}$$

La señal es cuasiperiodica, porque todas las combinaciones dan como resultado un número racional.

Ahora vamos a discretizar la señal

$$t = nT_s = n \rightarrow x(t) \rightarrow x(n) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{con } T_s = 5\text{kHz}$$

Verificamos Nyquist con $f_s = 5\text{kHz}$

$$w_{\max} = 11000\pi \rightarrow f_{\max} = \frac{w_{\max}}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\text{Hz}$$

En Nyquist la frecuencia de muestreo, debe ser α veces la frecuencia de mi señal cuasiperiodica

$$f_s \text{ debe ser mayor a } 2f_{\max} = (2)(5500) = 11000\text{Hz}$$

$T_s \geq 1/1000 \rightarrow$ por lo tanto la frecuencia de muestreo dada en el ejercicio no es optima.

para la digitalización sea apropiada, Vamos a cambiar la frecuencia de muestreo a $f_{\text{max}} = 4(5500) = 22000 \text{ Hz}$

Ahora vamos a calcular el periodo de la señal

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1 = 1000\pi \\ \omega_2 = 3000\pi \\ \omega_3 = 11000\pi \end{array} \right\} T_1 = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500} ; T_2 = \frac{2\pi}{3000\pi} = \frac{1}{1500} ; T_3 = \frac{2\pi}{11000\pi} = \frac{1}{5500}$$

$$T = kT_1 = rT_2 = lT_3$$

$$T = \frac{k(1)}{500} = \frac{r(1)}{1500} = \frac{l(1)}{5500} \text{ multiplicamos por } 11000$$

$$T = \frac{1}{500}$$

- 3) Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)n^2\omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x'(t)e^{-jnw_0t} dt; n \in \mathbb{Z}$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_f} x(t)e^{-jnw_0t} dt \rightarrow x(t) = x(t_i) + \sum C_n e^{jnw_0t}$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum C_n e^{jnw_0t} \right\} = \sum C_n j n w_0 e^{jnw_0t}$$

$$x''(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum C_n e^{jnw_0t} (j n w_0) \right\} = \sum C_n e^{jnw_0t} (j n w_0)^2$$

$$\tilde{C}_n = \frac{\langle x''(t), e^{jnw_0t} \rangle}{\|e^{jnw_0t}\|^2} = \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t} dt; t = t_f - t_i$$

$$\tilde{C}_n = C_n (j n w_0)^2 \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)(j n w_0)^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i) n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^N a_n (-n\omega_0) \sin(n\omega_0 t) + b_n (n\omega_0) \cos(n\omega_0 t)$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^N a_n (-n\omega_0)(n\omega_0) \cos(n\omega_0 t) + b_n (n\omega_0)(-n\omega_0) \sin(n\omega_0 t)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n\omega_0 t) dt; \quad \tilde{b}_n = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

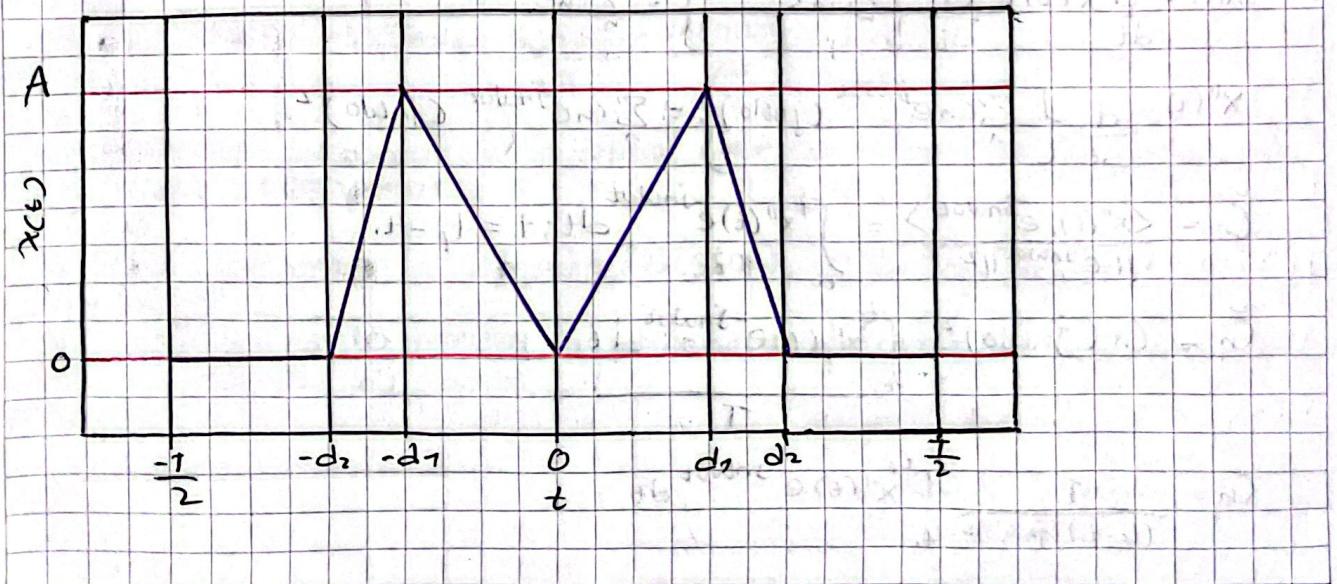
$$a_n (-n^2 \omega_0^2) = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n (-n^2 \omega_0^2) = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

- 4) Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.



$$x(t) = \begin{cases} -T/2 \leq t \leq -d_2 & x(t) = 0 \quad \text{tramo 1} \\ -d_2 \leq t \leq -d_1 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{tramo 2} \\ -d_1 \leq t \leq 0 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{tramo 3} \\ 0 \leq t \leq d_1 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{tramo 4} \\ d_1 \leq t \leq d_2 & x(t) = \text{recta lineal} \quad \text{tramo 5} \\ d_2 \leq t \leq T/2 & x(t) = 0 \quad \text{tramo 6} \end{cases}$$

Ahora se sacan todas las ecuaciones de todas las rectas lineales:

Tramo 2:

$$m = \frac{0 - A}{-d_2 - (-d_1)} = \frac{-A}{d_1 - d_2} = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$b = y - mt = 0 - \frac{A(-d_2)}{d_2 - d_1}$$

$$b = \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

$$x(t) = \frac{At}{d_2 - d_1} + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

Tramo 3:

$$m = \frac{A - 0}{-d_1 - 0} = \frac{-A}{d_1}$$

$$b = 0 - \frac{A(0)}{d_1} = 0$$

$$x(t) = \frac{At}{d_1}$$

Tramo 4:

$$m = \frac{0 - A}{0 - d_1} = \frac{A}{d_1}$$

$$b = 0 - \frac{A(0)}{d_1} = 0$$

$$x(t) = \frac{At}{d_1}$$

Tramo 5:

$$m = \frac{A - 0}{d_1 - d_2} = \frac{A}{d_1 - d_2}$$

$$b = 0 - \frac{A(d_2)}{d_1 - d_2} = \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

$$x(t) = \frac{A}{d_1 - d_2} t + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1}$$

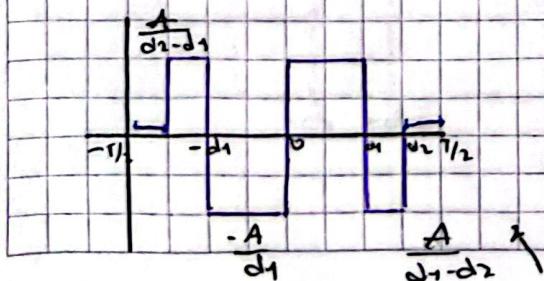
Así la definición por tramos de $x(t)$ es

$$x(t) = \begin{cases} -T/2 \leq t \leq d_2 & x(t) = 0 \\ -d_2 \leq t \leq d_1 & x(t) = \frac{At}{d_2 - d_1} + \frac{Ad_2}{d_2 - d_1} \\ -d_1 \leq t \leq 0 & x(t) = -\frac{At}{d_1} \\ 0 \leq t \leq d_1 & x(t) = \frac{At}{d_1} \\ d_1 \leq t \leq d_2 & x(t) = At + \frac{Ad_2}{d_1 - d_2} \\ d_2 \leq t \leq T/2 & x(t) = 0 \end{cases}$$

(la derivada de $x(t)$ también se define a trozos así)

$$x'(t) = \begin{cases} -T/2 \leq t \leq -d_2 & x(t) = 0 \\ -d_2 \leq t \leq -d_1 & x'(t) = \frac{A}{d_2 - d_1} \\ -d_1 \leq t \leq 0 & x'(t) = -\frac{A}{d_1} \\ 0 \leq t \leq d_1 & x'(t) = \frac{A}{d_1} \\ d_1 \leq t \leq d_2 & x'(t) = \frac{A}{d_1 - d_2} \\ d_2 \leq t \leq T/2 & x'(t) = 0 \end{cases}$$

Graficamente:



Tomamos esta hacia abajo ya que esta recta es directamente, luego su pendiente es negativa.

Nota 3 Se nota que en los puntos $-d_2$, $-d_1$, 0, d_1 , d_2 no se incluye, ya que en estos puntos la curva es suave, por la cual la derivada se está definiendo, la segunda derivada de $X(t)$ así también define a $f(020)$ así.

$$\begin{cases}
 X(t) & \begin{cases} -T/2 \leq t < -d_2 \\ t = -d_2 \end{cases} \\
 & x''(t) = 0 \\
 & x''(t) = \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t + d_2) \\
 -d_2 < t < -d_1 & x''(t) = 0 \\
 t = -d_1 & x''(t) = \left(-\frac{A}{d_2 - d_1} - \frac{A}{d_1} \right) \delta(t + d_1) \\
 -d_1 < t < 0 & x''(t) = 0 \\
 t = 0 & x''(t) = \frac{2A}{d_1} \delta(t) \\
 0 < t < d_1 & x''(t) = 0 \\
 t = d_1 & x''(t) = \left(-\frac{A}{d_1} + \frac{A}{d_1 - d_2} \right) \delta(t - d_1) \\
 d_1 < t < d_2 & x''(t) = 0 \\
 t = d_2 & x''(t) = \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t - d_2) \\
 d_2 < t \leq T/2 & x''(t) = 0
 \end{cases}$$

Para la segunda derivada se usaron deltas de Dirac y, que estas representación cambios brusco) en un instante, los cuales se multiplican por la magnitud de los cambios

$$\begin{aligned}
 C_n = & \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 \omega_0^2} \left\{ \int_{-d_2-d_1}^{0} \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t + d_2) e^{jn\omega_0 t} dt \right. \\
 & + \left. \left(-\frac{A}{d_2 - d_1} - \frac{A}{d_1} \right) \delta(t + d_1) e^{jn\omega_0 t} dt \right\} \\
 & + \int_{0}^{d_1} \left(\frac{2A}{d_1} \delta(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right. + \left. \int_{d_1}^{d_1 + d_2} \left(-\frac{A}{d_1} + \frac{A}{d_1 - d_2} \right) \delta(t - d_1) e^{jn\omega_0 t} dt \right. \\
 & + \left. \int_{d_1}^{d_2} \frac{A}{d_2 - d_1} \delta(t - d_2) e^{jn\omega_0 t} dt \right\}
 \end{aligned}$$

Las integrales pueden verse en un intervalo de $(-\infty, \infty)$

$$C_n = \frac{1}{-Tn^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \left\{ \frac{A}{d_2 - d_1} e^{jn\omega_0 d_2} - \frac{A}{d_2 - d_1} e^{jn\omega_0 d_1} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{A e^{jn\omega_0 t} + 2A e^0 - A e^{-jn\omega_0 t}}{d_1} - \frac{A e^{-jn\omega_0 t} + A e^{jn\omega_0 t}}{d_2 - d_1} \\
 & = -\frac{TA e^{jn\omega_0 t}}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} + \frac{TA e^{-jn\omega_0 t}}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} \\
 & + \frac{TA e^{jn\omega_0 t}}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1} + \frac{TA e^{-jn\omega_0 t}}{4\pi^2 n^2 d_1} \\
 & + -\frac{jA e^{jn\omega_0 t}}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} - \frac{jA e^{-jn\omega_0 t}}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} \\
 & = -\frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} - \frac{jTA \sin(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} \\
 & + \frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} + \frac{jTA \sin(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} \\
 & + \frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 d_1} + \frac{jTA \sin(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1} \\
 & + \frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 d_1} - \frac{jTA \sin(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 d_1} \\
 & = \frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} + \frac{jTA \sin(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} \\
 & - \frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} + \frac{jTA \sin(n\omega_0 t)}{4\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} \\
 & = -\frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{2\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} + \frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{2\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} \\
 & + \frac{TA \cos(n\omega_0 t)}{2\pi^2 n^2 d_1} - \frac{TA}{2\pi^2 n^2 d_1} = C_n
 \end{aligned}$$

Es posible decir que el espectro de Fourier es:

$$|C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

que al no tener parte imaginaria $b_n = 0$ luego.

$$|C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2}}{2} = \frac{|a_n|}{2} = \frac{|2Re\{c_n\}|}{2}$$

$$|C_n| = \left| -\frac{T A(0)(n\omega_0 d_2)}{2\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} + \frac{T A(0)(n\omega_0 d_1) + T A(\cos(n\omega_0 t))}{2\pi^2 n^2 (d_2 - d_1)} - \frac{T A}{2\pi^2 n^2 d_1} \right|$$

Mientras que el angulo seria

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{si } a_n > 0 \\ \pi & \text{si } a_n < 0 \end{array}$$

Indefinido si $a_n = 0$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_1^0 x(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \left\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{A + e^{j\omega_0 t}}{d_2 - d_1} dt + \int_{-d_1}^{d_1} \frac{A d_2}{d_2 - d_1} e^{-j\omega_0 t} dt \right. \\ &\quad + \int_{-d_1}^0 \frac{-A + e^{j\omega_0 t}}{d_1} dt + \int_0^{d_1} \frac{A}{d_1} t e^{j\omega_0 t} dt + \int_{d_1}^{d_2} \frac{A t}{d_1 - d_2} e^{-j\omega_0 t} dt \\ &\quad \left. + \int_{d_1}^{d_2} \frac{A d_2}{d_2 - d_1} e^{-j\omega_0 t} dt \right\} = \\ &= C_0 = \frac{1}{T} \left\{ \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{-At}{d_2 - d_1} dt + \int_{-d_2}^{-d_1} \frac{Ad_2}{d_2 - d_1} dt + \int_{-d_1}^0 \frac{At}{d_1} dt + \int_0^{d_1} \frac{A}{d_1} t dt \right. \\ &\quad + \left. \int_{-d_1}^{d_2} \frac{At}{d_1 - d_2} dt + \int_{-d_1}^{d_2} \frac{-Ad_2}{d_2 - d_1} dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \frac{At^2}{2(d_2 - d_1)} \Big|_{-d_2}^{-d_1} + \frac{Ad_2 t}{d_2 - d_1} \Big|_{-d_2}^{d_2} + \left(\frac{At^2}{2d_1} \right) \Big|_{-d_1}^0 + \left(\frac{At^2}{2d_1} \right) \Big|_0^{d_1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{At^2}{2(d_1 - d_2)} \right) \Big|_{d_1}^{d_2} + \frac{Ad_2 t}{d_2 - d_1} \Big|_{d_1}^{-d_2} \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \frac{A(-d_1 - (-d_2))^2}{2(d_2 - d_1)} + \frac{Ad_2(-d_2 - (-d_2))}{d_2 - d_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{A(0 - (-d_1))^2}{2d_1} + \frac{2(d_1 - 0)^2}{2d_1} - \left(\frac{A(d_2 - d_1)^2}{2(d_2 - d_1)} \right) + \frac{Ad_2(d_2 - d_1)}{d_2 - d_1} \right\} \end{aligned}$$