Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Беличева Дарья Михайловна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построить математическую модель гармонического осциллятора.

2 Задание

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
$$\ddot{x} + 9.2x = 0,$$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
$$\ddot{x} + \dot{x} + 4.9x = 0,$$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы
$$\ddot{x} + 3.5\dot{x} + 13x = 2.5cos(2t).$$

   На интервале $t \in [0; 49]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = -0.5,\ y_0 = 1.$

3 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x — отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени t от среднего за период значения (например, в кинематике — смещение, отклонение колеблющейся точки от положения равновесия); A — амплитуда колебания, то есть максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность A совпадает с размерностью x; ω (радиан/с, градус/с) — циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1 с;

$(\omega t + \varphi_0) = \varphi$ (радиан, градус) — полная фаза колебания (сокращённо — фаза, не путать с начальной фазой);

φ_0 (радиан, градус) — начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания (и самой величины x) в момент времени $t = 0$. Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

[1].

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Для начала реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
tspan = (0,49)
u0 = [-0.5, 1]
p1 = [0, 9.2]

# Задание функции
function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end
```

```
# Постановка проблемы и ее решение
problem1 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)
sol1 = solve(problem1, Tsit5(), saveat = 0.05)
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [4.1]) и его фазового портрета (рис. [4.2]).

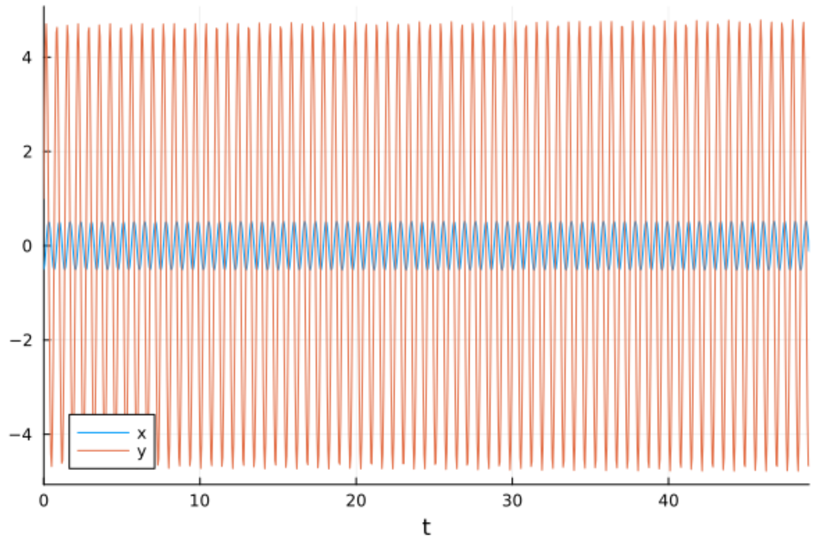

Рис. 4.1: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

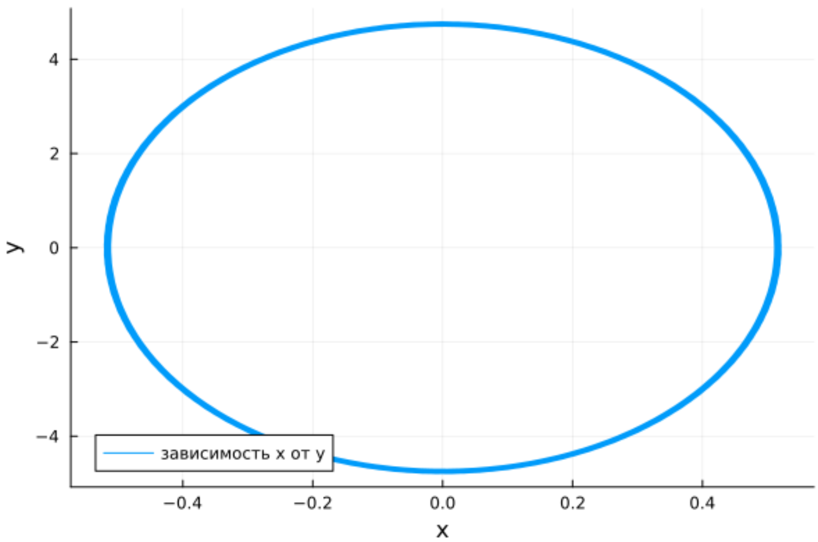

Рис. 4.2: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Можно заметить, что колебание осциллятора периодично, график не задухает.

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_1
  parameter Real g = 0;
  parameter Real w = 9.2;
  parameter Real x0 = -0.5;
  parameter Real y0 = 1;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_1;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [4.3]) и его фазового портрета (рис. [4.4]).

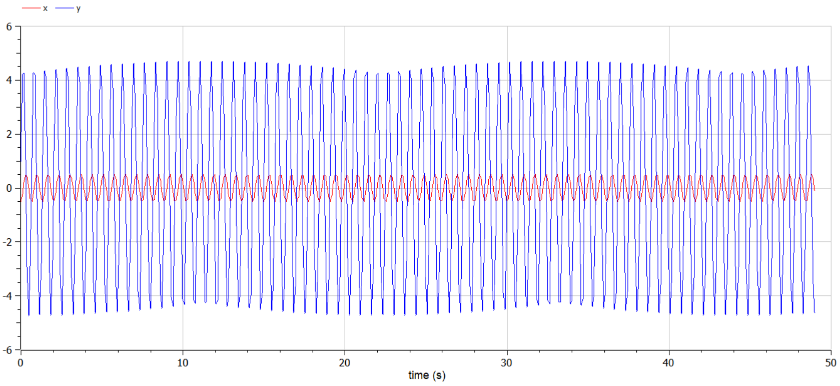

Рис. 4.3: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

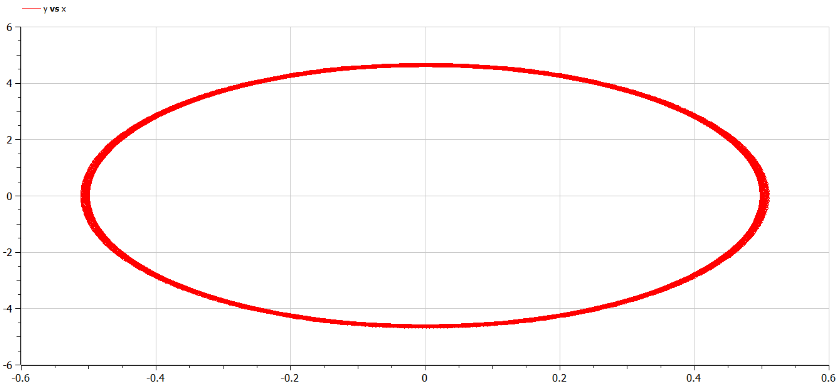

Рис. 4.4: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

Также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.2 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
tspan = (0,49)
u0 = [-0.5, 1]
p2 = [1, 4.9]

# Задание функции
function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem2 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p2)
sol2 = solve(problem2, Tsit5(), saveat = 0.05)
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [4.5]) и его фазового портрета (рис. [4.6]).

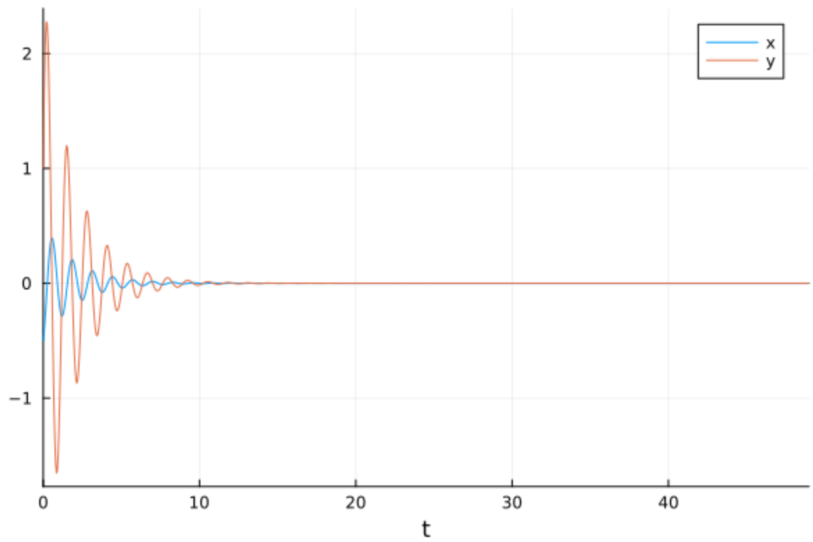

Рис. 4.5: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

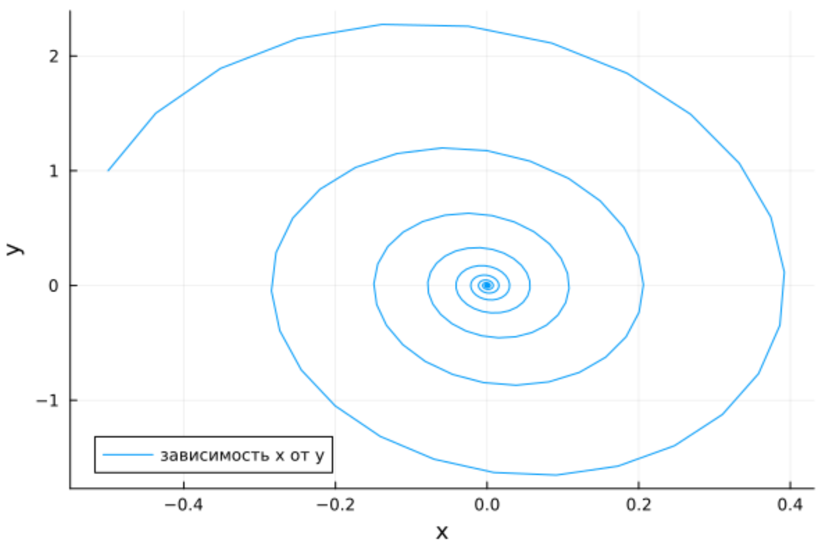

Рис. 4.6: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

В этом случае сначала происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, поскольку у нас есть параметр, отвечающий за потери энергии.

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_2
  parameter Real g = 1;
  parameter Real w = 4.9;
  parameter Real x0 = -0.5;
  parameter Real y0 = 1;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_2;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [4.7]) и его фазового портрета (рис. [4.8]).

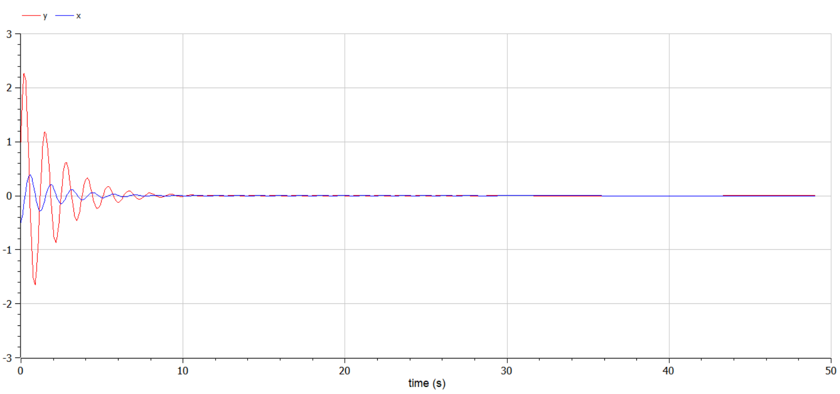

Рис. 4.7: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica

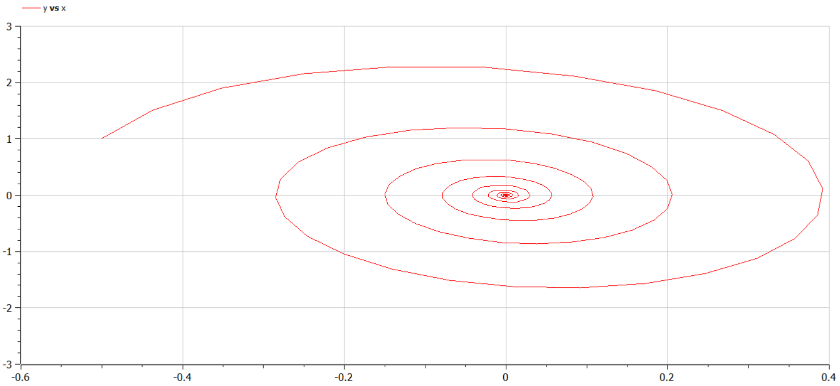

Рис. 4.8: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica

Во второй модели также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.3 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
tspan = (0,49)
u0 = [-0.5, 1]
p3 = [3.5, 13]

# Функция, описывающая внешние силы, действующие на осциллятор
f(t) = 2.5*cos(2*t)
```

```
# Задание функции
function f2(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x .+f(t)
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem3 = ODEProblem(f2, u0, tspan, p3)
sol3 = solve(problem3, Tsit5(), saveat = 0.05)
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [4.9]) и его фазового портрета (рис. [4.10]).

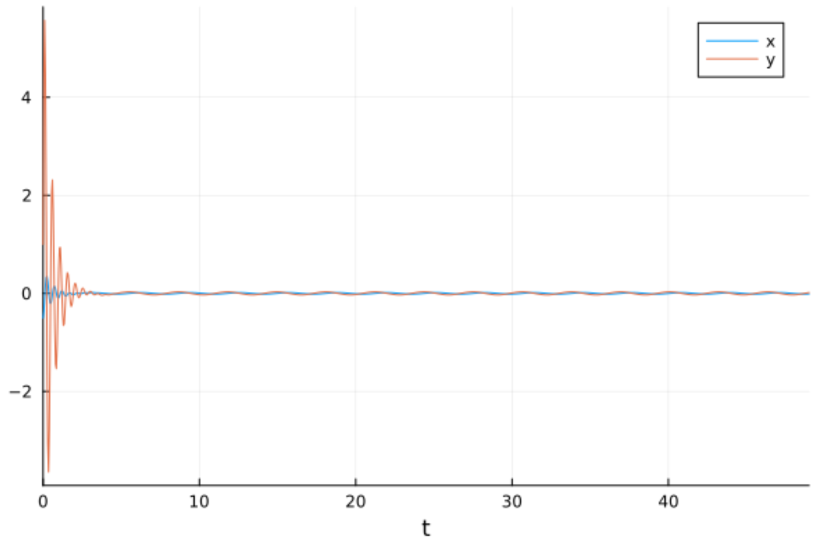

Рис. 4.9: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

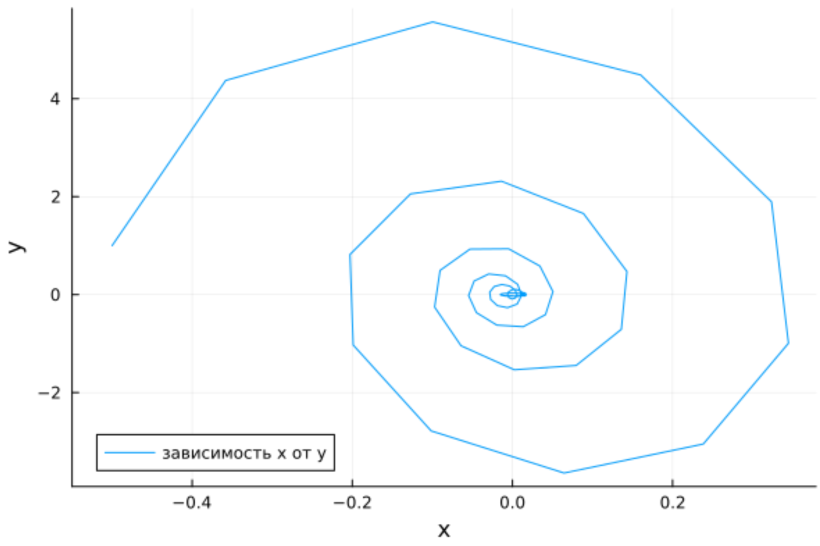

Рис. 4.10: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_3
  parameter Real g = 3.5;
  parameter Real w = 13;
  parameter Real x0 = -0.5;
  parameter Real y0 = 1;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x + 2.5*cos(2*time);
end lab4_3;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [4.11]) и его фазового портрета (рис. [4.12]).

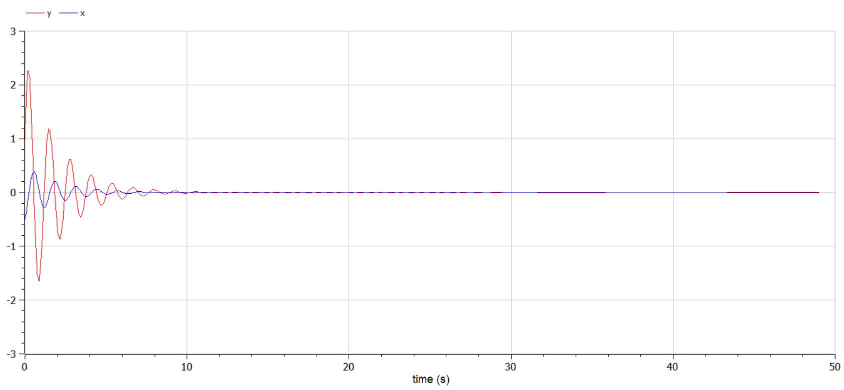

Рис. 4.11: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica

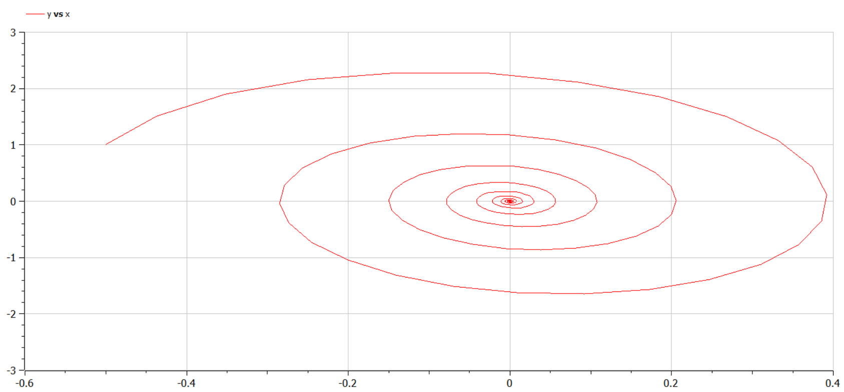

Рис. 4.12: Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica

В третьем случае графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia все также идентичны.

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель гармонического осциллятора.

Список литературы

1. Гармонические колебания [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонические_колебания.