

# **Лабораторная работа №2**

**Задача о погоне**

Беличева Дарья Михайловна

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>7</b>
4.1	Построение модели . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>15</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>16</b>

## Список иллюстраций

4.1	Траектория движения катера в 1 случае . . . . .	11
4.2	Траектория движения катера и лодки . . . . .	12
4.3	Траектория движения катера во 2 случае . . . . .	13
4.4	Траектория движения катера во 2 случае . . . . .	14

# 1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

## 2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

### 3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка  $A$  равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки  $P$  такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки  $A$  [1].

## 4 Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта:  $(1032216453\%70)+1 = 24$  вариант.

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за  $t_0 = 0, x_0 = 0$  – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,  $x_{k0} = k$  – место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс – это точка обнаружения лодки браконьеров  $x_{k0}$  ( $\theta = x_{k0} = 0$ ), а полярная ось  $r$  проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса  $\theta$ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние  $x$  (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время  $t$  катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет  $x$ , а катер  $k - x$  (или  $k + x$ , в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние,

вычисляется как  $\frac{x}{v}$  или  $\frac{k-x}{4.1v}$  (во втором случае  $\frac{k+x}{4.1v}$ ). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние  $x$  можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{4.1v} \text{ - в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{4.1v} \text{ - во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения  $x_1 = \frac{11.4}{5.1}$  и  $x_2 = \frac{11.4}{3.1}$ , задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки  $v$ . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие:  $v_r$  - радиальная скорость и  $v_\tau$  тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса,  $v_r = \frac{dr}{dt}$ . Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем  $\frac{dr}{dt} = v$ .

Тангенциальная скорость - это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости  $\frac{d\theta}{dt}$  на радиус  $r$ ,  $r \frac{d\theta}{dt}$ .

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{16.81v^2 - v^2} = \sqrt{15.81}v$$

Из чего можно вывести:

$$r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.81}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:



$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{15.81}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{11.4}{5.1} \end{cases} \quad (1)$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{11.4}{3.1} \end{cases} \quad (2)$$

Исключая из полученной системы производную по  $t$ , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{15.81}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

## 4.1 Построение модели

```
using DifferentialEquations, Plots
```

```
# расстояние от лодки до катера
```

```
k = 11.4
```

```
# начальные условия для 1 и 2 случаев
```

```

r0 = k/5.1
r0_2 = k/3.1
theta0 = (0.0, 2*pi)
theta0_2 = (-pi, pi)

# данные для движения лодки браконьеров

fi = 3*pi/4;
t = (0, 50);

# функция, описывающая движение лодки браконьеров

x(t) = tan(fi)*t;

# функция, описывающая движение катера береговой охраны

f(r, p, t) = r/sqrt(15.81)

# постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая

prob = ODEProblem(f, r0, theta0)

sol = solve(prob, saveat = 0.01)

# отрисовка траектории движения катера

plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения катера")

```

В результате получаем такой рисунок (рис. [4.1]):



Рис. 4.1: Траектория движения катера в 1 случае

```
## необходимые действия для построения траектории движения лодки
```

```
ugol = [fi for i in range(0,15)]
```

```
x_lims = [x(i) for i in range(0,15)]
```

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером
```

```
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения лодки")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [4.2]):

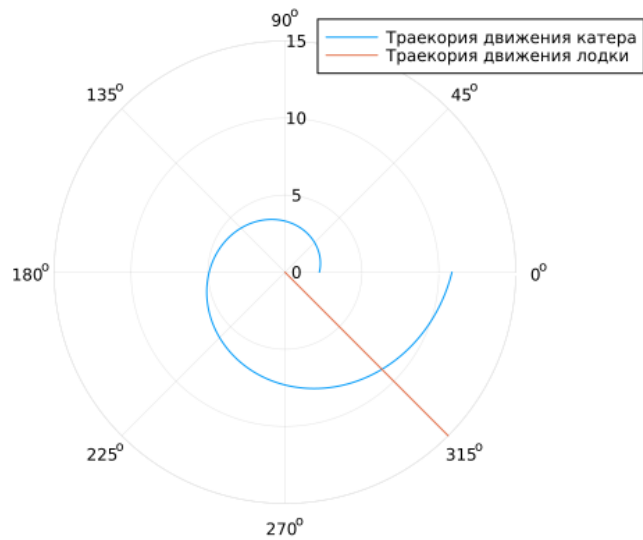


Рис. 4.2: Траектория движения катера и лодки

# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны

$$y(x) = \frac{1140 \cdot \exp(10 \cdot x) / (\sqrt{1581}))}{(509)}$$

# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения

$y(\varphi_i)$

# точка пересечения лодки и катера для 1 случая

9.628170843477646e8

Теперь перейдем к решению в случае 2.

# постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая

```
prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)
```

```
sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)
```

```
# отрисовка траектории движения катера
```

```
plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траектория движения катера")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [4.3]):

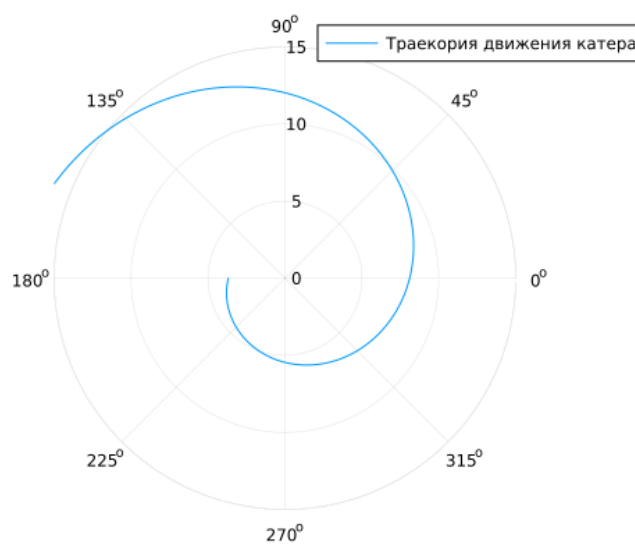


Рис. 4.3: Траектория движения катера во 2 случае

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером
```

```
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения лодки")
```

В результате получаем такой рисунок (рис. [4.4]):



Рис. 4.4: Траектория движения катера во 2 случае

# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случая

$$y_2(x) = \frac{114 \cdot \exp\left(\frac{10 \cdot x}{\sqrt{1581}}\right) + \left(\frac{10 \cdot \pi}{\sqrt{1581}}\right)}{31}$$

# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения

$$y_2(\pi)$$

# точка пересечения лодки и катера для 2 случая

6.651143558300665

## 5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

## Список литературы

1. Кривая погони [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая\\_погони](https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_погони).