

Лабораторная работа №5

Модель Лотки-Вольтерры

Беличева Дарья Михайловна

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Теоретическое введение	6
4	Выполнение лабораторной работы	7
4.1	Реализация на Julia	7
4.2	Реализация на OpenModelica	11
5	Сравнение построения модели на Julia и в OpenModelica	14
6	Выводы	15
	Список литературы	16

Список иллюстраций

4.1	График изменения численности хищников и численности жертв .	8
4.2	График зависимости численности хищников от численности жертв	9
4.3	График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии	10
4.4	График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии	11
4.5	График изменения численности хищников и численности жертв. OpenModelica	12
4.6	График зависимости численности хищников от численности жертв. OpenModelica	12
4.7	График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии	13

1 Цель работы

Исследовать математическую модель Лотки-Вольтерры.

2 Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.29x(t) + 0.039x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.49y(t) - 0.059x(t)y(t) \end{cases}$$

Построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8$, $y_0 = 17$. Найти стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Модель Лотки — Вольтерры (модель Лотки — Вольтерра[1]) — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь своих авторов (Лотка, 1925; Вольтерра 1926), которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга.

Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами[2].

В математической форме предложенная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}$$

где x — количество жертв,

y — количество хищников,

t — время,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами [1].

4 Выполнение лабораторной работы

Для того, чтобы построить графики нам нужно сначала решить систему ДУ. Для этого мы используем язык программирования Julia и ПО OpenModelica, затем сравним результат.

4.1 Реализация на Julia

Напишем код для решения системы ДУ, используя библиотеку `DifferentialEquations.jl`, а затем построим графики с помощью библиотеки `Plots`.

```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# задания системы ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры
function LV(u, p, t)
    x, y = u
    a, b, c, d = p
    dx = a*x - b*x*y
    dy = -c*y + d*x*y
    return [dx, dy]
end

# Начальные условия
```

```

u0 = [8,17]
p = [-0.29, -0.039, -0.49, -0.059]
tspan = (0.0, 50.0)
prob = ODEProblem(LV, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5())

# Постановка проблемы и ее решение
plot(sol, title = "Модель Лотки-Вольтерры", xaxis = "Время", yaxis = "Численность

```

В результате получаем следующие графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. [4.1]) и зависимости численности хищников от численности жертв (рис. [4.2]).

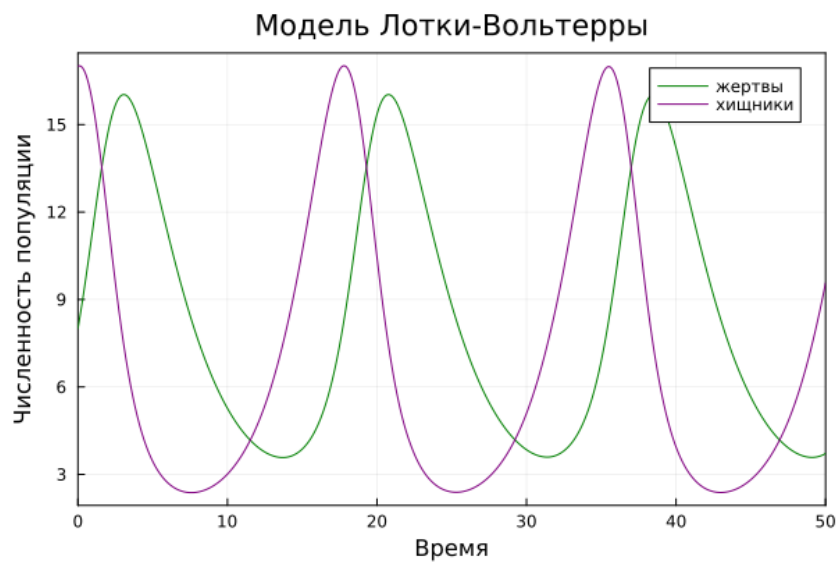


Рис. 4.1: График изменения численности хищников и численности жертв

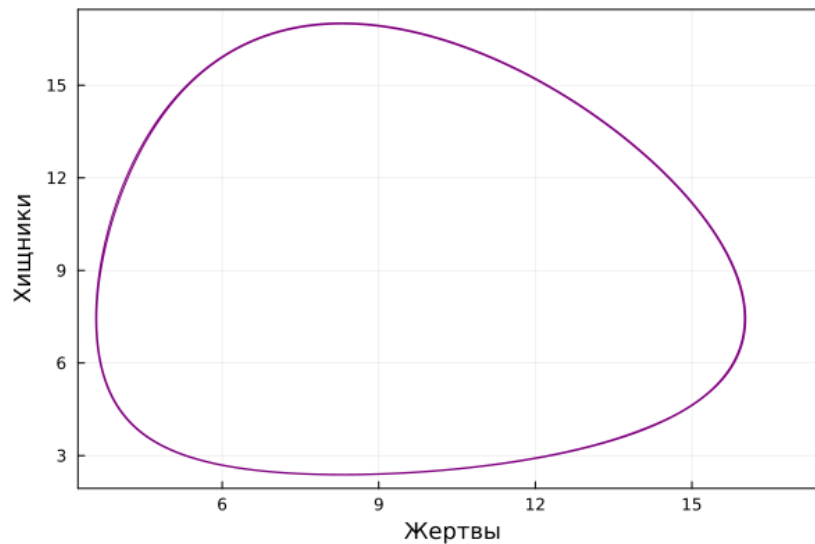


Рис. 4.2: График зависимости численности хищников от численности жертв

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Далее найдем стационарное состояние системы по формуле:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\gamma}{\delta} \\ y_0 = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Получим, что $x_0 = \frac{0.29}{0.039} = 8.305084745762713$, а $y_0 = \frac{0.49}{0.059} = 7.435897435897435$

Проверим, что эта точка действительно является стационарной, подставив ее в начальные условия.

```
x_c = p[3]/p[4]
y_c = p[1]/p[2]
u0_c = [x_c, y_c]
prob2 = ODEProblem(LV, u0_c, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5())
```

```
plot(sol2, xaxis = "Жертвы", yaxis = "Хищники", label = ["Жертвы" "Хищники"], c =
```

Получим график из двух прямых, параллельных оси абсцисс, то есть численность и жертв, и хищников не меняется, как и должно быть в стационарном состоянии (рис. [4.3]).

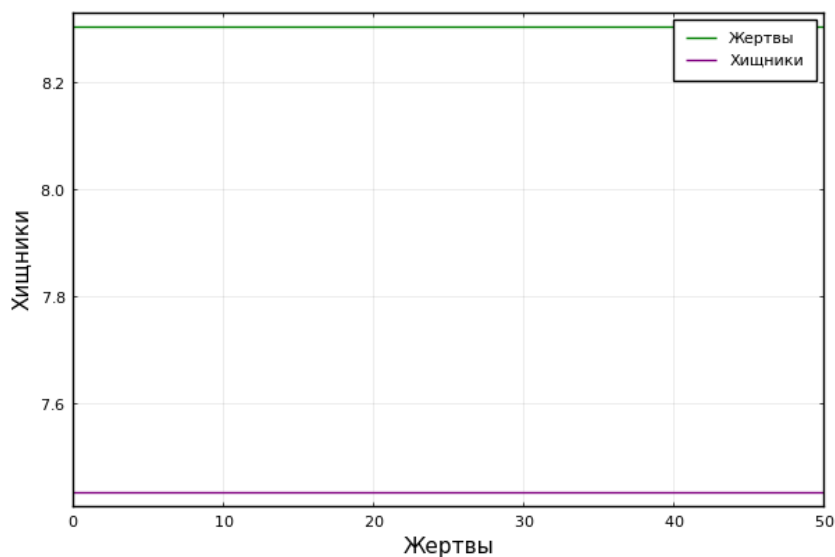


Рис. 4.3: График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии

Фазовый портрет в стационарном состоянии выглядит следующим образом (рис. [4.4]).

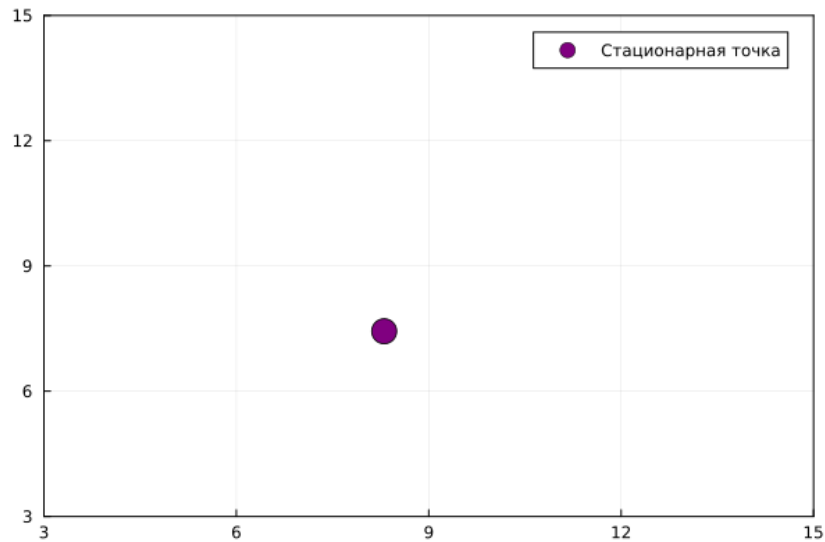


Рис. 4.4: График зависимости численности хищников от численности жертв в стационарном состоянии

4.2 Реализация на OpenModelica

Зададим параметры и систему ДУ.

```
model lab5_1
  parameter Real a = -0.29;
  parameter Real b = -0.039;
  parameter Real c = -0.49;
  parameter Real d = -0.059;
  parameter Real x0 = 8;
  parameter Real y0 = 17;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = a*x - b*x*y;
```

```

    der(y) = -c*y + d*x*y;
end lab5_1;

```

Выполним симуляцию на интервале от (0, 50), который брали для Julia и получим следующие графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. [4.5]) и зависимости численности хищников от численности жертв (рис. [4.6]).

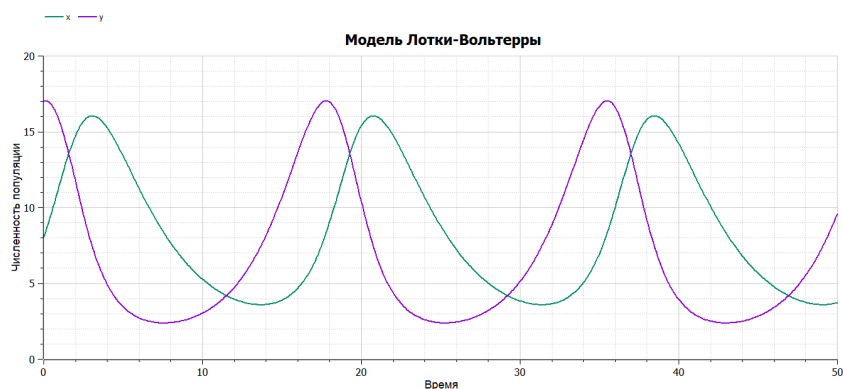


Рис. 4.5: График изменения численности хищников и численности жертв.
OpenModelica

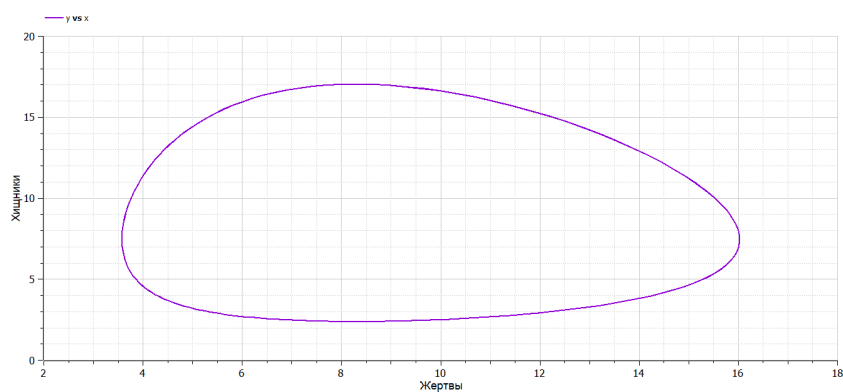


Рис. 4.6: График зависимости численности хищников от численности жертв.
OpenModelica

Графики периодичны, фазовый портрет замкнут, как и должно быть в жесткой модели Лотки-Вольтерры.

Также построим тут изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии.

```
model lab5_2
  parameter Real a = -0.29;
  parameter Real b = -0.039;
  parameter Real c = -0.49;
  parameter Real d = -0.059;
  parameter Real x0 = 0.49/0.059;
  parameter Real y0 = 0.29/0.039;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = a*x - b*x*y;
  der(y) = -c*y + d*x*y;
end lab5_2;
```

Получим график, в котором численность жертв и хищников постоянна(рис. [4.7]).

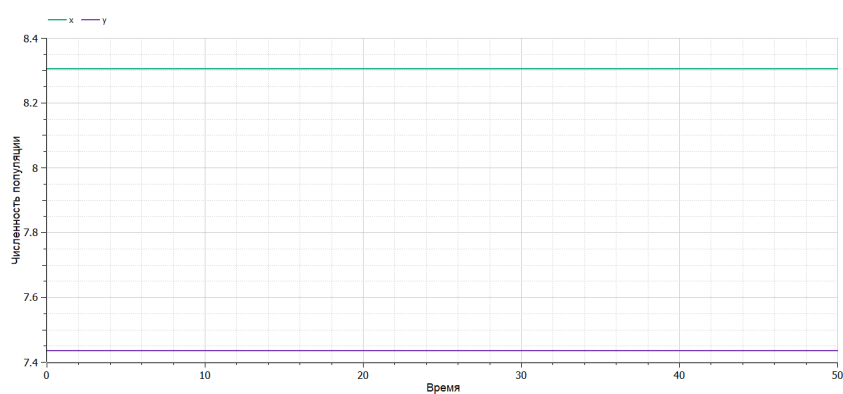


Рис. 4.7: График изменения численности хищников и численности жертв в стационарном состоянии

5 Сравнение построения модели на Julia и в OpenModelica

Полученные графики идентичны. Никаких особых различий не видно.

6 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы я построила математическую модель Лотки-Вольтерры на Julia и в OpenModelica.

Список литературы

1. Модель Лотки — Вольтерры [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Модель_Лотки_—_Вольтерры.