

Доклад

Теорема о прогнозе разнообразия

Беличева Дарья Михайловна

Содержание

1	Введение	4
2	Эксперимент Гальтона	5
3	Мудрость толпы	6
4	Теорема о прогнозе разнообразия	8
5	Пример работы теоремы	10
6	Практическая реализация	13
7	Выводы	15
	Список литературы	16

Список таблиц

3.1	Пять элементов, необходимых для формирования мудрой толпы .	7
5.1	Результаты предсказаний людей	10
5.2	Квадратичная ошибка каждого человека	11
5.3	Отдаленность предсказания каждого человека от среднего прогноза	11

1 Введение

Цель

Исследовать теорему о прогнозе разнообразия.

Задачи

- Описать понятие “мудрость толпы”;
- Дать теоретическое описание теоремы о прогнозе разнообразия;
- Привести пример, показывающий работу теоремы;
- Показать практическую реализацию расчетов по теореме о прогнозе разнообразия на языке программирования Julia.

Актуальность

При составлении численного прогноза, особенно в таких контекстах, как прогнозирование увеличения продаж, полезно объединить различные оценки. Коллективное понимание группы часто сравнивает ошибки и превосходит точку зрения только одного человека.

Коллективное понимание, или концепция “дебошир превосходит среднее значение”, предполагает, что объединенные суждения группы, как правило, более точны, чем индивидуальные оценки. Это происходит в первую очередь из-за баланса завышенных и заниженных оценок.

Теорема о прогнозе разнообразия применима к моделям, которые делают численные прогнозы или оценки. Она количественно оценивает влияние точности моделей и их разнообразия на точность их среднего [1].

2 Эксперимент Гальтона

В 1906 г. в городе Плимут (Великобритания) на сельской ярмарке был проведен эксперимент. Френсис Гальтон в качестве развлечения посетителей ярмарки предложил на глаз оценить вес выставленного на всеобщее обозрение быка и написать эту цифру на специальном билете. За правильные ответы организаторы шоу обещали призы. В результате в голосовании приняли участие около 800 человек — как заядлых фермеров, так и людей, далеких от скотоводческих дел. Собрав после этой ярмарки все билеты для анализа, Гальтон высчитал среднее арифметическое значение для всей выборки — 1197 фунтов. Реальный же вес быка оказался 1198 фунтов (543,4 кг). Каким-то непостижимым образом разношерстная публика дала ответ, максимально приближенный к реальному показателю. Т.е. ответ публики был точнее чем ответ отдельно взятого эксперта, например мясника или скотовода. Гальтон, который до этого свято верил в селекцию и превосходство одних людей над другими, был вынужден сменить вектор своих исследований.

С тех пор Френсис Гальтон изменил своё мнение по поводу мудрости толпы, он сказал:

“Результат кажется более достойным доверия к демократическому суждению, чем можно было ожидать.”

3 Мудрость толпы

Мудрость толпы: почему многие умнее немногих и как коллективная мудрость формирует бизнес, экономику, общества и нации, опубликованная в 2004 году, представляет собой книгу, написанную Джеймсом Суrowецким об объединении информации в группах, что приводит к решениям, которые, по его утверждению, часто оказываются лучше, чем могли бы быть приняты любым отдельным членом группы. В книге представлены многочисленные тематические исследования и анекдоты, иллюстрирующие ее аргументацию, и затрагиваются несколько областей, в первую очередь экономика и психология[2].

Вступительный анекдот рассказывает об удивлении Фрэнсиса Гальтона по поводу того, что толпа на окружной ярмарке точно угадала вес быка, когда их индивидуальные предположения были усреднены (среднее значение было ближе к истинному весу разделанного быка, чем оценки большинства участников толпы)[3].

Мудрость толпы - это коллективное мнение группы людей, а не одного эксперта.

Исследования “Мудрости толпы” обычно объясняют превосходство средних значений толпы над индивидуальными суждениями устранением индивидуального шума - объяснение, предполагающее независимость индивидуальных суждений друг от друга. Таким образом, толпа склонна принимать наилучшие решения, если она состоит из различных мнений и идеологий.

Не все толпы (группы) обладают “мудростью”. Рассмотрим, например, толпы

или обезумевших инвесторов в пузыре на фондовом рынке. Согласно Суровецкому, эти ключевые критерии отделяют мудрые толпы от иррациональных (см. в табл. 3.1):

Таблица 3.1: Пять элементов, необходимых для формирования мудрой толпы

Критерии	Описание
Разнообразие мнений	У каждого человека должна быть личная информация, даже если это просто эксцентричная интерпретация известных фактов.
Независимость	Мнения людей не определяются мнениями окружающих.
Децентрализация	Люди могут специализироваться и использовать местные знания.
Агрегация	Существует некоторый механизм для превращения частных суждений в коллективное решение.
Доверие	Каждый человек верит, что коллективная группа справедлива.

4 Теорема о прогнозе разнообразия

Скотт Э. Пейдж - американский социолог и заслуженный профессор Университета Джона Сили Брауна в области сложности, социальных наук и менеджмента в Мичиганском университете в Энн-Арборе. Он представил теорему прогнозирования разнообразия:

Квадрат ошибки коллективного прогнозирования равен среднему квадрату ошибки минус прогнозируемое разнообразие.

Следовательно, когда разнообразие в группе велико, ошибка толпы невелика.

Определения

- Средняя индивидуальная ошибка: среднее значение индивидуальных квадратов ошибок
- Коллективная ошибка: квадратическая ошибка коллективного прогнозирования
- Разнообразие прогнозов: среднее квадратическое расстояние от индивидуальных прогнозов до коллективного прогноза

Теорема прогнозирования разнообразия: Учитывая множество прогностических моделей, имеем

Коллективная ошибка = Средняя индивидуальная ошибка - Разнообразие прогнозирования

$$(c - \theta)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - \theta)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - c)^2$$

- c — предсказание толпы (общая оценка параметра).
- θ — истинное значение параметра.
- s_i — индивидуальные оценки параметра.

5 Пример работы теоремы

Допустим у нас есть трое людей (Катя, Костя и Мариян), которые предсказывают, сколько людей придет в закусочную на обед в определенный день (см. в табл. 5.1). Реальное число людей, пришедших на обед:

$$\text{true value} = 18$$

Таблица 5.1: Результаты предсказаний людей

Человек	Предсказание
Катя	10
Костя	16
Мариян	25

Чтобы получить среднюю оценку предсказаний, надо их сложить и поделить на количество:

$$\text{average value} = \frac{10 + 16 + 25}{3} = 17$$

Теперь давайте вычислим квадратичную ошибку каждого человека (см. в табл. 5.2):

Таблица 5.2: Квадратичная ошибка каждого человека

Человек	Ошибка
Катя	$(18 - 10)^2 = 64$
Костя	$(18 - 16)^2 = 4$
Мариян	$(18 - 25)^2 = 49$

Тогда средняя ошибка каждого человека составляет:

$$\text{average error} = \frac{64 + 4 + 49}{3} = 39$$

Давайте посмотрим, насколько точной была оценка толпы, посчитав ее ошибку:

$$\text{crowd's error} = (18 - 17)^2 = 1$$

То есть толпа ошиблась всего на 1. Таким образом, мы получаем мудрость толпы.

Чтобы понять, почему это имеет смысл, рассмотрим разнообразие (вариации в предсказаниях). Мы посмотрим на предсказание каждого человека и его отдаленность от среднего прогноза (см. в табл. 5.3).

Таблица 5.3: Отдаленность предсказания каждого человека от среднего прогноза

Человек	Разнообразие
Катя	$(17 - 10)^2 = 49$
Костя	$(17 - 16)^2 = 1$
Мариян	$(17 - 25)^2 = 64$

Тогда разнообразие предсказаний составляет:

$$\text{diversity} = \frac{49 + 1 + 64}{3} = 38$$

Получается, что

$$1 = 39 - 38,$$

то есть

$$\text{Crowd's error} = \text{Average error} - \text{Diversity}$$

Таким образом, мы пришли к теореме о прогнозе разнообразия (Diversity Prediction Theorem):

$$(c - \theta)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - \theta)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - c)^2$$

6 Практическая реализация

Подобные расчеты удобно выполнять на языке программирования Julia. Julia — высокоуровневый свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. Будем использовать пакет `Statistics`, который содержит базовые функции статистики. В нем есть функция `mean()`, которая нужна для вычисления среднего значения для всех элементов в коллекции.

Функция для вычисления элементов теоремы о прогнозе разнообразия (средняя индивидуальная ошибка, коллективная ошибка, разнообразие прогнозов) будет выглядеть следующим образом:

```
function diversitytheorem(truth::T, pred::Vector{T}) where T<:Number
    μ = mean(pred)
    avgerr = mean((pred .- truth) .^ 2)
    crderr = (μ - truth) ^ 2
    divers = mean((pred .- μ) .^ 2)
    avgerr, crderr, divers
end

for (t, s) in [(18, [10, 16, 25])]
    avgerr, crderr, divers = diversitytheorem(t, s)
    println("""
average-error : $avgerr
crowd-error   : $crderr
```

```
        diversity      : $divers  
    """)  
end
```

В результате получаем:

```
average-error : 39.0  
crowd-error   : 1.0  
diversity     : 38.0
```

7 Выводы

Была исследована теорема о прогнозе разнообразия.

Список литературы

1. Пейдж С. Модельное мышление. Как анализировать сложные явления с помощью математических моделей. 2015. 528 с.
2. The Wisdom of Crowds [Электронный ресурс]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/The_Wisdom_of_Crowds#cite_note-1.
3. Surowiecki J. The Wisdom of Crowds. Doubleday, Anchor, 2004. 336 с.