

Feuille 5 : la fin

Exercice 1 L'objet de cet exercice est d'étudier une expérience de tir à l'arc.

1. On effectue 100 tirs et, pour chaque tir, on touche la cible avec probabilité 0.2. Notons N le nombre de fois où la cible a été touchée. Quelle est la loi de la variable aléatoire N ? Donner son espérance et sa variance.
2. On s'intéresse maintenant à la proportion de tirs réussis, c'est-à-dire au nombre de fois où la cible a été touchée, divisé par le nombre total de lancers. On note P cette proportion. Toujours pour 100 lancers et une probabilité 0.2 de réussite, quelle est l'espérance et la variance de P ? Que valent l'espérance et la variance de P lorsque le nombre de lancers tend vers l'infini ?
3. Maintenant, imaginons que vous deviez tirer n fois, et que votre probabilité de réussite pour un lancer soit égale à $\frac{\lambda}{n}$, où $\lambda = 0.5$. Pour $n = 500$ lancers, quelle est l'espérance et la variance de N ? Vers quelles valeurs l'espérance et la variance de N convergent-elles lorsque le nombre de lancers n tend vers l'infini ?

Exercice 2 On effectue une suite de lancers indépendants à pile ou face. On ne sait pas si la pièce est truquée ou non, et on note donc p la probabilité d'obtenir pile.

Considérons la v.a X_i qui vaut 1 si pile sort au i -ème lancer et 0 si face sort au i -ème lancer.

On note $\bar{X}_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$.

- a. Rappeler l'espérance et la variance de X_i (en fonction de p).
- b. En déduire l'espérance et la variance de \bar{X}_n .
- c. En utilisant l'inégalité de Markov (après avoir mis au carré l'inégalité $|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon$), montrer que :

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

- d. On a effectué 1000 lancers et on a obtenu le résultat pile pour 60% des lancers. L'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée vous semble-t-elle plausible ? Justifiez votre réponse en donnant une majoration de $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - 0.5| \geq 0.1)$ lorsque la pièce est supposée équilibrée.

Exercice 3 Un collège accueillant 500 élèves possède une cantine comprenant deux salles. On fait l'hypothèse que chaque élève qui mange choisit au hasard l'une des deux salles, indépendamment les uns des autres. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves choisissant la première salle.

- a. Quelle est la loi de X ? Par quelle loi peut-on l'approximer ?
- b. On note $Y = \frac{X-250}{\sqrt{125}}$. Montrer que l'on peut approcher Y par une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. En déduire que : $\mathbb{P}(-1.96 < Y < 1.96) \approx 0.95$
- c. On suppose que chacune des deux salles dispose de N places. Montrer que les élèves trouvent chacun une place à condition que X soit tel que $500 - N \leq X \leq N$. Exprimer ce que cela signifie pour Y .
- d. Déterminer la valeur de N à prévoir pour que la probabilité que chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure à 0.95. (Réponse : 272).

Exercice 4 On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0.05$ est fautive et sur des pièces de 2 euros dont une proportion $p' = 0.02$ est fautive. Il y a dans un lot 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de 2 euros.

- a. On prend une pièce au hasard dans ce lot : quelle est la probabilité qu'elle soit fausse ?
- b. Sachant que cette pièce est fausse, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?

On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire : “nombre de pièces fausses parmi les 1000 pièces”.

- c. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ? Par quelle loi normale peut-on approcher X ?
- d. Exprimer la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52, à l'aide d'une probabilité portant sur la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 5 Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle “fait un pas”.

La fourmi se trouve initialement en A. Pour tout nombre entier n strictement positif, on note S_n l'évènement “la fourmi est au sommet S après n pas”, et p_n la probabilité de cet évènement.

1. Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit en A ? en B ? en S ?
2. Donner les valeurs de p_0, p_1 et p_2 .
3. En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \bar{S}_n$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$
4. Montrer par récurrence que pour tout entier n strictement positif, on a :

$$p_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right).$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

Exercice 6 Un contrat d'assurance automobile comporte trois tarifs de cotisation annuelle : Bas, Intermédiaire, Haut.

La première année, l'assuré paye le tarif intermédiaire.

- S'il n'a pas été responsable d'un accident pendant une année, son tarif diminue l'année suivante (s'il est déjà au tarif bas, il y reste).
- S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, son tarif monte l'année suivante (s'il est déjà au tarif haut, il y reste).

La compagnie d'assurance estime à 10% la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'un accident au cours d'une année.

Quelle sera à long terme la répartition des assurés entre les trois catégories de tarif ?

Exercice 7 Trois boules blanches et trois boules noires sont réparties dans deux urnes, de manière à ce que chaque urne contienne trois boules. On dit que le système est à l'état i (pour $i = 0, 1, 2, 3$) si la première urne contient i boules blanches. À chaque étape, on tire une boule de chaque urne et on les échange d'urnes. Soit X_n l'état du système au temps n . Expliquer pourquoi $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer ses probabilités de transition. En moyenne, quelle proportion du temps la première urne ne contient-elle que des boules blanches ?