Contrôle 2 - Lundi 10 mai 2021
Durée : 1h30

Les matériels électroniques et les documents ne sont pas autorisés pendant la composition. Le soin apporté à la précision des justifications et à la rédaction sera un critère important d'évaluation.

Attention ! Nous vous demandons de rédiger les parties 1 et 2 sur des feuilles séparées, en indiquant clairement le numéro de la partie. Même si vous ne touchez pas à l'une des parties, merci de rendre une copie pour chacune des parties.

Partie 1

Exercice 1 Noté sur 4 points
Dans une population donnée, un virus a contaminé une personne sur 1000. Pour déceler ce virus, un test a été créé et possède les propriétés suivantes :

- si la personne est malade, le test est toujours positif,
- si la personne n'est pas malade, il y a 2% de chances pour que le test soit positif.

Une personne a fait un test, et le résultat est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit effectivement malade ?
Notons T l'événement "le test est positif", et M l'événement "la personne est malade".
On s'intéresse à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(M|T)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|T) &= \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T|M) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T|M) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T|\bar{M}) \times \mathbb{P}(\bar{M})} \\ &= \frac{1 \times (1/1000)}{1 \times (1/1000) + 0.02 \times (1 - 1/1000)} \\ &= \frac{1}{1 + 0.02 \times 999} = \frac{1}{2.998} \approx 0.33.\end{aligned}$$

Exercice 2 Noté sur 6 points

1. On lance trois dés. Quelle est la probabilité d'obtenir trois chiffres identiques ? (1 point)
   On fait l'hypothèse d'équiprobabilité sur l'univers $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$, qui est de cardinal 6^3. Il y a six résultats pour lesquels les trois chiffres sont identiques (les six triplets $(1, 1, 1), \ldots, (6, 6, 6)$). Donc la probabilité demandée vaut $6/6^3 = 1/36$.
2. On vous propose le jeu suivant : il s'agit de lancer trois dés, et si vous n'obtenez pas trois chiffres identiques, vous devez payer 10 euros, tandis que sinon, vous gagnez
   - 10 euros si vous tombez sur trois 1,
   - 20 euros si vous tombez sur trois 2,
   - 30 euros si vous tombez sur trois 3,
   - 40 euros si vous tombez sur trois 4,
   - 50 euros si vous tombez sur trois 5,

- 100 euros si vous tombez sur trois 6.

Quelle est l'espérance de gain de ce jeu ? (2 points)
Soit G la variable aléatoire représentant le gain du jeu. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G) &= -10 \times \frac{35}{36} + 10 \times \frac{1}{6^3} + 20 \times \frac{1}{6^3} + 30 \times \frac{1}{6^3} + 40 \times \frac{1}{6^3} + 50 \times \frac{1}{6^3} + 100 \times \frac{1}{6^3} \\ &= -10 \times \frac{35}{36} + \frac{250}{6^3} = \frac{-350 \times 6 + 250}{6^3} = \frac{-1850}{6^3} \\ &= \frac{-925}{108} \approx -8.56\end{aligned}$$

3. On effectue des lancers successifs des trois dés, jusqu'à obtenir trois 6.
   (a) Quelle est la probabilité de devoir lancer les dés au moins 5 fois ? (1 point)
   Ici, la probabilité de "succès" (= obtenir un triple 6) vaut $p = 1/6^3$), et on s'intéresse à la probabilité d'obtenir 5 fois de suite un échec. La probabilité recherchée vaut donc $(1-p)^5 = (1-1/6^3)^5$.
   (b) On note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers effectués, jusqu'à obtenir trois 6. Quelle est la loi de X ? Et combien vaut son espérance ? (2 points)
   La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/6^3$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$. L'espérance de X vaut $\mathbb{E}(X) = 1/p = 6^3$.

Partie 2

Exercice 3 Noté sur 6 points
Un magasin reçoit un lot de tasses, dont 25% sont abîmées. Un employé est chargé de préparer des lots de 6 tasses. Il ne fait pas attention et ne met pas de côté les tasses abîmées.

1. Un client achète un lot de 6 tasses. On note X le nombre de tasses abîmées que son lot contient. Quelle est la loi de X ? Combien vaut son espérance ? (2 points)
   La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/4$. Son espérance vaut $\mathbb{E}(X) = np = 6/4 = 1.5$.
2. On suppose que chaque client qui trouve au moins une tasse abîmée dans son lot revient se plaindre au magasin. Quelle est la probabilité qu'un client donné revienne se plaindre ? (2 points)
   La probabilité de n'avoir aucune tasse abîmée vaut $(1-1/4)^6 = (3/4)^6$. La probabilité d'avoir au moins une tasse abîmée vaut donc $1-(3/4)^6 \approx 0.82$.
3. Au cours d'une semaine, le magasin a vendu 100 lots de tasses. On note N le nombre de cliens qui sont revenus se plaindre. Quelle est la loi de N ? Combien vaut son espérance ?
   La variable aléatoire N suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 1-(3/4)^6$. Son espérance vaut $\mathbb{E}(X) = np = 100 \times (1-(3/4)^6) \approx 82.2$ (2 points)

Exercice 4 Noté sur 10 points
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité. (2 points)
   La fonction f est une fonction positive, continue par morceaux, et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^2 \frac{t}{2}dt = \left(\frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4}\right) = 1,$$
   donc f est bien une densité de probabilité.
   Dans toute la suite de l'exercice, X désigne une variable aléatoire admettant f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. (2 points)
   — Pour $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$.
   — Pour $0 \leq x \leq 2$, on a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{2}dt = \frac{x^2}{4}$.
   — Pour $x > 2$, on a $F_X(x) = 1$.
3. Calculer les probabilités suivantes : (3 points)
   (a) $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$,
   $\mathbb{P}(X \geq 1/2) = 1 - F_X(1/2) = 1 - \frac{1/4}{4} = 15/16$
   (b) $\mathbb{P}(1/2 \leq X < 1)$,
   $\mathbb{P}(1/2 \leq X < 1) = F_X(1) - F_X(1/2) = \frac{1}{4} - \frac{1/4}{4} = 3/16$
   (c) $\mathbb{P}(X = 1)$.
   $\mathbb{P}(X = 1) = 0$
4. Calculer l'espérance de X. (1 point)
   $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^2 \frac{t^2}{2}dt = \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{8}{6} = 4/3$
5. On note U la variable aléatoire définie par : $U = X^2$, et on pose $Y = \frac{U}{4}$.
   Déterminer la fonction de répartition F_U de U, puis celle F_Y de Y. Que peut-on en déduire sur la variable aléatoire Y ? (2 points)
   On a $F_U(t) = \mathbb{P}(U \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t)$. Donc pour $0 \leq t \leq 4$,
   $$F_U(t) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) = \frac{t}{4}.$$
   Puis $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(U \leq 4t) = F_U(4t)$. Donc pour $0 \leq t \leq 1$, $F_Y(t) = t$. On en déduit que la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.