

Contrôle 2 - Lundi 10 mai 2021**Durée : 1h30**

Les matériels électroniques et les documents ne sont pas autorisés pendant la composition. Le soin apporté à la précision des justifications et à la rédaction sera un critère important d'évaluation.

Attention ! Nous vous demandons de rédiger les parties 1 et 2 sur des feuilles séparées. Même si vous ne touchez pas à l'une des parties, merci de rendre une copie pour chacune des parties.

Partie 1**Exercice 1**

Dans une population donnée, un virus a contaminé une personne sur 1000. Pour déceler ce virus, un test a été créé et possède les propriétés suivantes :

- si la personne est malade, le test est toujours positif,
- si la personne n'est pas malade, il y a 2% de chances pour que le test soit positif.

Une personne a fait un test, et le résultat est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit effectivement malade ?

Exercice 2

1. On lance trois dés. Quelle est la probabilité d'obtenir trois chiffres identiques ?
2. On vous propose le jeu suivant : il s'agit de lancer trois dés, et si vous n'obtenez pas trois chiffres identiques, vous devez payer 10 euros, tandis que sinon, vous gagnez
 - 10 euros si vous tombez sur trois 1,
 - 20 euros si vous tombez sur trois 2,
 - 30 euros si vous tombez sur trois 3,
 - 40 euros si vous tombez sur trois 4,
 - 50 euros si vous tombez sur trois 5,
 - 100 euros si vous tombez sur trois 6.Quelle est l'espérance de gain de ce jeu ?
3. On effectue des lancers successifs des trois dés, jusqu'à obtenir trois 6.
 - (a) Quelle est la probabilité de devoir lancer les dés au moins 5 fois ?
 - (b) On note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers effectués, jusqu'à obtenir trois 6. Quelle est la loi de X ? Et combien vaut son espérance ?

Partie 2

Exercice 3

Un magasin reçoit un lot de tasses, dont 25% sont abîmées. Un employé est chargé de préparer des lots de 6 tasses. Il ne fait pas attention et ne met pas de côté les tasses abîmées.

1. Un client achète un lot de 6 tasses. On note X le nombre de tasses abîmées que son lot contient. Quelle est la loi de X ? Combien vaut son espérance ?
2. On suppose que chaque client qui trouve au moins une tasse abîmée dans son lot revient se plaindre au magasin. Quelle est la probabilité qu'un client donné revienne se plaindre ?
3. Au cours d'une semaine, le magasin a vendu 100 lots de tasses. On note N le nombre de clients qui sont revenus se plaindre. Quelle est la loi de N ? Combien vaut son espérance ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
Dans toute la suite de l'exercice, X désigne une variable aléatoire admettant f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
3. Calculer les probabilités suivantes :
 - (a) $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$,
 - (b) $\mathbb{P}(1/2 \leq X < 1)$,
 - (c) $\mathbb{P}(X = 1)$.
4. Calculer l'espérance de X .
5. On note U la variable aléatoire définie par : $U = X^2$, et on pose $Y = \frac{U}{4}$.
Déterminer la fonction de répartition F_U de U , puis celle F_Y de Y . Que peut-on en déduire sur la variable aléatoire Y ?