Feuille 4 : variables aléatoires à densité

Exercice 1. Dans un parc naturel, un guide propose quotidiennement l'observation de chamois venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil. Le temps d'attente T avant l'arrivée des premiers animaux, exprimé en heures, suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(T > 0.5), \qquad \mathbb{P}(0.2 < T < 0.6), \qquad \mathbb{P}(T = 0.6).$$

Exercice 2. Un livreur a promis de passer chez un client entre 10h et 11h30. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.
a. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10h30min ?
b. Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 10h20 min et 10h40min ?
c. Quelle est la probabilité qu'il arrive pile à 10h45min ?
d. Sachant que le client a déjà attendu le livreur 20 minutes, quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?

Exercice 3. Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/2$.
a. Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède 1 heure ? Qu'il excède 2 heures ?
b. Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins 10 heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé neuf heures ? Commenter.

Exercice 4. **a.** Montrer que l'application $f(x) = 3x^2$ définit bien une densité sur $[0, 1]$.
b. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
c. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \geq 0.5), \qquad \mathbb{P}(0.3 \leq X < 0.6), \qquad \mathbb{P}(X = 0.2).$$

d. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire continue, dont la densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{c}{x^3} \text{ si } x \geq 1, \qquad \text{et} \qquad f(x) = 0 \text{ si } x < 1.$$

1. Déterminer la valeur de la constance c.
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F_X de la variable X, et esquisser sa courbe représentative.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6. On considère une v.a. X dont la densité de probabilité est donnée par $f(x) = Ce^{-|x|}$.
a. Déterminer la valeur de la constante C de manière à ce que la densité soit correctement normalisée.
b. Calculer la moyenne et la variance de X.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité f et soit $a > 0$. Montrer que $Y = aX$ est une variable aléatoire réelle admettant pour densité $g(x) = \frac{1}{a}f(\frac{x}{a})$.

Exercice 8 ((lois gaussiennes))**.** On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)dx = 1.$$

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).$$

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$Y = \sigma X + m.$$

Déterminer la densité de Y (on pourra travailler avec sa fonction de répartition, même si on ne sait pas en donner une expression explicite).

Exercice 9. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. À partir de l'approximation $\mathbb{P}(Z < 1) = 0.84$, déterminer sans calculatrice les probabilités suivantes.
a. $\mathbb{P}(X < 10)$ pour X suivant la loi $\mathcal{N}(8,4)$
b. $\mathbb{P}(X \geq 0)$ pour X suivant la loi $\mathcal{N}(-5,25)$
c. $\mathbb{P}(X < 0)$ pour X suivant la loi $\mathcal{N}(5,25)$
d. $\mathbb{P}(1 < X < 5)$ pour X suivant la loi $\mathcal{N}(5,16)$

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \min(X,1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y
2. Y est-elle une variable aléatoire discrète ? à densité ?

Exercice 11. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose $X = [1/U]$ (où [.] désigne la partie entière). Déterminer la loi de X.

Exercice 12. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose $X = 1 + [-\ln(U)]$ (où [.] désigne la partie entière). Déterminer la loi de X (on pourra reconnaître une loi classique).

Exercice 13 ((Loi de Cauchy, simulation))**.**

1. Pour quelle valeur de C la fonction $f(x) = \frac{C}{1+x^2}$ est-elle une densité de probabilité ?
   On considère alors X une variable aléatoire réelle admettant cette densité. On dit alors que X suit la loi de Cauchy.
2. Calculer la fonction de répartition F de X, et la tracer.
3. Montrer que F est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $]0,1[$ et calculer son inverse G.
4. Montrer que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $Z = G(U)$ suit la loi de Cauchy. On pourra déterminer la fonction de répartition de Z.
5. En déduire un procédé de simulation de X.