Feuille 1 : Introduction aux probabilités et à la combinatoire

Exercice 1 Considérons un jeu de 5 cartes, numérotées de 1 à 5.

1. Première expérience aléatoire : je pioche une carte et je relève son numéro. Donner l'univers correspondant, et la partie correspondant à l'événement « le résultat obtenu est strictement plus grand que 3 ».
2. Deuxième expérience aléatoire : je pioche une première carte, et, sans la remettre, j'en pioche une deuxième ; je relève, dans l'ordre, les deux numéros obtenus. Donner l'univers correspondant, et la partie correspondant à l'événement « la deuxième carte a un numéro plus grand que la première ».
3. Troisième expérience aléatoire : je pioche deux cartes en même temps, et je relève, sans ordre, les deux numéros obtenus. Donner l'univers correspondant, et la partie correspondant à l'événement « les deux numéros sont supérieurs ou égaux à 3 ».
4. Quatrième expérience aléatoire : je pioche une première carte, et, après l'avoir remise, j'en pioche une deuxième ; je relève, dans l'ordre, les deux numéros obtenus. Donner l'univers correspondant, et la partie correspondant à l'événement « la deuxième carte a un numéro strictement plus grand que la première ».

Bien remarquer les différences entre les trois dernières expériences : avec ou sans remise, ordonnée ou non. Profitons-en pour rappeler la différence entre un couple *et une* paire *: un couple se note entre parenthèses, et ses éléments sont ordonnés. Ainsi* $(2,7)$ *et* $(7,2)$ *sont deux couples différents. En revanche, une paire est une partie à deux éléments non ordonnée : il n'y a qu'une seule paire composée des éléments 7 et 2, qu'on note entre accolades* $\{2,7\}$ *ou* $\{7,2\}$*.*

Exercice 2 Deux personnes A et B entrent dans une pièce où il y a 3 bancs de 2 places et s'assoient "au hasard". Quelle est la probabilité p que A et B soient assises sur le même banc ? On peut par exemple :

1. numéroter les places de 1 à 6. A tire alors un numéro, le garde et B tire alors un numéro parmi les 5 restants,
2. numéroter les bans de 1 à 3. A tire alors un numéro, le remet puis B tire à son tour un des trois numéros.

Montrer que les 2 façons de procéder conduisent à 2 valeurs différentes de p.

Bilan : quand on rencontre l'expression "choisir au hasard", il est important d'expliciter clairement les hypothèses d'équiprobabilité sous-entendues.

Exercice 3

1. On lance trois pièces de monnaie. Calculer les probabilités des évènements suivants : $A = \{\text{il y a exactement 2 "faces"}\}$ et $B = \{\text{il y au moins 2 "faces"}\}$.
2. On lance deux dés non truqués, un rouge et un bleu. Quelle est la probabilité que le résultat du dé rouge soit pair et le résultat du dé bleu soit divisible par 3 ?

Exercice 4 (Paradoxe de Galton) On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Que pensez-vous du raisonnement suivant ? "A coup sûr, il y a deux lancers identiques. Par symétrie, le troisième a la même probabilité d'être un pile ou un face. Donc la probabilité d'avoir trois lancers identiques est 1/2."

Exercice 5 (Problème de Galilée) Le prince de Toscane demande un jour à Galilée : "Pourquoi lorsqu'on jette trois dés obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces deux sommes soient obtenues de six façons différentes ?"

Construire un modèle probabiliste, traduire la question posée en terme de probabilités et répondre à la question. Quelle erreur commet implicitement le prince de Toscane ?

Exercice 6 On se propose dans cet exercice de répondre aux questions suivantes sur les dénombrements élémentaires.

a. *Suites avec répétition, tirages avec remise.*

1. Combien peut-on écrire de mots de n lettres avec un alphabet de r lettres ?
2. Combien y a-t-il de façons de ranger n boules numérotés dans r boites ?
3. Soit une urne comportant n boules numérotées, on tire r fois une boule dans l'urne, on note son numéro (à la i–ème position d'une liste lors du i–ème tirage), puis on la remet dans l'urne. Combien y a-t-il de listes différentes ?

b. *Suites sans répétition, tirages sans remise.*

1. Même contexte qu'en a-(1) mais cette fois, on comptabilise uniquement les mots comportant des lettres toutes distinctes.
2. Même contexte qu'en a-(2) mais on ne peut mettre qu'une boule par boite au maximum.
3. Même contexte qu'en a-(3) sauf que l'on ne remet pas la boule dans l'urne à chaque tirage (tirage sans remise).

c. *Combinaisons.*

1. Combien y a-t-il de façons de ranger n boules numérotés dans 2 boites de telle façon qu'il y en ait k dans l'une et $n-k$ dans l'autre ?
2. Avec un alphabet de 2 lettres, combien de mots de n lettres comportant k fois l'une et $n-k$ fois l'autre, peut-on former ?

Exercice 7 Combien de mots peut-on former en mélangeant les lettres du mot PARIS ? Même question avec NANCY, TOULOUSE et NARBONNE.

Exercice 8 On tire d'un seul coup trois cartes d'un jeu de 32. Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. la main est composée de trois as,
2. la main est composée de 2 as et une dame,
3. la main est composée d'au moins un valet.

Exercice 9 Dans une assemblée de n personnes, on note la date d'anniversaire de chacun.

1. Proposer un ensemble Ω pour coder l'ensemble des résultats possibles, et donner son cardinal.
2. Calculer le cardinal des ensembles suivants :
   (a) tous les participants ont la même date d'anniversaire,
   (b) Pierre et Paul ont la même date d'anniversaire,
   (c) toutes les personnes ont des dates d'anniversaires différentes,
   (d) il y a au moins deux personnes qui ont la même date d'anniversaire.
3. On note p_n la probabilité pour que deux personnes au moins de cette assemblée aient leur anniversaire le même jour. Calculer une valeur approchée de cette probabilité pour $n = 23$, $n = 41$ et $n = 57$.