Contrôle 3 - Lundi 31 mai 2021
Durée : 2h

Les matériels électroniques et les documents ne sont pas autorisés pendant la composition. Le soin apporté à la précision des justifications et à la rédaction sera un critère important d'évaluation.

Exercice 1 Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 2 Sur une route où la vitesse est limitée à 80 km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les automobiles pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillies soient distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec une moyenne m de 72 km/h et un écart-type σ de 8 km/h, répondez aux questions suivantes.

1. Quelle est la proportion de conducteurs qui devront payer une amende pour excès de vitesse ?
2. Sachant qu'en plus de l'amende, un excès de plus de 8 km/h implique un retrait de points, quelle est la proportion des conducteurs qui vont avoir un retrait de points, parmi ceux qui vont avoir une amende ?

On pourra utiliser les valeurs suivantes de la fonction de répartition F_Z d'une variable aléatoire Z de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$: $F_Z(1) \approx 0.84, \quad F_Z(2) \approx 0.98$.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour chaque $n \geq 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n, de sorte que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$, et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$. On pose :

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

1. Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$ et $V(S_n)$ à l'aide des paramètres $p_1, \dots, p_n$.
2. En observant que $p_i(1 - p_i) \leq 1$, montrer que $V(S_n) \leq 1/n$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que : $\mathbb{P}((S_n - \mathbb{E}(S_n))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V(S_n)$.
4. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ et donc que $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 Une société propose un jeu en ligne, pour lequel l'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes. Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche alors 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

- H : “les trois jetons sont alignés horizontalement”.
- V : “les trois jetons sont alignés verticalement”.
- D : “les trois jetons sont alignés en diagonale”.
- N : “les trois jetons ne sont pas alignés”.

1. (a) Quel est le nombre de positionnements possibles des trois jetons sur la grille ?
   (b) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(D)$ des événements H, V, D.
   (c) En déduire que $\mathbb{P}(N) = 19/21$.
2. La société peut s'attendre à ce que 10 000 parties soient jouées au total au cours d'une journée.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la $i$ème partie. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z_i)$ de Z_i.
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?
3. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
4. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Indiquer l'espérance de Y.
   (c) Pour un entier naturel k, que vaut la probabilité p_k que le joueur doive jouer au plus k parties avant de gagner pour la première fois ?
5. On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(\mathrm{A}, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement “la fonction aléatoire est déréglée” et on pose $\mathbb{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.
   (a) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_\Delta(H)$, $\mathbb{P}_\Delta(V)$ et $\mathbb{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}_\Delta(N) = 25/28$.
   (c) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\Delta, \overline{\Delta})$ pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à :
   $$P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.$$
   (d) Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance du gain soit positive.
   (e) On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?