

## Probabilités et statistiques

Épreuve du 18 mai 2022

Durée 1h30 — Calculatrices et documents interdits

Attention : toutes les réponses doivent être justifiées.

**Exercice 1.** Les diagonales d'un polygone régulier sont les segments qui relient deux sommets non consécutifs. Par exemple, un carré possède deux diagonales, et un pentagone régulier possède cinq diagonales.

1. Combien de diagonales un polygone régulier à 6 côtés possède-t-il?
2. On fixe  $N \geq 4$ . Combien de diagonales un polygone régulier à  $N$  côtés possède-t-il? (Vérifiez votre résultat avec les calculs précédents!)

**Exercice 2.** On jette deux dés à six faces équilibrés.

1. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un cinq, sachant que la somme des deux dés est égale à dix?
2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un cinq, sachant que les résultats des deux dés sont différents?

**Exercice 3.** On considère une pièce de monnaie truquée, qui a une probabilité  $1/3$  de retomber sur pile, et une probabilité  $2/3$  de retomber sur face. On joue au jeu suivant. Le joueur paye 5 euros pour avoir le droit de jouer. Dans ce cas, il lance trois fois la pièce et gagne 6 euros à chaque fois qu'il obtient pile. On appellera  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de pile.

1. Quelles valeurs peut prendre  $X$ ? Donner la loi de  $X$ .
2. Calculer l'espérance de  $X$ .
3. Est-il rentable de jouer?

**Exercice 4.** Une compagnie d'assurances a classé ses assurés en trois catégories suivant le risque : faible, moyen, et haut. Les statistiques montrent que la probabilité d'avoir un accident sur une période d'un an sont de 5%, 15% et 30% dans ces trois catégories. D'autre part on observe que 20% des assurés sont dans la catégorie à bas risque, 50% à risque moyen, et 30% à haut risque.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un accident (sur la période d'un an)?
2. Un certain assuré n'a pas d'accident sur la période d'un an. Quelle est la probabilité qu'il appartienne à la catégorie de risque faible?

**Exercice 5.** Trois chasseurs tirent simultanément sur 3 canards. On suppose que chaque chasseur, indépendamment des autres, choisit un canard au hasard et le tue. On appelle  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de canards tués.

1. Calculer la loi de  $N$ .
2. Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(N)$ .

**Exercice 6.** On définit une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la façon suivante : si  $t < -1$  ou  $t > 1$ , alors  $g(t) = 0$ . Par contre, si  $t \in [-1, 1]$ , alors  $g(t) = (1 - t^2)^2$ .

1. Que vaut  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ ?
2. Soit  $C$  la constante telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} Cg(t) dt = 1$ . Dans la suite, on définit la fonction  $f$  par  $f(t) = Cg(t)$  pour tout  $t$ . Montrer que  $f$  est une densité de variable aléatoire réelle continue, que l'on note  $X$ .
3. Calculer l'espérance de  $X$ .
4. Calculer la variance de  $X$ .