Contrôle 3 - Lundi 31 mai 2021
Durée : 2h

Les matériels électroniques et les documents ne sont pas autorisés pendant la composition. Le soin apporté à la précision des justifications et à la rédaction sera un critère important d'évaluation.

Exercice 1 (5 points) Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, 5\}$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$. (1 point)
   $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = i) = 5 \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}\right) = 1/5$
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq Y)$. (2 points)
   On vérifie que sur les 25 résultats possibles pour le couple (X, Y), il y en a 15 pour lesquels $X \geq Y$. Donc $\mathbb{P}(X \geq Y) = 15/25 = 3/5$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$. (2 points)
   Pour chaque $i \in \{2, 3, \ldots, 10\}$, on compte le nombre de valeurs possibles possibles pour le couple (X, Y) telles que $X + Y = i$. On en déduit que $\mathbb{P}(X + Y = 2) = 1/25, \mathbb{P}(X + Y = 3) = 2/25, \mathbb{P}(X + Y = 4) = 3/25, \mathbb{P}(X + Y = 5) = 4/25, \mathbb{P}(X + Y = 6) = 5/25, \mathbb{P}(X + Y = 7) = 4/25, \mathbb{P}(X + Y = 8) = 3/25, \mathbb{P}(X + Y = 9) = 2/25, \mathbb{P}(X + Y = 10) = 1/25$.

Exercice 2 (4 points) Sur une route où la vitesse est limitée à 80 km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les automobiles pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillies soient distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec une moyenne m de 72 km/h et un écart-type σ de 8 km/h, répondez aux questions suivantes.

1. Quelle est la proportion de conducteurs qui devront payer une amende pour excès de vitesse ? (2 points)
   Notons X la variable aléatoire représentant la vitesse d'une voiture. Si Z est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors X a même loi que $72 + 8Z$. Donc $\mathbb{P}(X \geq 80) = \mathbb{P}(72 + 8Z \geq 80) = \mathbb{P}(Z \geq 1) = 1 - F_Z(1) \approx 0.16$.
2. Sachant qu'en plus de l'amende, un excès de plus de 8 km/h implique un retrait de points, quelle est la proportion des conducteurs qui vont avoir un retrait de points, parmi ceux qui vont avoir une amende ? (2 points)
   On s'intéresse à $\mathbb{P}(X \geq 88 | X \geq 80) = \mathbb{P}(X \geq 88)/\mathbb{P}(X \geq 80) = \mathbb{P}(Z \geq 2)/\mathbb{P}(Z \geq 1) \approx 0.02/0.16 = 1/8$.

On pourra utiliser les valeurs suivantes de la fonction de répartition F_Z d'une variable aléatoire Z de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$: $F_Z(1) \approx 0.84, \quad F_Z(2) \approx 0.98$.

Exercice 3 (5 points) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour chaque $n \geq 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n, de sorte que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$, et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$. On pose :

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}.$$

1. Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$ et $V(S_n)$ à l'aide des paramètres $p_1, \ldots, p_n$. (2 points)
   Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(S_n) = \big(\mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)\big)/n = (p_1 + \ldots + p_n)/n$, et comme les variables aléatoires sont indépendantes, $V(S_n) = (V(S_1) + \ldots + V(S_n))/n^2 = (p_1(1 - p_1) + \ldots + p_n(1 - p_n))/n^2$.

2. En observant que $p_i(1-p_i) \leq 1$, montrer que $V(S_n) \leq 1/n$. (1 point)
   $V(S_n) = (p_1(1-p_1) + \ldots + p_n(1-p_n))/n^2 \leq (n \times 1)/n^2 = 1/n$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que : $\mathbb{P}((S_n - \mathbb{E}(S_n))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} V(S_n)$. (1 point)
   D'après l'inégalité de Markov, comme $(S_n - \mathbb{E}(S_n))^2$ est une variable aléatoire positive, on a $\mathbb{P}((S_n - \mathbb{E}(S_n))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}((S_n - \mathbb{E}(S_n))^2)$. Or, $\mathbb{E}((S_n - \mathbb{E}(S_n))^2) = V(S_n)$, d'où le résultat.
4. Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ et donc que $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. (1 point)
   On a $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((S_n - \mathbb{E}(S_n))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ d'après les deux questions précédentes, et $\frac{1}{n\varepsilon^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 (16 points : 1 point par question) Une société propose un jeu en ligne, pour lequel l'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes. Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche alors 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :
- H : "les trois jetons sont alignés horizontalement".
- V : "les trois jetons sont alignés verticalement".
- D : "les trois jetons sont alignés en diagonale".
- N : "les trois jetons ne sont pas alignés".

1. (a) Quel est le nombre de positionnements possibles des trois jetons sur la grille ?
   Réponse : $\binom{9}{3} = 84$
   (b) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(D)$ des événements H, V, D.
   $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(V) = 3/84$, et $\mathbb{P}(D) = 2/84$
   (c) En déduire que $\mathbb{P}(N) = 19/21$.
   $\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(D) = 1 - 8/84 = 1 - 2/21 = 19/21$
2. La société peut s'attendre à ce que 10 000 parties soient jouées au total au cours d'une journée.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la $i$ème partie. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Z_i)$ de Z_i.
   $\mathbb{E}(Z_i) = 2 \times \frac{19}{21} - 18 \times \frac{2}{21} = 2/21$
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?
   $10000 \times \frac{2}{21}$
3. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 2/21$
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X. $\mathbb{E}(X) = np = 200/21$ et $V(X) = np(1-p) = \frac{200}{21} \times \frac{19}{21}$

(c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
$T = 18X - 2(100 - X) = 20X - 200$

4. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire Y.
   Y suit une loi géométrique de paramètre $p = 2/21$
   (b) Indiquer l'espérance de Y.
   $\mathbb{E}(Y) = 1/p = 21/2$
   (c) Pour un entier naturel k, que vaut la probabilité p_k que le joueur doive jouer au plus k parties avant de gagner pour la première fois ?
   $p_k = 1 - (19/21)^k$

5. On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(\mathrm{A}, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement "la fonction aléatoire est déréglée" et on pose $\mathbb{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.
   (a) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_\Delta(H)$, $\mathbb{P}_\Delta(V)$ et $\mathbb{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
   $\mathbb{P}_\Delta(H) = \mathbb{P}_\Delta(V) = \mathbb{P}_\Delta(D) = 1/28$
   (b) En déduire que $\mathbb{P}_\Delta(N) = 25/28$.
   $\mathbb{P}_\Delta(N) = 1 - \mathbb{P}_\Delta(H) - \mathbb{P}_\Delta(V) - \mathbb{P}_\Delta(D) = 25/28$
   (c) Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\Delta, \overline{\Delta})$ pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à :
   $$P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}.$$
   $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N|\Delta)\mathbb{P}(\Delta) + \mathbb{P}(N|\overline{\Delta})\mathbb{P}(\overline{\Delta}) = \frac{25}{28}x + \frac{19}{21}(1-x) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$ (après simplification)
   (d) Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance du gain soit positive.
   $\mathbb{E}(G) = 2\left(\frac{-x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(\frac{x}{84} + \frac{2}{21}\right) = \frac{-20x}{84} + \frac{2}{21}$, et donc $\mathbb{E}(G) \geq 0 \iff x \leq \frac{2}{5}$
   (e) On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?
   La valeur recherchée vaut $\frac{3x/28}{(x/84)+(2/21)} = \frac{9x}{x+8}$