Chapitre 3
Variables aléatoires discrètes

Cours d'Irène Marcovici - L2 Informatique

29 mars 2021

Table des matières

1 Variables aléatoires

1.1 Définitions

Définition (Variable aléatoire réelle discrète)**.**

On appelle **variable aléatoire réelle discrète** un application X de Ω dans $\mathbb{R}$, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
Si $x \in X(\Omega)$, alors l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega\,;X(\omega) = x\}$ est un événement de Ω.

⚠ On note souvent les variables aléatoires avec les lettres X, Y, Z... Il faut garder en tête que malgré leur nom (variables), ce sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1. Si on lance trois dés équilibrés, on peut noter X_1 le résultat du premier dé, X_2 le résultat du second et X_3 le résultat du troisième.
Formellement, on pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$. Avec ce formalisme,

$$\begin{array}{rcl} X_1 : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} X_2 : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} X_3 : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & z \end{array}.$$

L'événement $X_1 = 3$ est alors $\{\omega \in \Omega \,:\, X_1(\omega) = 3\}$. Autrement dit, c'est $\{(3, y, z)\,;\, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ ou encore $\{3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ainsi,

$$P(X_1 = 3) = P\big(\{3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big) = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}.$$

On peut aussi s'intéresser par exemple à la somme des trois dés en regardant $X_1 + X_2 + X_3$.

Remarque. En notation probabiliste, l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega\,; X(\omega) \in A\}$ est noté $\{X \in A\}$.
Ainsi, dans l'exemple précédent,

$$P\big(X_2 \in \{2, 5, 6\}\big) = P\big(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{2, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big) = \frac{6 \times 3 \times 6}{6^3} = \frac{1}{2}.$$

Proposition.

Soit X une v.a. réelle discrète, alors $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P\left(X = x\right) = 1.$$

Démonstration. Si x et y sont deux éléments distincts de Ω, les événements $\{X = x\}$ et $\{X = y\}$ sont incompatibles. De plus,

$$\bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} = \{X \in X(\Omega)\} = \Omega.$$

□

1.2 Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, on appelle **loi de X** la donnée de $X\left(\Omega\right)$ et de la suite (p_k) définie par

$$p_k = P\left(X = x_k\right),$$

avec x_k parcourant $X\left(\Omega\right)$.

Exemple 2. On lance deux dés équilibrés, on note X_1 le résultat du premier dé, X_2 le résultat du second. Soit $Y = X_1 + X_2$. On a $Y(\Omega) = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$. On peut représenter la loi de Y par un tableau.

1.3 Fonction de répartition

Définition (Fonction de répartition).

Soit X une variable aléatoire, on appelle **fonction de répartition de la variable X** la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Exemple 3. Déterminer la fonction de répartition de la variable Y de l'exemple précédent (somme de deux dés).

1.3.1 Propriétés d'une fonction de répartition

Proposition.

Si F_X est la fonction de répartition d'une v.a. X, alors

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. F_X est continue à droite sur $\mathbb{R}$,
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$,
4. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

1.3.2 Lien entre loi et fonction de répartition

Proposition.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire :

$$F_X(x) = \sum_{x_k \in X(\Omega), x_k \leqslant x} P(X = x_k),$$

et réciproquement

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

Démonstration. La première relation découle directement du fait que les x_k sont disjoints et de l'égalité

$$[X \leqslant x] = \bigcup_{x_k \in X(\Omega), x_k \leqslant x} [X = x_k].$$

La deuxième relation découle de la première, qui nous donne :

$$F_X(x_k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) = P(X = x_k) + F_X(x_{k-1}).$$

□

Exemple 4. Une urne contient p boules numérotées de 1 à p. On tire n boules avec remise, et on note X le plus grand des numéros tirés. Quelle est la loi de X ?
Soit X_i la v.a. correspondant au numéro du i-ème lancer. On a alors $X = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} X_i$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la définition du max et l'indépendance donnent :

$$F_X(t) = P(X \leqslant t) = P\left(\forall i \in [\![1, n]\!], X_i \leqslant t\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t).$$

Or $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $F_{X_i}(k) = P(X_i \leqslant k) = \frac{k}{p}$. Donc

$$F_X(k) = \left(\frac{k}{p}\right)^n.$$

La proposition précédente donne alors : $\forall k \in [\![1, p]\!]$,

$$P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \left(\frac{k}{p}\right)^n - \left(\frac{k-1}{p}\right)^n.$$

1.4 Fonction d'une variable aléatoire

Proposition (Fonction d'une variable aléatoire)**.**

Soit X une v.a. réelle discrète et f une fonction réelle dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$. Alors, la fonction $Y = f(X)$ définie sur Ω par

$$Y(\omega) = f(X(\omega))$$

est également une variable aléatoire réelle discrète.

Proposition (Loi de Y)**.**

Pour tout $y_i \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y_i) = \sum_{x_k \in X(\Omega), f(x_k) = y_i} P(X = x_k).$$

2 Moments

2.1 Espérance

Définition (Espérance)**.**

Soit X une v.a. discrète. On dit que X est intégrable si :

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| \, P(X = x_k) < +\infty.$$

On appelle alors **espérance** de X le nombre réel

$$E(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k \, P(X = x_k).$$

Remarque. Si $X(\Omega)$ est fini, X est forcément intégrable.
Dans le cas où $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(X = k).$$

Proposition.

Si $X(\Omega) \subset [a, b]$, alors $a \leqslant E(X) \leqslant b$.

Démonstration. On a :
$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} a\, P(X = x_k) \leqslant E(X) \leqslant \sum_{x_k \in X(\Omega)} b\, P(X = x_k)$$
. □

Proposition (Inégalité de Markov)**.**

Soit X une v.a. discrète prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout réel a strictement positif,
$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Démonstration. Soit $a > 0$. Le calcul de l'espérance de X peut se décomposer en :
$$E(X) = \sum_{x_k < a} x_k\, P(X = x_k) + \sum_{x_k \geqslant a} x_k\, P(X = x_k).$$
Le premier terme est positif et le deuxième est supérieur ou égal à $a\, P(X \geqslant a)$. □

2.2 Théorème de transfert

Théorème (Théorème de transfert)**.**

Soit X une v.a. discrète et f une fonction réelle telle que dont le domaine de définition contient $X(\Omega)$, et soit $Y = f(X)$. Alors, si Y est intégrable,
$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k)\, P(X = x_k).$$

Démonstration. Admis. □

Proposition (Linéarité de l'espérance)**.**

Soient X et Y deux v.a. intégrables définies sur le même univers Ω, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Démonstration. Admis. □

Application : si on lance deux dés, l'espérance de la somme vaut 7.

2.3 Variance

Définition (Variance)**.**

Soit X une v.a. On appelle **variance** de X la quantité

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^2 \, P(X = x_k).$$

et **écart-type** de X la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 5. Faire le calcul pour un lancer de dé.

Proposition.

Soient a et b deux réels et X une v.a., alors

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
V(aX + b) &= E\left((aX + b - E(aX + b))^2\right) \\
&= E\left((aX + b - aE(X) - b)^2\right) \\
&= a^2 E((X - E(X))^2) \\
&= a^2 V(X)
\end{aligned}$$

□

Proposition.

Soit X une v.a. Alors :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\
&= E(X^2 + E(X)^2 - 2E(X)X) \\
&= E(X^2) + E(E(X)^2) - 2E(E(X)X) \\
&= E(X^2) + E(X)^2 - 2E(X)E(X) \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}$$

□

Définition (Variable aléatoire centrée réduite associée à une v.a.)**.**

On appelle **variable aléatoire centrée réduite associée** à une v.a. X la variable notée X^* telle que :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}.$$

3 Indépendance de variables aléatoires

3.1 Définitions et caractérisation

Définition.

Deux v.a. discrètes X et Y sont **indépendantes** si pour tout $x \in X(\Omega)$, pour tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad P\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) = P(X = x)\, P(Y = y). \tag{1}$$

Plus généralement, les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont indépendantes si pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres réels, les événements $X_i = x_i$, $i \in I$, sont indépendants, c'est-à-dire si pour tout sous-ensemble non vide $\{j_1, \dots, j_p\}$ de I et tous $x_1 \in X_{j_1}(\Omega)$, $\dots$, $x_p \in X_{j_p}(\Omega)$, on a

$$P\big(X_{j_1} = x_1 \text{ et } X_{j_2} = x_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_{j_p} = x_p\big) = P\big(X_{j_1} = x_1\big)\, P\big(X_{j_2} = x_2\big) \dots P\big(X_{j_p} = x_p\big).$$

Proposition.

Les v.a. discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = P(X \in A)\, P(Y \in B). \tag{2}$$

Démonstration. Il est clair que si (2) est satisfaite, alors (1) est satisfaite : il suffit de prendre $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$ dans (2) pour obtenir (1).
Réciproquement, supposons que X et Y vérifient (1). Soit $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$. Comme

$$\{X \in A\} \cap \{Y \in B\} = \bigsqcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{X = x \text{ et } Y = y\}$$

et comme l'union est finie ou dénombrable (car A et B sont finis ou dénombrables vu que X et Y sont discrètes), on a

$$\begin{aligned}
P\big(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}\big) = P\left(\bigsqcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \{X = x \text{ et } Y = y\}\right) &= \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} P\big(X = x \text{ et } Y = y\big) \\
&= \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} P(X = x)\, P(Y = y) \qquad \text{car on a supposé (1)} \\
&= \left(\sum_{x \in A} P(X = x)\right) \left(\sum_{y \in B} P(Y = y)\right) = P(X \in A)\, P(Y \in B).
\end{aligned}$$

Ainsi, X et Y satisfont (2). □

Proposition.

Les v.a. *discrètes* X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telles que } f(X) \text{ et } g(Y) \text{ soient des v.a.}, \quad f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes.} \tag{3}$$

Démonstration. Il est clair que si (3) est satisfaite, alors X et Y sont indépendantes : il s'agit de prendre pour f et g les fonctions identité $s \in \mathbb{R} \mapsto s$.
Réciproquement, supposons que X et Y sont indépendantes et montrons (3). Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(X)$ et $g(Y)$ soient des v.a. Notons $X^\star = f(X)$ et $Y^\star = g(Y)$. On veut montrer que $X^\star$ et $Y^\star$ sont indépendantes, c'est-à-dire

$$\forall x^\star \in X^\star(\Omega), \quad \forall y^\star \in Y^\star(\Omega), \quad P\big(\{X^\star = x^\star\} \cap \{Y^\star = y^\star\}\big) = P(X^\star = x^\star)\, P(Y^\star = y^\star).$$

Soient $x^\star \in X^\star(\Omega)$ et $y^\star \in Y(\Omega)$. Notons que

$$\{X^\star = x^\star\} = \{f(X) = x^\star\} = \big\{X \in f^{-1}(\{x^\star\})\big\} \quad \text{et de même} \quad \{Y^\star = y^\star\} = \big\{Y \in f^{-1}(\{y^\star\})\big\}.$$

Comme X et Y sont indépendantes, elles vérifient (2), d'où

$$\begin{aligned} P\big(\{X^\star = x^\star\} \cap \{Y^\star = y^\star\}\big) &= P\Big(\big\{X \in f^{-1}(\{x^\star\})\big\} \cap \big\{Y \in f^{-1}(\{y^\star\})\big\}\Big) \\ &= P\Big(\big\{X \in f^{-1}(\{x^\star\})\big\}\Big)\, P\Big(\big\{Y \in f^{-1}(\{y^\star\})\big\}\Big) \\ &= P(X^\star = x^\star)\, P(Y^\star = y^\star), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait montrer. □

3.2 Espérance du produit et variance de la somme

Proposition.

Soient X et Y deux v.a. discrètes indépendantes.
- Si X et Y sont intégrables, alors XY aussi et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

- Si X et Y sont de carré intégrable, $X + Y$ aussi et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

⚠ Ces deux égalités sont des conditions nécessaires d'indépendance, non des conditions suffisantes.

Démonstration. On admet le premier point. Le deuxième point en découle alors car :

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\ &= E(X^2 + Y^2 + 2XY) - (E(X)^2 + E(Y)^2 + 2E(X)E(Y)) \\ &= V(X) + V(Y) + 2(E(XY) - E(X)E(Y)). \end{aligned}$$

□

Cette proposition se généralise aisément à une famille de variables aléatoires indépendantes.

4 Lois discrètes usuelles

4.1 Variable aléatoire certaine

Définition (Variable aléatoire certaine)**.**

Une variable aléatoire X est **certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur a. On a alors

$$P(X = a) = 1.$$

Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine)**.**

Si X est une variable aléatoire certaine telle que $X(\Omega) = \{a\}$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.

Démonstration.
$$E(X) = aP(X = a) = a,$$
et
$$V(X) = (a - E(X))^2 P(X = a) = 0^2 \times 1 = 0.$$
□

Théorème (Variable aléatoire de variance nulle)**.**

Si X est une variable aléatoire finie de variance nulle, alors il existe un réel a pour lequel $P(X = a) = 1$.

Démonstration. On suppose que $V(X) = 0$. Alors, $(X - E(X))^2$ est une v.a. d'espérance nulle. Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, on a alors par le théorème de transfert :
$$\sum_k (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) = 0.$$
Or pour tout k, les termes $(x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$ ne prennent que des valeurs positives, donc ils sont tous nuls. Donc pour tout k, soit $(x_k - E(X))^2 = 0$ et $x_k = E(X)$, soit $P(X = x_k) = 0$. Comme $\sum_k P(X = x_k) = 1$, il existe au moins un k_0 tel que $P(X = x_{k_0}) \neq 0$. Mais alors, pour tout $k \neq k_0$, $x_k \neq E(X)$, et donc $(x_k - E(X))^2 \neq 0$, d'où $P(X = x_k) = 0$. Ainsi,
$$P(X = x_{k_0}) = 1.$$
□

4.2 Loi de Bernoulli

Définition (Loi de Bernoulli)**.**

Une variable aléatoire X suit la loi **de Bernoulli** de paramètre p lorsque $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
$$P(X = 1) = p.$$
On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque. On a alors $P(X = 0) = 1 - p$.

Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire de Bernoulli)**.**

Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Démonstration. Il suffit de l'écrire :
$$E(X) = 1P(X = 1) + 0P(X = 0) = p,$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= (1-E(X))^2 P(X=1) + (0-E(X))^2 P(X=0) \\
&= (1-p)^2 p + p^2(1-p) \\
&= p(1-p)(1-p+p) = p(1-p).
\end{aligned}
$$

□

Exemple 6. On suppose que $X \sim \mathcal{B}(p)$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X^2 ?
X^2 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, et $P(X^2 = 1) = P(X = 1) = p$ comme X est à valeurs positives. Donc $X^2 \sim \mathcal{B}(p)$.

Définition (Variable indicatrice d'un événement)**.**

Soit E un événement de Ω. La v.a. X telle que

$$
\left\{ \begin{array}{lllll} X(\omega) & = & 1 & \text{si} & \omega \in E \\ X(\omega) & = & 0 & \text{si} & \omega \notin E \end{array} \right.
$$

est appelée la **variable indicatrice de l'événement** E. On la note $\mathbb{1}_E$.

Remarque. La variable indicatrice $\mathbb{1}_E$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(\omega \in E)$.

4.3 Loi binomiale

Définition (Loi binomiale)**.**

Une variable aléatoire X suit la loi **binomiale** de paramètres $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$$
P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque. $X \sim \mathcal{B}(1, p) \Leftrightarrow X \sim \mathcal{B}(p)$.

Théorème.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. La variable $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit alors la loi binomiale de paramètres n et p.

Autrement dit, si on effectue n lancers successifs indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p, le nombre total de piles obtenus suit une loi binomiale de paramètre n et p (on prend pour X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce tombe sur pile au i-ème tirage, et 0 sinon).

Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire binomiale)**.**

Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Démonstration. L'expression de l'espérance découle de la linéarité de l'espérance.
Pour la variance, on utilise le fait que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. □

4.4 Loi géométrique

Définition.

Une variable aléatoire X suit la loi **géométrique** de paramètre $p \in [0,1]$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$P(X = k) = p\,(1-p)^{k-1}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Si on effectue des lancers successifs indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p, le temps d'apparition du premier pile suit une loi géométrique de paramètre p.

Proposition (Espérance et variance d'une variable aléatoire géométrique)**.**

Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $E(X) = 1/p$ et $V(X) = (1-p)/p^2$.

Application (Problème du collectionneur de coupons)**.** Des boites de céréales contiennent chacune une vignette parmi n vignettes possibles. On veut posséder au moins un exemplaire de chacune des vignettes. Combien faut il acheter en moyenne de boites de céréales pour cela ?

On note T la variable aléatoire qui représente le nombre de vignettes achetées avant d'obtenir les n vignettes de la collection.
On peut considérer que T est un temps : à chaque pas de temps une nouvelle vignette est achetée.
Pour $i = 1, \ldots, n$, on note T_i le temps nécessaire pour avoir une $i$ème nouvelle vignette dans la collection.
On a

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n,$$

où $T_1 = 1$, et pour $i \geqslant 1$, T_i suit une loi géométrique de paramètre $\frac{n-(i-1)}{n}$.
En effet, lorsque l'on a i vignettes, la probabilité d'en trouver une nouvelle est $\frac{n-(i-1)}{n}$. Donc $E(T_i) = \frac{n}{n-(i-1)}$. Et par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
E(T) &= E(T_1) + E(T_2) + \ldots + E(T_n) \\
&= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \ldots + \frac{n}{1} \\
&= n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\
&= n \log n + \gamma n + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

4.5 Loi de Poisson

Définition.

Une variable aléatoire X suit la loi **de Poisson** de paramètres $\lambda > 0$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Proposition (Espérance et variance d'une loi de Poisson)**.**

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

La loi de Poisson s'obtient comme limite de lois binomiales. Précisément, si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et $np_n \to_{n\to\infty} \lambda$, alors

$$P(X_n = k) \to_{n\to\infty} P(X = k).$$

On peut par exemple utiliser une loi de Poisson pour modéliser le nombre de bus arrivant en 1h si le temps d'attente moyen est $1/\lambda$ h.
Si on suppose que pendant chaque petit intervalle de temps de longueur $1/n$, il y a une probabilité λ/n de voir arriver un bus (indépendamment pour des intervalles différents), on retrouve l'interprétation de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales.

Proposition.

Si X et Y sont deux variables indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

□

Idée : X et Y représentent deux lignes de bus indépendantes...

4.6 Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$

Définition (Loi uniforme)**.**

Une variable aléatoire X suit la loi **uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Proposition (Espérance et variance d'une variable uniforme)**.**

Si X est une variable uniforme telle que $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Démonstration. Il suffit de faire le calcul :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2},$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right) \\
&= \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}
$$

$\square$

On peut généraliser la définition de la loi uniforme au cas d'un intervalle $[\![a, b]\!]$ où $a, b \in \mathbb{Z}$.