Feuille 2 : Indépendance et probabilités conditionnelles

Notion d'indépendance

Exercice 1. Soient A, B, C des évènements. Pour chacune des assertions suivantes, donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

1. A est indépendant de A si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.
2. A est indépendant de B si et seulement si A est indépendant de $\overline{B}$.
3. Si A est indépendant de B et C, alors il l'est de $B \cup C$.
4. Si A, B et C sont indépendants, alors A est indépendant de $B \cup C$.
5. Si A est indépendant de B et B de C et si A l'est de $B \cap C$, alors C est indépendant de $A \cap B$.

Exercice 2. Montrer les propriétés suivantes quand elles sont vraies ; dans le cas contraire, construire un contre-exemple.

1. $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{A}|B) = 1$.
2. $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|\overline{B}) = 1$.
3. $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{A}|\overline{B}) = 1$.

Exercice 3. Montrer que si A et B sont deux événements, $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = -\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(\overline{B})$. En déduire que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercices variés...

Exercice 4. On lance un dé à six faces. Est-ce que les évènements « obtenir un résultat pair » et « obtenir un résultat divisible par 3 » sont indépendants ?

Exercice 5. La probabilité pour qu'un étudiant A résolve un certain problème est de $1/2$; pour un autre étudiant B cette probabilité est de $2/3$. Quelle est la probabilité que le problème soit résolu par au moins un des deux étudiants, s'ils travaillent séparément ?

Exercice 6. On admet qu'un chasseur tue un renard d'un coup de fusil une fois sur trois. Six chasseurs font une battue et tirent en même temps sur le renard (on admettra que les tirs sont mutuellement indépendants). Calculer la probabilité que le renard soit tué.

Exercice 7. Une boîte contient r boules rouges et b boules blanches. On tire deux boules sans remise.
a. Si la première est rouge, quelle est la probabilité que la 2ème le soit ?
b. On doit parier sur le résultat du premier tirage, qui a déja eu lieu en cachette, et on connaît le résultat du deuxième tirage (qui a donné rouge) : calculer la probabilité que la première boule ait été rouge, en tenant compte de cette indication.

Exercice 8. Il existe deux routes entre Metz et Nancy, et deux routes entre Nancy et Épinal. Chaque route est bloquée par la neige avec probabilité p, indépendamment des autres routes. Quelle est la probabilité qu'on puisse aller de Metz à Épinal ?

Exercice 9. Mes voisins ont deux enfants. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles :

1. si je n'ai pas d'autre information,
2. sachant que j'ai rencontré l'aînée des deux enfants et que c'est une fille,
3. sachant que l'un des deux enfants est une fille.

Exercice 10. Soit B_1 et B_2 deux boîtes contenant respectivement r_1 boules rouges et n_1 boules noires, r_2 boules rouges et n_2 boules noires. On tire au hasard (c'est-à-dire avec équiprobabilité) l'une des 2 boîtes, et ensuite, dans la boîte choisie, on tire une boule, les choix à l'intérieur de la boîte étant à nouveau équiprobables. Sachant qu'on a tiré une boule rouge, quelle est la probabilité de l'avoir tirée de la boîte B_1 ?

Exercice 11. À une question d'examen, quatre réponses possibles sont proposées au candidat, et une seule est correcte. Si un étudiant a travaillé cette question, il est sûr de répondre correctement, sinon il choisit une des 4 réponses au hasard. Le programme de l'examen comporte 1000 questions et l'étudiant en a travaillé 600.

L'étudiant ayant répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité pour qu'il ait travaillé cette question ?

Exercice 12. Dans un restaurant de 50 places, la probabilité pour qu'une personne ayant réservé une table, ne vienne pas est de $1/5$. Un jour, le patron a pris 52 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans une situation embarrassante ?

Exercice 13. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6 soit supérieure à 90 % ? (les lancers successifs sont supposés indépendants)

Exercice 14. Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On tire au hasard n jetons (avec $1 \leq n \leq N$) de cette urne, sans remise. On appelle X le plus petit numéro tiré. Quelle est la probabilité que X soit égal à k, en fonction de k, pour k compris entre 1 et $N - n + 1$?

Exercice 15. Une personne sur 10 a une propension génétique à devenir alcoolique. Si c'est le cas, elle deviendra alcoolique avec probabilité 0,3 ; sinon, elle deviendra alcoolique avec probabilité 0,05 (données imaginaires !).

Sachant qu'une personne est alcoolique, quelle est la probabilité qu'elle n'ait pas de propension génétique à le devenir ?

Exercice 16. L'étudiant X vient en TD deux fois sur trois, et quand il vient, il arrive une fois sur deux à l'heure, les autres fois il a au moins vingt minutes de retard. Il est 8h40, le TD commence à 8h30. Quelle chance a le professeur de voir encore arriver X ?

Exercice 17. Toutes les minutes un phare émet un signal lumineux avec probabilité p ($0 < p < 1$). Un observateur lointain détecte le signal, lorsque celui-ci est émis, avec la probabilité ℓ. Calculer la probabilité qu'à l'instant k, l'observateur observe pour la première fois le signal.