

# Corrigé

---

## Exercice 1 1)

**Algorithme** Valeur\_absolue( $x$ )  
si  $x < 0$  :  
     $|x \leftarrow -x$   
Renvoyer  $x$ .

2)

**Algorithme** Factorielle( $n$ )  
 $a \leftarrow 1$   
pour  $i$  de 1 à  $n$  :  
     $| a \leftarrow ai$   
Renvoyer  $a$ .

3)

**Algorithme** Puissance( $n, x$ )  
 $a \leftarrow 1$   
pour  $i$  de 1 à  $n$  :  
     $| a \leftarrow ax$   
Renvoyer  $a$ .

**Algorithme** Puissance\_rec( $n, x$ )  
si  $n = 0$  :  
     $|$  Renvoyer 1 :  
sinon :  
     $|$  Renvoyer  $x$ Puissance\_rec( $n - 1, x$ )

4)

**Algorithme** Somme\_serie( $n, x$ )  
 $a \leftarrow 0$   
pour  $i$  de 0 à  $n$  :  
     $| a \leftarrow a + \text{Puissance}(i, x) / \text{Factorielle}(i)$   
Renvoyer  $a$ .

**Algorithme** Somme\_serie2( $n, x$ )  
 $a \leftarrow 0$   
 $y \leftarrow 1$   
pour  $i$  de 1 à  $n$  :  
     $| y \leftarrow y \cdot \frac{x}{i}$   
     $| a \leftarrow a + y$   
Renvoyer  $a$ .

## Exercice 2

1)

**suite\_u**( $n$ ) :  
     $a \leftarrow 1$    #  $a$  correspond à  $u_n$   
     $b \leftarrow 2$    #  $b$  correspond à  $u_{n+1}$   
    Pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  :  
         $| a, b \leftarrow b, 3a + 2b$   
    Si  $n = 0$  :  
         $|$  Renvoyer  $a$   
    Sinon :  
         $|$  Renvoyer  $b$ .

2)

```

suite_u_rec(n) :
    Si  $n \leq 1$  :
        | Renvoyer  $n + 1$ 
    Sinon :
        | Renvoyer  $3 * \text{suite\_u\_rec}(n - 2) + 2 * \text{suite\_u\_rec}(n - 1)$ .

suite_v(n) :
    Si  $n \leq 1$  :
        | Renvoyer  $1 + 2n$ 
3) sinon si  $n \% 2 = 0$  :
        | Renvoyer  $(\text{suite\_v}(n/2))^2 + 5$ 
    sinon :
        | Renvoyer  $(\text{suite\_v}((n - 1)/2)) * (\text{suite\_v}((n - 1)/2 + 1)) + 7$ .

```

**Exercice 3 :** cf cours.

#### Exercice 4

Dans le programme suivant, Ent désigne la fonction partie entière inférieure.

```

solutions() :
     $L \leftarrow []$ 
    Pour  $y$  de 1 à 100
        | Si  $\text{Ent}(\sqrt{1 + 2y^2}) = \sqrt{1 + 2y^2}$  :
            |  $L \leftarrow L + [(\sqrt{1 + 2y^2}, y)]$ 
    Renvoyer  $L$ .

```

#### Exercice 5

La suite  $(u_n)$  est strictement croissante car  $u_{n+1} - u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2 n!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right) < 0$ . La suite  $(v_n)$  est donc strictement décroissante. Comme  $v - u$  tend vers 0, les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n < e < v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ , donc  $0 < e - u_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ . On peut donc utiliser le programme suivant :

```

approximation_e( $\epsilon$ ) :
     $s \leftarrow 2$ 
     $P \leftarrow 1$ 
     $n \leftarrow 1$ 
    Tant que  $1/(P * n) > \epsilon$  :
        |  $n \leftarrow n + 1$ 
        |  $P \leftarrow P * n$ 
        |  $s \leftarrow s + 1/P$ 
    Renvoyer  $s$ .

```

#### Exercice 6

1) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = -3$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Alors comme  $f$  est croissante,  $(u_n)$  est monotone. De plus,  $u_1 = -\frac{1}{2}$ , donc  $(u_n)$  est croissante et admet une limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $\ell$  est finie, alors  $u_{n+1} = f(u_n) \rightarrow f(\ell)$  (car  $f$  est continue) et  $u_{n+1} \rightarrow \ell$ , donc  $\ell = f(\ell)$ , donc  $\ell = 2$ . Ainsi, soit  $(u_n)$  est majorée par 2, soit  $u_n \rightarrow +\infty$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n \leq 2$ . Alors  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$ , donc  $u_{n+1} \leq 2$ . Par récurrence, on en déduit que  $(u_n)$  est majorée par 2, et donc qu'elle converge en croissant vers 2. En particulier, l'algorithme termine, puisque  $A = u_N$ , après chaque passage dans la boucle.

```

Algorithme  Lancers
     $A \leftarrow \text{AléaEntre}(1, 6)$ 
     $I \leftarrow 1$ 
2) Tant que  $A \neq 6$ 
    |  $I \leftarrow I + 1$ 
    |  $A \leftarrow \text{AléaEntre}(1, 6)$ 
    Renvoyer  $I$ .

```

À la fin des deux étapes de la boucle « tant que »,  $I$  vaut le nombre de lancers effectués.