Examen du mardi 16 janvier 2024

durée : 2 heures

Exercice 1. *Écrire un algorithme pour calculer chacune des valeurs suivantes :*

1. *pour* $x \in \mathbb{R}$ *donné, calculer* $|x|$,
2. *pour* $n \in \mathbb{N}$ *donné, calculer* $n!$,
3. *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *donnés, calculer* x^n*, de manière itérative, puis récursive, (de manière basique, sans exponentiation rapide),*
4. *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *donnés, calculer* $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *; pour ce calcul, on donnera un algorithme basique utilisant les algorithmes précédents, et un algorithme minimisant le nombre d'opérations.*

Exercice 2.

1. *Soit* (u_n) *la suite définie comme suit :* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *et* $u_{n+2} = 3u_n + 2u_{n+1}$. *Écrire un algorithme itératif qui prend en entrée élément* $n \in \mathbb{N}$ *et qui renvoie* u_n.
2. *Écrire un algorithme récursif qui prend en entrée élément* $n \in \mathbb{N}$ *et qui renvoie* u_n.
3. *Soit* $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ *la suite définie comme suit :* $v_1 = 1$, $v_2 = 3$ *et si* $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_{2n} = v_n^2 + 5 \\ v_{2n+1} = v_n v_{n+1} + 7 \end{cases}$.
   Écrire un algorithme qui prend en entrée un élément $n \in \mathbb{N}^*$ *et qui détermine* v_n.

Exercice 3. *Soit* $L = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$*, où les* a_i *sont des entiers. On rappelle le principe du tri par sélection, pour trier la liste* L *: on cherche d'abord l'entier (ou un des entiers)* i *tel que* a_i *est le plus petit élément de la liste. On échange ensuite* a_0 *et* a_i*. On obtient alors une suite* $L_1 = [a_i, b_1, , \ldots, b_{n-1}]$*. On réitère ensuite le processus avec* $[b_1, \ldots, b_{n-1}]$*, et ainsi de suite.*

Écrire un algorithme qui prend en entrée un liste d'entiers et qui la trie, en utilisant le tri par sélection.

Exercice 4. *(équation de Pell-Fermat) On considère l'équation (E)* $x^2 - 2y^2 = 1$*, d'inconnues* $x, y \in \mathbb{N}^*$*. Écrire un algorithme qui renvoie la liste de tous les couples* (x, y) *qui sont solution de (E) et qui vérifient* $y \leq 100$.

Exercice 5.

1. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n!.n}$*. Montrer que* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes.*
2. *On admet que* (u_n) *tend vers* e*. Écrire un algorithme qui prend en entrée en réel positif* ϵ *et qui renvoie une valeur approchée à* ϵ *près de* e.

Exercice 6. *(issu du CAPES 2019)*

1. *L'algorithme suivant termine-t-il ? On justifiera soigneusement la réponse.*

Algorithme	Commentaire
$A \leftarrow -3$	$\leftarrow$ est le symbole pour l'affectation d'une variable.
$N \leftarrow 0$	
Tant que $A \leqslant 1,9$	Boucle « Tant que ».
$\quad N \leftarrow N+1$	
$\quad A \leftarrow \frac{1}{2}A + 1$	
Fin Tant que	
Afficher $N+1$	Valeur affichée par l'algorithme.

2. *On décide de lancer un dé parfaitement équilibré, dont les faces sont numérotées de* 1 *à* 6*, jusqu'à obtenir la face* 6*. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous, affichant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face* 6 *dans cette expérience aléatoire.*

Algorithme	Commentaire
$A \leftarrow$ AléaEntre(1,6)	$\leftarrow$ est le symbole pour l'affectation d'une variable. AléaEntre(1,6) génère aléatoirement et de façon équiprobable une valeur dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$I \leftarrow$ ...	La valeur affectée à la variable I est à compléter.
Tant que $A \neq 6$	Boucle « Tant que ».
Partie à compléter	
Fin Tant que	
Partie à compléter	