TP n°7 : Évaluation

Exercice 1.
1. *Écrire un programme qui prend en entrée $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie $n!$. Écrire une version itérative et une version récursive.*
2. *Écrire un programme qui prend en entrée $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.*
3. *Représenter sur un même graphe f_5, f_{10} et $\exp$ entre -10 et 10. Mettre une légende (qui indiquera à quoi correspondent chaque courbe, par exemple $y = \exp(x)$), représenter $\exp$ en rouge, f_5 en vert et f_{10} en bleu, et représenter $\exp$ avec un trait plus épais que f_5 et f_{10}.*

Exercice 2.
1. *Faire la liste des 50 premiers nombres premiers.*
2. *Un nombre premier de Sophie Germain est un nombre premier p tel que $2p+1$ est premier. Faire la liste des 50 premiers nombres premiers de Sophie Germain.*

Exercice 3. *Soit la suite de Fibonacci, définie par :*

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_n & = & u_{n-1} + u_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$

1. *Écrire un programme `Fibo_modulaire`(m,n) qui prend en entrée deux entiers positifs m, n et qui renvoie la liste des $F_i\%m$, pour $i \in [\![0, n]\!]$.*
2. *Écrire un programme `triplet(L)` qui prend en entrée une liste L de nombres $L = [l_0, \dots, l_n]$ et qui renvoie la liste des triplets de la forme (l_i, l_{i+1}, l_{i+2}), tels que $i \in [\![0, n-2]\!]$ et $l_{i+1} < l_i < l_{i+2}$.*
3. *Écrire un programme `alea`(n), qui prend en entrée un entier n et qui renvoie une liste de n éléments aléatoires entre 1 et 10^5 (on pourra utiliser la commande `random.randint`).*
4. *Si on prend un triplet de réels « au hasard » x_0, x_1, x_2, l'inégalité $x_1 < x_0 < x_2$ doit se produire une fois sur 6. Combien de triplets obtenez vous avec la commande `triplets(alea(`10^5`))` ?*
5. *Combien de triplets obtenez-vous avec la commande `triplets(fibo_modulaire(`$1000, 10^5$`))` ?*

Exercice 4. *Écrire un programme qui prend en entrée un entier m et une liste M d'entiers de $[\![0, m-1]\!]$ et qui renvoie la liste $N = [n_0, , \dots, n_{m-1}]$ telle que pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$, $n_i = |\{j \in [\![0, m-1]\!] \mid M[j] = i\}|$.*

Exercice 5.
1. *Écrire un programme qui prend en entrée deux listes triées L_1 et L_2 et qui renvoie la liste triée contenant la réunion des deux listes.*
2. *En déduire un programme qui prend une liste en entrée et qui la trie à l'aide d'un tri fusion.*

Exercice 6. *(méthode des rectangles)*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i(b-a)/n)$. On rappelle que $S_n(f) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f$ (et que $S_n(f) - \int_a^b f = O(\frac{1}{n})$). On suppose que l'on a défini une fonction f sur Python (à l'aide de la fonction def f(x) : ... return ...).

1. *Écrire un programme qui prend en entrée $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie $S_n(f)$.*
2. *Calculer $S_n(f)$ pour différentes valeurs de n, pour $f = \exp$, $a = 0$, $b = 1$. Comparer avec le résultat que l'on obtient avec la fonction `quad`(f,a,b) (après avoir importé "quad" de scipy.integrate).*
3. *Écrire un programme prenant en entrée a, b, n et qui renvoie une figure représentant le graphe de f sur $[a, b]$ ainsi que les rectangles correspondant à $S_n(f)$. Les rectangles devront être tous d'une même couleur et en pointillés.*