Exercice supplémentaires

Le plan est noté $\mathscr{P}$. Il est muni de sa distance et de son produit scalaire usuels. Il est également muni d'un repère orthonormé direct, relativement auquel on considère les coordonnées cartésiennes et les affixes.

Exercice 1. — Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$. Donner la définition mathématique des assertions suivantes :

1. f est une isométrie.
2. f est une rotation.
3. f est une homothétie.
4. f est une translation.

(L'application f est définie par l'énoncé, vous n'avez pas à la redéfinir. Tout le reste doit être défini. On demande les définitions, pas des caractérisations ou des théorèmes vérifiés par ces transformations, ni des exemples, ni des dessins.)

Exercice 2. — Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$.

1. Définir l'assertion « f est une rotation ».
2. On fixe $\Omega \in \mathbb{P}$. Définir l'assertion « f est une rotation de centre Ω ».
3. On fixe de plus un réel θ. Définir l'assertion « f est la rotation de centre Ω et d'angle θ ».
4. Définir l'assertion « f est une translation ».

Exercice 3. —

1. Montrer l'affirmation suivante : $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, |zw| = |z| \cdot |w|$.
2. L'affirmation suivante est-elle vraie ? $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha\beta| + |\beta|^2$.
3. Énoncer et prouver l'inégalité triangulaire. On ne demande pas de prouver la caractérisation du cas d'égalité.

Exercice 4. —

1. Montrer que l'affirmation suivante est fausse :
$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| = |z| + |z'|$$
2. Donner deux nombres complexes non réels z et z' tels que $|z + z'| = |z| + |z'|$.
3. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + 2\,\text{Ré}(\alpha\beta) + |\beta|^2$$
4. Pour quels complexes a et b l'assertion « $\text{Ré}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\text{Ré}(a)}{\text{Ré}(b)}$ » est-elle bien définie ? Est-elle vraie pour tous les a et b pour lesquels elle est bien définie ?
5. Énoncer et prouver l'inégalité triangulaire. On ne demande pas de prouver la caractérisation du cas d'égalité.

Exercice 5. — Soient a et b deux nombres complexes, avec $b \neq 0$. Les deux assertions ci-dessous sont-elles toujours vraies ?

$$\text{Ré}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\text{Ré}(a)\,\text{Ré}(b) + \text{Im}(a)\,\text{Im}(b)}{|b|^2} \quad \text{et } \text{Im}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\text{Im}(a)\,\text{Ré}(b) + \text{Ré}(a)\,\text{Im}(b)}{|b|^2}$$

Exercice 6. — On s'intéresse à l'équation $|2z| = |z - 3|$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Dans les deux rédactions A et B ci-dessous de la résolution de cette équation, relever **toutes** les fautes ligne par ligne, même si le résultat final est juste. (On ne demande pas simplement de montrer que la rédaction est globalement incorrecte, on demande d'identifier toutes les erreurs indépendamment les unes des autres.)

Rédaction A : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $$\begin{aligned} &\lvert 2z\rvert = \lvert z-3\rvert \\ \iff& \lvert 2z\rvert^2 = \lvert z-3\rvert^2 \\ \iff& 4z^2 = (z-3)^2 \\ \iff& 3z^2+6z-9=0 \\ \iff& z \in \{-3;1\} \end{aligned}$$	Rédaction B : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $$\begin{aligned} &\lvert 2z\rvert = \lvert z-3\rvert \\ \iff& \lvert 2z\rvert^2 = \lvert z-3\rvert^2 \\ \iff& 3\lvert z\rvert^2+6\lvert z\rvert-9=0 \\ \iff& \lvert z\rvert \in \{-3;1\} \\ \iff& \lvert z\rvert = 1 \text{ car un module est positif} \\ \iff& z \in \{-1,1\}\} \end{aligned}$$

2. (BONUS, hors-barème, plus difficile que le reste) Résoudre l'équation sur $\mathbb{C}$. Indication : l'ensemble des solutions forme un cercle.

Exercice 7. — Soit f la translation dirigée par le vecteur d'affixe $1+2i$. Soit g la rotation d'angle $-\pi/2$ et dont le centre a pour affixe $3+i$.

1. Écrire f et g en coordonnée complexe.
2. Écrire $f \circ g$ et $g \circ f$ en coordonnée complexe.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ces deux transformations.

Exercice 8. — Résoudre l'équation $iz^2+(1-3i)z-3=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 9. — Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 2+2i$. Placer avec précision les solutions sur une grande figure (échelle : 4cm).

Exercice 10. — Résoudre l'équation $3z^2+(1-3i)z-i=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 11. —

1. Résoudre l'équation $z^2 = 5-12i$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $z^2-3z+1+3i=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 12. — Soient OAC et OBD deux triangles directs, isocèles rectangles en O. On note M le milieu de $[BC]$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les segments $[AD]$ et $[OM]$ sont perpendiculaires et que $AD = 2OM$.

Exercice 13. — Soient A et B deux points distincts du plan d'affixes a et b vérifiant $b=\bar{a}$. On note $b = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'objectif de l'exercice est de trouver le lieu des points M tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta \mod 2\pi$. Si z est l'affixe de M, on admet que cette condition est équivalente à $e^{-i\theta}\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que ceci équivaut à $a(z-\bar{a})(\bar{z}-\bar{a}) \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que ceci équivaut à $a\left(\lvert z\rvert^2-\lvert a\rvert^2\right)+2\lvert a\rvert^2(\mathrm{Ré}(a)-\mathrm{Ré}(z)) \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \theta \mod 2\pi$ si et seulement si M appartient à un certain arc de cercle que l'on précisera. (Note : un arc de cercle est l'intersection d'un cercle avec un demi-plan.)
4. Faire un dessin de cet arc de cercle dans le cas où $a = 1-i$. (Unité : 4cm)
5. Soient C et D les points d'affixes $c=i$ et $d=1$. Tracer sans justification sur une figure (unité : 4cm) le lieu des points M tels que $(\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}}) \equiv \pi/4 \mod 2\pi$. Attention aux signe des angles.

Exercice 14. — Soient O et A les points d'affixes 0 et 1, et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$. On considère un point $M \in \mathscr{C}$, distinct de O et de A, et on forme les carrés directs $MAPN$ et $MKLO$. Les affixes de tous ces points sont notés par la lettre minuscule correspondante.

1. Faire une figure. (échelle : 4 cm)

2. Calculer $\left|m-\frac{1}{2}\right|$.
3. Calculer k, l, n et p en fonction de m.
4. Montrer que le milieu Ω de $[LP]$ ne dépend pas de la position de M. Quel est son affixe ?
5. Montrer que la distance ΩN ne dépend pas de la position de M. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?
6. Montrer que N appartient à un cercle qui ne dépend pas de M : préciser le centre et le rayon de ce cercle.

Exercice 15. —

1. Question de cours : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-èmes de l'unité. (On ne demande pas les éléments, voir prochaine question : on demande la définition de l'ensemble.)
2. Question de cours : déterminer en justifiant tous les éléments de $\mathbb{U}_4$, en les écrivant sous forme algébrique.
3. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^4 = (z-1)^4$ et mettre les solutions sous forme algébrique.

Exercice 16. — Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la symétrie centrale dont le centre a pour affixe $2i$. Soit $g : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ la rotation d'angle $-\pi/2$ et dont le centre a pour affixe $2+i$.

1. Écrire f et g en coordonnée complexe.
2. Écrire $f \circ g$ et $g \circ f$ en coordonnée complexe.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ces deux transformations.
4. Donner un exemple d'application $h : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ qui commute avec f, c'est-à-dire qui vérifie $f \circ h = h \circ f$.

Exercice 17. — Soit $ABCD$ un carré direct et G un point de $[BC]$. On construit deux carrés directs $CGHL$ et $GBEF$. Ils sont donc extérieurs à $ABCD$, de côtés $[CG]$ et $[GB]$. On note K, M et N les centres des trois carrés $ABCD$, $CGHL$ et $GBEF$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les droites (BM) et (KN) sont orthogonales et que $BM = KN$. Pour cela on pourra écrire les affixes k, m et n en fonction d'autres affixes.

Exercice 18. — Soit $ABCD$ un parallélogramme direct. Sur ses côtés $[AB]$ et $[BC]$, on colle des triangles équilatéraux indirects ABC' et BCA' (ils se situent donc à l'extérieur du parallélogramme). On rappelle que les affixes des points sont notés par la lettre minuscule correspondante.

1. Faire une figure.
2. Écrire d en fonction de a, b et c.
3. On rappelle que l'on note $j = e^{2i\pi/3}$. Calculer en justifiant $1+j+j^2$ et écrire $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ en fonction de j.
4. Écrire c' et a' en fonction de a, b et c ainsi que de j.
5. Montrer que $DC'A'$ est équilatéral. (On pourra considérer une rotation, par exemple de centre A', ou utiliser toute autre méthode.)

Exercice 19. — On définit une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = i \cdot u_n + 1$$

Que vaut u_4 ? Et u_{50} ?

Exercice 20. — Soient A et B les points ayant pour affixes $a = 1+i$ et $b = 2+3i$. Soit M un point distinct de A, d'affixe z. Montrer que $(AM) \perp (AB)$ si et seulement si $\text{Ré}\big((1-2i)z\big) = 3$.

Exercice 21. —

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Définir l'assertion « z est une racine de l'unité. »

3. Le nombre complexe $e^{i\pi/3}$ est-il une racine de l'unité ?

Exercice 22. — Soit ABC un triangle direct. Sur ses côtés $[AC]$ et $[BC]$, on place extérieurement des carrés, c'est-à-dire que l'on considère des carrés directs $ACDE$ et $CBFG$. Enfin, on considère M le milieu de $[EF]$. L'objectif de l'exercice va être de montrer que ABM est isocèle rectangle en M. Les affixes de tous ces points sont notés par la lettre minuscule correspondante.

1. Tracer une figure (grande et précise : les figures trop petites ou non soignées n'obtiendront pas de points).
2. Écrire en coordonnée complexe la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$.
3. En utilisant cette rotation, écrire e en fonction de a et c.
4. À l'aide d'un raisonnement similaire, écrire f en fonction de b et c.
5. En déduire une écriture de m en fonction de a et b.
6. Conclure.

Exercice 23. — Montrer que l'assertion suivante est fausse :

« Pour toutes rotations f et g du plan, on a $f \circ g = g \circ f$. »

Exercice 24. —

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^4 = z^4$.
2. Soient z et w des nombres complexes. On suppose que $z^4 = w^4 = 1$. Montrer que $(z-w)^4 \in \mathbb{R}$.

Exercice 25. —

1. Définir ce qu'est une homothétie du plan.
2. Écrire en coordonnée complexe l'homothétie de centre d'affixe $2+3i$ et de rapport -3.
3. Une homothétie envoie le point d'affixe 1 sur le point d'affixe $2-i$, et envoie le point d'affixe $1+i$ sur le point d'affixe $2+i$. Quelle est l'image de l'origine ? Quel est le centre et le rapport de cette homothétie ?

Exercice 26. — Mettre $(3+i\sqrt{3})^{2020}$ sous forme algébrique.

Exercice 27. —

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -15+8i$.
2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z(2i-1) + 3 - 3i = 0$.
3. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 - z(2+i) + 3 + 3i = 0$.
4. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + iz - 4 + 2i = 0$.

(Indication : réutiliser à chaque fois les résultats des questions précédentes.)

Exercice 28. —

1. Montrer que pour tout n entier relatif, $(1+i)^n + (1-i)^n$ est réel.
2. Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $(1+i)^n + (1-i)^n = 0$.

Exercice 29. — On considère l'équation $z^2 + 2|z| - 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est solution de l'équation si et seulement si $-z$ l'est également.
2. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les solutions complexes sont soit réelles, soit imaginaires pures.
5. Finir de résoudre l'équation sur $\mathbb{C}$. *(Indication : il y a quatre solutions en tout.)*

1 Correction succincte (pas de figures)

Correction de l'exercice 1.
Cours
Correction de l'exercice 2.

1. L'application f est une rotation si :
$$\exists \Omega \in \mathscr{P}, \exists \theta \in \mathbb{R},$$
$$\begin{cases} \forall M \in \mathscr{P}, & \Omega M = \Omega f(M), \\ \forall M \in \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}, & (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega f(M)}}) \equiv \theta \mod 2\pi. \end{cases}$$
2. L'application f est une rotation de centre Ω si :
$$\exists \theta \in \mathbb{R},$$
$$\begin{cases} \forall M \in \mathscr{P}, & \Omega M = \Omega f(M), \\ \forall M \in \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}, & (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega f(M)}}) \equiv \theta \mod 2\pi. \end{cases}$$
3. L'application f est la rotation de centre Ω et d'angle θ si :
$$\begin{cases} \forall M \in \mathscr{P}, & \Omega M = \Omega f(M), \\ \forall M \in \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}, & (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega f(M)}}) \equiv \theta \mod 2\pi. \end{cases}$$
4. L'application f est une translation si :
$$\exists \vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}, \forall M \in \mathscr{P}, \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u}.$$

(Définitions avec affixes acceptées.)
Correction de l'exercice 3.
Cours.
Correction de l'exercice 4.

1. Il suffit de trouver un contre-exemple. Soient $z = 1$ et $z' = i$. On a $|z+z'| = \sqrt{2}$ et $|z|+|z'| = 2$, donc $|z+z'| \neq |z|+|z'|$.
2. Soient $z = i$ et $z' = 2i$. On a bien $|z+z'| = |3i| = 3 = |z|+|z'|$.
3. L'assertion est fausse. Preuve : soient $\alpha = i$ et $\beta = i$. On a $|\alpha+\beta|^2 = 4$. Par contre, $|\alpha|^2 + 2\,\text{Ré}(\alpha\beta) + |\beta|^2 = 1 - 2 + 1 = 0$.
4. L'assertion est bien définie si et seulement ssi ($b \neq 0$ et $\text{Ré}(b) \neq 0$), autrement dit ssi $\text{Ré}(b) \neq 0$. Mais l'assertion n'est pas vraie universellement. Par exemple, pour $a = 1+i$ et $b = 1-i$, on a $\text{Ré}(a/b) = \text{Ré}(i) = 0$ et $\text{Ré}(a)/\text{Ré}(b) = 1$.
5. Soient z et z' des nombres complexes. Alors $|z+z'| \leq |z|+|z'|$. Preuve : on a
$$\begin{aligned} & |z+z'| \leq |z|+|z'| \\ \iff & |z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2 \\ \iff & |z|^2 + 2\,\text{Ré}\left(\overline{z}z'\right) + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 \\ \iff & \text{Ré}\left(\overline{z}z'\right) \leq |zz'| \iff \text{Ré}\left(\overline{z}z'\right) \leq \left|\overline{z}z'\right| \end{aligned}$$

   Or, la partie réelle d'un complexe est toujours inférieure à son module, ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

Correction de l'exercice 5.
En écrivant $\frac{a}{b} = \frac{a\bar{b}}{|b|^2}$ on voit que la première est vraie, tandis que la seconde semble fausse (le signe + devrait être un −). On prouve que la seconde est bien fausse avec un contre-exemple bien choisi.
Correction de l'exercice 6.

1. (a) La disparition du module à la troisième ligne n'est pas justifiée (et l'équivalence est en fait fausse, contre-exemple : $z = -1+2i$).
   (b) Le passage de la deuxième à la troisième ligne est incorrect (le rédacteur a manifestement pensé que $|a+b|^2 = |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$ ce qui n'est pas vrai en général, même pour des réels), contre-exemple : $z = -1$. Ensuite, il y a une autre erreur à la dernière ligne (sans compter l'accolade en trop) : $|z| = 1$ n'est pas équivalent à $z \in \{-1, 1\}$: contre-ex : $z = i$.
2. (BONUS) Soit $z \in \mathbb{C}$, $x = \text{Ré}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$. Alors :

$$\begin{aligned} & |2z| = |z-3| \\ \iff & |2z|^2 = |z-3|^2 \\ \iff & 4x^2 + 4y^2 = (x-3)^2 + y^2 \\ \iff & x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \\ \iff & (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

   C'est le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 2.

Correction de l'exercice 7.

1. Les applications sont représentées par $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z + 1 + 2i$ et $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -i(z-3-i) + 3 + i = -iz + 4i + 2$.
2. Les deux composées sont $\tilde{f} \circ \tilde{g} : z \mapsto -iz + 3 + 6i$ et $\tilde{g} \circ \tilde{f} : z \mapsto -iz + 3i + 4$.
3. Les deux composées sont des rotations d'angle $-\pi/2$. Le centre de $f \circ g$ est son unique point fixe c'est-à-dire le point d'affixe $\frac{3+6i}{1+i}$ et le centre de $g \circ f$ est le point d'affixe $\frac{4+3i}{1+i}$.

Correction de l'exercice 8.
Rien de spécial à signaler, le discriminant est $-8+6i$. L'ensemble des solutions est $\{i, 3\}$.
Correction de l'exercice 9.
L'ensemble des solutions est $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/24}\mathbb{U}_6$. Critère de notation pour le dessin : voir l'hexagone régulier, ensuite voir un décalage d'argument à peu près correct et le rayon un peu plus grand que 1.
Correction de l'exercice 10.
Le discriminant est $-8+6i$. Ses deux racines carrées sont $1+3i$ et $-1-3i$. L'ensemble des solutions est $\{i, -1/3\}$.
Correction de l'exercice 11.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et notons $a = \text{Ré}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} z^2 = 5 - 12i \iff & \begin{cases} a^2 - b^2 & = 5 \\ 2ab & = -12 \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 2a^2 = 5 + 13 = 18 \\ 2b^2 = 13 - 5 = 8 \\ ab = -6 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a \in \{-3, 3\} \\ b \in \{-2, 2\} \\ ab = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\{3-2i, -3+2i\}$.

2. C'est une équation du second degré, son discriminant est $\Delta = 5-12i$, dont on a calculé les deux racines carrées complexes à la question précédente.

L'ensemble des solutions est donc $\{3-i; i\}$.

Correction de l'exercice 12.
On peut supposer que O est l'origine du plan. D'après l'énoncé, on a $c = ia$ et $d = ib$, ainsi que $m = \dfrac{b+c}{2}$.
Intéressons-nous aux affixes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OM}$. On a $d-a = ib-a$, et $m = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{b+ia}{2}$. On en déduit

$$\boxed{d-a = 2im}$$

Ceci montre que les segments $[AD]$ et $[OM]$ sont perpendiculaires et que $AD = 2OM$.
Correction de l'exercice 13.

1. Pour commencer, on a $e^{-i\theta}\dfrac{z-b}{z-a} = a\dfrac{z-\bar{a}}{z-a}$. Ensuite, on passe de $a\dfrac{z-\bar{a}}{z-a}$ à $a(z-\bar{a})(\bar{z}-\bar{a})$ en multipliant par $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = |z-a|^2 \in \mathbb{R}_+^*$. Donc l'un est dans $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si l'autre l'est également.
2. Simple calcul, on développe les deux quantités (avec Ré$(a) = (a+\bar{a})/2$ et pareil pour Ré(z)) et on voit qu'elles sont égales.
3. Notons que a n'est pas réel, mais que $2|a|^2$ (Ré(a) − Ré(z)) l'est. Donc pour que $a\left(|z|^2-|a|^2\right)+2|a|^2$ (Ré(a) − Ré(z)) $\in \mathbb{R}_+^*$, il faut et il suffit que $|z|^2-|a|^2 = 0$ et que Ré(a) > Ré(z). Autrement dit il faut que z soit sur le centre de centre O et passant par A, et qu'il soit dans le demi-plan Ré(a) > Ré(z).
4. dessin
5. dessin (éventuellement dans les prochains jours je prendrai le temps de faire des figures sur geogebra et les rajouter ici).

Correction de l'exercice 14.
(D'après bac 2005 obligatoire)
Soient O et A les points d'affixes 0 et 1, et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$. On considère un point $M \in \mathscr{C}$, distinct de O et de A, et on forme les carrés directs $MAPN$ et $MKLO$. Les affixes de tous ces points sont notés par la lettre minuscule correspondante.

1. (On placer M sur la partie supérieur ou inférieure du cercle, les figures sont différentes mais ça ne change rien.)
2. On a $\left|m-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ puisque le cercle est par définition centré sur le point d'affixe $1/2$ et de rayon $1/2$.
3. Le point K est l'image du point O par rotation de centre M et d'angle $-\pi/2$. On en déduit que $k-m = -i(0-m)$ et donc $\boxed{k=(i+1)m.}$
   On obtient de même
   $$l = im; \quad n = i+m(1-i) \text{ et } p = 1+i-im.$$
4. Le milieu de $[LP]$ a pour affixe $\omega = \dfrac{l+p}{2} = \dfrac{1+i}{2}$. Il ne dépend pas de m.
5. On a $n-\omega = i+m(1-i)-\dfrac{1+i}{2} = (1-i)(m-1/2)$. D'après la première question on a $|m-1/2| = 1/2$, donc $\Omega N = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D'autre part, $k-\omega = (1+i)m-\dfrac{1+i}{2} = (1+i)(m-1/2)$. On voit donc que $k-\omega = i(n-\omega)$ et donc ΩNK est isocèle rectangle en Ω
6. La question précédente montre que N appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}/2$.

Correction de l'exercice 15.

1. Cours : $\mathbb{U}_n := \left\{z\in\mathbb{C} \middle| z^n = 1\right\}$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} z^4 = 1 &\iff z^4 - 1 = 0 \\ &\iff (z^2+1)(z^2-1) = 0 \\ &\iff (z+i)(z-i)(z+1)(z-1) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

3. **Première méthode** : comme 1 n'est pas une solution de l'équation, on peut résoudre sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a alors

$$\begin{aligned} (z+1)^4 = (z-1)^4 &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{z+1}{z-1} \in \{1, i, -1, -i\} \end{aligned}$$

Il est clair que $\frac{z+1}{z-1} \neq 1$, il y a donc en fait trois cas à traiter. On a successivement :

(a) $\frac{z+1}{z-1} = i \iff z = -i$;

(b) $\frac{z+1}{z-1} = -1 \iff z = 0$;

(c) $\frac{z+1}{z-1} = -i \iff z = i$.

L'équation a donc trois solutions : i, 0 et $-i$.

Deuxième méthode : on développe, et comme l'exercice n'est pas très difficile ça se passe bien :

$$\begin{aligned} &(z+1)^4 = (z-1)^4 \\ \iff\ & z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 \\ &\quad = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 \\ \iff\ & z(z^2+1) = 0 \end{aligned}$$

D'où trois solutions i, 0 et $-i$.

Correction de l'exercice 16.

1. Les applications sont représentées par $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -(z-2i)+2i = \boxed{-z+4i}$ et $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -i(z-2-i)+2+i = \boxed{-iz+1+3i}$.
2. Les deux composées sont $\tilde{f} \circ \tilde{g} : z \mapsto \boxed{iz-1+i}$ et $\tilde{g} \circ \tilde{f} : z \mapsto \boxed{iz+5+3i}$.
3. Les deux composées sont des rotations d'angle $\pi/2$. Le centre de $f \circ g$ est son unique point fixe c'est-à-dire le point d'affixe $\frac{-1+i}{1-i} = \boxed{-1}$ et le centre de $g \circ f$ est le point d'affixe $\frac{5+3i}{1-i} = \boxed{1+4i}$.
4. Choix les plus simples : $h = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ ou bien $h = f$. (Plus généralement, toute rotation de même centre que f convient.)

Correction de l'exercice 17.

1. Figure.
2. Comme C est l'image de B par la rotation de centre K et d'angle $\pi/2$, on a $c = i(b-k)+k$ et donc $k = \frac{c-ib}{1-i}$. On obtient de même $m = \frac{g-ic}{1-i}$ et $n = \frac{b-ig}{1-i}$. On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{m-b}{n-k} &= \frac{g-ic-b(1-i)}{b-ig-(c-ib)} \\ &= \frac{g-ic-b+ib}{b-ig-c+ib} \\ &= \boxed{i} \end{aligned}$$

Ceci implique que $[KN]$ et $[BM]$ sont orthogonaux et ont même longueur.

Correction de l'exercice 18.

1. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a $d-a=c-b$ autrement dit $d=a+c-d$.
2. On a $1+j+j^2=\dfrac{1-j^3}{1-j}=\dfrac{0}{1-j}=0$.
3. Comme C' est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$, on en déduit que $c'=e^{-i\pi/3}(b-a)+a=-j(b-a)+a=a(1+j)-jb$. On obtient avec le même raisonnement $a'=-j(c-b)+b=b(1+j)-jc$.
4. L'image de C' par la rotation de centre A' et d'angle $-\pi/3$ a pour affixe

$$\begin{aligned}&-j(c'-a')+a'\\&=-j\left[(a(1+j)-jb)-(b(1+j)-jc)\right]+b(1+j)-jc\\&=a\left(-j^2-j\right)+b\left(j^2+j+j^2+j+1\right)+c\left(-j^2-j\right)\\&=a-b+c\\&=d\end{aligned}$$

Donc D est l'image de C' par la rotation de centre A' et d'angle $-\pi/3$ et donc $A'C'D$ est équilatéral indirect.

Correction de l'exercice 19.
On calcule $u_1=1+i$, $u_2=i$, $u_3=0$ et $\boxed{u_4=1}$. On comprend donc que la suite va être périodique de période quatre, c'est-à-dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+4}=u_n$. On peut le montrer de différentes manières. Donnons par exemple une preuve directe. Soit $n\in\mathbb{N}$. On obtient :

$$\begin{aligned}u_{n+2}&=i\cdot u_{n+1}+1=i(iu_n+1)+1=-u_n+1+i,\\u_{n+3}&=i\cdot u_{n+2}+1=i(-u_n+1+i)+1=-i\cdot u_n+i,\\u_{n+4}&=i\cdot u_{n+3}+1=i(-i\cdot u_n+i)+1=u_n.\end{aligned}$$

Donc la suite est bien 4-périodique. Comme $50=4\times 12+2$, on en déduit que $\boxed{u_{50}=u_2=i.}$

Correction de l'exercice 20.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont pour affixe $z-(1+i)$ et $1+2i$. On a alors :

$$\begin{aligned}(AM)\perp(AB)&\iff\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\&\iff \text{Ré}(\overline{(1+2i)}(z-(1+i)))=0\\&\iff \text{Ré}(\overline{(1+2i)}z)=\text{Ré}(\overline{(1+2i)}(1+i))\\&\iff \text{Ré}\big((1-2i)z\big)=3\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 21.

1. Par définition, $\mathbb{U}_n=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,z^n=1\right\}$.
2. Par définition, z est une racine de l'unité si et seulement : $\exists n\in\mathbb{N}^*, z^n=1$.
3. Comme $\left(e^{i\pi/3}\right)^6=1$, le nombre complexe $e^{i\pi/3}$ est une racine 6-ème de l'unité. C'est donc une racine de l'unité.

Correction de l'exercice 22.

1. Figure
2. La rotation de centre A et d'angle $\pi/2$ s'écrit, en coordonnée complexe : $\boxed{z\mapsto i(z-a)+a.}$
3. Par construction, E est l'image de C par cette rotation, donc $\boxed{e=i(c-a)+a.}$
4. En suivant le même raisonnement, F est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\pi/2$, donc : $\boxed{f=-i(c-b)+b.}$

5. Comme $m = \dfrac{e+f}{2}$, on obtient, en remplaçant :
$$m = \frac{ic - ia + a - ic + ib + b}{2} = \boxed{\frac{a(1-i)+b(1+i)}{2}}.$$

6. Il suffit de montrer que B est l'image de A par la rotation ρ de centre M et d'angle $\pi/2$. Cette rotation s'écrit $\tilde{\rho} : z \mapsto i(z-m)+m$. On a alors :
$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(a) &= i(a-m)+m \\ &= \frac{i\left(2a-(a(1-i)+b(1+i)\right)+a(1-i)+b(1+i)}{2} \\ &= \frac{a(2i-i+i^2+1-i)+b(-i-i^2+1+i)}{2}\boxed{=b.}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 23.
Soit f la rotation de centre O et d'angle π, et g la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle π , et soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ leurs représentations en coordonnée complexe.

On a donc $\tilde{f} : z \mapsto -z$ et $\tilde{g} : z \mapsto -(z-1)+1$. On en déduit $\tilde{f} \circ \tilde{g} : z \mapsto -(-(z-1)+1) = z-2$ et $\tilde{g} \circ \tilde{f} : z \mapsto -((-z)-1)+1 = z+2$. Ces deux applications sont distinctes, puisque par exemple les images de 0 valent -2 et 2. On en déduit que $\tilde{f} \circ \tilde{g} \neq \tilde{g} \circ \tilde{f}$ et donc $f \circ g \neq g \circ f$.

Correction de l'exercice 24.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$\begin{aligned}&(z+1)^4 = z^4 \\ &\iff (z+1 = z \text{ ou } z+1 = iz \text{ ou } z+1 = -z \text{ ou } z+1 = -iz) \\ &\iff \left(z = -\frac{1}{1-i} \text{ ou } z = -\frac{1}{2} \text{ ou } z = -\frac{1}{1+i}\right)\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc
$$\left\{\frac{-1-i}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{-1+i}{2}\right\}$$

2. Si $z^4 = w^4 = 1$, alors z et w appartiennent à $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$. On en déduit que
$$z - w \in \{0, 2, -2, 2i, -2i, 1+i, 1-i, -1-i, -1+i\}$$
En élevant à la puissance quatre, on a donc :
$(z-w)^4 \in \{0, 16, -4\}$ et donc $\boxed{(z-w)^4 \in \mathbb{R}.}$

Correction de l'exercice 25.

1. Une application $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ est une homothétie si
$$\exists \Omega \in \mathscr{P}, \exists k \in \mathbb{R}^*, \forall M \in \mathscr{P}, \overrightarrow{\Omega f(M)} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

2. D'après le cours, c'est $z \mapsto -3(z-2-3i)+2+3i$.

3. L'homothétie h est représentée par
$$\tilde{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \tilde{h}(z) = az+b,$$
avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On a donc le système
$$\begin{cases}\tilde{h}(1) & = 2-i \\ \tilde{h}(1+i) & = 2+i\end{cases} \iff \begin{cases} a+b & = 2-i \\ a(1+i)+b & = 2+i\end{cases}$$
On en déduit que $ai = 2i$ donc que $a = 2$, et ensuite $b = -i$.
On a donc $\tilde{h}(0) = -i$. L'homothétie est de rapport deux, et son centre est son unique point fixe ω, caractérisé par $\tilde{h}(\omega) = \omega$ c'est-à-dire $2\omega - i = \omega$ et donc $\omega = i$.

Correction de l'exercice 26.
D'une part, on a :

$$(3+i\sqrt{3})^{2020} = \left(2\sqrt{3}e^{i\pi/6}\right)^{2020} = (2\sqrt{3})^{2020}e^{2020i\pi/6}$$

D'autre part, $2020 = 12\times 168+4$, donc

$$e^{2020i\pi/6} = e^{(168\times 12+4)i\pi/6} = e^{4i\pi/6} = e^{2i\pi/3}.$$

Finalement, on obtient

$$(3+i\sqrt{3})^{2020} = 2^{2020}3^{1010}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{2019}3^{1010}(-1+i\sqrt{3})$$

Correction de l'exercice 27.

1. Soit $z\in\mathbb{C}$ et notons $a = \text{Ré}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} z^2 = -15+8i &\iff \begin{cases} a^2+b^2 &= \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17 \\ a^2-b^2 &= -15 \\ 2ab &= 8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a^2 = 17-15 = 2 \\ 2b^2 = 17+15 = 32 \\ ab = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a\in\{-1,1\} \\ b\in\{-4,4\} \\ ab = 4 \end{cases} \\ &\iff (a,b) = (1,4) \text{ ou } (a,b) = (-1,-4). \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions est $\{1+4i,\ -1-4i\}$.

2. C'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = -15+8i$, dont on a calculé les deux racines carrées complexes plus haut.

   L'ensemble des solutions est donc $\{1+i, -3i\}$.

3. Cette équation est simplement la précédente, multipliée par i. Elle a donc les mêmes solutions.
4. C'est une équation du second degré, son discriminant est $\Delta' = 15-8i = -\Delta = i^2\Delta$. Ses deux racines carrées sont donc les racines carrées de Δ, multipliées par i. En effet, si $z\in\mathbb{C}$, on a

$$z^2 = i^2\Delta \iff \left(\frac{z}{i}\right)^2 = \Delta$$

   Les racines carrées de Δ' sont donc $i(1+4i) = -4+i$ et $4-i$, et les solutions de l'équation sont donc $\dfrac{-i-4+i}{2} = -2$ et $\dfrac{-i+4-i}{2} = 2-i$.

Correction de l'exercice 28.

1. Soit $n\in\mathbb{Z}$. On a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} (1+i)^n + (1-i)^n &= (1+i)^n + \overline{1+i}^n \\ &= (1+i)^n + \overline{(1+i)^n} \\ &= 2\,\text{Ré}\left((1+i)^n\right) \end{aligned}$$

   Ceci qui montre que $\boxed{(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}.}$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a alors la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned}
(1+i)^n + (1-i)^n = 0 &\iff \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^n = 0 \\
&\iff e^{ni\pi/4} = -e^{-ni\pi/4} \\
&\iff e^{ni\pi/2} = e^{i\pi} \\
&\iff e^{ni\pi/2 - i\pi} = 1 \\
&\iff n\frac{\pi}{2} - \pi \equiv 0 \mod 2\pi \\
&\iff \boxed{n \equiv 2 \mod 4}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 29.

1. On a l'égalité $(-z)^2 + 2|-z| - 1 = z^2 + 2|z| - 1$. Donc un terme est nul si et seulement si l'autre est nul. En d'autres termes, z est solution si et seulement $-z$ l'est.
2. Soit $z \in \mathbb{R}_+$. On a alors $|z| = z$, et l'équation devient $z^2 + 2z - 1$. L'ensemble des solutions réelles de cette équation est $\{-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\}$, et donc il y a une unique solution de l'équation dans $\mathbb{R}_+$, à savoir $-1+\sqrt{2}$.
3. D'après la première question, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $-1+\sqrt{2}$ et son opposé $1-\sqrt{2}$. (On pourrait aussi résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-$ mais c'est moins rapide.)
4. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation. On a donc $z^2 = 1 - 2|z|$, et donc $z^2 \in \mathbb{R}$. On en déduit que z est soit réel, soit imaginaire pur.
5. Il reste à déterminer les solutions imaginaires pures, et en utilisant la première question, il suffit de déterminer les solutions dans $i\mathbb{R}_+$. Soit $z \in i\mathbb{R}_+$. Alors on peut écrire $z = i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On a alors $z^2 = -\alpha^2$ et $|z| = \alpha$ et donc :
$$z^2 + 2|z| - 1 = 0 \iff -\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$
$$\iff (\alpha - 1)^2 = 0 \iff \alpha = 1$$
On en déduit que la seule solution dans $i\mathbb{R}_+$ est i, et donc, toujours d'après la première question, que l'ensemble des solutions imaginaires pures est $\{i; -i\}$.
L'ensemble des solutions complexes est donc
$$\boxed{\left\{i, -i, \sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}\right\}}$$