Interrogation 2

(On identifie toujours $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ de la manière habituelle et l'écriture $z = x + iy$ sous-entend que $x, y \in \mathbb{R}$.)

Exercice 1. Donner un exemple (simple) de fonction définie sur un certain ouvert U de $\mathbb{C}$, différentiable mais non holomorphe sur cet ouvert. (Démontrer la différentiabilité et la non-holomorphie.)

Exercice 2. [Cours] Énoncer et prouver le théorème des zéros isolés.

Exercice 3. [Cours] Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon $> r$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int}\, dt.$$

Exercice 4. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{|z|^4}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial z}\left(\left|e^z\right|^4\right)$, en utilisant les règles de calcul avec les variables z et $\overline{z}$. Écrire les résultats sous forme simplifiée.

Exercice 5. Soit $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Calculer $\int_\gamma \overline{z}\, dz$.

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que l'image de f est incluse dans l'ensemble $\Gamma := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(x)\right\}$. (Le graphe du sinus.) Montrer que f est constante.

Solutions des exercices

Correction de l'exercice 1. Dans le cours, il y a l'exemple de la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$.
Correction de l'exercice 2. Cours.
Correction de l'exercice 3. Cours.
Correction de l'exercice 4. On a, avec la formule de dérivées (de Wirtinger) de composées :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{|z|^4}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{z^2\overline{z}^2}\right) = 2z\overline{z}^2 e^{|z|^4}$$

Pour la deuxième fonction, on peut écrire $\left|e^z\right|^4 = \left(e^{\mathrm{R\acute{e}}\, z}\right)^4 = e^{4\,\mathrm{R\acute{e}}\, z} = e^{2z+2\overline{z}}$ et donc

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\left|e^z\right|^4\right) = 2e^{2z+2\overline{z}} = 2e^{4\,\mathrm{R\acute{e}}\, z} = 2\left|e^z\right|^4$$

On peut aussi effectuer le calcul en coordonnées réelles. [1]
Correction de l'exercice 5. On écrit la définition du cours :

$$\int_\gamma \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \overline{re^{it}}ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} ir^2dt = 2i\pi r^2$$

Correction de l'exercice 6. *(En TD, on a vu la variante où l'image de f était incluse dans un cercle. Le principe de preuve est le même : l'ouvert de définition étant* ***connexe****, il suffit de montrer que f a une différentielle nulle. Pour cela, on utilise le seul outil à disposition c'est-à-dire les équations de Cauchy-Riemann, autrement dit le fait que la différentielle de f soit une similitude directe, donc en particulier soit inversible, soit nulle. On peut écrire les dérivées partielles composées comme en TD, mais voici une version un peu plus générale (et réutilisable et éclairante).*

Si on note $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y - \sin x$, l'énoncé dit donc que $\phi \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est nulle, donc constante. Sa différentielle est donc nulle. Or, sa différentielle est la composée des deux différentielles : $D\phi \circ Df$. (Calculées aux points adéquats.) Si la composée est nulle, cela signifie que l'image de Df est dans le noyau de $D\phi$, qui est une forme linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non nulle, puisqu'il y a au moins la dérivée partielle $\partial_y\phi = \partial_y y = 1$ qui n'est jamais nulle. Le noyau de $D\phi$ est donc de dimension un. Donc Df est de rang au plus un, or Df est une similitude directe, donc elle est soit nulle soit inversible. [2] Elle est donc nulle. La fonction f est donc localement constante et donc constante car définie sur un connexe.

> **Commentaires supplémentaires** : la différentielle de ϕ en un point (x, y) a pour matrice la matrice-ligne $\begin{pmatrix}\partial_x\phi & \partial_y\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos x & 1\end{pmatrix}$. Le gradient de ϕ en un point (x, y) est donc le vecteur $\nabla\phi$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-\cos x \\ 1\end{pmatrix}$. Il est non nul, et normal à la ligne de niveau, c'est-à-dire normal au graphe du sinus. Dire que l'application linéaire composée $D\phi \circ Df$ est nulle, c'est dire que l'image de Df est dans le noyau de $D\phi$, donc dans l'orthogonal du gradient, donc dans la droite tangente de $y = \sin x$. Interprétation : si l'image de f tombe dans le graphe $y = \sin(x)$, en différentiant, on voit que la différentielle tombe dans l'espace tangent de ce graphe.

---

1. En coordonnées réelles, on a :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{|z|^4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(e^{x^4+2x^2y^2+y^4}\right) = \frac{1}{2}(4x^3+4xy^2)e^{|z|^4} - \frac{i}{2}(4y^3+4yx^2)e^{|z|^4} = 2(x^3 - ix^2y + xy^2 - iy^3)e^{|z|^4},$$

Ensuite, on peut remplacer x et y par leur écriture en fonction de z et $\overline{z}$ et simplifier, ce qui fait apparaître $z\overline{z}^2$. Pour la seconde fonction, on peut là aussi passer en coordonnées réelles, par exemple

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\left|e^z\right|^4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(e^{4x}\right) = \frac{4}{2}e^{4x} = 2\left|e^z\right|^4$$

2. Le déterminant de $\begin{pmatrix}a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ est a^2+b^2, qui est nul ssi $a = b = 0$.