Interrogation 3

Exercice 1. Énoncer et démontrer le théorème de Liouville.

Exercice 2. Soit f une fonction entière. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|f(z)| \leq \left|e^z\right|$. Montrer qu'il existe un nombre complexe M de module inférieur ou égal à 1 tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = Me^z$$

Exercice 3. Le but de l'exercice est de calculer $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$.
Dans tout l'exercice, on note $\overline{\mathbb{D}}(z_0, R)$ le disque fermé de centre z_0 et rayon R, $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ l'adhérence du demi-plan de Poincaré, et si $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\alpha\overline{\mathbb{H}} = \{\alpha z \,|\, z \in \overline{\mathbb{H}}\}$.

1. Donner le domaine de définition U de l'expression $\dfrac{1}{z^3+1}$, où z est un nombre complexe. Dans la suite on note $f : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{z^3+1}$.
2. Pour $R > 0$, on note $K_R = \overline{\mathbb{H}} \cap e^{-i\pi/3}\overline{\mathbb{H}} \cap \overline{\mathbb{D}}(0, R)$. Dessiner K_R (unité graphique : 4cm, colorier ou hachurer les parties adéquates ; un dessin ambigu ne pourra donner des points). Montrer que K_R est compact.
Dans la suite, on paramètre ∂K_R par le chemin $\gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R$, où :

$$\begin{aligned}
\gamma_1^R &: [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t, \\
\gamma_2^R &: [0, 2\pi/3] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}, \\
\gamma_3^R &: [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{2i\pi/3}(R-t).
\end{aligned}$$

3. Déterminer les valeurs de $R > 0$ pour lesquelles $\displaystyle\int_{\partial K_R} f(z)dz$ a un sens.
4. Pour ces valeurs, calculer cette intégrale, en appliquant la formule de Cauchy à la fonction auxiliaire $g : z \mapsto \dfrac{1}{z^2 + e^{i\pi/3}z + e^{2i\pi/3}}$, dont on précisera le domaine V de définition et d'holomorphie.
5. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} I$.
6. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_2^R} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.
7. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_3^R} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} -e^{2i\pi/3}I$.
8. En déduire la valeur de I.

Correction

Exercice 1 Cours

Exercice 2 La fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)e^{-z}$ est le produit de deux fonctions holomorphes donc est holomorphe. C'est donc une fonction entière, dont le module est majoré par 1. D'après le théorème de Liouville, elle est constante et cette constante a un module inférieur à 1.

Exercice 3

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. L'expression $\dfrac{1}{1+z^3}$ est définie ssi $z^3 \neq -1$, c'est-à-dire ssi $z \in U := \mathbb{C} \setminus \left\{-1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\right\}$.
2. (Dessin : tiers de disque fermé.) Comme $K_R \subseteq \overline{\mathbb{D}}(0,R)$, K_R est borné. D'autre part, K_R est fermé car défini comme intersection des trois fermés $\overline{\mathbb{D}}(0,R)$, $\overline{\mathbb{H}}$ et $e^{-i\pi/3}\overline{\mathbb{H}}$. (Ce dernier ensemble est fermé car, par exemple, image réciproque du fermé $\overline{\mathbb{H}}$ par l'application continue $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{i\pi/3}z$.)
3. Le compact K_R est un compact à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux. L'intégrale a donc un sens si f est définie au voisinage de ∂K_R. C'est le cas ssi $R \neq 1$. En effet, si $R \neq 1$ on a $\partial K_R \subseteq U$, et si $R = 1$, la fonction f n'est pas définie au point $e^{i\pi/3} \in \partial K_1$.
4. — Si $R < 1$, l'intégrale est nulle. En effet, dans ce cas K_R est un compact à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux et inclus dans U et f est holomorphe sur U. Par le théorème intégral de Cauchy, $\displaystyle\int_{\partial K_R} f(z)dz = 0$.
   — Si $R > 1$, la fonction auxiliaire $g : z \mapsto \dfrac{1}{(z+1)(z-e^{-i\pi/3})} = \dfrac{1}{z^2 + e^{i\pi/3}z + e^{2i\pi/3}}$ est définie et holomorphe sur $V := \mathbb{C} \setminus \left\{-1, e^{-i\pi/3}\right\}$. Elle vérifie de plus : $\forall z \in U, f(z) = \dfrac{g(z)}{z - e^{i\pi/3}}$. D'après la formule de Cauchy, appliquée à la fonction g holomorphe sur V, au compact $K_R \subseteq V$ à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux et au point $e^{i\pi/3} \in \mathring{K}_R$, on a donc
   $$I(R) := \int_{\partial K_R} f(z)dz = \int_{\partial K_R} \frac{g(z)}{z - e^{e^{i\pi/3}}}dz = 2i\pi g\left(e^{i\pi/3}\right) = \frac{2i\pi}{3e^{2i\pi/3}} = \boxed{\frac{2\pi}{3}e^{-i\pi/6}.}$$
5. On a $I_1(R) := \displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)dz = \int_0^R \frac{1}{1+t^3}dt = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathbf{1}_{[0,R]}}{1+t^3}dt$. Pour $R > 1$, l'intégrande $\phi_R : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, t \mapsto \dfrac{\mathbf{1}_{[0,R]}}{1+t^3}$ est positive, continue par morceaux donc mesurable, et tend simplement en croissant vers $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, t \mapsto \dfrac{1}{1+t^3}$. Par convergence monotone, $I_1(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+t^3}dt = I$.
6. En notant $I_2(R) := \displaystyle\int_{\gamma_2^R} f(z)dz$, on a donc $|I_2(R)| \leq \mathrm{long}(\gamma_2^R)\max_{\gamma_2^R}|f(z)|$. Or, si $|z| > 1$, on a $|f(z)| = \left|\dfrac{1}{z^3+1}\right| = \dfrac{1}{|z^3+1|} \leq \dfrac{1}{|z|^3-1}$. (Ici on majore en minorant le dénominateur à l'aide de la seconde inégalité triangulaire mais d'autres méthodes sont possibles.) On en déduit que $|I_2(R)| \leq \dfrac{2\pi R}{3}\dfrac{1}{R^3-1} \to 0$.
7. Notons $I_3(R) := \displaystyle\int_{\gamma_3^R} f(z)dz$. On a $I_3(R) = -\displaystyle\int_{\gamma_3^{R,op}} f(z)dz = -\int_0^R f\left(e^{2i\pi/3}t\right)e^{2i\pi/3}dt = -e^{2i\pi/3}\int_0^R f(t)dt$, car $f\left(e^{2i\pi/3}t\right) = f(t)$. Le même raisonnement qu'à la question 5 donne alors que $I_3(R) \to -e^{2-\pi/3}I$.
8. Par sommes de limites, on a $I(R) = I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \left(1 - e^{2i\pi/3}\right)I = \sqrt{3}e^{-i\pi/6}I$. D'autre part, d'après la question 4, si $R > 1$, on a $I(R) = \dfrac{2\pi}{3}e^{-i\pi/6}$. On en déduit que $\boxed{I = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$

Commentaires Il est essentiel de savoir simplifier rapidement des choses comme $ie^{-2i\pi/3}$, $1 + e^{i\pi/3}$, $1 + e^{2i\pi/3}$, $e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}$ etc, et ce sans repasser en forme algébrique. Il suffit de relativement peu de travail pour se remettre à niveau, mais ce travail est nécessaire. Faire un dessin est un réflexe attendu. Entraînez-vous dès maintenant sinon vous risquez de rater la plupart de vos calculs de résidus, or il s'agit d'une partie du cours plutôt facile, qui doit vous rapporter des points à l'examen et non vous en enlever.