Analyse complexe 2023-2024
trame de cours

Damien Mégy

13 mars 2024

Table des matières

1 Holomorphie **5**

2 Fonctions analytiques **7**

3 Intégration curviligne **9**
- 3.1 Chemins 9
- 3.2 Formes différentielles 9
- 3.3 Intégrales curvilignes 9
- 3.4 Intégration sur le bord d'un compact régulier 9
- 3.5 Primitives 9
  - 3.5.1 Convergence 10

4 Théorème et formule de Cauchy **11**
- 4.1 Théorème intégrale de Cauchy 11
- 4.2 Formule de Cauchy 11
- 4.3 Discussion sur d'autres stratégies de preuve 11

5 Zéros, singularités, fonctions méromorphes et résidus **13**

Chapitre 1

Holomorphie

Chapitre 2

Fonctions analytiques

Théorème 2.0.1 (Zéros isolés)**.**

Théorème 2.0.2 (Prolongement analytique)**.**

Chapitre 3

Intégration curviligne

3.1 Chemins

3.2 Formes différentielles

Cas particulier : formes holomorphes.

3.3 Intégrales curvilignes

Définition pour une forme.
Invariance par reparamétrage, classe d'équivalence, arcs orientés.
Majoration par la norme infini et la longueur d'arc.

3.4 Intégration sur le bord d'un compact régulier

Rappel : bord d'une partie.

Définition 3.4.1. Un dit qu'un compact $K \subset \mathbb{C}$ est à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux si ...

Orientation canonique du bord bien définie.
Exemples à faire soi-même : nombre fini de trous. L'angle à un point anguleux ne peut être nul.
Remarque : il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux sur le bord.

Définition 3.4.2. Intégration d'une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur le bord d'un compact à bord C^1 par morceaux.

3.5 Primitives

Attention aux différentes significations du mot « primitive ».

Définition 3.5.1 (Primitive (holomorphe))**.** On dit que $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admet une primitive (holomorphe,) ou simplement une primitive, si ...

Attention, certaines fonctions holomorphes n'ont pas de primitive, contrairement à ce qui se passe en analyse réelle où toute fonction continue admet une primitive. Par exemple la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Le fait d'avoir une primitive dépend de façon cruciale de l'ouvert de définition. Par exemple la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ possède une primitive, à savoir la détermination principale du log, notée Log dans ce cours (ou Log_0, aussi).

Proposition 3.5.2. Si f admet une primitive holomorphe, l'intégrale curviligne $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités du chemin.

Dans ce qui suit, le mot « primitive » a encore un nouveau sens, il s'applique cette fois à des formes différentielles et plus à des fonctions.

Vocabulaire : si ω est une 1-forme exacte, c'est-à-dire qu'il existe f telle que $\omega = df$, alors on dit aussi qu'elle admet une primitive. (La primitive est la fonction f.)

Attention dans ce nouveau contexte, la primitive de la forme différentielle n'est pas forcément une fonction holomorphe, c'est juste une fonction C^1.

Proposition 3.5.3. Soit ω une 1-forme différentielle. Si ω admet une primitive, l'intégrale curvligne $\int_\gamma \omega$ ne dépend que des extrémités du chemin γ.

Remarque 3.5.4.

3.5.1 Convergence

Laissé en exercice :

intégration sur un chemin fixé d'une suite de fonctions qui CVU (ou CVUTC).

Cas plus général : que faire si on n'a pas CVUTC ? dans certaines conditions, écrire explicitement le paramétrage et convergence dominée.

intégration d'une forme donnée sur une suite de chemins qui converge en topologie C^1 vers un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Chapitre 4

Théorème et formule de Cauchy

4.1 Théorème intégral de Cauchy

énoncé. Historique.
Plan de la preuve :

1. Lemme de Goursat
2. Triangulation (et calcul des intégrales curvilignes par sommes de Riemann / approximation d'un chemin par un chemin polygonal). Encapsulation du lemme technique ?
3. Fin de la preuve

4.2 Formule de Cauchy

Formule de Cauchy
Cas particulier avec des cercles.
Analycité complexe tout de suite, sans faire le caractère C^{∞}.
Formule de la moyenne.
Principe du maximum, énoncé. Idée de preuve mais preuve non rédigée, finir.

Pas encore fait : Autres conséquences : zéros isolés, prolongement analytique etc pour les fonctions holomorphes.
Formule de Pompeiu
Formules d'ordre supérieur avec le bord d'un compact ou avec des cercles.
Inégalités de Cauchy
Louiville, et version avec croissance polynomiale.
Les trucs autour de Morera et des primitives, ouverts étoilés etc pas encore fait Inversion locale !
Application ouverte.
Résultats annexes sur les primitives

Théorème 4.2.1. Soit Ω un ouvert et $f \in C^0(\Omega)$. Si $f(z)dz$ a une integrale nulle sur tout bord de triangle de Ω, alors f est holomorphe !

Preuve : on prend un point, un disque autour et on construit une ptimitive locale holomorphe sur ce disque, qui est étoilé en z_0.

Attention ne pas dériver en z_0 mais en z dans le disque.

Remarque : version un peu plus générale : si f est continue et d'intégrale curviligne nule sur tout triangle sur un ouvert étoilé, elle a une primitive sur cet ouvert étoilé et doc est holomorphe sur cet ouverte étoilé.

A rapprocher des énoncés : si sur un ouvert connexe l'intégrale ets nulle sur tout lacet, on a une primitive.

4.3 Discussion sur d'autres stratégies de preuve

Chapitre 5

Zéros, singularités, fonctions méromorphes et résidus