TD 7 : Séries de Laurent, singularités

La notation $A_{z_0}(r_1, r_2)$ désigne la couronne (ouverte) de centre z_0 et de rayons r_1 et r_2.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition des séries de Laurent suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{|n|}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n+1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2+2}$.

Exercice 2. Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes sur la couronne $A_{z_0}(r_1, r_2)$ indiquée.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)}$ sur $A_0(0,1)$,
2. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ sur $A_1(0,+\infty)$,
3. $f(z) = \dfrac{(z-z_0)^2}{(z-a)^2}$ sur $A_{z_0}(|z_0-a|,+\infty)$,
4. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$ sur $A_1(1,2)$,
5. $f(z) = \left(\dfrac{z}{z-1}\right)^k$ sur $A_0(1,+\infty)$ et $k \in \mathbb{N}$,
6. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ sur $A_1(\sqrt{2},+\infty)$.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $|a| < |b|$. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}$$

1. Décomposer $f(z)$ en éléments simples.
2. Calculer le développement en série de Laurent de f centré en 0, dans les couronnes suivants :

   (a) $A_0(0,|a|)$, (b) $A_0(|a|,|b|)$, (c) $A_0(|b|,+\infty)$.

Exercice 4. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}.$$

1. Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^{\frac{1}{z}} = 1$ et en déduire l'ensemble de définition de f.
2. En déduire que 0 n'est pas une singularité isolée de f.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le type de singularité du point z_0 indiqué. Si c'est une singularité éliminable, déterminer comment prolonger la fonction holomorphiquement en ce point, si c'est un pôle, déterminer la partie principale du développement en série de Laurent de la fonction en ce point.

1. $f(z) = \dfrac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$ en $z_0 = -i$,
2. $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$ en $z_0 = 0$,
3. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^4}$ en $z_0 = 0$,
4. $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ en $z_0 = 1$,
5. $f(z) = \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ en $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$,
6. $f(z) = \sin\left(\dfrac{\pi}{z^2+1}\right)$ en $z_0 = i$,

Exercice 6. Soit $Z \subset \mathbb{C}$ un ensemble discret et f une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C} \setminus Z$. Montrer que f est constante.

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in U$ et $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle en z_0.

Montrer que pour tout $r > 0$ tel que $\mathbb{D}(z_0, r) \subset U$, l'image par f de $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8. L'objectif de cet exercice est de démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont les fonctions affines non-constantes, c'est à dire les fonctions de la forme $z \mapsto az+b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. (Un automorphisme de $\mathbb{C}$ est par définition un biholomorphisme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.)

1. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$ tel que $f(0) = 0$. Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.
   (a) Montrer que qu'il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que si $|z| < \epsilon$ alors $|g(z)| > C$.
   (b) En déduire que 0 n'est pas une singularité essentielle de g.
   (c) En déduire que f est un polynôme et que de plus $\deg P = 1$.
2. Démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont exactement les fonctions affines non-constantes.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. C'est à dire que pour tout $M \geqslant 0$, il existe $R \geqslant 0$ tel que
$$|z| > R \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \geqslant M.$$

1. Montrer que l'application $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(\frac{1}{z})$ admet un pôle en 0.
2. En déduire que f est un polynôme.

Exercice 10. Soit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f(z)| \to 0$ quand $|z| \to 1$ (c'est à dire, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r < 1$ tel que $r < |z| < 1$ implique $|f(z)| < \epsilon$).

1. Montrer que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$
2. Que dire si on suppose f méromorphe sur $\mathbb{D}$ avec un nombre fini de pôles? (On pourra par exemple se ramener à la question précédente).

Solutions des exercices

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 9. [énoncé modifié, j'ai viré une question intermédiaire]

1. La fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ comme composée de fonctions holomorphe, le point 0 est donc une singularité isolée de g. Du plus, puisque $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$, on a $|g(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to 0$. D'après la proposition 2.12 du chapitre 6, on en déduit que 0 est un pôle de g.
2. D'après la proposition 2.12 du chapitre 6, puisque g à un pôle en 0, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et il existe une fonction h_1, holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que
$$g(z) = \frac{h_1(z)}{z^m} \quad \forall m \in \mathbb{C}^*.$$
En effet, la proposition 2.12 implique qu'il existe $m \in \mathbb{C}$ telle que la fonction $z \mapsto z^m g(z)$ (holomorphe sur $\mathbb{C}^*$) bornée au voisinage de 0. La propriété 2.11 du chapitre 6 implique alors que 0 est une singularité effaçable de la fonction $z \mapsto z^m g(z)$ et donc que cette fonction s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ que nous noterons h_1.
En notant $h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $h(z) = h_1\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et vérifie
$$h(z) \overset{[}{|}\, z| \to +\infty] \longrightarrow h_1(0) =: \ell$$
puisque
$$h_1(z) \overset{[}{|}\, z| \to 0] \longrightarrow h_1(0).$$
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a
$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{h_1\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{1}{z}\right)^m} = z^m h(z).$$
3. Puisque $h(z) \to \ell$ quand $|z| \to +\infty$, on en déduit qu'il existe $R \geqslant 0$ tel que
$$|h(z)| \leqslant M := |\ell| + 1$$
pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant R$. En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant R$ on a
$$|f(z)| = \left|z^m h(z)\right| \leqslant M|z|^m.$$
D'après la question 1, on en déduit que f est un polynôme de degré au plus m.

Correction de l'exercice 10.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $r \in]0,1[$ tel que $|r| > |z_0|$ et tel que $|f(z)| \leqslant \epsilon$ pour tout $z \in C(0,r)$ (ce qui est possible par hypothèse). Le principe du maximum implique alors, puisque $z \in \overline{B}(0,r)$ que
$$|f(z_0)| \leqslant \max_{z \in C(0,r)} |f(z)| \leqslant \epsilon.$$
Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $f(z_0) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$ on a bien le résultat attendu.
2. Supposons maintenant que f est méromorphe avec un nombre fini de pôles. Notons $z_1, \dots, z_p$ les pôles de f et notons $m_1, \dots, m_p$ leurs ordres respectifs. La fonction $g : z \mapsto (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_p)^{m_p}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et donc sur $\mathbb{D}$) et de plus la fonction $h = fg$ holomorphe sur $\mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ s'étend de façon holomorphe sur $\mathbb{D}$. Donc d'après la question précédente h est identiquement nulle sur $\mathbb{D}$ et donc sur $\mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$. Comme g n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ et que $\mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ est connexe, le principe de prolongement analytique implique que f est identiquement nulle sur $\mathbb{D} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$.