Université de Lorraine **UE 601 Analyse Complexe**
Faculté des sciences de Nancy **2020-2021**

Partiel du 21 Mai 2021
8h-9h30

Instructions :

- Tous les documents, téléphones portables, calculatrices... sont interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (Questions de cours : 6 points)**.**

1. (1 point) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Donner la définition de $\mathrm{res}_{z_0}(f)$.
2. (1 point) Comment lire le résidu de f en z_0 sur le développement en série de Laurent de f centré en z_0 ?
3. (3 points) Si z_0 est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ de f, donner une formule permettant de calculer ce résidu en terme de la dérivée d'un certain ordre d'une certaine fonction. Puis donner l'idée de la démonstration de cette formule.
4. (1 point) Si z_0 est une singularité éliminable, que vaut $\mathrm{res}_{z_0}(f)$?

Exercice 2 (2 points)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $Z \subset U$ un sous-ensemble fermé et discret. Soit $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f admet une primitive si et seulement si $\mathrm{res}_z(f) = 0$ pour tout $z \in U$.

Exercice 3 (5 points)**.** On considère la fonction

$$f : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2}.$$

1. (2 point) Déterminer les pôles de f et l'ordre de chacun des pôles.

2. (1 point) Déterminer le résidu de chacun des pôles dans le demi plan supérieur $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

3. (2 points) À l'aide du théorème des résidus, calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Exercice 4 (4 points)**.** Soit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f(z)| \to 0$ quand $|z| \to 1$ (c'est à dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r < 1$ tel que $r < |z| < 1$ implique $|f(z)| < \varepsilon$).

1. (2 points) Montrer que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$

2. (2 points) Que dire si on suppose f méromorphe sur $\mathbb{D}$ avec un nombre fini de pôles ? (On pourra par exemple se ramener à la question précédente).

Exercice 5 (3 points)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que

$$|f'(z)| \leqslant |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|b| < \frac{1}{2}$ et tels que

$$f(z) = a + bz^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$