Examen final du 29/05/2024

Durée : 3h. Documents, calculatrices, téléphones interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.
Il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité des questions pour obtenir la note maximale.

Exercice 1.
1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{C})$, et $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1], U)$ un chemin dans U. Définir $\int_\gamma f(z)dz$.
2. Énoncer le théorème intégral de Cauchy.
3. Donner un exemple de fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et de lacet $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{C})$ tel que $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$.
4. Donner un exemple d'ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$, d'une fonction $f \in \mathscr{O}(U)$ et d'un lacet $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1], U)$ vérifiant $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$.
5. Donner un exemple de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $\int_{\mathscr{C}(0,1)} f(z)dz = 0$.

Exercice 2.
1. Montrer que la fonction $z \mapsto \tan(z)$ est développable en série entière en l'origine.
2. Calculer les trois premiers termes *non nuls* de ce développement.
3. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (Justifier soigneusement.)

Exercice 3. Soit $R : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ la détermination principale de la racine carrée, c'est-à-dire $R : z \mapsto \exp(\mathrm{Log}_0(z)/2)$ où Log_0 est la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$.

Soient $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que l'expression $R(zz')$ n'est pas toujours définie, et que même lorsqu'elle est définie, l'assertion $R(zz') = R(z)R(z')$ est en générale fausse.

Exercice 4.
1. Soit $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^*)$ telle que $\forall \theta \in \mathbb{R}, f\left(e^{i\theta}\right) = \cos(\theta)$. Montrer que $f(z)$ est une fraction rationnelle en z que l'on explicitera.
2. Existe-t-il une fonction entière vérifiant la même condition ?

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions entières, avec $|f| \leq |g|$ sur tout $\mathbb{C}$.
1. On suppose que g ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $\alpha \in \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ tel que $f = \alpha g$.
2. On ne suppose plus que g ne s'annule pas. Montrer que le résultat subsiste néanmoins.

Exercice 6.
1. (Cours) Définir ce qu'est une singularité isolée d'une fonction holomorphe. Définir les trois types de singularités isolées (effaçable, pôle, singularité essentielle).
2. (Cours) Démontrer le théorème d'extension de Riemann : si f une fonction holomorphe bornée sur un disque épointé $\mathbb{D}(0,\epsilon) \setminus \{0\}$, alors l'origine est une singularité effaçable pour f.
3. Dans la suite, on fixe $z_0 \in \mathbb{C}$, U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant z_0 et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Soit P une fonction polynomiale non constante. Montrer que z_0 est une singularité effaçable (respectivement. un pôle, une singularité essentielle) de f si et seulement si z_0 est une singularité effaçable (resp. un pôle, une singularité essentielle) de $P \circ f$.

Exercice 7. Montrer que $\displaystyle\int_\mathbb{R} \frac{dx}{9+x^4} = \frac{\pi}{3\sqrt{6}}$ en utilisant le théorème des résidus et en détaillant toutes les étapes : le choix du contour utilisé, le calcul des résidus, les calculs de toutes les limites, etc.

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\int_\mathbb{R} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$ par la méthode des résidus, en détaillant toutes les étapes : le choix du contour utilisé, le calcul des résidus, les calculs de toutes les limites, etc. (Si certaines justifications sont *identiques* à celles de l'exercice précédent, ne pas les réécrire.)

Correction abrégée

Correction de l'exercice 1. [Principales erreurs : énoncés mal appris, erreurs sur le rôle de l'holomorphie dans les énoncés, confusion entre lacets et chemins, confusion entre holomorphe, méromorphe etc]

1. cours
2. cours
3. On peut prendre $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ et $f(z) = \overline{z}$, par exemple. On obtient $I = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}} ie^{it} dt = 2i\pi$.
4. On peut prendre $U = \mathbb{C}^*$, $f : U \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ et $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Dans ce cas, on obtient $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi$.
5. Vu la formulation de la question, rien n'empêche de prendre la restriction à $\mathbb{C}^*$ d'une fonction entière et d'appliquer le théorème intégral de Cauchy, voire même de prendre la fonction nulle. Mais on peut également prendre $z \mapsto 1/z^2$, qui ne s'étend pas holomorphiquement en zéro. L'intégrale curviligne est nulle, soit en appliquant le théorème des résidus (le résidu est nul), soit en calculant directement : $\int_{\mathscr{C}(0,1)} f(z)dz = \int_0^{2\pi} e^{-2it} ie^{it} dt = i\int_0^{2\pi} e^{-it} dt = 0$.

Correction de l'exercice 2.

1. La fonction est holomorphe comme quotient d'une fonction holomorphe par une fonction holomorphe non nulle au voisinage de l'origine. D'après le cours, elle est donc développable en série entière au voisinage de l'origine. Citer l'exercice de TD sur le DSE de $1/f$ lorsque $f(0) \neq 0$ est également accepté.
2. Au voisinage de zéro, on a $\sin(z) = z - z^3/6 + z^5/120 + o(z^5) = z(1 - z^2/6 + z^4/120 + o(z^4))$ et $\cos(z) = 1 - z^2/2 + z^4/24 + o(z^4)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} &= z\left(1 - z^2/6 + z^4/120 + o\left(z^4\right)\right)\left(1 - z^2/2 + z^4/24 + o\left(z^4\right)\right)^{-1} \\
&= z\left(1 - z^2/6 + z^4/120 + o\left(z^4\right)\right)\left(1 + (z^2/2 - z^4/24) + (z^2/2 - z^4/24)^2 + o\left(z^4\right)\right) \\
&= z\left(1 + z^2\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) + z^4\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) + o\left(z^4\right)\right) \\
&\boxed{= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + o\left(z^5\right)}
\end{aligned}$$

   [Remarque : quelques copies ont utilisé avec succès la dérivée de tan pour calculer le DL.]

3. Montrons que le rayon de convergence est $\pi/2$. Si le rayon était $> \pi/2$, la fonction $z \mapsto \tan(z)$ s'étendrait holomorphiquement en $\pi/2$. Or, $z \mapsto \cos(z)$ a un zéro simple en $\pi/2$ et le sinus est non nul, donc la fonction $z \mapsto \tan(z)$ admet un pôle simple en $\pi/2$. Elle est non bornée au voisinage de $\pi/2$, contradiction. Donc le rayon est $\leq \pi/2$. Montrons maintenant que le rayon est $\geq \pi 2$.
   Justification courte, acceptée : on a vu en cours que le rayon est supérieur ou égal au plus petit module des zéros du dénominateur.
   Points supplémentaires hors-barème si justification plus poussée : formule de Cauchy sur un cercle de rayon $|z| < R < \pi/2$, DSE en la variable z de l'intégrande puis interversion. Points en fonction des détails fournis

Correction de l'exercice 3. Si $z = z' = i$, on a bien $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ mais $zz' = -1 \in \mathbb{R}_-$ donc l'expression $R(zz')$ n'est pas définie.

Ensuite, si $z = z' = e^{3i\pi/4}$, on a d'une part $R(z)R(z') = R(z)^2 = z = e^{3i\pi/4}$, et d'autre part $zz' = e^{3i\pi/2} = e^{-i\pi/2}$ donc $R(zz') = e^{-i\pi/4}$.

Correction de l'exercice 4.

1. Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{z + z^{-1}}{2}$. D'après l'énoncé, pour tout $z \in \mathscr{C}(0,1)$, on a $f(z) = g(z)$. Sur l'ouvert connexe $\mathbb{C}^*$, la fonction holomorphe $f - g$ a des zéros non isolés dans $\mathbb{C}^*$, donc d'après le théorème

des zéros isolés, $f - g$ est identiquement nulle, c'est-à-dire $f = g$ sur $\mathbb{C}^*$. [Remarque : on peut aussi rédiger avec le prolongement analytique. D'autre part une copie a utilisé la connaissance de f sur le cercle pour la développer en série de Laurent sur $\mathbb{C}^*$.]

2. Une telle fonction n'existe pas. Supposons en effet par l'absurde qu'il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}, h\left(e^{i\theta}\right) = \cos(\theta)$. En appliquant la question précédente à la restriction $f = h|_{\mathbb{C}^*}$, on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = g(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}$. Mais cette fonction admet un pôle d'ordre un en l'origine et ne peut pas s'étendre holomorphiquement en l'origine car non localement bornée, contradiction.

Correction de l'exercice 5.

1. Puisque g ne s'annule pas, $h : z \mapsto f(z)/g(z)$ définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Par hypothèse, celle-ci est bornée (en module, par 1), donc est constante d'après le théorème de Liouville, égale à une constante α qui est donc de module inférieur ou égal à 1.
2. Comme g est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est connexe, soit ses zéros sont isolés, soit elle est identiquement nulle, d'après le théorème des zéros isolés. Si elle est nulle, alors f aussi et la conclusion est bien vérifiée. Si g n'est pas identiquement nulle, notons Z l'ensemble de ses zéros, composé de points isolés. Alors la fonction $h : z \mapsto f(z)/g(z)$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Z$ et chaque point de Z est une singularité isolée de h. De plus, la fonction h est bornée par hypothèse. D'après le théorème d'extension de Riemann, toutes ses singularités sont effaçables, c'est-à-dire qu'elle se prolonge en une fonction holomorphe $\widehat{h}$ sur $\mathbb{C}$. (On peut aussi considérer les ordres d'annulation de f aux zéros de g pour conclure que h se prolonge.) Par continuité, on a toujours $|\widehat{h}| \leq 1$ sur $\mathbb{C}$, donc la fonction entière h est bornée. D'après le théorème de Liouville, elle est égale à une constante α. Comme $\left|\widehat{h}\right| \leq 1$, on a $|\alpha| \leq 1$.

Correction de l'exercice 6. (hors cours, question 3)

— Si z_0 est une singularité effaçable pour f, alors f se prolonge holomorphiquement en z_0 en une fonction $\tilde{f}$, et donc $P \circ f$ admet le prolongement holomorphe $P \circ \tilde{f}$ en z_0, donc z_0 est effaçable pour $P \circ f$.

— Si z_0 est un pôle pour f, alors $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$. D'autre part, comme P n'est pas constant, on a $\lim_{|w| \to +\infty} |P(w)| = +\infty$. Et donc $\lim_{|z| \to +\infty} |P \circ f(z)| = +\infty$. On en déduit que z_0 est un pôle pour $P \circ f$.

— Si z_0 est une singularité essentielle, alors l'image par f de tout voisinage épointé V de z_0 est dense dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Casorati-Weiestrass. Comme P n'est pas constant, il est surjectif d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. On en déduit que l'image de V par $P \circ f$ est également dense dans $\mathbb{C}$: si $\lambda \in \mathbb{C}$, et μ est telle que $P(\mu) = \lambda$, alors il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de V tels que $f(z_n)$ tend vers μ. On en déduit que $P(f(z_n))$ tend vers λ, par continuité de P. Ceci montre que z_0 n'est ni un pôle ni une singularité effaçable de $P \circ f$, donc une singularité essentielle.

— Les trois types de singularité s'excluant mutuellement, on a les trois réciproques automatiquement.

Correction de l'exercice 7. [Trame de correction, voir la correction du TD8 pour un exemple de rédaction détaillée]

— définir la fonction méromorphe utilisée, son domaine d'holomorphie, ses singularités isolées, identification du type de singularité (pôles simples) : La fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{z^4 + 9}$ possède des pôles simples en $\sqrt{3} e^{ik\pi/4}$ pour $k \in [\![1, 4]\!]$.

— Définition du compact (demi-disque fermé supérieur de rayon R), preuve que c'est compact, paramétrage du bord par des applications $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

— Définition des intégrales curvilignes, justification de l'existence de ces intégrales pour les bonnes valeurs de R.

— Calcul des résidus : le résidu en un pôle simple α est $\frac{1}{4\alpha^3}$. On obtient donc

$$\text{rés}_{e^{i\pi/4}}(f) = \frac{1}{4\left(e^{i\pi/4}\right)^3} = \frac{e^{-3i\pi/4}}{12\sqrt{3}}$$

$$\text{rés}_{e^{3i\pi/4}}(f) = \frac{1}{4\left(e^{3i\pi/4}\right)^3} = \frac{e^{-i\pi/4}}{12\sqrt{3}}$$

— Calcul de l'intégrale curviligne sur le bord du compact. Application du théorème des résidus. Si $R > 3\sqrt{3}$, on obtient $\boxed{I(R) = \frac{\pi}{3\sqrt{6}}.}$

— Limite de l'intégrale sur le bord du compact lorsque $R \to +\infty$: majoration du terme qui tend vers zéro, limite de l'autre terme (ou des deux autres termes suivant la méthode choisie), somme des deux limites et conclusion

Correction de l'exercice 8. [Trame de correction] La fonction $f(z) = \frac{1}{(xz^2+2z+2)^2}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet des pôles doubles en $-1 \pm i$. En notant $g(z) = (z+1-i)^2 f(z) = \frac{1}{(z+1+i)^2}$, le résidu de f en $\alpha = -1+i$ est d'après le cours $g'(\alpha) = \frac{-2}{(z+1+i)^3}$. Autrement dit, le résidu de f en $-1+i$ est $1/4i$.

On prend le même compact K_R à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$ qu'à l'exercice précédent. Si $R > \sqrt{2}$, la fonction f est définie sur un voisinage de ∂K_R, l'intérieur du compact K_R contient un unique pôle de f, à savoir $-1+i$. L'intégrale $\int_{\partial K_R} f(z)dz$ vaut donc $2i\pi\,\text{rés}_{-1+i}(f) = \pi/2$.

La suite est semblable à l'exercice précédent. On obtient une intégrale de $\pi/2$.