Interrogation 1

Dans les énoncés, lorsqu'on écrit $z := x + iy$, il est sous-entendu que x et y sont des réels.

Exercice 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$.

1. Soit $f : U \to \mathbb{C}$. Définir les assertions « f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 » et « f est holomorphe sur U. »
2. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable. Définir l'assertion « f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en z_0. »

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Ré}(z)\,\mathrm{Im}(z) = 0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{\overline{z}}{\mathrm{Ré}(z)\,\mathrm{Im}(z)}$.

1. Écrire f comme une fonction d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et calculer sa matrice jacobienne en tout point.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan où f est $\mathbb{C}$-dérivable.
3. Existe-t-il des ouverts du plan sur lesquels f est holomorphe et si oui lesquels ?

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, x + iy \mapsto e^y \cos x$. Déterminer toutes les fonctions $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telles que $f := u + iv$ soit une fonction holomorphe (que l'on pourra supposer de classe $\mathscr{C}^2$) sur $\mathbb{C}$. Écrire alors f en fonction de la variable z en donnant une expression simplifiée.

Exercice 4. Rappeler la définition des notations de Wirtinger $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, puis calculer $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\dfrac{z + \bar{z}}{z\bar{z}}\right)$.

Commentaires sur les exercices, erreurs importantes etc

Exercice 1

1. Ne pas écrire « lim » avant d'avoir démontré (ou exigé, dans le cas d'une définition) l'existence de la limite. De façon générale, éviter la notation « lim ». La notation $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou bien $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \ell$ est plus pratique et évite de se coltiner des « lim » ligne après ligne, sans compter les problèmes de justification préalable.
2. La fonction était déjà supposée différentiable donc elle admettait des dérivées partielles et il ne restait qu'à mettre les conditions sur les dérivées partielles.

Exercice 2

1. Simplifier dès le début l'expression de f !
2. Quelques rares erreurs sur la jacobienne (coefficients dans les mauvais emplacements). Quelques rares sur la condition $x^2 = y^2$, avec oubli du $x = -y$, ou mauvaise compréhension géométrique de l'ensemble. **Attention** : erreur de compréhension importante mais heureusement très rare : sur un très petit nombre de copies, je lis qu'être $\mathbb{C}$-dérivable, c'est avoir une jacobienne inversible (avec vérification en calculant le déterminant). Rien, à voir, il n'y a implication ni dans un sens ni dans l'autre. [1]
3. Si l'ensemble $x^2 = y^2$ n'a pas été identifié géométriquement à la question précédente, il est nécessaire de la faire ici sinon on ne peut pas dire sans justification qu'il n'y a aucun ouvert qui convient. Attention, nombreuses erreurs de raisonnement : la question n'est pas de savoir si $x^2 = y^2$ est ouvert ou fermé, mais s'il contient des ouverts non triviaux. Donc dire que c'est un fermé, ou bien que ce n'est pas un ouvert, ne répond pas à la question.

Exercice 3 Peu d'erreurs de dérivation et primitivation, mais erreurs sur les constantes : oubli, ou oubli qu'elles dépendent a priori de certaines variables, mauvaise justification qu'elles sont vraiment constantes, ou encore oubli des constantes à la fin.

Conseil : dans un exercice de ce type, il est obligatoire de vérifier son calcul, c'est une étape implicite : si vous trouver une fonction v, vérifiez tout de même à la fin que $u + iv$ est bien holomorphe.

Pour l'écriture en fonction de z, idem, il faut simplifier, et surtout, il faut vérifier son résultat! Certaines copies mettent simplement $f(z) = e^z$ sans justification : un résultat faux sans justification ou étapes intermédiaires ne permet pas au correcteur de mettre de points. Cette dernière question a été très mal réussie.

Exercice 4 Opérateur de Wirtinger correctement appris. Quelques erreurs de dérivation (ou abandon en cours de route) à cause, en général, de la non-simplification en $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$. Résultats finaux rarement simplifiés.

Remarques générales Dans l'ensemble, cours relativement bien su,(bravo), les exercices de base sont faits en général correctement (bravo), mais de façon non optimale au niveau du calcul. Inquiétude : si au partiel je mets quelque chose de plus compliqué que $\frac{1}{y} - \frac{i}{x}$ ou $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$, quel sera le pourcentage de réussite sur la jacobienne?

Conseil/consigne : entraînez-vous au calcul, ça coûte moins cher en charge mentale que d'autres tâches et c'est une compétence transverse dans des études de maths, qui est également évaluée. Une heure d'entraînement au calcul (calcul de jacobiennes, factorisations, décompositions en éléments simples, majorations, autres) est rentable pour toutes vos UE.

Utilisation de « $\Longrightarrow$ » au lieu de « donc », voire comme symbole décoratif pour des listes, débuts de définition etc : évitez, dès la prochaine interro on enlèvera des points.

Simplifiez vos calculs, dès le début. Vous ne pouvez pas laisser trainer pendant des lignes entières des choses comme $\frac{x}{xy}$. Le manque de simplification a entraîné énormément d'erreurs. Un calcul non simplifié sera considéré comme non terminé et tous les points ne seront pas attribués.

1. Ce qui est vrai c'est que si la matrice est $\mathbb{C}$-linéaire et non nulle, alors elle est automatiquement inversible.

Correction de l'interrogation 1

Correction de l'exercice ??.

1. La fonction f est dérivable au sens complexe en z_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite (finie) lorsque z tend vers z_0 dans U. La fonction f est holomorphe sur U si elle est dérivable au sens complexe en tout point de U.
2. Notons u et v les parties réelle et imaginaire de f. Alors, f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en z_0 si $\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0)$ et $\partial_y u(z_0) = -\partial_x v(z_0)$. Ceci est équivalent au fait que la matrice jacobienne de f en z_0 soit une matrice $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont réels.

Correction de l'exercice ??.

1. On obtient $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/y \\ -1/x \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Jac}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1/y^2 \\ 1/x^2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. La fonction f étant différentiable, elle est donc dérivable au sens complexe exactement là où les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, c'est-à-dire aux points $(x,y) \in U$ pour lesquels $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2}$, c'est-à-dire $x^2 = y^2$, c'est-à-dire $x = y$ ou $x = -y$. Il s'agit de l'union de deux droites.
3. Le lieu où f est dérivable au sens complexe est d'intérieur vide. Il n'existe donc pas d'ouvert de U sur lequel la fonction f est holomorphe.

Correction de l'exercice ??. Soit $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ différentiable et soit $f = u + iv$. Si f est holomorphe sur U , alors f satisfait les conditions de Cauchy-Riemann en tout point. Ceci permet d'obtenir les deux dérivées partielles de v grâce à celles de u, qui sont connues :

$$\partial_x v = -\partial_y u = -e^y \cos(x) \text{ et } \partial_y v = \partial_x u = -e^y \sin(x).$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction partielle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto v(x,y)$ a pour dérivée $y \mapsto \partial_y v = \partial_x u = -e^y \sin(x)$. On en déduit que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \partial_y v + e^y \sin(x)$ a une dérivée nulle, donc est localement constante sur $\mathbb{R}$ qui est connexe, donc est constante sur $\mathbb{R}$. On note $h(x)$ cette constante, qui dépend du réel x qui a été fixé en début de paragraphe. On a donc $v(x,y) = -e^y \sin(x) + h(x)$.

Faisons maintenant varier x. Comme f est différentiable, la fonction $x \mapsto h(x)$ est dérivable, en la variable x et en dérivant suivant x on obtient $\partial_x v(x,y) = -e^y \cos(x) + h'(x)$.

Or, d'après les relations de Cauchy-Riemann rappelées plus haut, on sait que $\partial_x v = -\partial_y u = -e^y \cos(x)$, d'où l'on tire que h a une dérivée nulle, donc est localement constante. Comme $\mathbb{C}$ est connexe, h est constante, égale à un réel K.

Finalement, si $f = u + iv$ est holomorphe, on a prouvé qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $v(x,y) = -e^y \sin(x) + K$.

Réciproquement, si K est un réel et $v(x,y) := -e^y \sin(x) + K$, alors la fonction $f := u + iv$ est différentiable et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$, donc est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Enfin, on voit que $f(z) = e^y(\cos x - i \sin x) + iK = e^y e^{-ix} + iK = e^{y-ix} + iK = e^{-iz} + iK$. Si on ne voit pas directement que $y - ix = -iz$, on utilise la méthodologie de base : $y - ix = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} - i\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} + \dfrac{z+\bar{z}}{2i} = \dfrac{2z}{2i} = -iz$.

Correction de l'exercice ??. D'après le cours, les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sont définis par $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

On a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{\bar{z}^2} + 0 = -\frac{1}{\bar{z}^2}$$

Si on veut justifier le calcul de $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$, on peut par exemple utiliser la formule du produit appliquée à $1 = \bar{z} \times \dfrac{1}{\bar{z}}$ ce qui donne $0 = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(1) = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}) \times \dfrac{1}{\bar{z}} + \bar{z} \times \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$. On peut bien sûr tout écrire en fonction de x et y et revenir à la définition.