Université de Lorraine,
Année 2018-19

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 2 bis :

Préparation avant Cauchy-Riemann

Exercice 1 (Échauffement) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2 + |z|^2$. Calculer les dérivées partielles de f, vue comme fonction complexe des deux variables réelles x et y. Si u et v sont les parties réelle et imaginaire de f, écrire les dérivées partielles suivant x et y des fonctions u et v.

Exercice 2 (Échauffement) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^2 + 3xy$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (1 + 2t, t^2 + t + 1)$. Écrire la différentielle de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

Exercice 3 (Fonction continue non différentiable) On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue mais pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4 (Fonction différentiable non $\mathcal{C}^1$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\ . \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (Contre-exemple au théorème de Schwarz) Soit $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions C^2. Écrire la dérivée seconde de $f \circ g$.

Exercice 7 (Dérivées secondes composées) Soient $u, v, f, g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ liées par la relation :

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g.

Exercice 8 (Les polynômes complexes sont harmoniques) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto P(x + iy)$. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 9 (Gradient en polaires) Écrire le gradient en coordonnées polaires.

Exercice 10 Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unité du plan, telle que son laplacien $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ soit nul.

1. Montrer $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta$ ne dépend pas de $r \in [0,1]$.
2. Calculer alors $\iint_{D_r} f(x,y)\, dxdy$ D_r étant le disque fermé de centre 0 et de rayon r.

On utilisera (ou démontrera mais c'est long) que le laplacien en polaires est $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$, où $f(x,y) = g(r,\theta)$.