Université de Lorraine,
Année 2018-19

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 5 : Intégration le long des chemins.

Exercice 1 Dessiner les chemins suivants :

(a) $\gamma(t) := e^{-it}$, $0 \leq t \leq \pi$;

(b) $\gamma(t) := 1 + i + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

(c) $\gamma(t) := t + i\cosh(t)$, $-1 \leq t \leq 1$;

(d) $\gamma(t) := \cosh(t) + i\sinh(t)$, $-1 \leq t \leq 1$.

Exercice 2 Calculer $\int_\gamma (x - y + ix^2)dz$, où $z = x + iy$ et γ est :

(a) le segment allant de 0 à $1 + i$;

(b) le segment allant de 0 à i ;

(c) le segment allant de i à $1 + i$.

Exercice 3 Considérons les deux chemins suivants :

$$\gamma_1(t) := 2 + 2e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{et} \quad \gamma_2(t) := i + e^{-it},\ 0 \leq t \leq \pi/2.$$

A partir de la définition d'intégrale le long d'un chemin, calculer

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-2} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z-i)^3}.$$

Exercice 4 Soit γ le cercle de rayon 1, centré en 1 et parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. A partir de la définition d'intégrale le long d'un chemin, calculer

$$\int_\gamma |z|^2 dz.$$

Exercice 5 Soit γ un chemin quelconque allant de 0 à i. Calculer $\int_\gamma f(z)dz$, avec :

(a) $f(z) := z^2 \sin(z)$;

(b) $f(z) := ze^{iz}$.

(*Suggestion* : trouver une fonction holomorphe F telle que $F' = f$).

Exercice 6 Calculer $\int_\gamma (|z|^2)dz$, où :

(a) γ est le chemin formé par le segment allant de 0 à i suivi du segment allant de i à $1 + i$;

(b) γ est le chemin formé par le segment allant de 0 à 1 suivi du segment allant de 1 à $1 + i$.

Les calculs en (a) et (b) sont-ils en contradiction avec le résultat d'existence de primitives ?

Exercice 7 Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et γ un chemin dans U allant d'un point z_0 à un point z_1. Montrer que l'analogue de la formule d'intégration par partie reste valable, à savoir :

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_\gamma f'(z)g(z)dz.$$