TD 5 : Formule de Cauchy, principe du maximum

Exercice 1. Soit f une fonction entière. Montrer qu'elle est constante si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. Il existe $m > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| > m$.
2. L'image de f est incluse dans $\mathbb{H}$, le demi-plan supérieur.
3. L'image de f n'est pas dense dans $\mathbb{C}$.
4. L'image de f est incluse dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Exercice 2. [Fonctions à croissance polynomiale] Soit f une fonction entière. On suppose qu'il existe $d \geq 0$, $M \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout z de module $\geq R$, on ait $|f(z)| \leq M|z|^d$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq d$.

Exercice 3. Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur $\mathbb{D}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\mathscr{C}(0,1)} \frac{f(w)}{w-z} dw$.
2. La question précédente montre que si f est nulle sur le cercle unité, elle est nulle dans le disque. Montrer que si' l'on suppose seulement que f est nulle sur un arc du cercle unité, alors f est nulle.

Exercice 4. [Principe « du minimum »] Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in \mathscr{O}(U)$. Montrer que si $|f|$ admet un minimum strictement positif en $z_0 \in U$, alors la fonction f est constante.

Exercice 5. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathscr{O}(U)$. On suppose que pour tout $z \in U$, on a $\left|\mathrm{Im}(f(z))\right| = 2\left|\mathrm{Ré}(f(z))\right|$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 6. Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur $\mathbb{D}$. On suppose qu'il existe $M > 0$ (resp. $N > 0$) tel que si z est de module un et partie imaginaire positive (resp. négative), alors $|f(z)| \leq M$ (resp. $\leq N$). Montrer que $|f(0)| \leq \sqrt{MN}$.

Exercice 7. [Lemme de Schwarz] Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe s'annulant en zéro à l'ordre $\leq d$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leq |z|^d$.
2. Montrer que s'il existe $z \in \mathbb{D}^*$ tel que $|f(z)| = |z|^d$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = e^{i\theta} z^d$.

Exercice 8. [Biholomorphismes du disque] Pour tout $a \in \mathbb{D}$, on considère l'application

$$\phi_a : \mathbb{C} \setminus 1/\bar{a} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Montrer qu'elle se restreint en un biholomorphisme de $\mathbb{D}$. Montrer que toutes les applications biholomorphes de $\mathbb{D}$ dans lui-même sont de la forme

$$z \mapsto e^{i\theta}\phi_a(z),$$

avec $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. 1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i}\,dz$,

(b) $I_2 = \displaystyle\int_{C(2,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i}\,dz$,

(c) $I_3 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)\cos(z)}{3z - \pi}\,dz$,

(d) $I_4 = \displaystyle\int_{C(2i,1)} \frac{e^{z^2}}{z^3(z - 2i)}\,dz$.

2. Calculer $\displaystyle\int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}\,dz$ et $\displaystyle\int_{C(-1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}\,dz$. En déduire $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1}\,dz$.

3. Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^2 + (1-i)z - i$. Puis calculer $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{z - 1}{z^2 + (1-i)z - i}\,dz$.

Exercice 10. 1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{z^3 - i}{(z-1)^2}\,dz$,

(b) $I_2 = \displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^3}\,dz$,

(c) $I_3 = \displaystyle\int_{C(i,5)} \frac{ze^{iz}}{(1+z)^3}\,dz$,

(d) $I_4 = \displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z^3(z-2)}\,dz$.

2. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{C(i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz$ et $\displaystyle\int_{C(-i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz$.
   En déduire $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2}\,dz$.

Exercice 11. [Transformé de Fourier d'une Gaussienne] Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $G_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $G_a(t) = e^{-at^2}$. La transformé de Fourier de G_a est l'application $\widehat{G}_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{G}_a(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-i\xi t}\,dt.$$

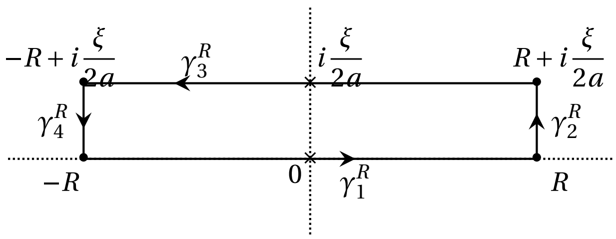
Nous admettrons que $\widehat{G}_a(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. (Intégrale de Gauss, se renseigner sur le sujet et lire une preuve, par exemple celle avec les coordonnées polaires.)

1. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{G}_a(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} I_a(\xi)$ où $I_a(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t + i\frac{\xi}{2a})^2}\,dt$.

2. Nous allons maintenant montrer que $I_a(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = e^{-az^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

   Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, on considère le chemin $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$ représenté graphiquement ci-dessous.



   (a) Calculer $\displaystyle\int_{\gamma^R} f(z)\,dz$ pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz \to \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ quand $R \to +\infty$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz \to -I_a(\xi)$ quand $R \to +\infty$.

   (d) Montrer que pour $j \in \{2,4\}$, $\displaystyle\int_{\gamma_j^R} f(z)\,dz \to 0$ quand $R \to +\infty$.

   (e) Conclure.