Analyse complexe
Aide aux révisions : liste d'idées fausses

Damien Mégy

24 avril 2025

Table des matières

AVERTISSEMENT Ce document est une liste d'idées fausses en analyse complexe.

Tous les énoncés de ce document sont FAUX. Parfois, ils n'ont même pas de sens, ou pas de sens défini en cours. Le symbole « ★ » orne les énoncés faux pour des raisons un peu plus subtiles ou profondes que les autres.

1 Holomorphie (et calcul diff, et nombres complexes)

Idée Fausse 1.1. Le module de e^z est $e^{|z|}$.

Idée Fausse 1.2. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est différentiable et que $Df = 0$, alors f est constante.

Idée Fausse 1.3. La fonction $e \mapsto e^{\text{Ré}\, z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Idée Fausse 1.4. Si f holomorphe sur U, alors $\text{Ré}\, f$ est holomorphe.

Idée Fausse 1.5. Si f holomorphe sur U, alors $|f|$ est holomorphe.

Idée Fausse 1.6. Si $f = u + iv$ admet des dérivées partielles en z_0 et que ces dérivées partielles satisfont $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$ au point z_0, alors f est dérivable au sens complexe en z_0.

Idée Fausse 1.7. Soit $f : U \to \mathbb{C}$. Si $\text{Ré}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont harmoniques, alors f est holomorphe.

Idée Fausse 1.8. ★ Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^2$. Si u est harmonique, alors il existe une fonction harmonique $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $f := u + iv$ soit holomorphe sur Ω.

2 Fonctions analytiques

2.1 Séries entières

Idée Fausse 2.1. Si f est une somme de série entière sur $\mathbb{D}(0, R)$, alors $\text{Ré}\, f$ aussi.

Idée Fausse 2.2. Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon, alors $|a_n| \sim |b_n|$.

Idée Fausse 2.3. Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont des rayons de convergence $R_a \leq R_b$, alors $b_n = O(a_n)$.

Idée Fausse 2.4. Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont égales sur une infinité de points, alors leurs coefficients sont égaux.

Idée Fausse 2.5. Si la somme d'une série entière est bornée, alors elle est constante.

2.2 Fonctions analytiques

Idée Fausse 2.6. Les zéros d'une fonction analytique sont isolés.

Idée Fausse 2.7. Les zéros d'une fonction analytique non constante sont isolés.

Idée Fausse 2.8. Une fonction analytique bornée est constante.

Idée Fausse 2.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière à l'origine de rayon de convergence infini. Si f est bornée, alors f est constante.

Idée Fausse 2.10. Si deux fonctions analytiques f et g sur un ouvert connexe U sont égales sur une infinité de points, alors elles sont égales.

Idée Fausse 2.11. ★ Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes convergente. Si tous les α_n sont dans U et que $\forall n \in \mathbb{N}, f(\alpha_n) = 0$, alors f est nulle.

2.3 Principe du maximum, lemme de Schwarz

Idée Fausse 2.12. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante.

Idée Fausse 2.13. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et soit $K \subset U$ un compact. Alors $\min\limits_{z\in K} |f(z)| = \min\limits_{z\in\partial K} |f(z)|$.

Idée Fausse 2.14. Soit $f : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{D}(0,1)$ holomorphe. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}(0,1)$, on a $|f(z)| \leq |z|$.

3 Intégration curviligne, primitives holomorphes

(Attention, la notion de compact à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$ donnée en cours est assez restrictive.)

Idée Fausse 3.1. Le compact $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 1 \leq y \leq x^2\}$ est à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Idée Fausse 3.2. Le compact $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } xy \geq 0\}$ est à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Idée Fausse 3.3. Le compact $\overline{\mathbb{D}(0,2)} \setminus \mathbb{D}(1,1)$ est à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Idée Fausse 3.4. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin dans U de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in \mathscr{C}^0(U,\mathbb{C})$. Alors on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))dt$.

Idée Fausse 3.5. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un chemin dans U de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in \mathscr{C}^0(U,\mathbb{C})$. Alors on a $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma \big|f(z)\big| dz$.

Idée Fausse 3.6. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un chemin dans U de classe $\mathscr{C}^1$ et $f \in \mathscr{C}^0(U,\mathbb{C})$. Alors[1] on a $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)dz|$.

Idée Fausse 3.7. ★ Toute fonction holomorphe possède des primitives holomorphes.

Idée Fausse 3.8. ★ Toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe possède des primitives holomorphes.

Idée Fausse 3.9. Si une fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ne peut pas se prolonger par continuité en l'origine, alors elle ne possède pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

1. La notation $|dz|$ n'a pas été définie en cours.

4 Théorème et formule(s) de Cauchy

Idée Fausse 4.1. ★ Si f est holomorphe sur U et γ est un lacet de U de classe $\mathscr{C}^1_{pm}$, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Idée Fausse 4.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U et $f \in \mathscr{O}(U)$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{D}(z_0, r)$, la formule de la moyenne donne $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$.

Idée Fausse 4.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{O}(U)$, $K \subseteq U$ un compact à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$ et $z \in K^\circ$. Alors, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

4.1 Étude locale des fonctions holomorphes

Idée Fausse 4.4. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante au voisinage de a. Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que f réalise un biholomorphisme de V sur W.

Idée Fausse 4.5. Une fonction holomorphe non constante est une application ouverte.

5 Séries de Laurent, singularités isolées, Résidus

5.1 Séries de Laurent

5.2 Singularités isolées

Idée Fausse 5.1. Si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'étend pas en une fonction holomorphe en l'origine, alors $\lim\limits_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$.

Idée Fausse 5.2. Si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est holomorphe et n'est pas bornée au voisinage de l'origine, alors $\lim\limits_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$.

5.3 Théorème des résidus

5.4 Principe de l'argument et théorème de Rouché