Partiel du 15 Mars 2021
16h30-18h

Instructions :

- Tous les documents, téléphones portables, calculatrices... sont interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (Questions de cours : 8 points)**.**

1. (1 point) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $z_0 \in U$. Donner les définitions des phrases suivantes :
   - *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.*
   - *f est holomorphe sur U.*
2. (1 point) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui n'est pas holomorphe (on demande pas de le démontrer).
3. (a) (3 points) Énoncer le principe des zeros isolés pour les séries entières puis le démontrer.
   (b) (1 points) Énoncer le principe de prolongement analytique.
   (c) (2 points) Montrer que si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f = g$.

Exercice 2 (2 points)**.** Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{C}^*$ (identifié à $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$) sont-elles holomorphes ?

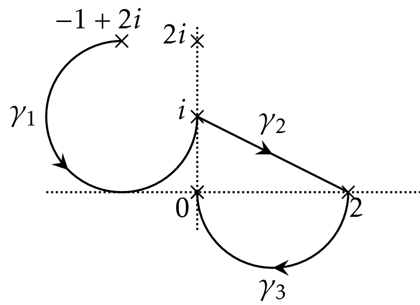
1. $f : (x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$.
2. $g : (x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$.

Exercice 3 (2 points)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe non-vide. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que

$$\mathrm{Im}(f(z))^2 = \mathrm{Re}(f(z)) \quad \forall z \in U.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 4 (5,5 points)**.** On considère le chemin $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ représenté graphiquement de la façon suivante :



1. (1,5 points) Donner une paramétrisation des chemins γ_1, γ_2 et γ_3.
2. (2 points) Déterminer $\displaystyle\int_{\gamma_2} \bar{z} dz$. (Attention, on intègre uniquement sur le chemin γ_2, pas le chemin γ).
3. (1 point) Montrer que la fonction $z \mapsto z - \cos(\pi z)$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$, et déterminer une telle primitive.
4. (1 point) Calculer $\displaystyle\int_{\gamma} \Big(z - \cos(\pi z)\Big) dz$.

Exercice 5 (2,5 points)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide. On note

$$U' := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \exists w \in U \text{ vérifiant } z = \bar{w}\}$$

C'est à dire U' est le symétrique de U par rapport à la droite horizontale $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. On dit que f est *anti-holomorphe* si l'application $\bar{f} : z \mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe.

Montrer que f est anti-holomorphe si et seulement si l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} U' & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(\bar{z}) \end{array} \right.$$

est holomorphe sur U'. Dans ce cas, exprimer g' en fonction de $\bar{f}'$.