Analyse complexe
Aide aux révisions : liste d'idées fausses

Damien Mégy

20 avril 2025

Table des matières

AVERTISSEMENT Ce document est une liste d'idées fausses en analyse complexe.

Tous les énoncés de ce document sont FAUX.

1 Holomorphie (et calcul diff)

Idée Fausse 1.1. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est différentiable et que $Df = 0$, alors f est constante.

Idée Fausse 1.2. Si f holomorphe sur U, alors $\text{Ré} f$ est holomorphe.

Idée Fausse 1.3. Si f holomorphe sur U, alors $|f|$ est holomorphe.

Idée Fausse 1.4. Si $f = u + iv$ admet des dérivées partielles en z_0 et que ces dérivées partielles satisfont $\partial_x u = \partial_y v$ et $\partial_y u = -\partial_x v$ au point z_0, alors f est dérivable au sens complexe en z_0.

Idée Fausse 1.5. Soit $f : U \to \mathbb{C}$. Si $\text{Ré} F$ et $\text{Im} f$ sont harmoniques, alors f est holomorphe.

Idée Fausse 1.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^2$. Si u est harmonique, alors il existe une fonction harmonique $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $f := u + iv$ soit holomorphe sur Ω.

2 Fonctions analytiques

2.1 Séries entières

Idée Fausse 2.1. Si f est une somme de série entière sur $\mathbb{D}(0, R)$, alors $\text{Ré} f$ aussi.

Idée Fausse 2.2. Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon, alors $|a_n| \sim |b_n|$.

Idée Fausse 2.3. Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont des rayons de convergence $R_a \leq R_b$, alors $b_n = O(a_n)$.

Idée Fausse 2.4. Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont égales sur une infinité de points, alors leurs coefficients sont égaux.

Idée Fausse 2.5. Si la somme d'une série entière est bornée, alors elle est constante.

2.2 Fonctions analytiques

Idée Fausse 2.6. Les zéros d'une fonction analytique sont isolés.

Idée Fausse 2.7. Les zéros d'une fonction analytique non constante sont isolés.

Idée Fausse 2.8. Une fonction analytique bornée est constante.

Idée Fausse 2.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière à l'origine de rayon de convergence infini. Si f est bornée, alors f est constante.

Idée Fausse 2.10. Si deux fonctions analytiques f et g sur un ouvert connexe U sont égales sur une infinité de points, alors elles sont égales.

2.3 Principe du maximum, lemme de Schwarz

Idée Fausse 2.11. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante.

Idée Fausse 2.12. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et soit $K \subset U$ un compact. Alors $\min_{z\in K} |f(z)| = \min_{z\in\partial K} |f(z)|$.

Idée Fausse 2.13. Soit $f : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{D}(0,1)$ holomorphe. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}(0,1)$, on a $|f(z)| \le |z|$.

3 Intégration curviligne, primitives holomorphes

Idée Fausse 3.1. Le compact $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ et } 1 \le y \le x^2\}$ est à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Idée Fausse 3.2. Le compact $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \text{ et } xy \ge 0\}$ est à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Idée Fausse 3.3. Le compact $\overline{\mathbb{D}(0,2)} \setminus \mathbb{D}(1,1)$ est à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Idée Fausse 3.4. Toute fonction holomorphe possède des primitives holomorphes.

Idée Fausse 3.5. Toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe possède des primitives holomorphes.

Idée Fausse 3.6. Si une fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ne peut pas se prolonger par continuité en l'origine, alors elle ne possède pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

4 Théorème et formule(s) de Cauchy

Idée Fausse 4.1. Si f est holomorphe sur U et γ est un lacet de U de classe $\mathscr{C}^1_{pm}$, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Idée Fausse 4.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{D}(z_0,r)} \subset U$ un disque fermé inclus dans U et $f \in /mathcalO(U)$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{D}(z_0,r)$, la formule de la moyenne donne $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$.

Idée Fausse 4.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{O}(U)$, $K \subseteq U$ un compact à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$ et $z \in K^\circ$. Alors, $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

4.1 Étude locale des fonctions holomorphes

5 Séries de Laurent, singularités isolées, Résidus

5.1 Séries de Laurent

5.2 Singularités isolées

Idée Fausse 5.1. Si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'étend pas en une fonction holomorphe en l'origine, alors $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$.

Idée Fausse 5.2. Si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est holomorphe et n'est pas bornée au voisinage de l'origine, alors $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$.

5.3 Théorème des résidus

5.4 Principe de l'argument et théorème de Rouché