Université de Lorraine,
Année 2018-19

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Contrôle continu – Durée 3 heures.

Notes de cours, calculatrices et téléphones portables interdits.

Rédaction soignée exigée.

Exercice 1 Soit f une fonction entière telle que pour tout $n \geq 1$ et tout z tel que $|z| = n$ on ait $|f(z)| \leq 1/n$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 2
1. Énoncer le théorème des résidus.
2. Énoncer et démontrer le lemme de Jordan.
3. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 - x\sqrt{2} + x^2} = \pi\sqrt{2}.$$
4. Montrer que l'on a également
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 - x\sqrt{2} + x^2)^2} = \pi\sqrt{2}.$$

Exercice 3
1. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in U$ un zéro simple (i.e. d'ordre 1) de g. Montrer que $\text{Rés}(f/g, z_0) = f(z_0)/g'(z_0)$.
2. Calculer $\int_{\{|z|=1\}} \frac{\cos(z)}{\sin(z)} dz$.

Exercice 4
1. Énoncer le théorème de Rouché.
2. Combien de racines le polynôme $P(z) = z^8 + 3z^7 + 6z^2 + 1$ a-t-il dans l'anneau $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$?

Exercice 5 Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < 1/e$.
1. Montrer que l'équation $ze^{-z} = w$ admet une unique solution dans le disque unité, que l'on notera $h(w)$ dans la suite.
2. Calculer l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{z(1-z)e^{-z}}{ze^{-z} - w} dz$, où $C(0, 1)$ est le cercle de rayon 1 et centre 0.
3. Montrer que l'intégrande se développe en série sous la forme $(1 - z) \sum_{\mathbb{N}} \frac{w^n}{e^{-nz} z^n}$.
4. En déduire finalement que $h(w) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n$

Exercice 6
(1) Montrer que, pour tout réel $a > 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \pi e^{-a}$.

(2) Déduire du point précédent que, pour tout réel $a > 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}/a$ (suggestion : effectuer un changement de variable pour se ramener au point (1)).

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 7 Rappelons que $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ indique la sphère de Riemann. Rappelons également qu'une fonction méromorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe f, définie sur le complémentaire dans U d'une partie discrète F, qui est méromorphe en tout point de F (i.e. f a un pôle en tout point $z_0 \in F$). On dit qu'une fonction f définie sur le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{C}$ est holomorphe (respectivement méromorphe) à l'∞ si $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe (resp. méromorphe) en 0. L'ordre du zéro (resp. du pôle) à l'∞ est par définition l'ordre du zéro (resp. du pôle) en zéro de $z \mapsto f(1/z)$.

1. Vérifier qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ est méromorphe à l'∞ et que l'ordre de son pôle à l'∞ est égal à $\deg(P)$.

2. Montrer qu'une fonction holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ (i.e. une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est aussi holomorphe à l'∞ au sens ci-dessus) est constante (suggestion : on pourra utiliser Liouville).

3. Montrer qu'une fonction entière f se prolonge en une fonction méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$ si et seulement si f est un polynôme.

4. Montrer que si f est méromorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$, elle a un nombre fini de pôles et un nombre fini de zéros dans $\hat{\mathbb{C}}$ (suggestion : pour un $R > 0$ on pourra par exemple étudier f sur $\{z : |z| < R+1\}$ et $\{z : |z| > R\}$).

5. Montrer que les fractions rationnelles sont les seules fonctions méromorphes sur $\hat{\mathbb{C}}$ (suggestion : considérer les pôles $p_1, \ldots, p_k$ de f sur $\mathbb{C}$, qui sont en nombre fini par la question prédédente, d'ordre respectifs $m_1, \ldots, m_k$ et étudier la fonction $(z-p_1)^{m_1} \cdots (z-p_k)^{m_k} f(z)$).