L3 Mathématiques
Semestre 6, 2021-2022

UE 601: Analyse complexe

Chapitre III:
Intégration curviligne

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Damian Brotbek
- Groupe 2 : Sergey Lysenko (sergey.lysenko@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Integration de fonction à valeur complexe sur un intervalle

Dans cette section nous considérons des applications $f : I \to \mathbb{C}$ où $I = [a, b]$ est un segment (intervalle fermé borné) de $\mathbb{R}$. Nous dirons qu'une telle application est *continue par morceaux* si il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $f|_{]t_i, t_{i+1}[}$ est continue et admet une limite finie en t_i et t_{i+1}. De façon analogue, si f est continue, on dira que f est $\mathscr{C}^1$ *par morceaux* si il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$ est $\mathscr{C}^1$.

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction, on note $\operatorname{Re} f : I \to \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f : I \to \mathbb{R}$ les parties réelles et imaginaires de f. Notons que f est continue par morceaux (resp. $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues par morceaux (resp. $\mathscr{C}^1$ par morceaux).

Définition 1.1: Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On définit

$$\int_a^b f(t)dt \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt.$$

Remarque 1.2: Comme dans le cas réel, on posera, sous les mêmes hypothèses, $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

Comme conséquence immédiate de la définition et des propriétés de linéarité des intégrales réelles, on a la proposition suivante

Proposition 1.3: *Soit $I = [a, b]$ un segment. Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ des fonctions continues par morceaux et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt$
2. $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}dt = \overline{\int_a^b f(t)dt}.$

Le théorème fondamental de l'analyse s'adapte dans ce cadre sous la forme suivante

Proposition 1.4: *Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue et soit $F : I \to \mathbb{C}$ une primitive de f, c'est à dire que F est $\mathscr{C}^1$ et que $F' = f$. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Notons que si f est continue, alors f admet une primitive. En effet, on peut se ramener au cas des intégrales réelles de la façon immédiate : il suffit de poser $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$, de prendre une primitive U de u et une primitive V de v et de poser $F = U + iV$. Une autre façon de procéder et de poser $F(t) = \int_a^t f(s)ds$.

Démonstration. Par définition, on a $\operatorname{Re}(F)' = \operatorname{Re}(F') = \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(F)' = \operatorname{Im}(F') = \operatorname{Im}(f)$. En particulier,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t)dt = \operatorname{Re}(F(b)) - \operatorname{Re}(F(a)) + i\Big(\operatorname{Im}(F(b)) - \operatorname{Im}(F(a))\Big) = F(b) - F(a).$$

$\square$

La formule de changement de variable s'applique aussi dans ce cas là.

Théorème 1.5: *Soit $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$ des segments de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\varphi : J \to I$ une fonction $\mathscr{C}^1$. Alors on a*

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(s)ds.$$

En particulier, si $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$, alors

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(s)ds.$$

Démonstration. Soit $F : I \to \mathbb{C}$ une primitive de f. Par la proposition 1.4 on a

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(s)ds = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_c^d (F \circ \varphi)'(t)dt = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

□

Terminons cette section par le lemme suivant qui sera très utile.

Lemme 1.6: *Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application continue par morceaux. Alors*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Démonstration. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, l'inégalité est vérifiée. Supposons donc $\int_a^b f(t)dt \neq 0$ et soit $\theta \in R$ un argument de $\int_a^b f(t)dt$. On a donc

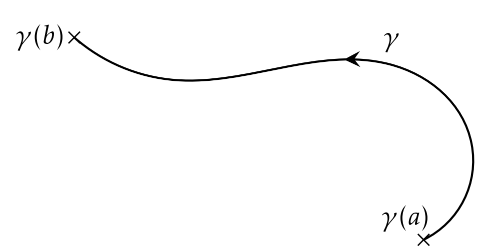
$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)dt\right| &= e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt\right) = \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt\right) \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right)dt \leqslant \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right|dt = \int_a^b \left|f(t)\right|dt. \end{aligned}$$

□

2 Chemin dans le plan complexe

Définition 2.1: Un *chemin* dans $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ où $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est un segment. Si γ est de plus $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors on dit que le chemin est $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

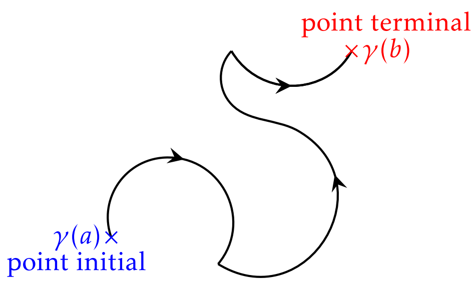
Graphiquement, on représente en général un chemin en dessinant son image dans $\mathbb{C}$ et en indiquant le sens de parcourt du chemin, comme sur le dessin ci-contre.

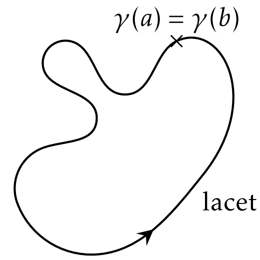


Voici un peu de terminologie supplémentaire concernant les chemins

Définition 2.2: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin.

1. On dit que $\gamma(a)$ est le *point initial* de γ et que $\gamma(b)$ est le *point terminal* de γ.
2. On dit que ce chemin est un *lacet* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.



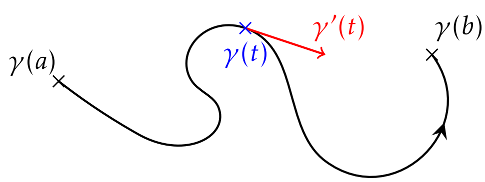


Pour ce qui concerne l'integration curviligne on s'intéressera principalement aux chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On peut définir la longueur d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Définition 2.3: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. La *longueur* de γ est

$$\ell(\gamma) \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

où $x = \operatorname{Re}\gamma$ et $y = \operatorname{Im}\gamma$.



Remarque 2.4: Pour préciser la définition précédente, notons que la dérivée γ' n'est pas définie en tout point. En effet, si on prend, comme dans la définition, une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0,\ldots,k-1\}$, $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ est $\mathscr{C}^1$, alors $\gamma'(t)$ n'est en général définie que pour $t \in [a,b] \setminus \{t_1,\ldots,t_{k-1}\}$. Il peut y avoir des ambiguïtés en $t_1,\ldots,t_{k-1}$ puisque en général $\gamma|'_{[t_{i-1},t_i]}(t_i) \neq \gamma|'_{[t_i,t_{i+1}]}(t_i)$. Mais ceci n'a bien entendu aucune importance du point de vu de l'intégrale. Pour être parfaitement précis, il faut donc poser

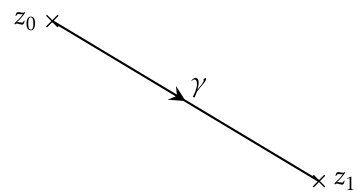
$$\int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left|\gamma|'_{[t_i,t_{i+1}]}(t)\right| dt.$$

Voici quelques exemples importants.

Exemple 2.5: Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Le chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$$

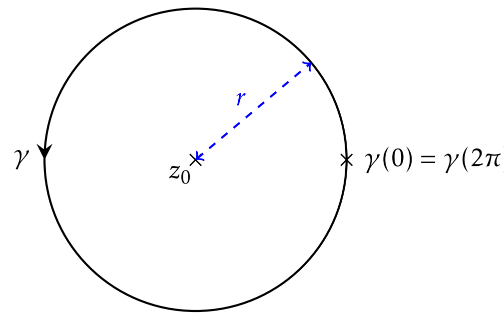
paramètre le segment allant de z_0 à z_1. On a $\ell(\gamma) = |z_1 - z_0|$.



Exemple 2.6: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit $r > 0$. Le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$$

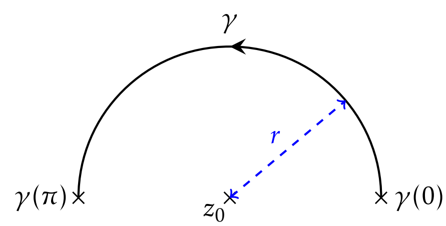
paramètre le cercle de centre z_0 et de rayon r. On a $\ell(\gamma) = 2\pi r$.



Exemple 2.7: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit $r > 0$. Le chemin $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$$

paramètre un demi-cercle de centre z_0 et de rayon r. On a $\ell(\gamma) = \pi r$.



Observons que quitte à faire un changement de variable, on pourrait définir tous les chemins sur l'intervalle $[0,1]$. Il est néanmoins plus simple de s'autoriser des intervalles plus généraux.

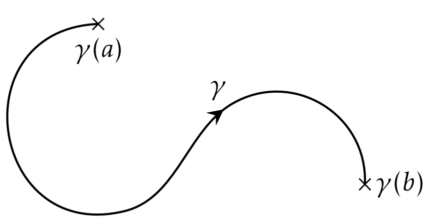
Notons deux opérations que l'on peut faire sur des chemins.

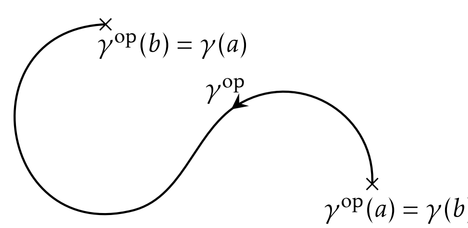
Définition 2.8: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin, alors le chemin *opposé* de γ est le $\gamma^{\mathrm{op}} : [a,b] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma^{\mathrm{op}}(t) = \gamma(a+b-t).$$

Si γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors γ^{op} est $\mathscr{C}^1$ par morceaux aussi.

Le chemin opposé de γ représente juste le chemin γ parcouru dans l'autre sens.





Exemple 2.9:

1. Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ et $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $\forall t \in [0,1]$. Alors $\gamma^{\mathrm{op}}(t) = (1-t)z_1 + tz_0$ pour tout $t \in [0,1]$.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Alors $\gamma^{\mathrm{op}}(t) = z_0 + re^{-it}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

On peut aussi concaténer des chemins.

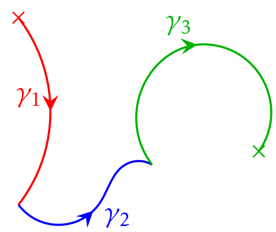
Définition 2.10: Soit $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ des chemins tels que

$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2).$$

La *concaténation* de γ_1 et γ_2 est le chemin $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$ défini par

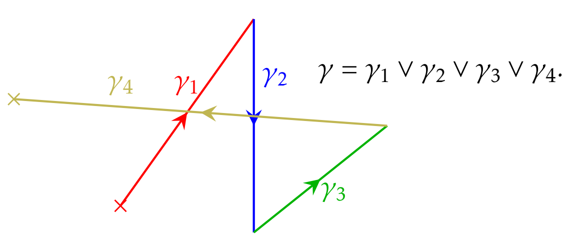
$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si} \quad a_1 \leqslant t \leqslant b_1 \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si} \quad b_1 \leqslant t \leqslant b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

De façon récursive, étant données des chemins $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a $\gamma_k(b_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$, on peut définir la concaténation $\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors $\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

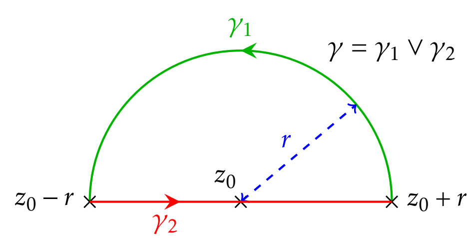


$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3.$

Exemple 2.11: Soit $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on considère $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_k(t) = (1-t)z_{k-1} + tz_k$. Alors la concaténation $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$, représentée si dessous, est le chemin $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ donné par
$\gamma(t) = (k+t)z_{k-1} + (t-k+1)z_k$ si $k-1 \leqslant t \leqslant k$.



Exemple 2.12: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.
Notons $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_1(t) = z_0 + re^{i\theta}$ et $\gamma_2 : [-r\pi, r\pi]$ le chemin défini par $\gamma_2(t) = z_0 + t$. Alors la concaténation $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ est le lacet représenté ci-dessous :



La proposition suivante est immédiate, sa preuve est laissée en exercice.

Proposition 2.13: *Soit $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ le point terminal de γ_i coincide avec le point initial de γ_{i+1}. Alors :*

$$\ell\left(\gamma^{\mathrm{op}}\right) = \ell(\gamma) \quad \textit{et} \quad \ell\left(\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n\right) = \ell(\gamma_1) + \cdots + \ell(\gamma_n).$$

3 Intégrale le long d'un chemin

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'une fonction complexe le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Définition 3.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application *continue*. Soit $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors *l'intégrale de f le long de γ* est

$$\int_\gamma f(z)dz \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt.$$

Remarque 3.2:

1. Un moyen mnémotechnique pour ce souvenir de cette définition est le suivant : il suffit de penser à la formule du changement de variable et poser $z = \gamma(t)$ "donc" $dz = \gamma'(t)dt$.

2. Comme dans la remarque 2.4 la dérivée γ' n'est pas nécessairement définie partout. Là encore, on sous-entend dans cette définition que l'on prend une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ telle que $\gamma|_{[t_i, t_i+1]}$ est $\mathscr{C}^1$ pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ et l'on pose

$$\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma|'_{[t_i, t_{i+1}]}(t)dt.$$

Exemple 3.3: Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = e^{it}$. On considère les fonctions $f_1(z) = z$ $f_2(z) = |z|$ et $f_3(z) = \frac{1}{z}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f_1(z)dz &= \int_0^{2\pi} f_1(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f_1(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} e^{it}ie^{it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} ie^{2it}dt = \frac{1}{2}\left[e^{2it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{4i\pi} - e^{0i}\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0. \\
\int_\gamma f_2(z)dz &= \int_0^{2\pi} f_2(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f_2(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} 1 \times ie^{it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} ie^{it}dt = \left[e^{it}\right]_0^{2\pi} = \left(e^{2i\pi} - e^{0i}\right)(1-1) = 0. \\
\int_\gamma f_3(z)dz &= \int_0^{2\pi} f_3(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f_3(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}ie^{it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi.
\end{aligned}$$

Une des propriétés clés de l'intégrale curviligne est qu'elle ne dépend pas du choix de paramétrisation du chemin choisi.

Proposition 3.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application* continue. *Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une application $\mathscr{C}^1$ strictement croissante telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(b) = d$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que γ est $\mathscr{C}^1$. Dans ce cas, d'après la formule du changement de variable, on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz &= \int_c^d f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma\circ\varphi)'(t)dt = \int_c^d f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma'\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

Si γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on fait applique l'argument précédent sur chaque morceau. En effet, si $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ est une subdivision de $[a,b]$ telle que pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ est $\mathscr{C}^1$, alors $c = \varphi^{-1}(t_0) < \varphi^{-1}(t_1) < \cdots < \varphi^{-1}(t_k) = d$ est une subdivision de $[c,d]$ et l'on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz &= \int_c^d f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma\circ\varphi)'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma'\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

□

La propriété suivante est une conséquence directe de la proposition 1.3

Proposition 3.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des applications continues. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a*

$$\int_\gamma (f(z) + \lambda g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \lambda\int_\gamma g(z)dz.$$

Comme conséquence du lemme 1.6 nous obtenons :

Lemme 3.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \ell(\gamma)\max_{t\in[a,b]}\left\{|f(\gamma(t))|\right\}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leqslant \int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|dt = \int_a^b \left|f(\gamma(t))\right|\left|\gamma'(t)\right|dt \\ &\leqslant \max_{t\in[a,b]}\left\{|f(\gamma(t))|\right\}\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \ell(\gamma)\max_{t\in[a,b]}\left\{|f(\gamma(t))|\right\}.\end{aligned}$$

□

La relation Chalses se transpose dans ce cadre sous la forme suivante :

Proposition 3.7: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U tels que le pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ le point terminal de γ_i coincide avec le point initial de γ_{i+1}. Alors*

$$\int_{\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Dernièrement, nous avons la relation suivante.

Proposition 3.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. Alors*

$$\int_{\gamma^{\mathrm{op}}} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

Les démonstrations des propriétés 3.5, 3.7 et 3.8 sont laissées en exercice.

4 Primitive et intégrale

4.1 Définition et première propriétés des primitives

En général, l'intégrale curviligne d'une fonction dépend du chemin choisi et pas seulement du point initial et terminal. Par exemple, si $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ sont définis par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(t) = e^{-it}$, alors on a bien $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(\pi) = \gamma_2(\pi)$ mais par contre

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = i\pi \neq -i\pi = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}.$$

Comprendre sous quelles conditions l'intégrale est indépendante du chemin nous amènera à d'interessantes considérations topologiques dans les chapitres suivants.

Dans cette section, nous allons voir une condition sous laquelle l'intégrale curviligne ne dépend que des extrémités du chemin d'intégration.

Définition 4.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. On dit qu'une fonction $F : U \to \mathbb{C}$ est une *primitive* de f si F est holomorphe et vérifie $F' = f$. Si une telle fonction existe, on dit que f *admet une primitive*.

Exemple 4.2:

1. Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $p_n = z \mapsto z^n$ admet une primitive, par exemple la fonction $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$.
2. Plus généralement, si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors f admet une primitive sur $B(0, R)$, par exemple la fonction définie par la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} z^{n+1}.$$

Comme dans le cas réel, les primitives sont uniques à constante près dans le sens suivant.

Proposition 4.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Si $F_1 : U \to \mathbb{C}$ et $F_2 : U \to \mathbb{C}$ sont des primitives de f, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que*

$$F_1(z) = F_2(z) + c \ \ \forall z \in U.$$

Démonstration. Notons, $F = F_1 - F_2 : U \to \mathbb{C}$. Par hypothèse, F est holomorphe et l'on a $F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. D'après le corollaire 4.2 du chapitre I (on utilise ici l'hypothèse de connexité), on en déduit que F est constante. □

4.2 Intégrale curviligne d'une fonction admettant une primitive

Dans ce cadre on a la version suivante du théorème fondamental de l'analyse.

Proposition 4.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue qui admet une primitive $F : U \to \mathbb{C}$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Remarque 4.5: En particulier, cette proposition montre que si f admet une primitive, alors l'intégrale de f le long d'un chemin ne dépend que du point initial et du point terminal de ce chemin.

Démonstration. Soit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ est $\mathscr{C}^1$ pour tout $j \in \{0,\dots,k-1\}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (F\circ\gamma)'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\Big(F(t_{j+1}) - F(t_j)\Big) = F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

□

En particulier, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 4.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue qui admet une primitive. Alors pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceau. Notons $F : U \to \mathbb{C}$ une primitive de f, alors $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ car $\gamma(a) = \gamma(b)$. □

Exemple 4.7: En particulier, la fonction $\iota : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $\iota(z) = \dfrac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. En effet le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$ est un lacet $\mathscr{C}^1$, mais

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0.$$

4.3 Critère d'existence de primitives

Il est crucial de noter que le corollaire 4.6 admet une réciproque.

Théorème 4.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Si pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U, on a*

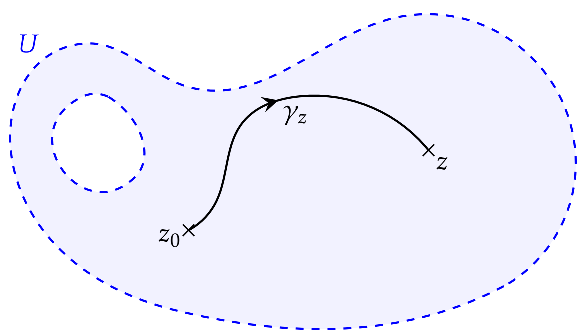
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Alors f admet une primitive sur U.

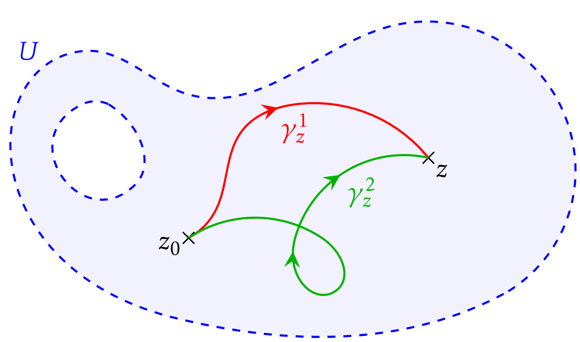
Démonstration. Soit $z_0 \in U$. On considère l'application $F : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw \quad \forall z \in U$$

où γ_z est un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dont le point initial est z_0 et dont le point terminal est z. Un tel chemin existe toujours d'après l'exercice 7 car U est connexe.



Cette fonction est bien définie par notre hypothèse. En effet, prenons γ_z^1 et γ_z^2 deux chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux dont le point initial et z_0 et le point terminal et z.

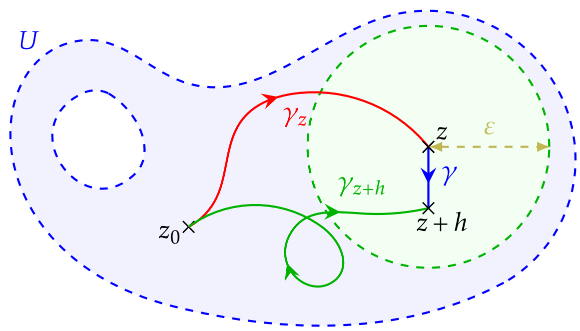


Alors $\gamma_z^1 \vee (\gamma_z^2)^{\mathrm{op}}$ est un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux et donc

$$0 = \int_{\gamma_z^1 \vee (\gamma_z^2)^{\mathrm{op}}} f(z)dz = \int_{\gamma_z^1} f(z)dz + \int_{(\gamma_z^2)^{\mathrm{op}}} f(z)dz = \int_{\gamma_z^1} f(z)dz - \int_{\gamma_z^2} f(z)dz$$

et donc $\int_{\gamma_z^1} f(z)dz = \int_{\gamma_z^2} f(z)dz$.

Il s'agit maintenant de montrer que F est une primitive de f. C'est à dire que F est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et que $F' = f$. Soit $z \in U$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon) \subset U$. Soit $h \neq 0$ tel que $z+h \in B(z,\varepsilon)$, c'est à dire que $|h| < \varepsilon$. Soit γ le segment reliant z à $z+h$, c'est à dire $\gamma : [0,1] \to U$ est défini par $\gamma(t) = z+th$.



Comme l'integrale de f le long de chaque lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux est nulle, et que $\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}$ est un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on obtient

$$0 = \int_{\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}} f(w)dw = \int_{\gamma_z} f(w)dw + \int_{\gamma} f(w)dw - \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw$$

et donc que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt = h\int_0^1 f(z+th)dt.$$

Donc le taux d'accroissement est

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt.$$

Il reste à montrer que $\int_0^1 f(z+th)dt \to f(z)$ quand $h \to 0$. D'après le lemme 1.6, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 f(z+th)dt - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 f(z+th)dt - \int_0^1 f(z)dt\right| = \left|\int_0^1 \big(f(z+th)-f(z)\big)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \big|f(z+th)-f(z)\big|dt \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \big|f(z+th)-f(z)\big| \to_{h\to 0} 0 \end{aligned}$$

par continuité de f. D'où le résultat.

□

4.4 Critère d'existence de primitive sur un ouvert étoilé

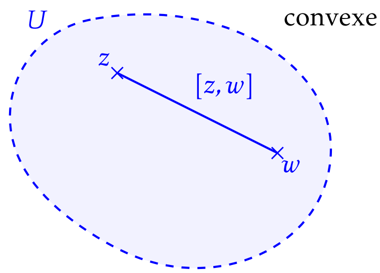
Nous allons démontrer que pour certains types d'ouverts, il existe un critère un peu plus fort. Commençons par introduire un peu de terminologie.

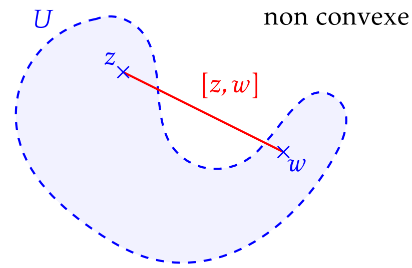
Pour tout $z,w \in \mathbb{C}$, on introduit le segment entre z et w

$$[z,w] \overset{\mathrm{def}}{=} \big\{(1-t)z + tw\ ;\ t \in [0,1]\big\}.$$

Définition 4.9: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que U est *convexe* si pour tout $z, w \in U$, on a $[z, w] \subset U$.

Voici les dessins à avoir en tête :



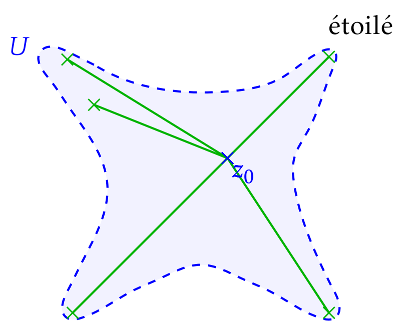


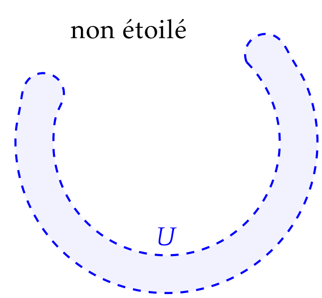
Exemple 4.10: L'ouvert $\mathbb{C}$ est convexe. Les boules ouvertes sont convexes. Les demi-plans ouverts sont convexes (un demi-plan ouvert est un sous-ensemble de la forme $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \ \ ax + by > c\}$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$. Les ouverts $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ne sont pas convexes.

Remarque 4.11: Les ouverts convexes sont connexes pas arcs et donc connexe, mais la réciproque est bien entendu complètement fausse.

Dans ce cours, nous utiliserons aussi la notion suivante :

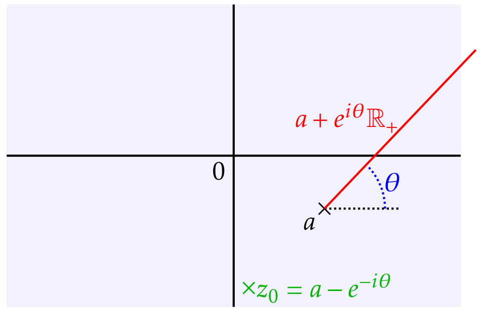
Définition 4.12: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que U est *étoilé* si il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$, on a $[z_0, z] \subset U$.





Remarque 4.13: Les ouverts convexes sont étoilées, car si U est convexe, n'importe quel point $z_0 \in U$ vérifie la condition de la définition d'ouvert étoilé. Comme le montre le dessin ci-dessus, les ouverts étoilés ne sont pas nécessairement convexes. Par ailleurs, on voit facilement que les ouverts étoilés sont connexes par arcs et donc connexes. Mais bien entendu, un ouvert connexe n'est pas nécessairement étoilé (comme le montre le dessin ci-dessus).

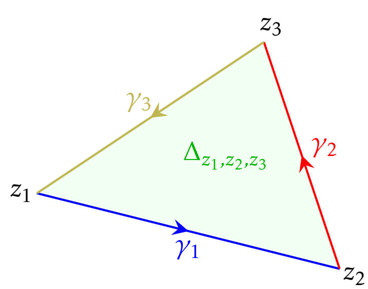
Exemple 4.14: L'ouvert $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé. Par contre $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ est étoilé. Plus généralement, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, pour tout θ, l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\left(a+e^{i\theta}\mathbb{R}_+\right)$ est un ouvert étoilé. En effet, dans ce cas, le point $z_0 = a - e^{i\theta}$ vérifie les conditions de la définition d'ouvert étoilé.



Définition 4.15: Un *triangle* dans $\mathbb{C}$ est l'enveloppe convexe de 3 points non-alignés de $\mathbb{C}$. Pour être plus précis, étant donné 3 points non-alignés $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, le *triangle de sommets* z_1, z_2 *et* z_3 est l'ensemble

$$\Delta_{z_1,z_2,z_3} := \left\{w \in \mathbb{C}\ ;\ \exists \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}_+ \text{ vérifiant } \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 1 \text{ et } w = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3\right\}.$$

Le bord $\partial\Delta_{z_1,z_2,z_3}$ du triangle Δ_{z_1,z_2,z_3} peut être parametré par un lacet γ_{z_1,z_2,z_3}. On choisit un paramétrisation qui parcours le lacet dans le sens direct. Par exemple dans le cas du triangle ci-dessous, on peut prendre une paramétrisation de la forme $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ où γ_1 est le segment qui relie z_1 à z_2, γ_2 est le segment qui relie z_2 à z_3 et γ_3 est le segment qui relie z_3 à z_1.



Si f est une fonction définie sur un voisinage de $\partial\Delta_{z_1,z_2,z_3}$, on note, avec les notations ci-dessus,

$$\int_{\partial\Delta_{z_1z_2z_3}} f(z)dz \overset{\text{def}}{=} \int_\gamma f(z)dz.$$

On a le critère suivant

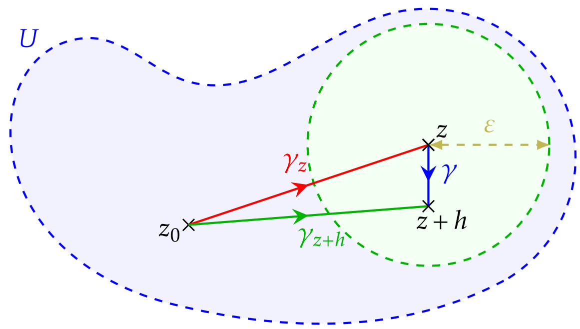
Proposition 4.16: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue telle que l'intégrale de f le long du bord de tout triangle inclus dans U est nulle. Alors f admet une primitive sur U.*

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ tel que $[z_0, z] \subset U$ pour tout $z \in U$. Un tel z_0 existe car U est étoilé. Pour tout $z \in U$ on note $\gamma_z : [0,1] \to U$ le segment joignant z_0 à z, c'est à dire le chemin défini par $\gamma_z(t) = (1-t)z_0 + tz$.

On considère alors la fonction $F : U \to \mathbb{C}$, définie par

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw.$$

Puisque U est étoilé, γ_z est bien un chemin dans U. Il s'agit maintenant de montrer que F est une primitive de f. C'est à dire que F est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et que $F' = f$. Soit $z \in U$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon) \subset U$. Soit $h \neq 0$ tel que $z+h \in U$, c'est à dire tel que $|h| < \varepsilon$. Soit γ le segment reliant z à $z+h$, c'est à dire $\gamma : [0,1] \to U$ est défini par $\gamma(t) = z + th$.



Il y a deux possibilités, soit $\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}$ paramètre le bord d'un triangle, soit z_0, z et $z+h$ sont alignés. Dans les deux cas, on obtient

$$0 = \int_{\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}} f(w)dw = \int_{\gamma_z} f(w)dw + \int_{\gamma} f(w)dw - \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw.$$

Dans le premier cas car l'intégrale de f le long du bord de chaque triangle est nulle et que $\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}$ paramètre le bord d'un triangle ; dans le second cas (quand z_0, z et $z+h$ sont alignés), par une application de la relation de Chalses. En particulier, on obtient

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt = h\int_0^1 f(z+th)dt.$$

Donc le taux d'accroissement est

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt.$$

Il reste donc à montrer que $\int_0^1 f(z+th)dt \to f(z)$ quand $h \to 0$. D'après le lemme 1.6, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(z+th)dt - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 f(z+th)dt - \int_0^1 f(z)dt\right| = \left|\int_0^1 \Big(f(z+th) - f(z)\Big)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \Big|f(z+th) - f(z)\Big|dt \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \Big|f(z+th) - f(z)\Big| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé la continuité de f. Ce qui conclue la preuve. □

5 Passage à la limite sous l'intégrale

Nous aurons besoin d'un résultat de passage à la limite sous l'intégrale. Introduisons déjà une notion de convergence pertinente pour les suites de fonctions holomorphes.

Définition 5.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : U \to \mathbb{C}$. On dit que *la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur les compacts* si pour tout compact $K \subset U$, la suite de fonction $\left(f_n|_K\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. C'est à dire que pour tout compact $K \subset U$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_{\varepsilon,K} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $z \in K$, on a

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 5.2: Si une suite de fonctions sur U converge uniformément alors elle converge uniformément sur les compacts. La réciproque est en générale fausse. Il suffit par exemple de considérer la suite de fonctions $f_n : z \mapsto \frac{z}{n}$, définie sur $\mathbb{C}$.

Rappelons le cas particulier élémentaire suivant du théorème de convergence dominée (cf l'UE 301 *Analyse 2* ou l'UE 501 *Intégration et probabilités*).

Proposition 5.3: *Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un segment. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Alors f est continue et l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Cela implique le résultat suivant pour les intégrales curvilignes, dont on donne ici une preuve directe.

Proposition 5.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : U \to \mathbb{C}$ qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$. Alors :*

1. *La fontion f est continue.*
2. *La suite numérique $\left(\int_\gamma f_n(z)dz\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
3. *On a $\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$.*

Démonstration. Montrons déjà la continuité de f. Soit $z_0 \in U$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Par convergence uniforme sur les compacts, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$, on a

$$\left|f(z) - f_n(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $n \geqslant N$. Par continuité de f_n, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in B(z_0, \delta)$ on a

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc, pour tout $z \in B(z_0, \min\{\delta, r\})$

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Nous allons maintenant démontrer l'égalité annoncée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma \left(f_n(z) - f(z)\right)dz\right| \leqslant \ell(\gamma) \sup_{t\in[a,b]} \left|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))\right|.$$

Par convergence uniforme sur le compact $K = \gamma([a,b])$, on a

$$\sup_{t\in[a,b]} \left|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))\right| = \sup_{z\in K}\left|f_n(z) - f(z)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat. □

On peut en déduire le résultat utile suivant sur les séries.

Corollaire 5.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : U \to \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ soit uniformément convergente sur les compacts (i.e. la suite des sommes partielles est uniformément convergente sur le compacts). Alors*

1. *La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue sur U.*
2. *La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$ converge.*
3. *On a*
$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)\right)dz = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma f_n(z)dz.$$

Notons que l'hypothèse est satisfaite si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est normalement convergente.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 5.4 à la suite des sommes partielles. □

6 Formes différentielles

Cette section n'est pas strictement nécessaire pour le compréhension du cours. Néanmoins, le point de vu des formes différentielles est un point de vu naturel qui permet de comprendre plus en profondeur l'analyse complexe. La lecture de cette section, destinée aux étudiants les plus motivés, est optionnelle.

Dans cette section, nous identifions toujours $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ en via $x + iy \leftrightarrow (x,y)$.

6.1 Les 1-formes

Définition 6.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une 1*-forme $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes* est une expression de la forme

$$\omega = f dx + g dy$$

où $f, g : U \to \mathbb{C}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$.
L'ensemble des 1-formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes sur U est noté $\Omega^1(U)$.

Remarque 6.2:

1. On peut aussi définir des 1-formes $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs réelles, on prend alors $f, g : U \to \mathbb{R}$.
2. Dans cette définition et dans ce qui suit, pour des question de simplicité d'exposition, on demande que les fonctions f et g soient $\mathscr{C}^\infty$, on aurait aussi pu juste demander que ces fonctions soient continues, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$... les résultats sont similaires, mais il faut faire un peu attention pour voir quelles sont les bonnes hypothèses de régularité.

Les 1-formes différentielles peuvent s'additionner, et on peut les multiplier par des fonctions $\mathscr{C}^\infty$. En effet, étant donné, $\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(U)$ et $h \in \mathscr{C}^\infty(U)$, on pose

$$h\omega := (hf)dx + (hg)dy.$$

D'autre part, étant donné $\omega_1 = f_1 dx + g_1 dy \in \Omega^1(U)$ et $\omega_2 = f_2 dx + g_2 dy \in \Omega^1(U)$, on pose

$$\omega_1 + \omega_2 := (f_1 + f_2)dx + (g_1 + g_2)dy.$$

Il est immédiat de vérifier que ces opérations vérifient les propriétés usuelles d'associativité, commutativité, distributivité....

L'intérêt des notations dx, dy provient de la définition suivante.

Définition 6.3: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$. La *différentielle de f* est la 1-forme $df \in \Omega^1(U)$ définie par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Remarque 6.4: Dans cette définition, il suffit que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ pour que df ait un sense et soit continue. De façon plus générale, si f est de classe $\mathscr{C}^r$ avec $r \geqslant 1$, alors df est de classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

A priori, on pourrait croire que cela entraine un conflit de notation (et de terminologie) avec la définition de différentielles que nous avons utilisé précédemment pour des fonctions à valeurs réelles (rappelé dans l'appendice du chapitre I). Mais il suffit d'interpreter dx et dy de manière convenable pour retrouver exactement la même notion. En effet, notons x l'application du $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y) \mapsto x$, c'est à dire la première projection, de même on utilise y pour désigner la seconde projection. Alors par définition, dx et dy sont les applications

$$dx : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & dx_a = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (s,t) & \mapsto & dx_a(s,t) := s \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad dy : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & dy_a = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (s,t) & \mapsto & dy_a(s,t) := t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Si maintenant U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathscr{C}^1$, alors df est l'application $df : U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par

$$df_a(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)s + \frac{\partial f}{\partial y}(a)t = \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx_a(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy_a(s,t), \quad \forall a \in U.$$

C'est à dire $df_a = \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx_a + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy_a$ pour tout $a \in U$, ou plus simplement $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Exemple 6.5: On considérant les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto \overline{z}$, on trouve

$$dz = dx + i dy \quad \text{et} \quad d\overline{z} = dx - i dy.$$

Avec ces notations, nous avons la proposition suivante, dont la démonstration est laissée en exercice.

Proposition 6.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$. On a*

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Là encore cette proposition reste vraie si f est seulement de classe $\mathscr{C}^1$. Si de plus, f est holomorphe, en appliquant cela et les équations de Cauchy-Riemann, on trouve

$$df = f'dz.$$

6.2 Les 2-formes

Définition 6.7: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une *2-forme $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes* est une expression de la forme

$$\alpha = f\,dx \wedge dy$$

où $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$.
L'ensemble des 2-formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes sur U est noté $\Omega^2(U)$.

On peut aussi définir des 2-formes à valeurs réelles en demandant que f soit à valeurs réelles. Comme dans le cas des 1-formes, on peut considérer plus généralement des 2-formes de classe $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$...

On peut additionner des 2-formes entre elles et multiplier une 2-forme par une fonction. En effet, étant donne $\alpha_1 = f_1 dx \wedge dy \in \Omega^2(U)$ et $\alpha_2 = f_2 dx \wedge dy \in \Omega^2(U)$ on pose

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (f_1 + f_2)dx \wedge dy.$$

D'autre part, étant donné $\alpha = f\,dx \wedge dy \in \Omega^2(U)$ et $h \in \mathscr{C}^\infty(U)$, on pose

$$h\alpha = (hf)dx \wedge dy.$$

On peut aussi construire des 2-formes à partir de 1-formes en utilisant les opérations suivantes.

Définition 6.8: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

1. Soit $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(U)$. La *différentielle de ω* est la 2-forme $d\omega \in \Omega^2(U)$ définie par
$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$$
2. Soit $\omega_1 = f_1 dx + g_1 dy \in \Omega^1(U)$ et $\omega_2 = f_2 dx + g_2 dy \in \Omega^1(U)$, alors le *produit extérieur de ω_1 et ω_2* est la 2-forme $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^2(U)$ définie par
$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \big(f_1 g_2 - f_2 g_1\big)dx \wedge dy.$$

Remarque 6.9: Dans cette définition, il suffit que ω soit de classe $\mathscr{C}^1$ pour que $d\omega$ soit bien définie et de classe $\mathscr{C}^0$. Plus généralement si ω est de classe $\mathscr{C}^r$ pour $r \geqslant 1$, alors $d\omega$ sera de classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

Pour se souvenir des règles des signes dans la seconde définition, il suffira de se souvenir que pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(U)$ on a

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1.$$

En effet, ceci implique que

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad \text{que} \quad dx \wedge dx = 0 \quad \text{et que} \quad dy \wedge dy = 0.$$

La formule générale de $\omega_1 \wedge \omega_2$ s'en déduit en développant puis en simplifiant.

Pour se souvenir de la formule pour $d\omega$, il suffit de se souvenir de plus que

$$d(f\,dx) = df \wedge dx \quad \text{et que} \quad d(f\,dy) = df \wedge dy.$$

La formule générale s'en déduit en développant puis en simplifiant. La propriété suivante, dont la preuve est laissée en exercice, décrit certaines règles de calcul concernant les formes differentielles.

Proposition 6.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.*

1. *Pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(U)$, on a $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.*
2. *Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ et pour tout $\omega \in \Omega^1(U)$ on a $d(f\omega) = df \wedge \omega$.*
3. *Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$, on a $ddf := d(df) = 0$*

Puisque l'on travaille sur $\mathbb{C}$ il est naturel, comme dans le cas des 1-formes, d'utiliser dz et $d\bar{z}$ à la place de dx et dy. Cela est justifié car l'on a

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy.$$

En effet,

$$dz \wedge d\bar{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = dx \wedge dx - idx \wedge dy + idy \wedge dx + dy \wedge dy = -2idx \wedge dy.$$

Formelement, on peut utiliser les mêmes règles de calcul, par exemple, si $\omega = f dz + g d\bar{z}$ alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}. \tag{1}$$

En particulier, cette relation (qui est vraie aussi pour des 1-formes seulement de classe $\mathscr{C}^1$) entraine que si $f \in \mathscr{C}^1(U)$, alors f est holomorphe si et seulement si la 1-forme $\omega = f dz$ vérifie

$$d\omega = 0.$$

6.3 Integrations de formes différentielles

On peut intégrer les 1-formes différentielles le long d'un chemin.

Définition 6.11: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, Soit $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : I \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(U)$. *L'intégrale de ω le long de γ* est définie comme étant

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \Big(f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big) dt.$$

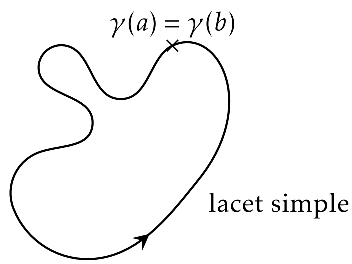
Remarque 6.12: Si par exemple f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur U, et si on pose $\omega = f dz = f dx + i f dy$. alors

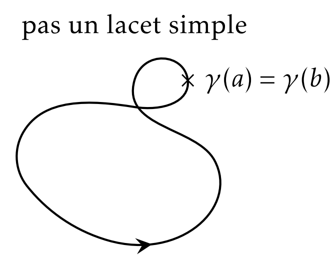
$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \Big(f(\gamma(t)\gamma_1'(t) + if(\gamma(t)\gamma_2'(t))\Big) dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_\gamma f(z) dz.$$

C'est à dire que la notion d'intégrale de forme différentielles généralise en ce sens la notion d'intégrale de curviligne définie dans les sections précédentes.

Définition 6.13: Un *lacet simple* de $\mathbb{C}$ est un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ vérifiant, pour tout $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$,

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = a \quad \text{et} \quad t_2 = b.$$





Définition 6.14: Un *compact à bord régulier* de $\mathbb{C}$ est un sous-ensemble compact K de $\mathbb{C}$ dont le bord ∂K peut être paramétré par un nombre fini de lacet simple $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux.

Étant donné un compact à bord régulier K, on choisi des lacets $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux $\gamma_K^1, \dots, \gamma_K^n$ qui parcourent le bord de K dans le sens *direct*, c'est à dire que "l'intérieur" du compact se trouve à gauche et "l'extérieur" du compact se trouve à droite. On pose alors, pour toute forme différentielle ω définie dans un voisinage ouvert de K

$$\int_{\partial K} \omega := \int_{\gamma_K} \omega.$$

Cette intégrale est indépendante du choix de lacets.

La notion d'intérieur et d'extérieur et motivée par le théorème suivant, d'intuition évidente mais dont la démonstration est difficile.

Théorème 6.15 (Jordan): *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet continue et* simple. *Alors $\mathbb{C} \setminus \gamma\big([a,b]\big)$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non-bornée. La composante connexe bornée est appelée* l'intérieur du lacet *et la composante connexe non-bornée appelée* l'exterieur du lacet.

On peux intégrer des 2-formes sur un compact à bord régulier.

Définition 6.16: Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact à bord régulier. Soit $\alpha := f\,dx \wedge dy$ une 2-forme différentielle définie sur un voisinage de K. Alors l'intégrale de α sur K est l'intégrale double

$$\int_K \alpha := \iint_K f(x,y)dxdy.$$

Le théorème fondamental reliant l'intégrale d'une 1-forme sur le bord et l'intégrale d'une 2-forme sur le compact, est le théorème de Stokes (qui dans notre situation est aussi connu sous le nom de formule de Green-Riemann), que nous donnons ici sans démonstration.

Théorème 6.17 (Stokes): *Soit K un compact à bord régulier. Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un voisinage ouvert de K. Alors*

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega.$$

Remarque 6.18: Si on pose $\omega = f dx + g dy$, on obtiens $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$. On retrouve ainsi la formulation usuelle de la formule de Green-Riemann

$$\int_{\partial K} f dx + g dy = \int_K \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy.$$

Une conséquence important est la suivante, qui sera détaillée dans le chapitre IV.

Corollaire 6.19: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $K \subset U$ un compact à bord régulier. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et de classe $\mathscr{C}^1$. Alors,*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. On a

$$\int_{\partial K} f dz = \int_K d(f dz) = \int_K \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = \int_K 0 d\overline{z} \wedge dz = 0.$$

□

7 Exercices

7.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Représenter graphiquement les chemins suivants de $\mathbb{C}$:

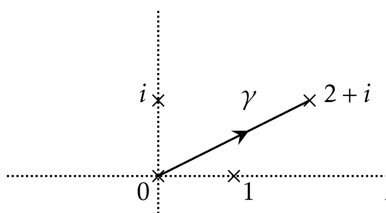
a. $\gamma(t) = t + it$, $t \in [0,1]$,

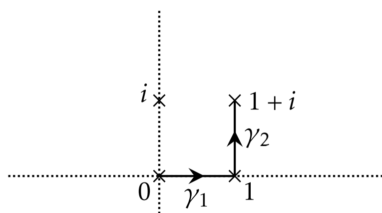
b. $\gamma(t) = t^2 - it$, $t \in [0,1]$,

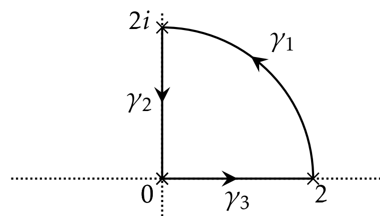
c. $\gamma(t) = |t| + it$, $t \in [-1,1]$,

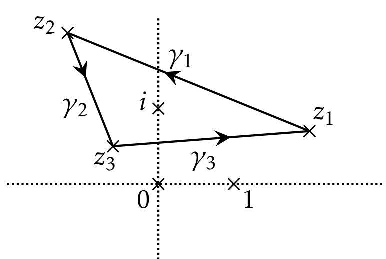
d. $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ où : $\gamma_1(t) = it^2$, $t \in [0,1]$; $\gamma_2(t) = t + (1-t)i$, $t \in [0,1]$; $\gamma_3(t) = e^{-it}$, $t \in [0,\pi]$.

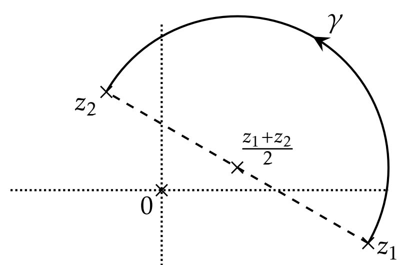
Exercice 2. Donner une paramétrisation pour chacun des chemins suivants :

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma z^2 dz$ pour $\gamma(t) = 1 + t(1+i)$, $t \in [0,1]$.
2. $\int_\gamma (z^3+1) dz$ pour $\gamma(t) = |t| - it$, $t \in [-1,1]$.
3. $\int_\gamma \mathrm{Im}(z) dz$ pour $\gamma(t) = t + i \inf\{t,1\}$, $t \in [0,2]$.
4. $\int_\gamma \mathrm{Re}(z^2) dz$ pour $\gamma(t) = 1 - it + t^2$, $t \in [0,1]$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On considère le chemin $\gamma(t) = e^{it}$ pour $t \in [0,2\pi]$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$.

Exercice 5. On considère la fonction F définie sur le plan complexe par

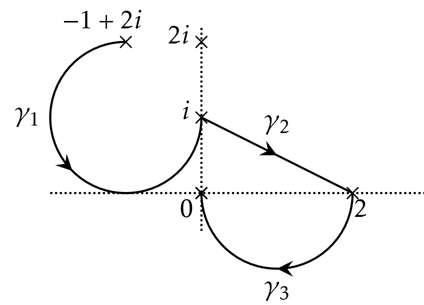
$$F(z) = z^2 e^{\cos\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)}.$$

Et on considère le chemin suivant $\gamma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$.

1. Justifier que F est holomorphe, et calculer F'.
2. En déduire

$$\int_\gamma z\left(2 - z\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)\right)e^{\cos\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)} dz.$$

Exercice 6. On considère le chemin $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ représenté graphiquement de la façon suivante :



1. Donner une paramétrisation des chemins γ_1, γ_2 et γ_3.
2. Déterminer $\displaystyle\int_{\gamma_2} \bar{z}dz$. (Attention, on intègre uniquement sur le chemin γ_2, pas le chemin γ).
3. Montrer que la fonction $z \mapsto z - \cos(\pi z)$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$, et déterminer une telle primitive.
4. Calculer $\displaystyle\int_{\gamma} \Big(z - \cos(\pi z)\Big)dz$.

Exercice 7. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble.

- On dit que A est connexe par arcs si pour tout $z, w \in U$ il existe un chemin $\gamma : [a,b] \to U$ tel que $\gamma(a) = z$ et $\gamma(b) = w$.
- On dit que A est connexe par chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux si pour tout $z, w \in U$ il existe un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux $\gamma : [a,b] \to U$ tel que $\gamma(a) = z$ et $\gamma(b) = w$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Montrer que

$$U \text{est connexe} \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ est connexe par arcs} \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ est connexe par arc } \mathscr{C}^1 \text{ par morceaux}$$

Exercice 8. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des focntions holomorphes. Soit $z_0, z_0 \in U$ et soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U allant de z_0 à z_1. Montrer que l'on a l'analogue suivant de la formule d'intégration par partie :

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z)dz = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_{\gamma} f'(z)g(z)dz.$$

Exercice 9. Soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{C}$ allant de 0 à i. Calculer $\int_{\gamma} f(z)dz$ avec :

1. $f(z) = z^2 \sin z$
2. $f(z) = ze^{iz}$.

7.2 Exercices plus avancés

Exercice 10. 1. Pour tout $r > 0$, montrer que

$$\int_{\partial B(0,r)} \overline{z}dz = 2i\,\text{Aire}\Big(B(0,r)\Big).$$

2. Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ des points non-alignés. On note Δ le triangle de sommets z_1, z_2, z_3. Montrer que

$$\int_{\partial\Delta} \overline{z}dz = 2i\,\text{Aire}(\Delta).$$

3. Soit K un compact à bord régulier. En utilisant le théorème de Stokes, montrer que

$$\int_{\partial K} \overline{z} dz = 2i \operatorname{Aire}(K).$$

Exercice 11. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant 0. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. En utilisant le théorème de Stokes, montrer que pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset U$, on a

$$\int_{\partial B(0,r)} f(z)dz = 2i \int_{B(0,r)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy.$$

2. En déduire que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2i\pi r^2} \int_{\partial B(0,r)} f(z)dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(0).$$

Exercice 12 (Lemme de Poincaré)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\omega \in \Omega^1(U)$. On dit que ω est *fermée* si $d\omega = 0$. On dit que ω est *exacte* si il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ telle que $\omega = df$.

1. Montrer que si ω est exacte alors elle est fermée.
2. Montrer que si $\omega = f dz$ pour une certaine fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$, alors f est fermée si et seulement si f est holomorphe, et f est exacte si et seulement si f admet une primitive.
3. Soit $\omega \in \Omega^1(U)$ une forme exacte. Montrer que $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U.
4. Montrer que la forme $\frac{dz}{z} \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$ est fermée mais pas exacte.
5. Nous allons maintenant montrer que les forme fermée sont localement exactes (c'est le lemme de Poincaré). Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ et soit $r > 0$. Notons $U = B(z_0, r)$ Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme fermée sur U. Pour tout $z \in U$ on pose γ_z le segment allant de z_0 à z. On pose, pour tout $z \in U$,

$$f(z) = \int_{\gamma_z} \omega.$$

   (a) Montrer que

$$f(z) = \int_0^1 \Big((x - x_0)P(\gamma_z(t)) + (y - y_0)Q(\gamma_z(t))\Big)dt.$$

   (b) Montrer que f est C^1 et que pour tout $z = x + iy \in B(z_0, r)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \int_0^1 \Big(P(\gamma_{(z)}(t)) + (x - x_0)t\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_z(t)) + (y - y_0)t\frac{\partial Q}{\partial x}(\gamma_z(t))\Big)dt$$

   et que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \int_0^1 \Big(Q(\gamma_z(t)) + (x - x_0)t\frac{\partial P}{\partial y}(\gamma_z(t)) + (y - y_0)t\frac{\partial Q}{\partial y}(\gamma_z(t))\Big)dt$$

   Indication : Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral (UE 301 : Analyse 2).

   (c) Montrer que l'application $h(t) = P(\gamma_z(t))$ est $\mathscr{C}^1$ et que

$$h'(t) = (x - x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_z(t)) + (y - y_0)\frac{\partial P}{\partial y}(\gamma_z(t)).$$

   En déduire, par une intégration par partie en utilisant l'hypothèse que ω est fermée, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = P(z).$$

   (d) Montrer de même que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(z)$.

   (e) Conclure.