Interrogation 1

Dans toute cette interrogation, une écriture $z = x + iy$ sous-entend toujours que x et y sont réels.

Exercice 1. Définir la $\mathbb{C}$-dérivabilité et l'holomorphie. Ces définitions nécessitent d'introduire un certain nombre d'objets (fonction, points etc) qui doivent être correctement définis.

Exercice 2. Donner deux exemples de fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (ou $U \to \mathbb{C}$) holomorphes, et deux exemples de fonctions non holomorphes. (Les fonctions doivent être non constantes, distinctes et non proportionnelles, mais peuvent être des fonctions très simples. Il faut bien sûr justifier.)

Exercice 3.

1. Écrire $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ comme la somme d'une matrice $\mathbb{C}$-linéaire et d'une matrice $\mathbb{C}$-antilinéaire.
2. Déterminer deux nombres complexes α et β tels que l'application $f = \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x+iy \mapsto x+2y+i(3x+4y)$ se mette sous la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \overline{z}$.

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que la fonction
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \phi\left(x^2 y^3\right) \\ \phi\left(e^y \cos x\right) \end{pmatrix}$$
est différentiable et calculer sa matrice jacobienne en tout point (en fonction de la dérivée de ϕ).
2. Si ϕ est l'identité, est-ce que la fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associée à f (et que l'on notera toujours f) est holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Exercice 5. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. On note $u = \text{Ré}(f)$, $v = \text{Im}(f)$ et on suppose que $u + v$ est constante. Montrer que f est constante.

Correction ou remarques sur les exercices

Correction de l'exercice 1. Cours. Attention, demander la différentiabilité et les conditions de Cauchy-Riemann, ce n'est pas la définition, c'est une proposition du cours.

Correction de l'exercice 2. Remarque : dans une question de cours ou d'exemples directs sur le cours, il faut justifier soigneusement les affirmations.

Ici, le but de l'exercice est de tester si la notion d'holomorphie a été bien comprise en demandant des preuves d'holomorphie ou de non holomorphie. On ne peut donc pas citer directement le cours.

Les preuves de (non) dérivabilité complexe pouvaient se faire par la définition, ou bien en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann.

Correction de l'exercice 3. On symétrise et antisymétrise les coefficients de la matrice sur la diagonale et l'antidiagonale, ce qui donne

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Il est inutile de refaire tout le boulot pour la deuxième question, c'est une application directe de la question 1 : $\alpha = \frac{5+i}{2}$ et $\beta = \frac{-3+5i}{2}$.

Il est crucial de bien comprendre cette procédure pour écrire un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ comme somme d'une application $\mathbb{C}$-linéaire et d'une application $\mathbb{C}$-antilinéaire.

Correction de l'exercice 4.

1. Attention au type deϕ, nombreuses confusions. La fonction ϕ va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle n'a pas de dérivées partielles, ça n'a pas de sens. Elle a une seule variable, donc une seule dérivée, au sens classique.
2. Attention, on ne peut pas simplement affirmer que (par exemple) $e^y \cos(x)$ n'est « pas égal » à $x^2 y^3$, il faut le démontrer. Les expressions $\arctan(x)$ et $\pi/2 - \arctan(1/x)$ ont l'air différentes mais elles prennent les mêmes valeurs (sur $\mathbb{R}_+^*$).

   Si l'on veut réfuter l'holomorphie sur $\mathbb{C}$, il suffit de trouver un point (x_0, y_0) où la matrice jacobienne (avec des valeurs calculées, donc des nombres) n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Correction de l'exercice 5. [Interprétation géométrique : l'énoncé dit que l'image de f est incluse dans une certaine droite du plan de coefficient directeur -1. Il est important de « voir »ceci même si on ne l'utilise pas explicitement pour la rédaction.]

D'après l'énoncé il existe un réel K tel que $v = K - u$, et donc $\partial_x u = -\partial_x v$ et $\partial_y u = -\partial_y v$. La matrice jacobienne de f est donc en tout point de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$. D'autre part, comme f est holomorphe, cette matrice est $\mathbb{C}$-linéaire, donc $a = -b$ mais aussi $a = b$. On en déduit que $a = b = 0$.

On a donc montré qu'en tout point, la matrice jacobienne de f devait être nulle. La fonction f est donc localement constante sur U. Comme U est connexe, f est donc constante.

REMARQUE IMPORTANTE On peut éventuellement deviner en quoi consiste le dernier argument (constance locale et connexité). Mais si on commence un calcul de dérivées partielles, qui n'aboutit pas, et qu'on enchaîne ensuite simplement sur « comme U est connexe, f est constante », on ne peut pas avoir de points : il n'y a pas de raisonnement correct visible auquel attribuer des points, on ne voit pas quelle était le but du calcul des dérivées partielles, encore moins que le but était de montrer qu'elles étaient nulles, il n'y a pas l'affirmation que f est localement constante. On n'attribue pas des points juste pour l'apparition de mots-clés.

Mon conseil : si l'on veut faire valider une partie du raisonnement, il faut expliquer ce que l'on souhaite faire. On peut dire que l'on admet que les calculs précédents montrent que $Df = 0$, en déduire que f est donc localement constante, puis rédiger l'argument de connexité.