

# Analyse complexe 2024-2025

## Aide aux révisions : liste de résultats

Damien Mégy

24 avril 2025

### Table des matières

## 1 Holomorphie

**Proposition 1.1.** Toute matrice  $M \in M_2(\mathbb{R})$  est la somme d'une matrice  $\mathbb{C}$ -linéaire et d'une matrice  $\mathbb{C}$ -antilinéaire et cette décomposition est unique.

**Proposition 1.2.** Une matrice de similitude directe est soit nulle soit inversible, auquel cas son inverse est une similitude directe.

**Proposition 1.3** (Conditions de Cauchy-Riemann). Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en un point  $z_0 \in U$  si et seulement si elle est différentiable en  $z_0$  et de plus, sa différentielle en  $z_0$  est une similitude directe.

**Proposition 1.4.** Toutes les règles de dérivation pour les opérateurs de Wirtinger.

## 2 Fonctions analytiques

### 2.1 Séries formelles

**Proposition 2.1.** Les inversibles de  $k[[t]]$  sont les éléments  $\sum a_k T^k$  avec  $a_0 \neq 0$ .

### 2.2 Séries entières

**Proposition 2.2.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. Son rayon de convergence est strictement positif ssi il existe  $C > 0$  tel que  $a_n = O(C^n)$ .

**Théorème 2.3** (Hadamard-Cauchy). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière, et soit  $\ell = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Alors le rayon de convergence de la série est  $1/\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

**Proposition 2.4** (Convergence des produits de Cauchy). Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons  $R > 0$  et  $R' > 0$ . Alors le produit de Cauchy  $\sum c_n z^n$  des deux séries a un rayon de convergence  $R' \geq \min(R, R')$ .

**Proposition 2.5.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière non nulle de rayon  $R > 0$  et  $f$  sa somme sur le disque  $D(0, R)$ . Soit  $d$  l'indice du premier coefficient non nul de  $\sum a_n z^n$ . Alors, au voisinage de zéro, on a  $f(z) \sim a_d z^d$ .

**Proposition 2.6.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon  $R > 0$  et  $f$  sa somme sur le disque  $D(0, R)$ . Alors  $f$  est dérivable au sens complexe sur  $D(0, R)$  et sa dérivée complexe est la somme de la série entière  $\sum (n+1)a_{n+1} z^n$  (qui est aussi de rayon  $R$ ).

**Théorème 2.7** (Zéros isolés pour les séries entières, à l'origine). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon strictement positif et  $f$  sa somme. S'il existe une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$  convergeant vers zéro et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = 0$ , alors tous les  $a_n$  sont nuls.

**Théorème 2.8** (Principe du maximum pour une série entière, en l'origine). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon  $R > 0$  et  $f$  sa somme sur le disque  $D(0, R)$ . Si  $|f|$  admet un maximum local en zéro, alors  $f$  est constante.

**Théorème 2.9** (Représentation intégrale des coefficients). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon  $R > 0$  et  $f$  sa somme sur le disque  $D(0, R)$ . Soit  $r \in ]0, R[$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

**Théorème 2.10** (de Liouville, énoncé pour les séries entières). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon  $+\infty$  et  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sa somme. Si  $f$  est bornée, alors  $f$  est constante.

(Rappel de terminologie :  $f$  bornée veut par définition dire  $|f|$  bornée.)

## 2.3 Fonctions analytiques

**Proposition 2.11.** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et  $f$  sa somme sur  $D(0, R)$ . Alors  $f$  est analytique sur  $D(0, R)$ .

**Proposition 2.12.** Une fonction analytique sur  $U$  est holomorphe sur  $U$ .

**Théorème 2.13** (Zéros isolés pour les fonctions analytiques). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe et  $f$  une fonction analytique non identiquement nulle sur  $U$ . Alors les zéros de  $f$  sont isolés.

**Théorème 2.14** (Zéros isolés pour les fonctions analytiques). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  analytique et  $Z := f^{-1}(\{0\})$  l'ensemble des zéros de  $f$ . Si  $Z$  admet un point d'accumulation dans  $U$ , alors  $f$  est identiquement nulle sur  $U$ .

## 3 Intégration curviligne, primitives holomorphes

**Proposition 3.1.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin de  $U$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\gamma^{opp}$  son chemin opposé. Alors

$$\int_{\gamma^{opp}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

**Proposition 3.2** (Invariance par reparamétrage croissant). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin de  $U$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une bijection croissante de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors

$$\int_{\gamma \circ \phi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

**Proposition 3.3** (Inégalité triangulaire). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin de  $U$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt.$$

**Proposition 3.4** (Inégalité triangulaire, forme simplifiée, majoration brutale de  $|f|$ ). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$  et  $\gamma$  un chemin de  $U$  de classe  $\mathcal{C}_{pm}^1$ . Alors :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \text{long}(\gamma) \max_{z \in \text{supp } \gamma} |f(z)|.$$

**Proposition 3.5.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  un chemin  $\mathcal{C}_{pm}^1$  dans  $U$ . Si  $f$  possède une primitive holomorphe  $F$  sur  $U$ , alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

## 4 Théorème et formule(s) de Cauchy

**Théorème 4.1** (Lemme de Goursat). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $T \subset U$  un triangle (enveloppe convexe de trois points non alignés), dont le bord est muni de son orientation canonique. Alors  $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ .

**Proposition 4.2.** Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert étoilé et  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Alors  $f$  possède des primitives holomorphes sur  $U$ .

**Théorème 4.3** (Théorème intégral de Cauchy). Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert,  $f \in \mathcal{O}(U)$ , et  $K \subseteq U$  un compact à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, dont le bord est muni de son orientation canonique. Alors,  $\int_{\partial K} f(z) dz = 0$ .

**Théorème 4.4** (Formule de Cauchy). Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert,  $f \in \mathcal{O}(U)$ , et  $K \subseteq U$  un compact à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, dont le bord est muni de son orientation canonique. Soit  $a \in K^\circ$ . Alors :

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

**Théorème 4.5.** Les fonctions holomorphes sont analytiques. De plus, si  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $z_0 \in U$ , le rayon de convergence du DSE de  $f$  en  $z_0$  a un rayon supérieur ou égal à  $\text{dist}(z_0, U^c)$ .

**Théorème 4.6.** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $U$ . Alors  $f'$  est holomorphe sur  $U$ .

**Théorème 4.7** (de Morera). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{C})$  telle que pour tout triangle  $T \subset U$ , on ait  $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ . Alors,  $f$  est holomorphe.

**Théorème 4.8** (Formule de la moyenne). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert,  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $z_0 \in U$ . Pour tout  $r > 0$  tel que  $\mathbb{D}(z_0, r) \subseteq U$ , on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

**Théorème 4.9** (Formules de Cauchy d'ordre supérieur). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Soit  $K \subseteq U$  un compact à bords  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $z \in K^\circ$ . Alors, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

**Corollaire 4.10** (Inégalités de Cauchy pour cercles centrés). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert,  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $\overline{\mathbb{D}(z, r)}$  un disque fermé inclus dans  $U$ . Alors, pour tout  $n \geq 0$  :

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{w \in \mathcal{C}(z, r)} |f(w)|$$

**Théorème 4.11** (de Liouville). Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  est bornée, alors  $f$  est constante.

**Théorème 4.12** (Principe du maximum). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert et  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Si  $|f|$  admet un maximum local en un point  $z_0$ , alors  $f$  est constante sur la composante connexe de  $U$  contenant  $z_0$ .

**Corollaire 4.13** (du principe du maximum). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert,  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $K \subseteq U$  un compact. Alors  $\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|$ .

**Théorème 4.14** (Lemme de Schwarz). Soit  $\mathbb{D}$  le disque unité, et  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe telle que  $f(0) = 0$ . Alors :

1.  $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leq |z|$ .
2. S'il existe  $w \in \mathbb{D}^*$  tel que  $|f(w)| = |w|$ , ou bien si  $|f'(0)| = 1$ , alors il existe  $\lambda$  de module un tel que  $\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \lambda z$ .

## 4.1 Étude locale des fonctions holomorphes

**Théorème 4.15** (Inversion locale pour les fonctions holomorphes). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert,  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $z_0 \in U$  un point tel que  $f'(z_0) \neq 0$ . Alors il existe un ouvert  $V$  contenant  $z_0$  tel que  $W := f(V)$  soit ouvert et que  $f|_V$  soit un biholomorphisme de  $V$  sur  $W$ .

**Proposition 4.16** (Étude aux points critiques des fonctions holomorphes). Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $f \in \mathcal{O}(U)$  une fonction non constante,  $z_0 \in U$  et  $d = \min\{d \in \mathbb{N}^*, f^{(d)}(z_0) \neq 0\}$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $V \subseteq U$  de  $z_0$ , un voisinage ouvert  $W$  de 0 et un biholomorphisme  $\phi : V \rightarrow W$  tel que :

$$\forall z \in V, f(z) - f(z_0) = \phi(z)^d.$$

**Théorème 4.17** (de l'application ouverte pour les fonctions holomorphes). Soit  $U$  un ouvert connexe et  $f \in \mathcal{O}(U)$  non constante. Alors,  $f$  est ouverte.

## 5 Séries de Laurent, singularités isolées, Résidus

### 5.1 Séries de Laurent

**Théorème 5.1** (Développement en série de Laurent des fonctions holomorphes sur une couronne). Une fonction holomorphe sur une couronne  $A(z_0, R, R')$  est développable en série de Laurent  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$  sur cette couronne et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $r \in ]R, R'[$ , on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

### 5.2 Singularités isolées

**Proposition 5.2.** Soit  $z_0$  une singularité isolée d'une fonction holomorphe  $f$ . Soit  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$  le développement en série de Laurent de  $f$  sur un disque épointé  $\mathbb{D}(z_0, \epsilon)^*$ . Alors,  $z_0$  est une singularité effaçable ssi  $\forall n < 0, a_n = 0$ .

**Théorème 5.3** (Théorème d'extension de Riemann). Soit  $z_0$  une singularité isolée d'une fonction holomorphe  $f$ . Si  $|f|$  est bornée au voisinage de  $z_0$ , alors la singularité est effaçable, autrement dit  $f$  se prolonge holomorphiquement en  $z_0$ .

**Proposition 5.4** (Comportement au voisinage d'un pôle). Soit  $f$  une fonction holomorphe admettant un pôle d'ordre  $d$  en  $z_0$ . Au voisinage de  $z_0$ , on a  $f(z) \sim a_{-d} z^{-d}$ .

**Théorème 5.5** (Casoratti-Weierstrass). Soit  $z_0 \in U$  une singularité essentielle d'une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ . Alors, pour tout voisinage  $W$  de  $z_0$  contenu dans  $U$ , l'image par  $f$  de  $W \setminus \{z_0\}$  est dense dans  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 5.6.** Soit  $U$  un ouvert,  $Z \subset U$  un fermé constitué de points isolés et  $f$  fonction holomorphe sur  $U \setminus Z$ . Alors il y a équivalence entre :

- Pour tout  $z_0 \in Z$ ,  $z_0$  n'est pas une singularité essentielle de  $f$ .
- Au voisinage de tout  $z_0 \in Z$ ,  $f$  s'écrit comme le quotient  $g/h$  de deux fonctions holomorphes (définies sur un voisinage de  $z_0$ ).

### 5.3 Théorème des résidus

**Théorème 5.7** (des résidus). Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert,  $Z \subset U$  une partie discrète,  $K \subset U$  un compact à bords  $\mathcal{C}^1$  par morceaux avec  $Z \cap \partial K = \emptyset$ , et  $f$  une fonction holomorphe sur  $U \setminus Z$ . Alors :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{\alpha \in K \cap Z} \text{Rés}_\alpha(f).$$

## 5.4 Principe de l'argument et théorème de Rouché

**Théorème 5.8** (Principe de l'argument). Soit  $U \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert,  $f$  une fonction méromorphe à zéros isolés<sup>1</sup> sur  $U$  et  $D = \sum_a m_a$  son diviseur. Si  $K \subset U$  est un compact à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, dont le bord ne contient aucun zéro ni pôle de  $f$ , alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in K} m_a.$$

**Théorème 5.9** (Théorème de Rouché). Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert,  $f, g \in \mathcal{O}(U)$  et  $K \subset U$  un compact. Si  $|f - g| < |f|$  sur  $\partial K$ , alors  $f$  et  $g$  ont même nombre de zéros dans  $K$ , comptés avec multiplicités.

**Corollaire 5.10** (Localisation des racines des polynômes : version effective). Soit  $P = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ . Soit  $R = 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|^{\frac{1}{n-k}}$ . Alors  $P$  admet  $n$  racines dans le disque  $\mathbb{D}(0, R)$ , comptées avec multiplicités.

Dans toute la suite du paragraphe,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $(f_n)_n$  est une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction  $f$  holomorphe<sup>2</sup>.

Pour simplifier l'énoncé des résultats, on suppose de plus  $U$  **connexe**.

**Lemme 5.11.** Soit  $K \subset U$  un compact. Si  $f$  ne s'annule pas sur  $\partial K$ , alors pour  $n$  grand,  $f_n$  ne s'annule pas non plus sur  $\partial K$  et  $f$  et  $f_n$  ont même nombre de zéros dans  $K^\circ$ , comptés avec multiplicités.

**Proposition 5.12.** Si les fonctions  $f_n$  ne s'annulent pas dans  $U$ , alors soit  $f$  ne s'annule pas sur  $U$ , soit  $f$  est identiquement nulle.

**Proposition 5.13.** Si les fonctions  $f_n$  sont injectives, alors soit  $f$  est injective, soit  $f$  est constante.

1. Hypothèse rajoutée pour éviter que  $f$  soit identiquement nulle sur une composante connexe de  $U$ . Demander que les zéros soient isolés permet de dire que  $f$  admet un diviseur.

2. L'holomorphie résulte automatiquement du théorème de Morera, mais nous n'avons pas vu ce théorème en cours.