Université de Lorraine,
Année 2017-18

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 8 : Encore des résidus.

Exercice 1 Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$. Supposons qu'il existe $B > 0$ et $c > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq \frac{B}{|z|^c}$$

pour tout $z \in \Omega$. Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $Im(z) > 0$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$

(Suggestion : considérer l'intégrale sur un demi-cercle de rayon $R > 0$, puis faire tendre $R \to +\infty$).

Exercice 2 Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ à l'exception d'un nombre fini de points $z_1, \ldots, z_k$ où elle possède des pôles. Définissons le *résidu à l'infini* de f comme étant

$$Res(f, \infty) := -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} f(z) dz$$

où $R > 0$ est suffisamment grand pour qu'aucun des pôles de f ne soit contenu dans $\{|z| \geq R\}$.

(a) Montrer que $Res(f, \infty)$ ne dépend pas du choix de $R > 0$.

(b) Montrer que $Res(f, \infty) + \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j) = 0$.

Exercice 3 Montrer les égalités suivantes :

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$;

(b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{\pi}{6}$;

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx = \frac{4\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 4 Calculer l'intégrale :

$$\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz$$

où

(a) γ est le carré de sommets $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ et $1-i$;

(b) γ est une ellipse d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.