Université de Lorraine,
Année 2017-18

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 3 : Fonctions holomorphes.

Equation de Cauchy-Riemann.

Exercice 1 Pour $z = x + iy$ on pose $f(z) := x + iy^2$.

(a) Vérifier que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$;

(b) En quels points f est $\mathbb{C}$-différentiable ? Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ où f soit holomorphe ?

Exercice 2 Montrer que $z \mapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe, de même que $Re(z)$ et $Im(z)$.

Exercice 3 Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Montrer que u et v sont harmoniques, i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Exercice 4 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f une fonction holomorphe sur U. Soit $V := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in U\}$. Pour tout $z \in V$ on pose $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que g est holomorphe sur V.

Exercice 5 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur U. Ecrivons $f = u + iv$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est constante ;

(b) u est constante ;

(c) v est constante ;

(d) $\bar{f}$ est holomorphe ;

(e) $|f|$ est constante.

Grands théorèmes sur les fonctions holomorphes.

Exercice 6 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non constante sur U. On suppose que $|f|$ admet un minimum local sur U. Montrer que f s'annule dans U.

Exercice 7 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe contenant le disque unité fermé et f et g deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur U. On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ pour tout z tel que $|z| = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $|\lambda| = 1$ tel que $f = \lambda g$ sur U. La conclusion est-elle encore vraie si on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas ?

Exercice 8 Soit f une fonction entière de périodes 1 et i. Montrer que f est constante.

Exercice 9 Soit f une fonction entière de dont la partie réelle est bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 10 Soit f une fonction entière non constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 Soit D le disque de rayon 1 centré en 0 et $f(z) = \sum a_n z^n$ une fonction holomorphe dans D. On suppose que pour tout $z \in D$ on a

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}.$$

A l'aide des inégalités de Cauchy montrer que

$$|a_n| \leq (1 + 1/n)^n (n + 1).$$