Analyse complexe 2023-2024
trame de cours

Damien Mégy

18 mai 2024

Table des matières

Chapitre 1

Holomorphie (VIDE)

Chapitre 2

Fonctions analytiques

Définition 2.0.1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathbb{C}^U$. On dit que f est analytique sur U si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de U.

Proposition : une série entière de rayon R est analytique sur $\mathbb{D}(0,R)$. Preuve : DSE en $z_0 \neq 0$ avec le binôme de Newton.

Définition : un zéro d'une fonction f est un élément α tq $f(\alpha) = 0$.

Une série entière identiquement nulle sur un voisinage de l'origine est identiquement nulle sur son disque ouvert de convergence. Ceci est une conséquence du fait que les coefficients a_n se récupèrent avec les dérivées successives en l'origine.

Le théorème des zéros isolés est une version un peu plus puissante de ce résultat.

Théorème 2.0.2 (Zéros isolés pour les séries entières)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon strictement positif et f sa somme. S'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers zéro et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = 0$, alors tous les a_n sont nuls.

Définitions : point accumulation d'une partie, point isolé. Partie discrète.

Reformulation du théorème des zéros isolés : si 0 est un zéro non isolé de f, alors f est identiquement nulle.

Théorème 2.0.3. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ analytique et $Z := f^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des zéros de f. Si Z admet un point d'accumulation dans U, alors f est constante.

Preuve 1 : on utilise l'ensemble A des points au voisinage desquels f est identiquement nulle.

Preuve 2 : on utilise l'ensemble B des points où toutes les dérivées de f s'annulent.

Chapitre 3

Intégration curviligne

3.1 Chemins

Définitions : chemins, lacets, chemin opposé, concaténation de chemins. Chemins $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

3.2 Formes différentielles

Formes différentielles réelles et complexes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.
Cas particulier : formes holomorphes.
Opérateur $d : \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{C}) \to \Omega^1(U,\mathbb{C})$. Image et noyau de cet opérateur. Formes exactes.

3.3 Intégrales curvilignes

Définition pour une forme différentielle.
Invariance par reparamétrage, classe d'équivalence, arcs orientés.
Majoration du module par la norme infinie et la longueur d'arc.

3.4 Intégration sur le bord d'un compact régulier

Rappel : bord d'une partie.

Définition 3.4.1. Compact à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Orientation canonique du bord bien définie.
Exemples à faire soi-même : nombre fini de trous. L'angle à un point anguleux ne peut être nul.
Remarque : il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux sur le bord. Le bord est paramétrable par un nombre fini d'arcs $\mathscr{C}^1$.

Définition 3.4.2. Intégration d'une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur le bord d'un compact à bord C^1 par morceaux.

3.5 Primitives

Attention aux différentes significations du mot « primitive ».

Définition 3.5.1 (Primitive (holomorphe, d'une fonction))**.** On dit que $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admet une primitive (holomorphe,) ou simplement une primitive, s'il existe $F \in \mathscr{O}(U)$ telle que $F' = f$.

Attention, certaines fonctions holomorphes n'ont pas de primitive, contrairement à ce qui se passe en analyse réelle où toute fonction continue admet une primitive. Par exemple la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Le fait d'avoir une primitive dépend de façon cruciale de l'ouvert de définition. Par exemple la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ possède une primitive, à savoir la détermination principale du log, notée Log dans ce cours (ou Log_0, aussi).

Proposition 3.5.2. Si f admet une primitive holomorphe, l'intégrale curviligne $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités du chemin.

Dans ce qui suit, le mot « primitive » a encore un nouveau sens, il s'applique cette fois à des formes différentielles et plus à des fonctions.

Vocabulaire : si ω est une 1-forme exacte, c'est-à-dire qu'il existe f telle que $\omega = df$, alors on dit aussi qu'elle admet une primitive. (La primitive est la fonction f.)

Attention dans ce nouveau contexte, la primitive de la forme différentielle n'est pas forcément une fonction holomorphe, c'est juste une fonction C^1.

Ce sens généralise le sens précédent comme suit : la fonction f possède une primitive holomorphe si la forme différentielle $f(z)dz$ possède une primitive au sens des formes différentielles. (Exercice : il s'agit de montrer que dans ce cas la primitive est automatiquement holomorphe.)

Proposition 3.5.3. Soit ω une 1-forme différentielle. Si ω admet une primitive, l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ ne dépend que des extrémités du chemin γ.

3.5.1 Convergence

Laissé en exercice :

intégration sur un chemin fixé d'une suite de fonctions qui CVU (ou CVUTC).

Cas plus général : que faire si on n'a pas CVUTC? dans certaines conditions, écrire explicitement le paramétrage et convergence dominée.

intégration d'une forme donnée sur une suite de chemins qui converge en topologie C^1 vers un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Chapitre 4

Théorème et formule(s) de Cauchy

4.1 Théorème intégral de Cauchy

Théorème 4.1.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$, et $K \subseteq U$ un compact à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux, dont le bord est muni de son orientation canonique. Alors, $\displaystyle\int_{\partial K} f(z)dz = 0$.

Mise en garde 4.1.2.

1. Le bord n'est pas forcément connexe. Par exemple, le bord d'une couronne fermée est l'union de deux cercles.
2. Attention à l'orientation du bord, en particulier lorsqu'il n'est pas connexe comme dans l'exemple précédent.

Historique : Cauchy, Riemann, Goursat.
Plan de la preuve :

1. Lemme de Goursat.
2. Approximation polygonale du compact. Ceci n'a pas été démontré en détail et ne fera pas l'objet de questions de cours.
3. Fin de la preuve : approximation de l'intégrale curviligne par les intégrales sur les triangulations de plus en plus fines. Ceci n'a pas été démontré en détail et ne fera pas l'objet de questions de cours.

4.2 Formule de Cauchy

Formule de Cauchy
Cas particulier avec des cercles.
Conséquence :

Théorème 4.2.1. Les fonctions holomorphes sont analytiques. De plus, si $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$, le rayon de convergence du DSE de f en z_0 a un rayon supérieur ou égal à $\mathrm{dist}(z_0, U^c)$.

Conséquence :

1. Les fonctions holomorphes sont $\mathbb{C}^\infty$.
2. Tous les théorèmes vrais pour les fonctions analytiques sont vrais pour les fonctions holomorphes : zéros isolés, prolongement analytique etc.

Dans le cas particulier de cercles centrés, la formule de Cauchy se spécialise en la formule suivante, appelée formule de la moyenne :

Théorème 4.2.2 (Formule de la moyenne)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$. Pour tout $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}(z_0, r} \subseteq U$, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)dt$$

(Interprétation : la valeur de f en z_0 est la moyenne de ses valeurs sur un cercle centré en z_0. Preuve : c'est juste la formule de Cauchy. Erreur de compréhension possible : la formule ne dit PAS que $f(z_0) = \displaystyle\int_{\mathscr{C}(z_0,r} f(z)dz$.)

4.3 Formules de Cauchy d'ordre supérieur

Théorème 4.3.1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soit $K \subseteq U$ un compact à bords C^1 par morceaux et $z \in K^\circ$. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

Remarque : pour $n = 0$, c'est la formule de Cauchy classique.

Cas particulier des cercles centrés : on récupère les formules intégrales pour les coefficients des séries entières.

En prenant les formules de Cauchy et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient ce qu'on appelle les inégalités de Cauchy. Dans le cas particulier de cercles centrés, on obtient les formules suivantes très souvent utiles :

Corollaire 4.3.2 (Inégalités de Cauchy pour cercles centrés)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\overline{\mathbb{D}(z,r)}$ un disque fermé inclus dans U. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{1}{r^n}\max_{w\in\mathscr{C}(z,r)}|f(w)|$$

On étudie maintenant les propriétés locales des fonctions holomorphes. On commence par une conséquence directe de la formule de la moyenne : une fonction holomorphe admettant un maximum local (en module) en un point est localement constante au voisinage de ce point.

Théorème 4.3.3 (Principe du maximum)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0, alors f est constante sur la composante connexe de de U contenant z_0.

Variations, voir feuilles de TD :

1. Sur un compact $K \subset U$, le module atteint son max au bord de K.
2. Principe dit « du minimum ».

Théorème 4.3.4 (de Liouville)**.** Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Si f est bornée, alors f est constante.

Avertissement : il est important que la fonction soit holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Si vous voulez appliquer Liouville, vous l'appliquez à une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et bornée), rien d'autre. Si vous avez une fonction définie sur un ouvert plus petit que $\mathbb{C}$ et que vous souhaitez montrer qu'elle est constante, alors soit vous montrez préalablement qu'elle peut s'étendre en fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (ça n'est pas forcément le cas) et vous appliquez Liouville classique, soit vous faites autrement.

Corollaire 4.3.5 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** Tout polynôme complexe non constant admet une racine sur $\mathbb{C}$.

Preuve : supposons par l'absurde qu'un polynôme P non constant ne s'annule pas. Alors la fonction $f = 1/P$ est entière et bornée, donc constante, contradiction.

4.4 Étude locale

Théorème 4.4.1 (Inversion locale)**.** Soit $u \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$ un point tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert V contenant z_0 tel que $W := f(V)$ soit ouvert et que $f|_V$ soit un biholomorphisme de V sur W.

Multiplicité d'un zéro, Point critique, multiplicité d'un point critique
Étude aux points critiques : énoncé, pas démontré.
[Rappel de terminologie : une fonction continue est dite ouverte si l'image de tout ouvert est ouverte.]

Théorème 4.4.2. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante. Alors, f est ouverte.

Fin du cours du 27 mars

Preuve de l'étude au point critique : détermination de racines n-èmes et de logarithmes complexes, puis preuve.

Preuve de l'application ouverte : compléter ici.

Application 4.4.3. Tous les exos du type « une fonction holomorphe sur un connexe à valeurs dans $\mathbb{R}$ est constante » sont maintenant faisables avec l'application ouverte, sans devoir calculer avec Cauchy-Riemann.

Application 4.4.4. Deuxième preuve du principe du maximum : si $z_0 \in U$ et que f n'est pas localement constante au voisinage de z_0, alors $f(U)$ contient un voisinage de $f(z_0)$ et donc $|f|$ n'atteint pas son maximum en z_0.

Théorème 4.4.5 (Lemme de Schwarz : vu en TD)**.**

Attention à la preuve, il se produit quelque chose d'assez surprenant dans la majoration : en majorant sur un ensemble plus grand, on arrive à obtenir un majorant plus petit. Ceci est un effet du principe du maximum et n'est absolument pas intuitif.

Théorème 4.4.6 (Biholomorphismes du disque : compléter la preuve)**.**

Chapitre 5

Séries de Laurent, singularités isolées, Résidus

5.1 Séries de Laurent

Séries de Laurent, exemples. Partie régulière, partie principale/polaire.

Couronnes, notations, couronne ouverte de convergence d'une série de Laurent, convergence normale sur sous-couronne fermée de la couronne ouverte de convergence.

Dérivée d'une série de Laurent.

Théorème 5.1.1 (Développement en série de Laurent des fonctions holomorphes sur une couronne)**.** Une fonction holomorphe sur une couronne est développable en série de Laurent sur cette couronne et $a_n = \cdots$.

Exercice : Développer $\dfrac{1}{z-1}$ en série de Laurent sur la couronne $C(0,2,3)$. (Revoir le TD.)

5.2 Singularités isolées

Définition : singularité isolée.

Exemples et contre-exemples. L'origine n'est pas une singularité de Log_0, ni de $\sin(1/z)^{-1}$.

5.2.1 Singularités effaçables

Définition 5.2.1. Une singularités isolée z_0 d'une fonction holomorphe f est dite *effaçable* si f se prolonge holomorphiquement en z_0.

Rq : on lit aussi « éliminable » au lieu d'effaçable dans certains ouvrages. Dans ce cours, on adopte néanmoins la terminologie « singularité effaçable », qui est assez standard.

Proposition 5.2.2. Soit z_0 une singularités isolée d'une fonction holomorphe f. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ le développement en série de Laurent de f sur un disque épointé $\mathbb{D}(z_0,\epsilon)^*$. Alors, z_0 est une singularité effaçable ssi $\forall n<0, a_n = 0$.

Idée de preuve : pour le sens difficile, si f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$, alors on développe $\tilde{f}$ en série entière, et on invoque l'unicité des coefficients d'un développement en série de Laurent sur le disque épointé.

Théorème 5.2.3 (Théorème d'extension de Riemann)**.** Soit z_0 une singularité isolée d'une fonction holomorphe f. Si $|f|$ est bornée au voisinage de z_0, alors la singularité est effaçable, autrement dit f se prolonge holomorphiquement en z_0 !

Remarque 5.2.4. *Encore un résultat spectaculaire (évoqué lors du tout premier cours), à l'opposé de ce qu'il se passe en analyse réelle classique. Une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ (et même analytique réelle sur $\mathbb{R}^*$), bornée au voisinage de l'origine, n'a en effet aucune raison de se prolonger ne serait-ce que continûment en l'origine. Dans le cadre holomorphe, être localement bornée autour d'une singularité isolée garantit un prolongement holomorphe (en particulier $\mathscr{C}^\infty$ mais bien plus) !*

Fin du cours du 10 avril

5.2.2 Cas non effaçable : pôles et singularités essentielles

Définition 5.2.5. Soit z_0 une singularité isolée non effaçable d'une fonction holomorphe f. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ le développement en série de Laurent de f sur un disque épointé centré sur z_0. On dit que z_0 est :

— un *pôle* si $\{n<0 \mid a_n \neq 0\}$ est fini. (Nombre fini de termes dans la partie principale.) Dans ce cas, $m := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$ est l'ordre du pôle.

— une singularité essentielle sinon. (Infinité de termes dans la partie principale.)

Exemples 5.2.6. L'origine 0 est un pôle de $1/z^3$, d'ordre 3. L'origine 0 est une singularité essentielle de $z \mapsto \exp(1/z) = \sum_{p\geq 0} \frac{(1/z)^p}{p!} = \sum_{n\leq 0} \frac{z^n}{(-n)!}$.

Proposition 5.2.7 (Comportement au voisinage d'un pôle)**.**

Théorème 5.2.8 (Casoratti-Weiestrass)**.** Soit $z_0 \in U$ une singularité essentielle d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$. Alors, pour tout voisinage W de z_0 contenu dans U, l'image par f de $W \setminus \{z_0\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Moralité : le comportement au voisinage d'une singularité essentielle est extrêmement pathologique, bien pire que simplement tendre vers $+\infty$ en module. Un bon exemple est $\exp 1/z$ qui fait des choses fondamentalement différentes suivant comment on s'approche de l'origine.

5.3 Fonctions méromorphes

Proposition 5.3.1. Soit U un ouvert, $Z \subset U$ un fermé constitué de points isolés et f fonction holomorphe sur $U \setminus Z$. Alors il y a équivalence entre :

— Pour tout $z_0 \in Z$, z_0 n'est pas une singularité essentielle de f.

— Au voisinage de tout $z_0 \in Z$, f s'écrit comme le quotient g/h de deux fonctions holomorphes (définies sur un voisinage de z_0).

Définition 5.3.2. Soit U un ouvert. Une fonction méromorphe sur U est la donnée d'un fermé $Z \subset U$ constitué de points isolés, et d'une fonction holomorphe sur $U \setminus Z$ vérifiant, pour tout $z_0 \in Z$, les conditions équivalentes de la proposition précédente.

Rq : la seconde définition se réinterprète en disant que f s'étend en une application de U vers la droite projective complexe.

Attention, une « fonction méromorphe sur U » n'est donc PAS une fonction de U dans $\mathbb{C}$. Par exemple, on dit que $z \mapsto \frac{1}{z}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

5.4 Théorème des résidus

Définition 5.4.1. Résidu en une singularité isolée.

Remarque : le résidu est défini même pour une singularité essentielle.

Techniques de calcul de calcul de résidus.

Attention : si vous travaillez sur d'autres ouvrages, vous croiserez *beaucoup* d'énoncés tous un peu différents sur les résidus. Formules homotopiques, homologiques, avec l'intervention d'indices, des conditions de simple connexité etc... Nous n'avons pas vu ces notions.

La forme donnée ici est la plus basique et efficace, elle ne nécessite pas de connaissances en topologie algébrique et s'applique dans un très grand nombre de cas en pratique. (Son désavantage est bien sûr qu'elle n'aborde pas les thématiques topologiques évoquées plus haut, parce qu'elle les évite. C'est dommage, mais cette année nous n'aurons pas le temps de traiter ces thématiques.)

Théorème 5.4.2 (des résidus)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $Z \subset U$ une partie discrète, $K \subset U$ un compact à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux avec $Z \cap \partial K = \emptyset$, et f une fonction holomorphe sur $U \setminus Z$. Alors :

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i\pi \sum_{\alpha \in K \cap Z} \text{Rés}_\alpha(f).$$

Techniques de calculs de résidus, en particulier pour pôles simples et doubles : pour un pôle d'ordre m, calcul du résidu soit en faisant un DL, soit avec la formule de Taylor pour les coefficients (dérivées successives).

Applications : calculs d'intégrales réelles. Cas traités en CM : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$.

Feuille de TD8 en ligne, avec quelques exemples corrigés.

Fin du cours du 17 avril

5.5 Principe de l'argument et théorème de Rouché

Définition 5.5.1. Diviseur sur un ouvert.

Définition 5.5.2. Fonction méromorphe admettant un diviseur.

Définition 5.5.3. Dérivée logarithmique, propriétés

Théorème 5.5.4 (Principe de l'argument)**.**

Théorème 5.5.5 (Théorème de Rouché)**.**

Application de Rouché à la recherche et à la localisation de racines de polynômes

Corollaire 5.5.6 (Nouvelle preuve de d'Alembert-Gauss)**.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors P possède n racines, comptées avec multiplicité.

Démonstration. Soit $Q = a_n z^n$. Alors, $P - Q$ est un polynôme de degré $\leq n-1$. et donc $P(z) - Q(z) = o(Q(z))$ lorsque $|z| \to +\infty$. En particulier, il existe $R > 0$ tel que pour tout z de module R, on ait $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Par le théorème de Rouché appliqué à P et Q sur le disque $\mathbb{D}(0,R)$, on en déduit que P et Q ont même nombre de racines (c'est-à-dire n), comptées avec multiplicités. □

Remarque : cette preuve ne dit pas encore quel R choisir pour être sûr d'entourer toutes les racines. La version suivante exhibe un rayon explicite qui convient. On traite le cas d'un polynôme unitaire pour simplifier.

Corollaire 5.5.7 (Localisation des racines des polynômes : version effective)**.** Soit $P = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré $n/ \geq 1$. Soit $R = 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|^{\frac{1}{n-k}}$. Alors P admet n racines dans le disque $\mathbb{D}(0,R)$, comptées avec multiplicités.

Démonstration. Posons $Q(z) = z^n$ et essayons d'appliquer le théorème de Rouché à P et Q sur le disque de rayon R.

Avec cette définition de R, on a $|a_k| \leq R^{n-k}2^{k-n}$. Pour tout $z \in \mathscr{C}(0,R)$, on a donc

$$\left|P(z) - Q(z)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_k\right| R^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} R^{n-k}2^{k-n}R^k = R^n \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n}}_{\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2}<1} \boxed{< R^n = \left|Q(z)\right|}$$

Le théorème de Rouché s'applique donc à P et Q sur le disque $\mathbb{D}(0,R)$ et donc P a ses n racines dans $\mathbb{D}(0,R)$, comptées avec multiplicités. □

Exercice 1. Exercices d'application : localiser toutes les racines de polynômes, ou juste une partie des racines, ou montrer qu'il n'existe pas de racines dans certaines zones.

Application de Rouché aux limites de fonctions holomorphes Dans toute la suite du paragraphe, U est un ouvert de $\mathbb{C}$, $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction f holomorphe [1].

Pour simplifier l'énoncé des résultats, on suppose de plus U **connexe**.

Lemme 5.5.8. Soit $K \subset U$ un compact. Si f ne s'annule pas sur ∂K, alors pour n grand, f_n ne s'annule pas non plus sur ∂K et f et f_n ont même nombre de zéros dans K°, comptés avec multiplicités.

Proposition 5.5.9. Si les fonctions f_n ne s'annulent pas dans U, alors soit f ne s'annule pas sur U, soit f est identiquement nulle.

Proposition 5.5.10. Si les fonctions f_n sont injectives, alors soit f est injective, soit f est constante.

Fin du cours du 15 mai

5.6 Notions non abordées dans le cours en 2023-2024 et ouverture

Ce cours n'est qu'une introduction à l'analyse complexe et de nombreux thèmes pourraient faire l'objet de TER en M1 (ou de cours complets en M1, dans les université proposant des cours d'analyse complexe en M1).

5.6.1 Homotopies de chemins et lacets, ouverts simplement connexes

Références : Brotbek puis Demailly, qui fait aussi les revêtements et le groupe fondamental.

5.6.2 Indices, homologie, cycles

Références : Brotbek puis Demailly

5.6.3 Familles normales, théorème de Montel

Référence : Demailly. Interaction avec le théorème d'Ascoli qui sera vu en M1.

5.6.4 Fonctions harmoniques

Référence : Demailly, qui fait ensuite les fonctions sous-harmoniques.

5.6.5 Uniformisation

Référence : Demailly. Utilise les familles normales.

5.6.6 Intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre, applications à la théorie des nombres

Références : Colmez, Zuily-Queffelec, puis Tenenbaum

5.6.7 Calcul fonctionnel holomorphe

Références pour les algèbres de Banach : Hirsch - Lacombe *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Rudin *Functional analysis* , Conway *A Course in Functional Analysis.*

5.6.8 Applications en mécanique des fluides et électrostatique

Références : Chabat - Lavrentiev.

1. L'holomorphie résulte automatiquement du théorème de Morera, mais nous n'avons pas vu ce théorème en cours.

5.6.9 Applications à la retouche d'image

Retouche d'image à coup de fonctions harmoniques et noyau de Poisson. (En pratique, résolution de l'équation de Laplace en décomposant la condition de bord en série de Fourier.)

Références : par exemple Boisgérault, *Poisson Image Editing*, mini-cours de M1 aux Mines de Paris : `https://direns.mines-paristech.fr/Sites/Complex-analysis/Poisson%20Image%20Editing/Poisson%20Image%20Editing.pdf`

5.6.10 Niveau plus élevé : surfaces de Riemann

Références : Demailly pour une introduction.

5.6.11 Niveau plus élevé : analyse complexe à plusieurs variables, puis géométrie complexe

Références : Cartan, puis premiers chapitres de livres de géométrie complexe, par exemple le livre de Claire Voisin *Géométrie algébrique complexe et théorie de Hodge* (qui est un livre de niveau M2) ou le livre *Complex Analytic and Differential Geometry* de J.-P. Demailly.

De même que le calcul différentiel évolue principalement en géométrie différentielle puis riemanienne (ou autres variantes), l'analyse complexe en plusieurs variables évolue en géométrie complexe, pour laquelle il faut également avoir des bases solides en géométrie différentielle, en topologie algébrique, ainsi qu'en algèbre commutative.

5.7 Sujets de TER pour M1

Beaucoup de possibilités : uniformisation des ouverts simplement connexes, séries entières aléatoires, introduction à la théorie analytique des nombres (par exemple le théorème des nombres premiers), introduction aux courbes elliptiques, interpolation de Riesz-Thorin, marches aléatoires dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, analyse complexe et distributions...