Interrogation 2

Exercice 1. Donner un exemple d'ouvert U de $\mathbb{C}$ et de fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(U)$ n'admettant pas de primitive holomorphe sur U (en justifiant).

Exercice 2.
1. Énoncer le théorème des zéros isolés pour les fonctions analytiques.
2. Énoncer le principe du maximum pour les fonctions analytiques.
3. Énoncer le lemme de Schwarz.
4. Énoncer le théorème intégral de Cauchy.
5. Énoncer la formule de Cauchy.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\int_{\mathscr{C}} \frac{e^{z^2}}{z^2-7z+10}dz$ lorsque :
1. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre 0 et de de rayon 1 parcouru dans le sens direct.
2. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre 0 et de de rayon 3 parcouru dans le sens direct.
3. (Bonus) $\mathscr{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 6 parcouru dans le sens direct.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(it) = t^4 + t^2$. Calculer $f(1)$.

Exercice 5. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$, f sa somme et $u = \text{Ré} f$. Montrer que pour tout $r \in]0, R[$ et $n \geq 1$, on a $a_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$.

Correction ou remarques sur les exercices

IMPORTANT : en plus des remarques incluses ici, j'ai commencé à compiler une liste d'idées fausses en analyse complexe, disponible sur la page habituelle https://github.com/dmegy/analyse-complexe/. Il est très fortement conseillé d'étudier en détail cette liste, qui devrait vous éviter de tomber dans les pièges les plus courants, que l'on voit année après année, même dans les bonnes copies.

Correction de l'exercice 1. L'exemple du cours est $f : z \mapsto 1/z$ sur $U = \mathbb{C}^*$. Si $\gamma = [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$, $t \mapsto e^{it}$, on a $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi$, or si f admettait une primitive F sur U, on aurait $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0$.

Attention, on ne peut pas justifier l'inexistence de primitive en disant que la fonction ne se prolonge pas en zéro : la fonction $z \mapsto 1/z^2$ ne se prolonge pas en l'origine et pourtant possède la primitive complexe $z \mapsto -1/z$. D'autre part, il faut justifier avec des assertions précises : il y a une part de vérité derrière l'assertion « il n'y a pas de primitive car le logarithme complexe n'existe pas sur $\mathbb{C}^*$ » mais ça ne peut pas constituer une justification. Dire que les fonctions Log_θ ne fournissent des primitives sur des plans privés de demi-droites ne permet pas non plus de conclure directement à l'inexistence d'une primitive.

Correction de l'exercice 2. Cours.

Attention, il était bien précisé qu'on demandait les versions pour les fonctions analytiques et pas pour les séries entières. Les énoncés ont été spécifiquement nommés de façon assez détaillée pour éviter au maximum la confusion. Erreurs courantes : omettre la régularité du bord, oublier le facteur $2i\pi$ dans la formule de Cauchy, et surtout, oublier les hypothèses de connexité.

Correction de l'exercice 3.

1. La fonction $f : z \mapsto \dfrac{e^{z^2}}{z^2 - 7z + 10} = \dfrac{e^{z^2}}{(z-2)(z-5)}$ est holomorphe sur $U := \mathbb{C} \setminus \{2, 5\}$. On considère le disque fermé $K = \overline{\mathbb{D}(0,1)}$. C'est un compact de U, à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$. Par le théorème intégral de Cauchy, on a $\displaystyle\int_{\partial K} f(z)dz = 0$.

2. La fonction $g : z \mapsto \dfrac{e^{z^2}}{z-5}$ est holomorphe sur $U' := \mathbb{C} \setminus \{5\}$. On considère cette fois le disque fermé $K' = \overline{\mathbb{D}(0,3)}$. C'est un compact de U', à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$. Comme 2 est dans l'intérieur de K', la formule de Cauchy au point 2 donne $I_2 = \displaystyle\int_{\mathscr{C}(0,3)} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 7z + 10} dz = \int_{\partial K'} \frac{g(z)}{z-2} dz = 2i\pi g(2) = \frac{-2i\pi e^4}{3}$.

3. La fonction $h : z \mapsto \dfrac{e^{z^2}}{z-2}$, holomorphe sur $U'' := \mathbb{C} \setminus \{2\}$, le compact $K'' = \overline{\mathbb{D}(0,6)} \setminus \mathbb{D}(0,3)$ à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$. (Le bord est constitué de deux cercles. Le cercle extérieur est orienté dans le sens direct, et le cercle intérieur est orienté dans le sens indirect.) La formule de Cauchy au point 5 (qui est dans l'intérieur de K'') donne
$$I_3 - I_2 = \int_{\partial K''} \frac{h(z)}{z-5} dz = 2i\pi h(5) = \frac{2i\pi e^{25}}{3},$$
d'où $I_3 = \dfrac{2i\pi(e^{25} - e^4)}{3}$.

Erreurs fréquentes : confusion entre la formule de Cauchy et le théorème intégral de Cauchy, mauvais choix des fonctions sur lesquelles appliquer les théorèmes. Erreurs de signes dues aux orientations des différents cercles (point important, à revoir). Tentatives d'appliquer le théorème intégral ou bien la formule de Cauchy sur le bord de compacts qui ne sont pas inclus dans U, par exemple le compact $\overline{\mathbb{D}(0,3)}$ et l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{2, 5\}$: dans ce cas, il faut changer la fonction car le théorème ne s'applique pas. Bien retravailler tout ceci. Parfois, mauvaise vérification des hypothèses. Point crucial : il ne suffit pas que le bord du compact soit dans U : il faut que le compact entier soit dans U. Attention aux bords des compacts : dans la formule de Cauchy, le point doit être à l'intérieur du compact, pas juste dans le compact. Et aussi : $\overline{\mathbb{D}(0,6)} \setminus \mathbb{D}(5,1)$ n'est pas un compact à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$, malheureusement. Si l'on veut aller dans cette direction, il faut utiliser le compact $\overline{\mathbb{D}(0,6)} \setminus \mathbb{D}(5,1/2)$.

Correction de l'exercice 4. Notons $U = \mathbb{C}$. C'est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $g : U \to \mathbb{C}, z \mapsto z^4 - z^2$. Cette fonction est analytique car polynomiale en z sur U. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g(it) = t^4 - t^2 = f(it)$. Donc f et g sont égales sur la partie $E = i\mathbb{R} \subset U$. Cette partie admet des points d'accumulation dans U, par exemple l'origine. En effet, la suite $(i/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans E et s'accumule sur $0 \in U$. Par le théorème de prolongement analytique, f et g sont égales sur U tout entier. En particulier, $f(1) = g(1) = 1 - 1 = 0$.

Remarques sur la notation : chacun des détails est important : définition des objets, citation du théorème, vérification explicite des toutes les hypothèses du théorème. Des points sont attribués à chacune des étapes, on ne peut pas juste justifier par « identification » : le théorème des zéros isolés (ou de prolongement analytique) n'est pas une trivialité et identifier des coefficients de deux séries entières n'a rien d'anodin : deux sommes de séries entières peuvent être égales sur une infinité de points et malgré tout différentes.

Correction de l'exercice 5. On adapte la preuve de cours pour la formule classique, qui repose sur le développement en série de l'intégrande, l'interversion de $\sum$ et $\int$, et le fait que pour $\ell \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\ell\theta}\, d\theta = 2\pi[\ell = 0]$.

Soit $n \geq 1$ et reprenons les notations de l'énoncé. On a $u = \dfrac{1}{2}\left(f + \overline{f}\right)$, donc $u(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\geq 0}\left(a_k r^k e^{ik\theta} + \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta}\right)$ et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sum_{k\geq 0} r^k a_k e^{i(k-n)\theta}\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sum_{k\geq 0} r^k \overline{a_k} e^{i(-k-n)\theta}\, d\theta \\
\text{(sous réserve de justifier)} \quad &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta}_{2\pi[k=n]} + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} \overline{a_k} r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i(k+n)\theta}\, d\theta}_{0 \text{ car } k+n>0} \\
&= \pi a_n r^n.
\end{aligned}$$

Justifions maintenant l'interversion de $\sum$ et $\int$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\phi_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \theta \mapsto a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $|\phi_k(\theta)| = |a_k| r^k$ qui est le terme général d'une série numérique absolument convergente, car $r < R$. Par conséquent, la série de fonctions $\theta \mapsto \sum\limits_{k\geq 0} \phi_k(\theta)$ est normalement convergente, ce qui justifie la première interversion de symboles. On procède de même pour la seconde interversion.