TD 5 : Intégration curviligne

Exercice 1. Soient $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t(1+i)$, $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t + it^2$, $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto it$ et $\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto i + t$. Calculer $\int_\gamma z dz$, où γ désigne successivement γ_1, γ_2 et $\gamma_3 \vee \gamma_4$.
(Autocorrection : on trouve i à chaque fois. Essayer ensuite avec $\int_\gamma \overline{z} dz$.*)*

Exercice 2. [Utilisé en cours mais sans détailler] Soit $r > 0$ et γ_r le lacet $[0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_{\gamma_r} z^n dz$.
(Autocorrection : on trouve $2i\pi$ *si* $n = -1$ *et zéro sinon.)*

Exercice 3. Soit $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Calculer $\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$. En déduire les valeurs des intégrales de Wallis $W_{2n} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$.

Exercice 4. Soit $r > 0$ et γ_r le lacet $[0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$ de module $\neq r$. Calculer $\int_{\gamma_r} (z-a)^n dz$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $n = -1$, puis $n \in \mathbb{Z}$ quelconque.
2. Si r est différent de 2 et 3, calculer $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2 + z - 6}$.
3. Plus généralement, si Q est une fraction rationnelle, calculer $\int_{\gamma_r} Q(z) dz$ pour tout $r > 0$ pour lequel cette intégrale est définie.

⋆ ⋆ ⋆ *Longueur d'un arc* ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 5. Montrer que l'arc de parabole $y = x^2$ compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$ a pour longueur $L = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})}{4} = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{argsh}(2)}{4}$. (Faire une intégration par parties.)

Remarque culturelle : si l'on cherche à calculer les longueurs d'arcs d'ellipses, d'hyperboles ou de sinusoïdes, les calculs font apparaître des primitives ne pouvant s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles : les « fonctions elliptiques de première et deuxième espèce »

⋆ ⋆ ⋆ *Limites d'intégrales curvilignes* ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 6. Soit $r > 1$, $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ le paramétrage standard du demi-cercle supérieur de rayon r, et $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2+1}$. Montrer que $I(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$. Généraliser à $\int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$ où $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ et $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Exercice 7. Étudier la limite lorsque $r \to +\infty$ de $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{e^z}{z^2} dz$, où $\gamma_r : [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$.

Même question si γ_r est cette fois le chemin $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$.

Exercice 8. Soit $f \in C^0(\mathbb{C},\mathbb{C})$ avec $f(0) \neq 0$. Pour $r > 0$, on note $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Calculer la limite, lorsque $r > 0$ tend vers zéro, de $I(r) := \int_{\gamma_r} f(z) dz$ et de $J(r) := \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz$ Pour $0 < a < b < 2\pi$, en notant $\gamma_{r,a,b} : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$, calculer la limite, lorsque $r > 0$ tend vers zéro, de $I(r,a,b) := \int_{\gamma_{r,a,b}} f(z) dz$ et de $J(r,a,b) := \int_{\gamma_{r,a,b}} \frac{f(z)}{z} dz$.

$\star \quad \star \quad \star$ *Utilisation de primitives holomorphes* $\star \quad \star \quad \star$

Exercice 9. Soit $T > 0$ et $\gamma : [0, T] \to \mathbb{C}, t \mapsto t + i \sin(t)$ le paramétrage de l'arc de sinusoïde entre les abscisses $x = 0$ et $x = T$. Calculer $\int_\gamma z^2 dz$.

Exercice 10. Retrouver les résultats des exercices 2 et 4 à l'aide de primitives. Pour le cas $n = -1$, utiliser la détermination principale du logarithme $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ et trouver une manière de gérer la « coupure ».

Exercice 11. Soit Log la détermination principale du logarithme et $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Calculer $\int_\gamma \mathrm{Log}(z) dz$.

Exercice 12. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Soit $z_0, z_0 \in U$ et soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U allant de z_0 à z_1. Montrer que l'on a l'analogue suivant de la formule d'intégration par partie :

$$\int_\gamma f(z) g'(z) dz = f(z_1) g(z_1) - f(z_0) g(z_0) - \int_\gamma f'(z) g(z) dz.$$

Exercice 13. Soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{C}$ allant de 0 à i. Calculer $\int_\gamma f(z) dz$ avec :

1. $f(z) = z^2 \sin z$
2. $f(z) = z e^{iz}$.

$\star \quad \star \quad \star$ *Autour de Green-Riemann* $\star \quad \star \quad \star$

Soit $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, et K un compact de U dont le bord ∂K est $\mathscr{C}^1$ par morceaux et muni de son orientation canonique. La *formule de Green-Riemann* est l'énoncé suivant :

$$\int_{\partial K} \omega = \int \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

C'est une généralisation en dimension 2 du théorème fondamental de l'analyse $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.

La version n-dimensionnelle s'appelle la *formule de Stokes* et s'écrit $\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega$.

Exercice 14. Démontrer la formule de Green lorsque K est un rectangle $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, puis lorsque K est un domaine de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq h(x)\}$, où $h \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R}_+^*)$.

Dans la suite, on admet la formule de Green-Riemann, qui peut être prouvée en recouvrant le compact par des rectangles et en adaptant (avec du travail!) l'exercice précédent.

Exercice 15. Soit $\omega = (x^5 + 3y) dx + (2x - e^{y^3}) dy$ et K le disque unité fermé. Calculer $\int_{\partial K} \omega$. *(Remarque : on pourrait paramétrer, écrire l'intégrale curviligne et même la calculer, avec beaucoup de courage.)*

Exercice 16.

1. Pour tout $r > 0$, montrer que $\int_{\partial B(0,r)} \overline{z} dz = 2i \,\mathrm{Aire}\big(B(0, r)\big)$.
2. Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ des points non-alignés. On note Δ le triangle de sommets z_1, z_2, z_3. Montrer que
$$\int_{\partial \Delta} \overline{z} dz = 2i \,\mathrm{Aire}(\Delta).$$
3. Soit K un compact à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux. En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer que
$$\int_{\partial K} \overline{z} dz = 2i \,\mathrm{Aire}(K).$$

Exercice 17. [Le théorème de Cauchy avec l'hypothèse $\mathscr{C}^1$] Soit $U \subset C$ un ouvert, $K \subset U$ un compact à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux et soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{C})$. Écrire $\int_{\partial K} f(z) dz$ à l'aide de la formule de Green-Riemann et des opérateurs de Wirtinger. Si f est de plus holomorphe, montrer le *théorème intégral de Cauchy* :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$