Examen du 27/05/2025 — Durée : 3h

Documents, calculatrices et téléphones interdits. **Un point pour le soin.** Souligner et encadrer les résultats.

Exercice 1. [Questions de cours]

1. Énoncer et prouver le théorème de Liouville.
2. Énoncer et prouver le théorème de d'Alembert-Gauss.
3. Énoncer et prouver le lemme de Schwarz en utilisant le principe du maximum.
4. Énoncer et prouver le théorème d'extension de Riemann.
5. Énoncer et prouver le théorème de Casorati-Weierstrass.

Exercice 2. Soit $\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im} z = (\operatorname{Ré} z)^2 \right\}$.

1. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$. On suppose que l'image de f est incluse dans Γ. Montrer que f est constante.
2. Soit f une fonction entière dont l'image est incluse dans le complémentaire de Γ. Montrer que f est constante.

Exercice 3. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ à l'aide de résidus, en détaillant tous les calculs : fonction utilisée, contour utilisé, résidus, limites etc. [Rappel/aide : faire des dessins pour *tout*, y compris pour les calculs de nombres complexes.]

Exercice 4. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$ à l'aide de résidus, en détaillant tous les calculs : fonction utilisée, contour utilisé, résidus, limites etc. Si certains calculs sont les mêmes qu'à l'exercice précédent, ne pas les refaire.

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit f une fonction holomorphe ayant une singularité isolée en zéro. On suppose qu'au voisinage de zéro, on a $|f(z)| = O\left(1/|z|^k\right)$. Montrer que zéro n'est pas une singularité essentielle de f.
2. Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}^*, |g(z)| \leq 1/|z|^k$. Montrer qu'il existe λ de module inférieur à un tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*, g(z) = \lambda/z^k$.

Exercice 6. Soit $P = X^{111} + 3X^{50} + 1$.

1. Montrer que P admet 50 racines dans $\mathbb{D}(0,1)$, comptées avec multiplicités.
2. Montrer que ces 50 racines sont simples.
3. Trouver $R > 0$ tel que P ait toutes ses racines dans $\mathbb{D}(0,R)$. Ne pas chercher à avoir la meilleure borne possible dans cette question.
4. Trouver $r > 0$ tel que P ait toutes ses racines à l'extérieur de $\overline{\mathbb{D}(0,r)}$. Ne pas chercher à avoir la meilleure borne.
5. Bonus. Améliorer le plus possible les bornes précédentes (R et r). Points attribués en fonction de la précision obtenue et des justifications.

Exercice 7. L'objectif de cet exercice est de démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont les fonctions affines non-constantes, c'est à dire les fonctions de la forme $z \mapsto az+b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. (Un automorphisme de $\mathbb{C}$ est par définition un biholomorphisme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.)

1. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$ tel que $f(0) = 0$. Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.
   (a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que si $|z| < \epsilon$ alors $|g(z)| > C$.
   (b) En déduire que 0 n'est pas une singularité essentielle de g.
   (c) Montrer que f est un polynôme.
   (d) Montrer enfin que ce polynôme est de degré un.
2. Démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont exactement les fonctions affines non-constantes.

Correction ou remarques sur les exercices