Université de Lorraine,
Année 2018-19

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 9 : Théorème des résidus et applications.

Théorème des résidus.

Exercice 1 Soit $0 < a < b < c$ trois nombres réels et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz$$

selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

Exercice 2 Calculer le résidu aux singularités isolées des fonctions suivantes :

$$f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2},\ g(z) = \frac{z^a}{1-z},\ h(z) = \log(z)$$

(on prendra la détermination principale des fonctions z^a et $\log(z)$).

Exercice 3 Examiner la nature des singularités des fonctions suivantes et déterminer le résidu en chacune de ces singularités :

$$(i)\ \frac{1}{z(1-z^2)},\ (ii)\ \tan z,\ (iii)\ \frac{\sin z}{z^2},\ (iv)\ \frac{z}{1+z^4},\ (v)\ (\frac{z+1}{z^2+1})^2.$$

Exercice 4 Soit C_r le cercle de centre 0 et rayon r. Utiliser le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivantes :

$$(i) \int_{C_4} \frac{1}{z^2-5z+6} dz,\ (ii) \int_{C_{5/2}} \frac{1}{z^2-5z+6} dz,\ (iii) \int_{C_2} \frac{e^{az}}{1+z^2} dz\ (a \in \mathbb{R}).$$

Exercice 5 Que vaut $\int_{|z|=N} \tan(\pi z) dz$, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$?

Exercice 6 Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ (on pourra intégrer sur le bord du compact $K = \{re^{it}; 0 \leq r \leq R \ et\ 0 \leq t \leq 2\pi/n\}$).

Exercice 7 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X] \setminus 0$, tels que $deg(P) \leq deg(Q) - 2$ et P et Q sont premiers entre eux. On suppose que Q n'a pas de zéros réels, et on note $a_1, \ldots, a_r$ ses zéros de partie imaginaire strictement positive. Prouver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} Res(\frac{P}{Q}, a_k).$$

En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2} dx.$$

Exercice 8 Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$. Supposons qu'il existe $B > 0$ et $c > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq \frac{B}{|z|^c}$$

pour tout $z \in \Omega$. Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $Im(z) > 0$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$

(Suggestion : considérer l'intégrale sur un demi-cercle de rayon $R > 0$, puis faire tendre $R \to +\infty$).

Exercice 9 Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ à l'exception d'un nombre fini de points $z_1, \ldots, z_k$ où elle possède des pôles. Définissons le *résidu à l'infini* de f comme étant

$$Res(f, \infty) := -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} f(z) dz$$

où $R > 0$ est suffisamment grand pour qu'aucun des pôles de f ne soit contenu dans $\{|z| \geq R\}$.

(a) Montrer que $Res(f, \infty)$ ne dépend pas du choix de $R > 0$.

(b) Montrer que $Res(f, \infty) + \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j) = 0$.

Exercice 10 Montrer les égalités suivantes :

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$;

(b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx = \frac{\pi}{6}$;

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx = \frac{4\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 11 Calculer l'intégrale :

$$\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz$$

où

(a) γ est le carré de sommets $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ et $1-i$;

(b) γ est une ellipse d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Applications du théorème de Rouché.

Exercice 12 Soit $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$. Montrer que f a trois de ses zéros dans le disque $D(0,1)$, et tous ses zéros dans le disque $D(0,3)$.

Exercice 13 On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 6z + 3$.

(a) Démontrer que P admet ses 4 racines dans le disque $D(0,2)$.

(b) Démontrer que P admet une seule racine dans le disque $D(0,1)$.

(c) Démontrer que P n'admet pas de racines dans le disque $D(0,1/3)$.

(d) Soit a la racine de P dans le disque $D(0,1)$. Démontrer que $2i\pi a = \int_{C(0,1)} \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z dz$

Exercice 14 Soit $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, a_j \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un point c de module 1 tel que $|P(c)| \geq 1$.

Exercice 15 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > 1$. Montrer que l'équation $e^{-z} + z - \lambda = 0$ a une racine et une seule dans le demi-plan $Re(z) > 0$.

Encore des intégrales.

Exercice 16 (a) Montrer que, pour tout réel $a > 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx = \pi e^{-a}$.

(b) Déduire du point précédent que, pour tout réel $a > 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}/a$.

Exercice 17 Montrer que, pour tout réel $a > 0$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2}{x^2} dx = \pi/2$. (Suggestion : considérer l'intégrale de $(1 - e^{2ix})/x^2$ et faire attention à éviter le pôle à l'origine).