Interrogation 3

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème/lemme de Goursat.
2. Énoncer le lemme de Schwarz.
3. Énoncer le théorème intégral de Cauchy.
4. Énoncer la formule de Cauchy.
5. Énoncer la formule de Cauchy à l'ordre n (celle pour des dérivées n-èmes).

Exercice 2. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathscr{C}^0(U,\mathbb{C})$ et $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1],U)$. Définir la longueur de γ. Majorer $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|$ en fonction de la longueur de γ. Prouver cette majoration.

Exercice 3. Pour tout $R > 0$, on pose $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ et } |z| \leq R\}$. On note $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$.

1. Soit $R > 0$. Dessiner K_R et montrer qu'il est compact.
2. Paramétrer son bord par deux chemins γ_1^R et γ_2^R. Dans la suite on admet que K_R est un compact à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{\partial K_R} f(z)dz$ pour $R \in]0,1[$.
4. Calculer $\displaystyle\int_{\partial K_R} f(z)dz$ pour $R > 1$.
5. Calculer les limites lorsque $R \to +\infty$ de $\displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)dz$ et $\displaystyle\int_{\gamma_2^R} f(z)dz$. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$. (Sans calculer de primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$!)

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(it) = \sin(t)^2$. Calculer $f(1)$, en simplifiant le résultat autant que possible.

Exercice 5. Soit f une fonction entière dont la partie réelle est bornée. Montrer que f est constante.

Correction ou remarques sur les exercices

IMPORTANT : en plus des remarques incluses ici, j'ai commencé à compiler une liste d'idées fausses en analyse complexe, disponible sur la page habituelle `https://github.com/dmegy/analyse-complexe/`. Il est très fortement conseillé d'étudier en détail cette liste, qui devrait vous éviter de tomber dans les pièges les plus courants, que l'on voit année après année, même dans les bonnes copies.

Correction de l'exercice 1. Cours.

Correction de l'exercice 3.

1. (Dessin de demi-disque) Pour $R > 0$, la partie K_R est bornée car incluse dans $\overline{\mathbb{D}(0,R)}$ et fermée comme intersection de deux fermés. Elle est donc compact comme fermée et bornée dans un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie.
2. On peut prendre $\gamma_1^R : [-R,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ et $\gamma_2^R : [0,\pi] \to \mathbb{C}, \theta \mapsto Re^{i\theta}$. On admet que K_R est un compact à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$.
3. Soit $R \in]0,1[$. Alors le compact K_R est inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{pmi\}$, ouvert sur lequel f est holomorphe. D'après le théorème intégral de Cauchy, on a $\displaystyle\int_{\partial K_R} f(z)dz = 0$.
4. Dans toute la suite, on note $U = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $g : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{(z+i)^2}$. C'est une fonction holomorphe sur U. Sa dérivée est $z \mapsto -2(z+i)^{-3}$ FINIR. Résultat : $\pi/2$
5. FINIR

Correction de l'exercice 4. Notons $U = \mathbb{C}$, connexe.

D'après l'énoncé, pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f(it) = \sin(t)^2 = \left(\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2$. Autrement dit, pour tout $z \in i\mathbb{R}$, on a $f(z) = \left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{2i}\right)^2 = -\sinh(z)^2$. En introduisant la fonction $g : U \to \mathbb{C}, z \mapsto -\sinh(z)^2$, les fonctions f et g sont analytiques, égales sur la partie $i\mathbb{R}$ qui admet des points d'accumulation dans U, par exemple l'origine. En effet, la suite i/n converge vers zéro lorsque $n \to +\infty$. D'après le théorème de prolongement analytique, f et g sont égales sur U tout entier, c'est-à-dire sur $\mathbb{C}$. En particulier, $f(1) = g(1) = -\sinh(1)^2 = -\dfrac{e^2 - 2 + e^{-2}}{4} = \dfrac{1-\cosh(2)}{2}$.

Correction de l'exercice 5. image non dense puis Liouville comme dans l'exo 1 du TD. FINIR.