Compléments : représentation intégrale des coefficients des séries entières

À ce stade du cours, nous n'avons pas encore la (vraie) formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes et contours quelconques, mais nous avons démontré les formules intégrales pour les coefficients des séries entières : si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon $> r$ et γ_r est le lacet $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$, alors :

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz}_{\text{vocabulaire L3}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)e^{-int}\,dt}_{\text{forme paramétrée, vocabulaire L2}}$$

(Remarque : pour $n=0$, la formule donne $a_0 = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right)dt$. Cette formule est appelée « formule de la moyenne » : la valeur de f en zéro est égale à la moyenne des valeurs de f sur un cercle centré en zéro.)

Ces formules suffisent déjà à établir un grand nombre de résultats sur les séries entières. On en redémontrera la plupart dans un cadre plus large, mais il est instructif de s'y frotter dès maintenant avec un bagage réduit. Cela devrait également améliorer votre compréhension des prochains cours.

Dans cette feuille, on appelle *fonction entière* la fonction somme d'une série entière de rayon infini.

Exercice 1. [Liouville pour les séries entières] Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante. La conclusion est-elle encore vérifiée si l'on suppose seulement que f est bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. [Applications de Liouville] Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que f est à valeurs dans un demi-plan de $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{H}$, le demi-plan supérieur). Montrer que f est constante. Même question si on suppose que f est à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, plus généralement le plan privé de n'importe quelle demi-droite, ou encore [1] dans le plan échancré $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Montrer que l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4. [Croissance polynomiale en l'infini] Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière et $d \in \mathbb{N}$. On suppose que $|f(z)|$ est en $O\left(|z|^d\right)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, autrement dit [2] qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A|z|^d + B$.

1. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.
2. Montrer que si $B = 0$, alors f est soit identiquement nulle, soit un monôme de degré d.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f(z)| \leq |z|^2$. Montrer que f est nulle.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|f(z)| \leq e^{\mathrm{Ré}(z)}$. Montrer que f est de la forme $z \mapsto Ce^z$, pour une certaine constante C.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|zf(z) - \sin(z)| \leq 1 + |z|^{4/3}$. Montrer que f est de la forme $z \mapsto \frac{\sin z}{z} + K$, avec $K \in \mathbb{C}$. (Note : on peut même montrer que $K \leq \frac{4}{3^{3/4}}$.)

1. Même idée mais plus difficile car le biholomorphisme n'a pas été vu. Se renseigner sur la transformation de Joukovski.
2. Sous-exercice : démontrer ceci.

Exercice 8. Soit f une fonction entière. On dit qu'elle est de *type exponentiel* s'il existe $C>0$ tel que $f(z)=O\left((e^{C|z|}\right)$ lorsque $|z|\to+\infty$. Dans ce cas, le *type* de f est la borne inférieure σ de tous les tels C.

1. Soit $f=\sum a_n z^n$ une fonction entière de type exponentiel strictement inférieur à C. Montrer qu'il existe $M>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\forall r>0,|a_n|r^n\le Me^{Cr}$. En choisissant un rayon r convenablement (en fonction de n), en déduire que $a_n=O\left(\left(\frac{Ce}{n}\right)^n\right)$.
2. Réciproquement, soit $C\ge0$ et $f=\sum a_n z^n$ une fonction entière avec $a_n=O\left(\left(\frac{Ce}{n}\right)^n\right)$. Montrer que f est de rayon infini, de type exponentiel $\sigma\le C$.
3. Montrer que $\sum_{n\ge2}\frac{z^n}{(n\ln n)^n}$ est de type exponentiel. Quel est son type σ ?
4. Montrer que si $f=\sum a_n z^n$ est de type exponentiel, alors son type est $\sigma=\frac{1}{e}\limsup n|a_n|^{1/n}$.

Exercice 9. [Croissance au bord du disque] Soit $\sum_{n\ge0}a_n z^n$ une série entière de rayon 1 et f sa somme sur $\mathbb{D}$.

1. On suppose que pour tout z dans le disque, $|f(z)|\le\frac{1}{1-|z|}$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,|a_n|\le e(n+1)$ en appliquant la formule intégrale sur des cercles de rayons r_n convenablement choisis.
2. Montrer que si l'on a seulement $|f(z)|=O\left(\frac{1}{1-r}\right)$ au voisinage du bord du disque, alors $a_n|=O(n)$.
3. Montrer plus généralement que si la croissance de $|f|$ au bord du disque est en $O\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right)$, alors $a_n=O\left(n^\alpha\right)$.

Exercice 10. [Formule de Cauchy pour les séries entières] Soit $\sum_{n\ge0}a_n z^n$ une série entière de rayon $>r$. Montrer que si $|z|<r$, on a $f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(re^{it}\right)}{re^{it}-z}re^{it}dt$.

Exercice 11. [Algèbre du disque] On appelle *algèbre du disque* et on note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui sont développables en série entière sur le disque ouvert $\mathbb{D}$.

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre intègre.
2. Soit $f\in\mathscr{A}$. Montrer que la formule de Cauchy reste valide en intégrant sur le bord du disque :
$$\forall z\in\mathbb{D},\quad f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(e^{it}\right)}{e^{it}-z}e^{it}dt$$
3. On suppose que $f\in\mathscr{A}$ est nulle sur $\mathbb{S}^1$, le cercle unité. Montrer que $f\equiv0$.
4. Montrer que la conclusion reste vraie si l'on suppose seulement que f est nulle sur un arc de cercle et non pas sur tout le cercle.
5. Soit $f\in\mathscr{A}$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur le disque unité fermé.

Exercice 12.
1. Soit $f\in\mathscr{A}$ (voir exercice précédent). Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^2dt$.
2. On suppose maintenant seulement que $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ est la somme d'une série entière de rayon ≥1, et que f est bornée sur $\mathbb{D}$. Montrer que $(a_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 13. [Vers Borel-Carathéodory] Soit f la somme d'une série entière de rayon $>r$, et soient u et v ses parties réelle et imaginaire.

1. Montrer que u détermine les coefficients pour $n\ge1$:
$$\forall n\ge1,a_n=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}u\left(re^{it}\right)e^{-int}dt$$
2. Supposons $f(0)\in\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut reconstruire f dans $\mathbb{D}(0,r)$ à partir des valeurs de u sur le cercle de rayon r à l'aide de la formule :
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(re^{it}\right)\frac{r+ze^{-it}}{r-ze^{-it}}dt$$