# Compléments : (autres) déterminations du logarithme

## Détermination principale

On a vu en cours la détermination principale du logarithme complexe :

$$\mathrm{Log}_0 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, z \mapsto \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_0(z),$$

où $\mathrm{Arg}_0$ est la fonction qui à un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}_-$ associe son unique argument dans $]\pi, \pi[$.

On a vu en cours plusieurs formules pour représenter les fonctions $\mathrm{Arg}_0$ et $\mathrm{Log}_0$. Par exemple, sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ré}(z) > 0\}$, la fonction $\mathrm{Arg}_0$ est simplement $x + iy \mapsto \arctan(y/x)$.

Remarque : si on regarde uniquement l'axe réel, cette fonction « coïncide » avec le logarithme népérien au sens généralisé suivant : sur $\mathbb{R}_-$, les fonctions ne sont pas définies, et sur $\mathbb{R}_+^*$, les deux fonctions sont définies et sont égales.

(S'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut noter cette fonction simplement Log, à condition de toujours l'appeler « détermination principale du logarithme complexe », et non simplement « logarithme complexe ». Cependant dans la suite on notera systématiquement $\mathrm{Log}_0$, précisément parce qu'on introduira d'autres déterminations et qu'il y aura donc ambiguïté.)

La détermination principale du log vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \exp(\mathrm{Log}_0(z)) = z.$$

(Attention la composition dans l'autre sens n'est pas toujours bien définie !)

À l'aide de cette détermination principale du logarithme, on peut définir par exemple la fonction

$$R : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}_0(z)\right).$$

On l'appelle la détermination principale de la racine carrée (la notation « $R$ » n'est pas standard). Cette fonction vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, R(z)^2 = z.$$

**Exercice 1.** [Attention !] Trouver $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ pour lesquels $R(ab)$ n'est pas définie, puis d'autres valeurs pour lesquelles $R(ab)$ est définie mais diffère de $R(a)R(b)$.

On peut de même définir des déterminations principales de la racine cubique, quatrième etc, toujours sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Et on peut même définir la détermination principale de l'élévation à l'exposant $\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque :

$$E_\alpha : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(\alpha\,\mathrm{Log}_0(z)).$$

**Attention !** Même si vous pouvez croiser dans certains ouvrages les notations $\sqrt{z}$, $z^{\frac{1}{2}}$ ou $z^\alpha$, ceci est déconseillé car on ne voit plus la détermination dans la notation. Dans les copies, ces notations ne seront **pas acceptées**, à part Arg et Log qui sont tolérées. Nommez les fonctions d'une autre façon, comme dans cette feuille.

Bilan : vous ne pouvez toujours PAS écrire $\sqrt{-1}$, ni $i^i$.

**Exercice 2.** Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbb{H}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = g^2$.

**Exercice 3.** Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbb{H}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = e^g$.

Dans la suite, on définit d'autres déterminations du logarithme complexe.

## Déterminations non principales

Pour tout $\phi \in \mathbb{R}$, on note $\Omega_\phi$ l'ouvert $\mathbb{C} \setminus e^{i\phi}\mathbb{R}_-$. Notons que $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, et que $\Omega_\phi = \Omega_{\phi+2\pi}$.

**Attention :** le nombre $\phi$ qui apparaît donc dans la notation n'est donc pas l'angle de la « coupure », mais l'angle correspondant aux points opposés.

Si $\phi \in \mathbb{R}$ est fixé, on note $\operatorname{Arg}_\phi$ la fonction qui à un nombre complexe $z \in \Omega_\phi$ associe son unique argument appartenant à $]\phi - \pi, \phi + \pi[$. Par exemple, $\operatorname{Arg}_{\pi/2}(e^{-3i\pi/4}) = \dfrac{5\pi}{4}$ et $\operatorname{Arg}_{3\pi}(e^{-3i\pi/4}) = \dfrac{9\pi}{4}$. La fonction $\operatorname{Arg}_\phi$ est continue sur $\Omega_\phi$ mais ne peut PAS s'étendre en une fonction continue sur $\mathbb{C}^*$.

**Attention :** vous avez peut-être vu des notations un peu différentes en TD, ou bien les années précédentes (typiquement en L1 où l'on a tendance à ramener les arguments dans $[0, 2\pi[$).

**Attention :** même si les ouverts $\Omega_\phi$ peuvent être identiques pour certaines valeurs de $\phi$, les fonctions $\operatorname{Arg}_\phi$, elles, sont toutes différentes.

Toujours à $\phi \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la détermination non principale suivante du logarithme :

$$\operatorname{Log}_\phi : \Omega_\phi \to \mathbb{C}, z \mapsto \ln|z| + i \operatorname{Arg}_\phi(z).$$

Cette fonction vérifie :

$$\forall z \in \Omega_\phi, \exp(\operatorname{Log}_\phi(z)) = z.$$

Cette propriété montre que $\operatorname{Log}_\phi$ est dérivable au sens complexe sur $\Omega_\phi$ et que sa dérivée est $z \mapsto 1/z$.

À l'aide de ces déterminations (non principales) du log, on peut définir de nouvelles déterminations de la racine carrée, ou des exposants complexes, par exemple

$$R_\phi : \Omega - \phi \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}_\phi(z)\right)$$

**Exercice 4.** Avec les notations précédentes, quelle est l'image de $R_{-\pi/2}$ ? Calculer $R_{-\pi/2}(-1+i)$, $R_{\pi/2}(-1+i)$ et $R_{3\pi/2}(-1+i)$.

**Exercice 5.** Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, à valeurs dans $i\mathbb{H} = \{iz, z \in \mathbb{H}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Ré}(z) < 0\}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = g^2$.

**Exercice 6.** Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > \text{Ré}(z)\}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = e^g$.