L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre I :
Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Rappels sur les nombres complexes

Nous commençons par quelques rappels sur les nombres complexes et sur la géométrie du plan complexe.

Définition 1.1: Le *corps des nombres complexes* est le corps $(\mathbb{C},+,\cdot)$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des points de la forme

$$x+iy \quad \text{avec} \quad x,y\in\mathbb{R}$$

et ou la somme et le produit de deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \\ z_1\cdot z_2 &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2). \end{aligned}$$

Remarque 1.2: Vérifier que ces opérations induisent une structure de corps sur $\mathbb{C}$ n'est pas difficile. Observons que l'inverse d'un nombre complexe non-nul $z = x + iy$ est donné par

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y2} = \frac{x}{x^2+y2} + \frac{-y}{x^2+y2}i.$$

Les notations suivantes sont standards.

Définition 1.3: Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On note

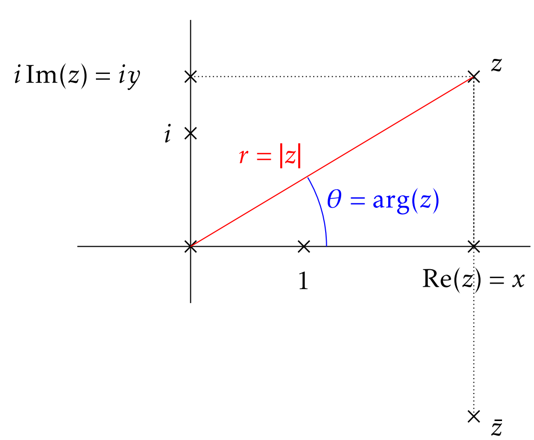
1. $\mathrm{Re}(z) := x$ la *partie réelle* de z,
2. $\mathrm{Im}(z) := y$ la *partie imaginaire* de z,
3. $\bar{z} := x - iy$ le *conjugué* de z,
4. $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ le *module* de z.

De plus, z peut s'écrire sous la forme (dite *notation exponentielle* ou *polaire*)

$$z = re^{i\theta} := r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z|$ est où $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que θ est un *argument* de z.

Géométriquement, on peut représenter les points de $\mathbb{C}$ dans un plan que l'on appelle le *plan complexe* (aussi appelé *plan d'Argand*), de la façon suivante :



Remarque 1.4: Observons que l'argument n'est défini qu'à 2π près. C'est à dire que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z, alors un réel $\phi \in \mathbb{R}$ est un argument de z si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi = \theta + 2k\pi$.

Voici quelques propriétés à connaitre (et à savoir démontrer).

Proposition 1.5: *Soit $z, w \in \mathbb{C}$. On a*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
2. $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$,
3. $\overline{(\overline{z})} = z$,
4. $|z|^2 = z\overline{z}$,
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
6. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,
7. $-|z| \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$,
8. $-|z| \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$.

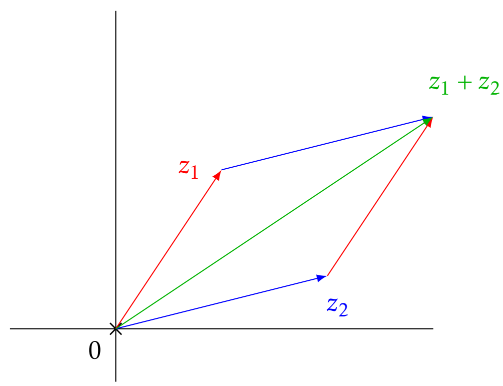
De plus, si $z = re^{i\theta}$ et $w = \rho e^{i\phi}$, alors,

$$zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}.$$

En particulier,

$$|zw| = |z||w| \quad \text{et} \quad \theta + \phi \quad \text{est un argument de } zw.$$

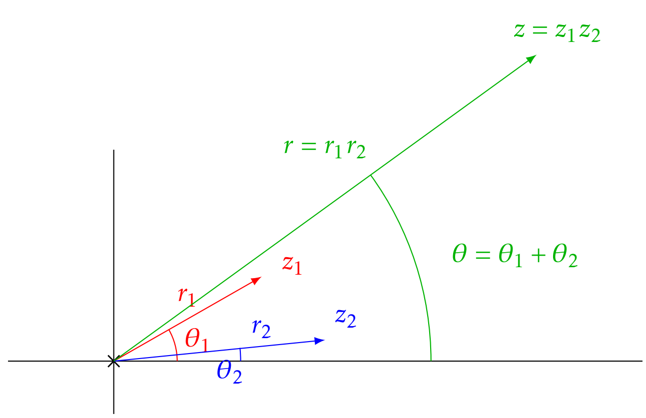
Il est important de comprendre l'interpretation géométrique des opérations algébriques : L'addition se comprend simplement comme l'addition dans un espace vectoriel, c'est la relation Chalses.



La géométrie de la multiplication se comprend en utilisant la forme exponentielle. Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ alors,

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} =: re^{i\theta},$$

c'est à dire que l'on multiplie les modules et que l'on additionne les arguments (modulo 2π).



L'application module

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

définie une norme sur $\mathbb{C}$ (c'est en fait la norme euclidienne standard si on identifie le plan complexe à $\mathbb{R}^2$). On peut donc munir $\mathbb{C}$ de la topologie induit par la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$. Dans ce cours, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la *boule ouverte de centre z et de rayon r* sera noté

$$B(z,r) := \{w \in \mathbb{C}\ ;\ |z-w| < r\}.$$

2 Fonctions complexes

2.1 Exemples

Dans ce cours on s'intéressera principalement à l'étude de fonctions

$$f : U \to \mathbb{C}$$

où $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert. On dira que f est une fonction d'une variable complexe, ou plus simplement une fonction complexe. Toute fonction de ce type peut s'écrire sous la forme $f = u + iv$ où $u = \mathrm{Re}(f) : U \to \mathbb{R}$ et $v = \mathrm{Im}(f) : U \to \mathbb{R}$. C'est à dire

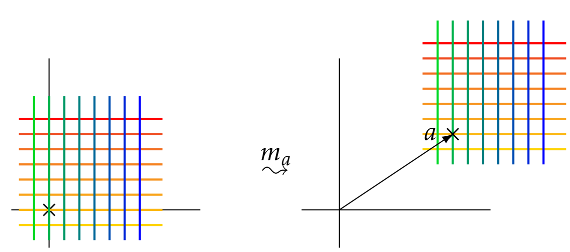
$$u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) \quad \text{et} \quad v(z) = \mathrm{Im}(f(z)), \ \forall z \in U.$$

Donc sous l'identification $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, les fonctions d'une variable complexe correspondent juste à des fonctions en deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Néanmoins, ce point de vu a ses limites car il ne prend pas en compte la structure multiplicative sur les nombres complexes qui sera pourtant fondamentale ici.

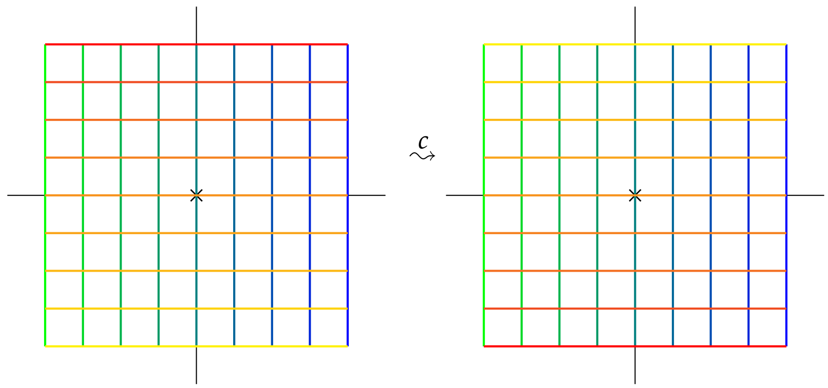
Il est difficile de se representer graphiquement une fonction complexe en se représentant le graphe de cette fonction car ce graphe se situe naturellement dans un espace de dimension réelle 4. On peut néanmoins se représenter une fonction complexe en regardant l'image sous cette fonction de différents sous-ensembles de U, par exemple un quadrillage, comme nous le verrons ci-dessous dans les exemples. Commençons par introduire certaines fonctions complexes que nous utiliserons souvent.

Exemple 2.1: Voici les exemples les plus simples

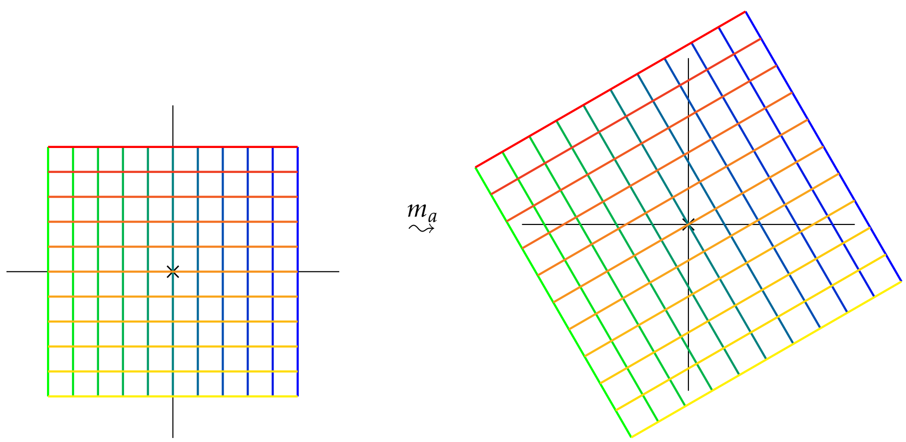
1. Si $a \in \mathbb{C}$ la fonction constante $z \mapsto a$ définie sur $\mathbb{C}$
2. La fonction identité $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z) = z$.
3. Les fonctions Re, Im et $|\cdot|$.
4. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ la fonction $t_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $t_a(z) = z + a$. Géométriquement, c'est une translation de vecteur a.



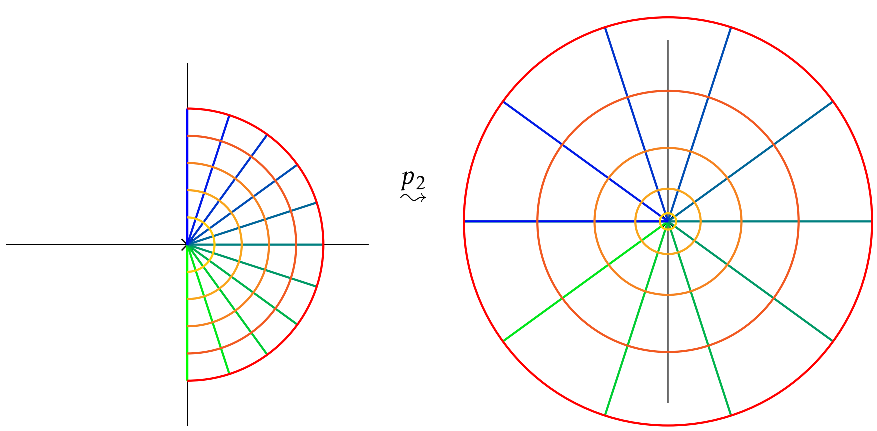
Exemple 2.2: La fonction conjugaison complexe, $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $c(z) = \overline{z}$. Géométriquement c'est une symétrie par rapport à l'axe $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



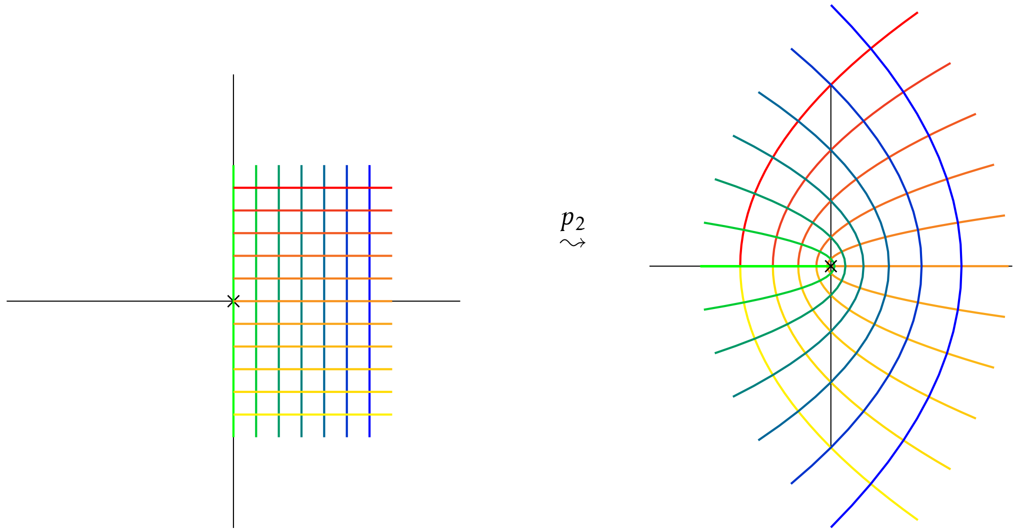
Exemple 2.3: Pour tout $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ l'application $m_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $m_a(z) = az$. Géométriquement, c'est une rotation d'angle θ composée avec une homothétie de rapport r



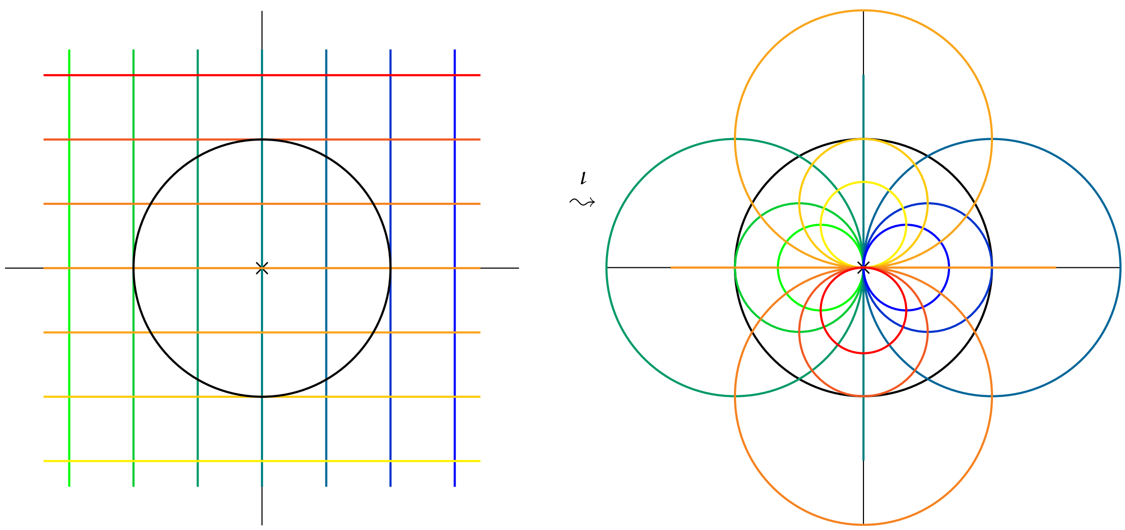
Exemple 2.4: La fonction "puissance n": $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$. Géométriquement, par exemple dans le cas $n = 2$, on peut la représenter de la façon suivante:



On peut aussi représenter les fonctions puissances en coordonnées cartésiennes, mais c'est en général moins lisible...



Exemple 2.5: La fonction inverse, $\iota : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} : z \mapsto z^{-1}$. La géométrie de cette fonction est étudiée dans l'exercice 23.



Exemple 2.6: Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C}$ définie par

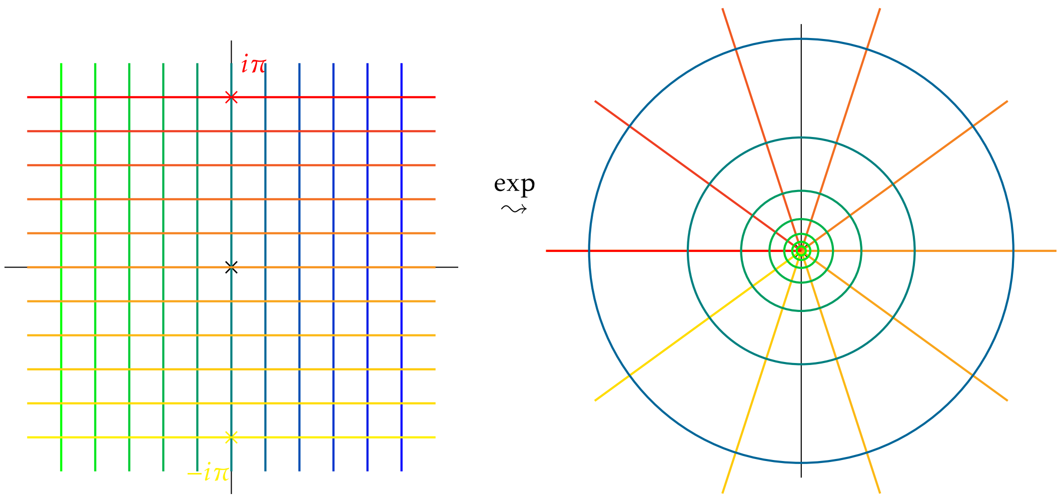
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Pour le cas $c = 0$ on utilise ici la convention $\frac{-d}{0} = \infty$ de sorte que $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} = \mathbb{C}$. Cette fonction est appelée *homographie* ou *transformation de Mobius*. Ces transformations ont la propriété remarquable d'envoyer les cercles et les droites sur des cercles ou des droites (voir l'exercice 24). Pour des illustrations, nous renvoyons à la très belle vidéo "Mobius transformations revealed" accessible sur Youtube (qui dure moins de 3 minutes).

Exemple 2.7: La fonction exponentielle: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie de la façon suivante :

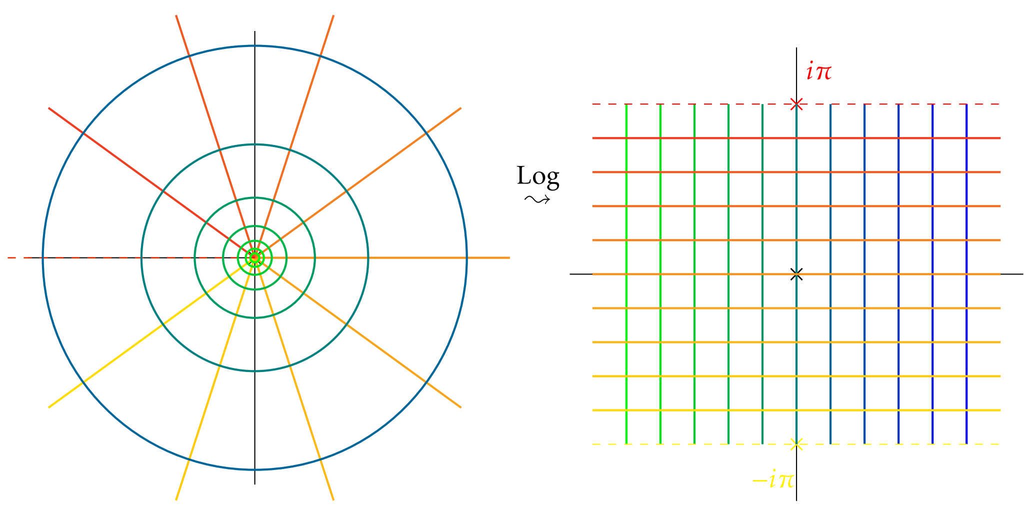
$$\exp(z) := e^z := e^x(\cos y + i \sin y) \ \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Cette définition et cohérente avec la formule de Moivre et les propriétés usuelles de l'exponentielle réelle. Nous étudierons cette fonction de façon plus précise par la suite. Pour l'instant, contentons-nous d'en donner une representation géométrique.



Exemple 2.8: La définition du logarithme complexe est plus délicate, et nous verrons plus tard qu'il existe une infinité de choix possibles pour définir le logarithme complexe. Pour l'instant, nous ne définissons que l'une de ces possibilités, la *détermination principale du logarithme*, $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathrm{Log}(z) = \log r + i\theta \ \ \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ \text{ où } \ \theta \in]-\pi, \pi[.$$



Attention, cette fonction ne vérifie pas toutes les propriétés que l'on souhaiterait. par exemple, on n'a pas toujours

$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w,$$

comme on le verra dans l'exercice 21.

2.2 Limite et continuité

Comme pour les fonctions réelles, on a des notions de limite et de continuité. La définition réelle se transpose verbatim dans le cadre complexe. Cela correspond exactement aux notions de limites et de continuité pour les fonctions en plusieurs variables (identifiant $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ et les fonctions d'une variable complexe à des fonctions en deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$). Pour cette raison, nous ne donnons pas las preuves des énoncés de cette section.

Définition 2.9: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in \overline{U}$ et soit $w \in \mathbb{C}$. On dit que $f(z)$ *tend vers* w *quand* z *tend vers* z_0 (que l'on note $f(z) \to w$ quand $z \to z_0$) si, pour tout voisinage ouvert Ω de w il existe un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $f(V \cap (U \setminus \{z_0\})) \subset \Omega$. On dit alors que w est *la limite de* $f(z)$ *quand* z *tend vers* z_0 et on note :

$$w = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

On a les caractérisations suivantes de limites.

Proposition 2.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in \overline{U}$ et soit $w \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f(z) \to w$ quand $z \to z_0$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in U \setminus \{z_0\}$,*
$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - w| < \varepsilon.$$
3. *Pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de U convergent vers z_0, la suite $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w.*

Le calcul de limite avec les fonctions complexes est formellement identique au calcul de limite dans le cadre des fonctions réelles.

Proposition 2.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in \overline{U}$. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions et soit $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que $f(z)$ tend vers a et $g(z)$ tend vers b quand z tend vers z_0 alors :*

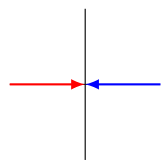
1. *$(f + g)(z) \to a + b$ quand $z \to z_0$,*
2. *$(fg)(z) \to ab$ quand $z \to z_0$.*
3. *De plus, si $b \neq 0$ alors $\frac{f}{g}(z) \to \frac{a}{b}$ quand $z \to z_0$. Ici $\frac{f}{g}$ est définie sur $U \setminus \{z \in U; g(z) = 0\}$.*

Proposition 2.12: *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts soit $f : U \to \mathbb{C}$ et soit $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions telles que $f(U) \subset V$. Soit $z_0 \in \overline{U}, w_0 \in \overline{V}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Supposons que $f(z) \to w_0$ quand $z \to z_0$ et que $g(w) \to \ell$ quand $w \to w_0$, alors $(g \circ f)(z) \to \ell$ quand $z \to z_0$.*

Exemple 2.13: La fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ n'admet pas de limite quand $z \to 0$. En effet :

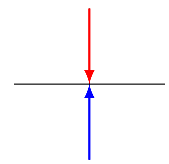
Si on approche 0 de façon "horizontale".C'est à dire $z = x \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x) = \frac{\bar{x}}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$



Si on approche 0 de façon "verticale". C'est à dire $z = iy \in \mathbb{R}$, alors

$$f(s) = \frac{\overline{iy}}{iy} = \frac{-iy}{iy} = -1 \neq 1.$$



La fonction f *n'admet donc pas de limite* en 0.

Définition 2.14: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.

1. Soit $z \in U$. On dit que f est *continue en* z si pour tout voisinage Ω de $f(z)$, il existe un voisinage de $V \subset U$ de z tel que
$$f(V) \subset \Omega.$$
2. On dit que f est *continue sur* U si f est continue en tout point de U.

Proposition 2.15: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $z \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en z.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $w \in U$, $|z - w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.*
3. *Pour toute suite de nombre complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de U, si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z, alors $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z)$.*
4. *$\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues.*

La propriété suivante est souvent utilisée comme définition.

Proposition 2.16: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. La fonction f est continue si et seulement si pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de U.*

Observons que la continuité est stable par les opérations usuelles sur les fonctions:

Proposition 2.17: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions continues.*

1. *Les fonctions $f + g$ et fg sont continues.*
2. *La fonction $\frac{f}{g}$ définie sur $V := U \setminus \{z \in U \; ; \; g(z) = 0\}$ est une fonction continue.*

Proposition 2.18: *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soient $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions continues. Supposons que $f(U) \subset V$. Alors la fonction $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ est continue.*

3 Fonctions holomorphes

3.1 Définition et exemples

Comme $\mathbb{C}$ est un corps muni d'une topologie, on peut recopier la définition de fonction dérivable connue dans le cadre réel.

Définition 3.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $z_0 \in U$. On dit que f est $\mathbb{C}$-*dérivable en* z_0 si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Si cette limite existe, on la note $f'(z_0)$ et on l'appelle *dérivée de* f *en* z_0.

Remarque 3.2:

1. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z_0 \in U$ alors f est continue en z_0.

2. Comme dans le cas réel, on peut observer que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0, si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(z) \to 0$ quand $z \to z_0$, telles que pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$ on a

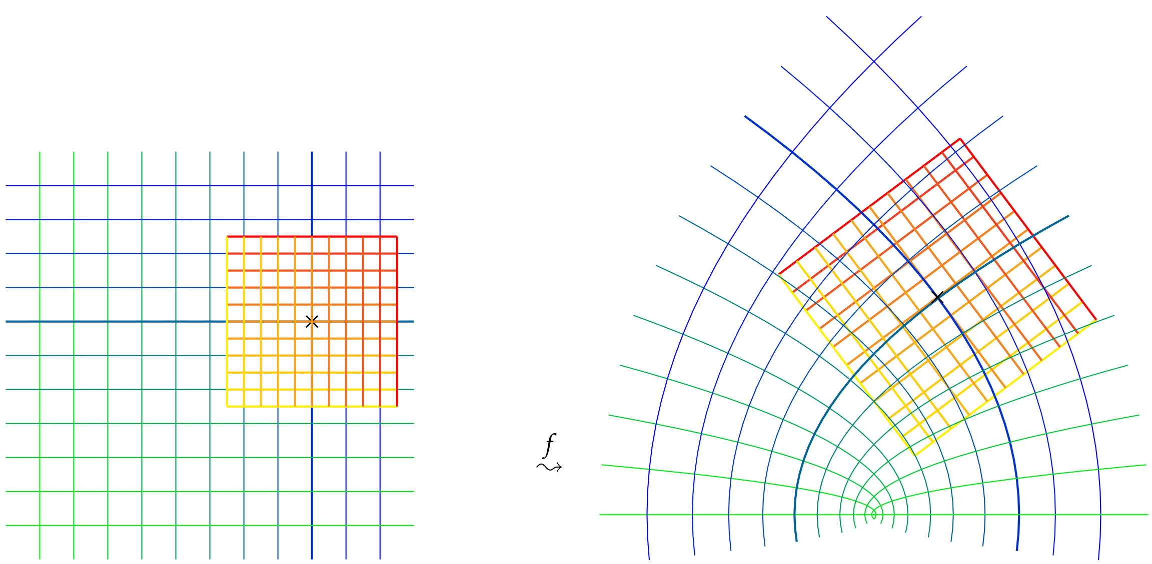
$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda h + \varepsilon(z_0 + h)h.$$

Dans ce cas, on a $\lambda = f'(z_0)$. En effet, si on a une telle relation, on obtient que f est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 en divisant cette relation par h et en faisant tendre $h \to 0$. Réciproquement, si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, il suffit de poser $\lambda = f'(z_0)$ et

$$\varepsilon(z_0 + h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Géométriquement cela veut dire que l'approximation d'ordre 1 de f en z_0 est la fonction

$$z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$



Définition 3.3: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *holomorphe* (ou *holomorphe sur* U), si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. Si tel est le cas, la fonction $f' : U \to \mathbb{C}$ est appelée *dérivée de* f.

Remarque 3.4:

1. L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est noté $\mathscr{O}(U)$.
2. Même si la définition est formellement la même que celle de la dérivée dans le cas réel, on verra que la théorie des fonctions holomorphes est très différente de la théorie des fonctions dérivables réelles.
3. Une fonction holomorphe sur U est continue sur U
4. D'après la remarque précédente, une fonction f est holomorphe sur U si et seulement si pour tout $z_0 \in U$ il existe $\varepsilon_{z_0} : U \to \mathbb{C}$ continue et $\lambda_{z_0} \in \mathbb{C}$ tels que $\varepsilon_{z_0}(z_0) = 0$ et que
$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\lambda_{z_0} + (z - z_0)\varepsilon_{z_0}(z).$$
Dans ce cas, on a $\lambda_{z_0} = f'(z_0)$.

Exemple 3.5: Les fonctions t_a, m_a sont holomorphes pour tout $a \in \mathbb{C}$. En effet pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$
$$\lim_{h\to 0} \frac{m_a(z_0 + h) - m_a(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z_0 + h + a - (z_0 + a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$
Donc m_a est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $m_a'(z_0) = 1$. Et par ailleurs
$$\lim_{h\to 0} \frac{t_a(z_0 + h) - t_a(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(z_0 + h) - az_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$
Donc t_a est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $t_a'(z_0) = a$.

Exemple 3.6: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions p_n sont holomorphes. En effet, on a
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k h^{n-k} - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(nz^{n-1} + h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-2} \right) = nz^{n-1}.\end{aligned}$$

Il est important de noter que beaucoup de fonctions naturelles ne sont pas holomorphes.

Exemple 3.7: La fonction $c : z \mapsto \bar{z}$ *n'est pas holomorphe*. Plus précisément, cette fonction n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ on a
$$\frac{c(z_0 + h) - c(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h},$$
mais nous avons vu que ceci n'admet pas de limite quand $h \to 0$.

3.2 Quelques propriétés

Proposition 3.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Alors :*

1. *la fonction $f+g$ est holomorphe et $(f+g)' = f' + g'$,*
2. *la fonction fg est holomorphe et*
$$(fg)' = f'g + g'f \quad \text{(formule de Leibniz).}$$
3. *Si de plus g ne s'annule jamais, alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle dans le cadre réel.

1. Montrons que $f+g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. Soit $z_0 \in U$. On a
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(z+h)-(f+g)(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)+g(z+h)-f(z)-g(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = f'(z_0)+g'(z_0).\end{aligned}$$
On a donc montré que $f+g$ est holomorphe sur U et que $(f+g)' = f'+g'$.

2. Montrons que fg est $\mathbb{C}$-dérivable sur U. Soit $z_0 \in U$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$ on a
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(z_0+h)-(fg)(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0+h)g(z_0+h)-f(z_0+h)g(z)+f(z_0+h)g(z)-f(z)g(z)}{h} \\ &= f(z_0+h)\left(\frac{g(z_0+h)-g(z)}{h}\right)+g(z)\left(\frac{f(z_0+h)-f(z)}{h}\right)\end{aligned}$$
Donc quand h tend vers 0, cette expression tend vers $(f'g+g'f)(z_0)$. Ceci montre que fg est holomorphe sur U de dérivé $f'g+g'f$.

3. Au vu du point précédent, il suffit de montrer que la fonction $\frac{1}{g}$ est holomorphe et que $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$. Soit $z_0 \in U$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0+h \in U$ on a
$$\frac{\frac{1}{g}(z_0+h)-\frac{1}{g}(z_0)}{h} = \frac{g(z_0)-g(z_0+h)}{hg(z_0)g(z_0+h)} = -\frac{g(z_0+h)-g(z_0)}{h}\frac{1}{g(z_0)g(z_0+h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$
Ceci montre l'holomorphie sur U et l'expression souhaitée de la dérivée.

□

Cette propriété nous permet déjà de construire des exemples de fonctions holomorphes

Exemple 3.9: Les fonctions polynomiales de la formes $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ sont holomorphes et
$$f'(z) = na_n z^{n-1} + \cdots + 2a_2 z + a_1.$$

Exemple 3.10: Les fractions rationelles (quotients de deux polynômes) sont holomorphes sur leur ensemble de définition. Par exemple, la fonction $f : z \mapsto \frac{z-1}{z+i}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et l'on a

$$f'(z) = \frac{1 \times (z+i) - 1 \times (z-1)}{(z+i)^2} = \frac{1+i}{(z+i)^2}.$$

Théorème 3.11 ("Chain rule"): *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes telles que $f(U) \subset V$. Alors la fonction $g \circ f$ est holomorphe et pour tout $z \in U$ on a*

$$(g \circ f)'(z) = f'(z) \cdot (g' \circ f)(z)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et notons $w_0 = f(z_0) \in V$. Il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(z) \to 0$ quand $z \to z_0$ et telle que pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$ on a

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h.$$

De même, il existe une fonction $\delta : V \to \mathbb{C}$ telle que $\delta(w) \to 0$ quand $w \to w_0$ et telle que pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $w_0 + t \in U$ on a

$$g(w_0 + t) = g(w_0) + g'(z_0)t + \delta(w_0 + t)t.$$

On a donc, pour tout h tel que $z_0 + h \in U$

$$\begin{aligned} g \circ f(z_0 + h) &= g\big(f(z_0 + h)\big) = g\big(f(z_0) + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h\big) = g\big(w_0 + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h\big) \\ &= g(w_0) + g'(w_0)\big(f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h\big) + \delta\big(f(z_0 + h)\big)\big(f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h\big) \\ &= g(w_0) + hg'(w_0)\Big(f'(z_0) + \varepsilon(z_0 + h) + \delta\big(f(z_0 + h)\big)\big(f'(z_0) + \varepsilon(z_0 + h)\big)\Big). \end{aligned}$$

En divisant cette relation par h et en faisant tendre $h \to 0$, on obtient bien que $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et que

$$(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0)g'(w_0) = f'(z_0) \cdot g' \circ f(z_0).$$

□

4 Les équations de Cauchy-Riemann

Nous allons maintenant voir ce qui distingue, du point de vu du calcul différentiel, les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables des fonctions différentiables au sens réel. Afin de fixer les notations, on introduit la définition suivante.

Définition 4.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, on voit U comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on note $f_{\mathbb{R}} = (u, v) : U \to \mathbb{R}^2$ où $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + iy))$ et $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + iy))$ pour tout $(x, y) \in U$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ et posons $a = (x_0, y_0)$. On dit que f est *différentiable en z_0* (ou *différentiable au sens réel en z_0*) si $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en a. Si tel est le cas, on pose

$$df_a := df_{\mathbb{R},a}.$$

On dit que f est *différentiable sur U* si $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable sur U.

Considérons un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Par définition, cela veut dire que pour tout l'on a

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h \tag{1}$$

pour une fonction ε qui tend vers 0 quand $h \to 0$ et pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$.

On prend les notations de la définition 4.1. On note $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Pour tout $h = s + it$, la relation (1) s'écrit alors

$$f_{\mathbb{R}}(x_0 + s, y_0 + t) \quad = \quad f_{\mathbb{R}}(x_0, y_0) + \Big(\alpha s - \beta t, \alpha t + \beta s\Big) + |h|\varepsilon_2(x_0 + s, y_0 + t)$$

où, pour $h = s + it$, on note

$$\varepsilon_2(x_0 + s, y_0 + t) = \left(\mathrm{Re}\left(\frac{h}{|h|}\varepsilon(z_0 + h)\right), \mathrm{Im}\left(\frac{h}{|h|}\varepsilon(z_0 + h)\right)\right).$$

Comme $\varepsilon_2(s,t) \to 0$ quand $(s,t) \to 0$, cela implique que la fonction $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable au sens réel en (x_0, y_0), donc par définition, f est différentiable en z_0 et que de plus, la différentielle de f en z_0 est l'application

$$df_a : (s,t) \mapsto \Big(\alpha s - \beta t, \beta s + \alpha t\Big).$$

En particulier, les dérivées partielles de u et v existent au point a, et la matrice jacobienne de f (ou pour être précis de $f_{\mathbb{R}}$) est

$$J_a(f_{\mathbb{R}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

En particulier, nous obtenons les relations suivantes, dites équations de Cauchy-Riemann :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(a) = \alpha \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a) & = & -\dfrac{\partial u}{\partial y}(a) = \beta. \end{array} \right.$$

Avant de continuer, nous allons décrire une autre façon, un peu plus naive, de déduire les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions holomorphes. Avec les notations ci-dessus. Par définition, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \alpha + i\beta.$$

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe quand on fait tendre h vers 0 horizontalement ou verticalement. Quand $h = s \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta &= \lim_{s \to 0} \frac{f(z_0 + s) - f(z_0)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{u(x_0 + s, y_0) + iv(x_0 + s, y_0) - u(z_0) - iv(z_0)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \left(\frac{u(x_0 + s, y_0) - u(z_0)}{s} + i \frac{v(x_0 + s, y_0) - v(z_0)}{s} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

On a donc $f'(z_0) = \alpha + i\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$. Quand $h = it \in i\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta &= \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t) - u(z_0) - iv(z_0)}{it} \\ &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + t) - u(z_0)}{it} + \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(z_0)}{t} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

On a donc $f'(z_0) = \alpha + i\beta = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$. Et on retrouve les équations de Cauchy-Riemann.

Le résultat suivant montre que ces conditions caractérisent la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

Théorème 4.2 (Cauchy-Riemann): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On note $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ pour tout $x+iy \in U$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ et posons $a = (x_0, y_0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.*
2. *$f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en a et vérifie les équations de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) &= \dfrac{\partial v}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a) &= -\dfrac{\partial u}{\partial y}(a). \end{cases}$$

Si ces assertions sont vérifiées alors on a de plus

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Démonstration. L'implication $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ a déjà été démontrée, il s'agit donc de montrer que $\boxed{2. \Rightarrow 1.}$. Comme $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en a, il existe une fonction $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) : U \to \mathbb{R}^2$ qui tend vers 0 quand (x,y) tend vers x_0, y_0 telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(x_0+s, y_0+t) \in U$ on a

$$\Big(u(x_0+s, y_0+t), v(x_0+s, y_0+t)\Big) = \Big(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)\Big) + df_{\mathbb{R},a}(s,t) + \|(s,t)\|\varepsilon(x_0+s, y_0+s). \tag{2}$$

Les résultats de la section 6 et les équations de Cauchy-Riemann impliquent que le point $df_a(s,t)$ de $\mathbb{R}^2$ correspond au point du plan complexe donné par

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)(s+it).$$

On peut donc réécrire la relation (2) sous la forme

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)h + |h|\Big(\varepsilon_1(s,t) + i\varepsilon_2(s,t)\Big)$$

où l'on a noté $h = s+it$. Donc en réordonnant les termes et en divisant par h on trouve

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right) = \frac{|h|}{h}\Big(\varepsilon_1(s,t) + i\varepsilon_2(s,t)\Big) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit donc que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et que de plus $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(a)$. □

Il est essentiel de bien retenir le corollaire suivant :

Corollaire 4.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On note $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ pour tout $x+iy \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

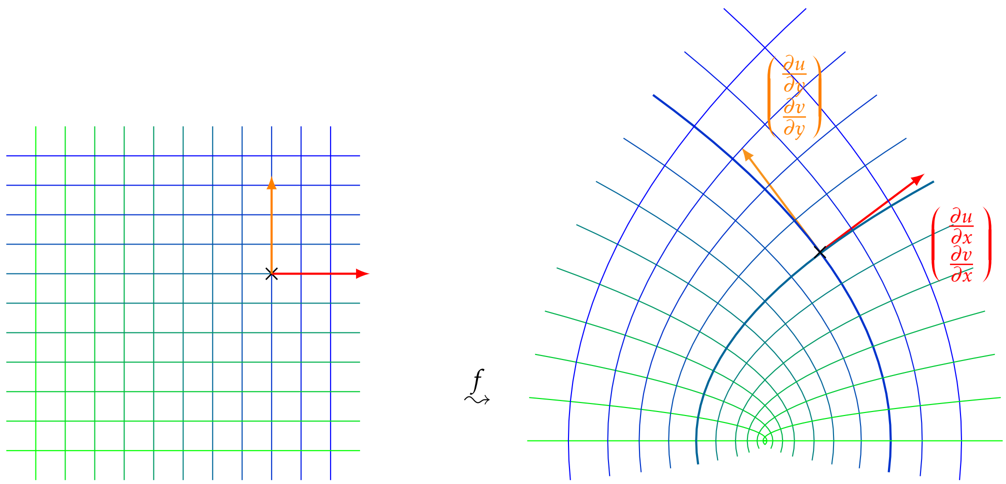
1. *f est holomorphe sur U.*
2. *f est différentiable sur U et vérifie les équations de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} &= \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} &= -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Géométriquement, les équations de Cauchy-Riemann traduisent le fait que $df_{(x_0,y_0)}(0,1)$ est l'image de $df_{(x_0,y_0)}(1,0)$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. En effet, elles peuvent se réécrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Cela veut exactement dire que les images des "vecteurs tangents" $(1,0)$ et $(0,1)$ en z_0 forment un angle droit (préservant l'orientation), et sont de même norme.



Remarque 4.4: On peut en fait montrer que les applications holomorphes sont *conformes* en dehors du lieu d'annulation de la dérivée. C'est à dire que les applications holomorphes préservent les angles orientés (tout du moins en tout point où la dérivée est non-nulle).

Une autre façon d'interpreter les équations de Cauchy-Riemann, est la suivante. Si une fonction $f = u + iv$ est holomorphe, alors les courbes de niveau de u et de v sont orthogonales. C'est à dire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, les courbes

$$u^{-1}(\{a\}) \quad \text{et} \quad v^{-1}(\{b\})$$

sont orthogonales là où elles s'intersectent, en dehors des points critiques (rappelons que les points critiques sont les points où la différentielle s'annule). Comme cette interpretation n'est pas crucial dans ce cours et que nous la donnons surtout à titre culturel, nous ne la démontrerons pas ici et nous la laissons comme un petit exercice de calcul différentiel.

Néanmoins, mous allons l'illustrer cela dans le cas de la fonction $f : z \mapsto z^2$. On a $f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$ on a donc

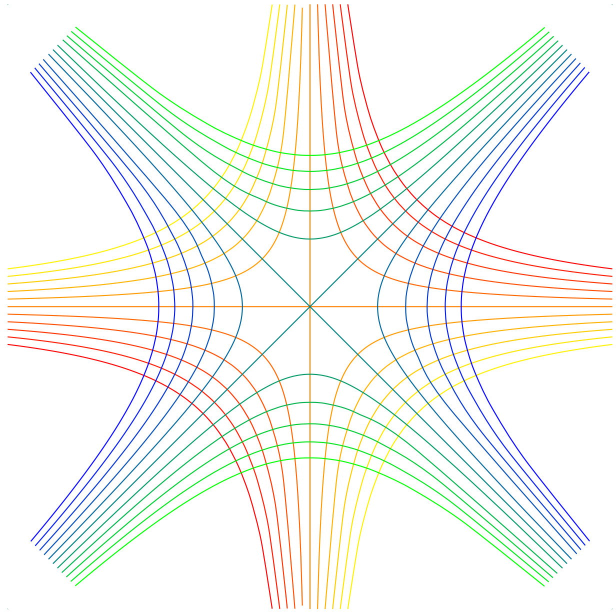
$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v(x,y) = 2xy.$$

Nous représentons ci-dessous les courbes de niveau de u suivantes :

$u^{-1}(\{0.8\})$, $u^{-1}(\{0.6\})$, $u^{-1}(\{0.4\})$, $u^{-1}(\{0.2\})$, $u^{-1}(\{0\})$, $u^{-1}(\{-0.2\})$, $u^{-1}(\{-0.4\})$, $u^{-1}(\{-0.6\})$, $u^{-1}(\{-0.8\})$, $u^{-1}(\{-1\})$

et les courbes de niveau de v suivantes $v^{-1}(\{1\})$, $v^{-1}(\{0.8\})$, $v^{-1}(\{0.6\})$, $v^{-1}(\{0.4\})$, $v^{-1}(\{0.2\})$, $v^{-1}(\{0\})$, $v^{-1}(\{-0.2\})$, $v^{-1}(\{-0.4\})$, $v^{-1}(\{-0.6\})$, $v^{-1}(\{-0.8\})$, $v^{-1}(\{-1\})$ et $u^{-1}(\{1\})$.

Toutes les intersections forment des angles droits, sauf au point 0 qui est l'unique point critique de la fonction $z \mapsto z^2$.



Les équations de Cauchy-Riemann peuvent par exemple être utilisées pour montrer que l'exponentielle définie dans l'exemple 2.7 est une fonction holomorphe. Dans l'exemple 2.7, l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a été définie de la façon suivante

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \ \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Notons,

$$u(x,y) = e^x \cos y = \mathrm{Re}(\exp(x+iy)) \quad \text{et} \quad v(x,y) = e^x \sin y = \mathrm{Im}(\exp(x+iy)) \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

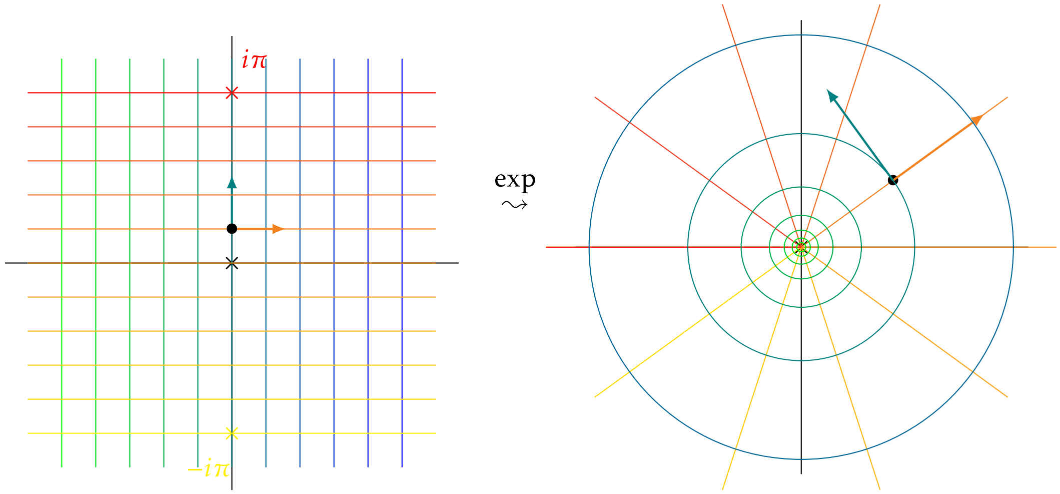
La fonction (u,v) est donc $\mathscr{C}^1$, en particulier, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les équations de Cauchy-Riemann impliquent donc que exp est une fonction holomorphe. De plus, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on a

$$\exp'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp(z).$$

Illustrons dans ce cas particulier l'interprétation géométrique des équations de Cauchy-Riemann donnée ci-dessus.



Nous terminons cette section par le résultat suivant.

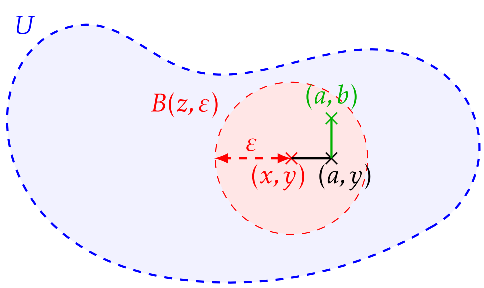
Corollaire 4.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. On note $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ comme ci dessus. D'après le théorème 4.2 les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont nulles. On en déduit alors, d'après l'hypothèse de connexité que u et v sont constantes et donc que f est constante. Pour voir cela, on fixe $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ et on pose $\alpha = u(x_0, y_0)$. On considère alors

$$V := \{z = x+iy \in U \; ; \; u(x,y) = \alpha\}.$$

Comme V est continue, $V = u^{-1}(\{\alpha\})$ est un fermé. Comme $u(x_0,y_0) = \alpha$, V est non-vide. Il reste à montrer que V est ouvert. Soit $z \in V$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon) \subset U$:

alors $B(z,\varepsilon) \subset V$. En effet, notons $z = x+iy$, que nous identifions avec le point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $w = a+ib \in B(z,\varepsilon)$, que nous identifions avec le point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.



Comme $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ sur U, nous en déduisons que la fonction u est constante sur le segment allant de (x,y) à (a,y). En particulier $u(a,y) = u(x,y) = \alpha$. De même, en utilisant l'hypothèse $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ sur U, nous en déduisons que u est constante sur le segment allant de (a,y) à (a,b). En particulier En particulier $u(a,b) = u(a,y) = \alpha$. En particulier, $w \in V$.

Par connexité de U, cela implique que $V = U$ et donc que u est constante sur U. On montre de même que v est constante sur U, d'où le résultat. $\square$

5 Notations de Wirtinger

Nous introduisons ici les notations de Wirtinger, qui nous permettrons de faire du calcul différentiel avec les fonctions complexes de façon plus naturelle. Tout d'abord nous étendons la notion de dérivée partielle à des fonctions complexes.

Définition 5.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Notons $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ pour tout $z = x + iy \in U$ avec $u, v : U \to \mathbb{R}$. On définit les dérivées partielles de f par rapport à x et à y comme étant les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Pour être tout à fait précis, cela veut dire que pout tout $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, on a

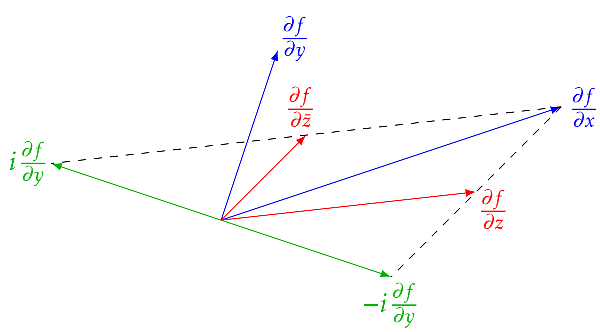
$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

On peut maintenant introduire les notations de Wirtinger

Définition 5.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. On définit les fonctions $\frac{\partial f}{\partial z} : U \to \mathbb{C}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} : U \to \mathbb{C}$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Géométriquement, si on identifie $\frac{\partial f}{\partial x}$ avec le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ avec le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$, alors on peut représenter ces vecteurs de la façon suivante :



Exemple 5.3: On a par exemple $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$ et $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$. En effet :

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x} - i\frac{\partial x}{\partial y} - i^2\frac{\partial y}{\partial y}\right) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x} + i\frac{\partial x}{\partial y} + i^2\frac{\partial y}{\partial y}\right) = 0.$$

De même, on montre que $\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$ et $\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$.

On a alors la reformulation suivante theorem 4.2.

Proposition 5.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Alors f est holomorphe si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Si tel est le cas, on a

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Démonstration. Notons $f = u + iv$ comme précédemment. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.2. □

Remarque 5.5: Soulignons que $\frac{\partial f}{\partial z}$ existe pour toute fonction différentiable, alors que f' n'est définie que pour les fonctions holomorphes.

Les dérivées partielles par rapport à z et $\overline{z}$ vérifient les propriétés usuelles du calcul différentiel.

Proposition 5.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions différentiables. Alors*

1. $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial z}$ *et* $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}$
2. $\dfrac{\partial fg}{\partial z} = g\dfrac{\partial f}{\partial z} + f\dfrac{\partial g}{\partial z}$ *et* $\dfrac{\partial fg}{\partial \overline{z}} = g\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} + f\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}$
3. *Si de plus g ne s'annule jamais, alors*

$$\frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial z} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}g - f\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}g - f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\right)$$

Exemple 5.7: Grace à la règle de Leibnitz, une récurrence immédiate montre que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial z^n\overline{z}^m}{\partial z} = nz^{n-1}\overline{z}^m \quad \text{et} \quad \frac{\partial z^n\overline{z}^m}{\partial \overline{z}} = mz^n\overline{z}^{m-1}.$$

On a aussi la version suivante de la règle de dérivation des fonctions composées.

Proposition 5.8: *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions différentiables telles que $f(U) \subset V$. On a alors*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g \circ f}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\\
\frac{\partial g \circ f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons nous ramener à la définition de $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ puis utiliser la règle de différentiation des fonctions composées pour les fonctions réelles. On note $z = x + iy$ et $w = s + it$. On note aussi $f(z) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ et $g(w) = \big(\varphi(s,t), \psi(s,t)\big)$, où u, v, φ, ψ sont à valeurs réelles. Observons déjà que

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g\circ f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}$$

En effet, vu comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, $g\circ f$ s'identifie à $\Theta := (\varphi,\psi)\circ(u,v)$, et par définition $\frac{\partial g\circ f}{\partial x}$ s'identifie à $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$. Il suffit donc de calculer la matrice jacobienne de Θ. Par la règle de différentiation des fonctions composées, on trouve

$$J(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial s} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi}{\partial s} & \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En particulier,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s} + i\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + i\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pour démontrer la formule annoncée pour $\frac{\partial g\circ f}{\partial y}$, il suffit de faire le même calcul avec $\frac{\partial\Theta}{\partial y}$, la seconde colonne de la jacobienne.

On a donc

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g\circ f}{\partial x} - i\frac{\partial g\circ f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial z}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial s} - i\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial s} + i\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial g}{\partial t}\left(-\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial z}.\end{aligned}$$

Ceci prouve la première relation. La seconde se prouve de façon complètement analogue. □

Pour conclure, voici une autre version qui nous sera utile.

Proposition 5.9: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application différentiable et soit $\varphi : I \to U$ une application différentiable. Alors $f\circ\varphi$ est différentiable et*

$$\frac{d f\circ\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{d\overline{\varphi}}{dt}.$$

Ici, étant donné une application différentiable, $\Psi : I \to \mathbb{C}$, la dérivée $\Psi' : I \to \mathbb{C}$ est l'application

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Psi' = (\mathrm{Re}\,\Psi)' + i(\mathrm{Im}\,\Psi)'.$$

Démonstration. La fonction $f \circ \varphi$ est différentiable comme composée de fonctions différentiables. Notons $f = u + iv$ comme précédemment. Notons $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\varphi)$ de sorte que $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ que l'on peut identifier avec la fonction $(\varphi_1, \varphi_2) : I \to \mathbb{R}^2$. par définition, on a

$$(f \circ \varphi)' = (u \circ (\varphi_1, \varphi_2))' + (v \circ (\varphi_1, \varphi_2))'.$$

En vu de formule (3) rappelée ci-dessous, on a

$$(u \circ (\varphi_1, \varphi_2))' = \varphi_1' \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad (v \circ (\varphi_1, \varphi_2))' = \varphi_1' \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi_2' \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Donc

$$(f \circ \varphi)' = \varphi_1' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varphi_2' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \varphi_1' \frac{\partial f}{\partial x} + i \varphi_2' \frac{\partial f}{\partial y}$$

Et l'on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\overline{\varphi}}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\varphi_1' + i\varphi_2') + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) (\varphi_1' - i\varphi_2') \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi_2' + i \frac{\partial f}{\partial x} \varphi_2' - i \frac{\partial f}{\partial y} \varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial x} \varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi_2' - i \frac{\partial f}{\partial x} \varphi_2' + i \frac{\partial f}{\partial y} \varphi_1' \right) \\
&= \varphi_1' \frac{\partial f}{\partial x} + i \varphi_2' \frac{\partial f}{\partial y} = (f \circ \varphi)'.
\end{aligned}$$

□

Cette proposition implique, au vu de la reformulation des équations de Cauchy-Riemann donnée par la proposition 5.4, que l'on a :

Corollaire 5.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval et soit $\varphi : I \to U$ une application différentiable. Alors, $f \circ \varphi$ est différentiable, et pour tout $t \in I$,*

$$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t)).$$

Exemple 5.11: Cette proposition, appliquée à $f(z) = e^z$ et $\varphi(t) = it$, montre que l'on a

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it}.$$

6 Appendice : Rappels de calcul différentiel

Afin de fixer les notations, nous faisons un bref rappel sur le calcul différentiel. Nous renvoyons à l'UE 401 : *Analyse 3*, pour une présentation complète.

Définition 6.1: Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Soit $a \in U$. On dit que f est *différentiable* en a si il existe une application linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|) \quad \text{quand} \quad \|h\| \to 0.$$

Si une telle application df_a existe, alors elle est unique et elle est appelée la *différentielle de f en a*.

Remarque 6.2:

1. La norme utilisé ici est la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$: si $h = (h_1, \dots, h_n)$ on note $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$.
2. Nous utilisons ici la notation o de Landau. Par définition, étant donné une fonction $g : U \to \mathbb{R}^m$, on note $g(h) = o(\|h\|)$ si il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^m$ telle que $g(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ et telle que $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. En particulier, on peut réécrire la définition de differentiabilité de f en a comme suit : il existe une application linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $\lim_{h\to 0} \varepsilon(a+h) = 0$ telles que
$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(a+h).$$

Définition 6.3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout $a \in U$, on dit *f est dérivable par rapport à la i-ème variable en a* si la fonction $g : t \mapsto f(a + te_i)$ est dérivable en 0. On pose alors
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\text{déf}}{=} g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}.$$
Si f est dérivable par rapport à la i-ème variable en tout point de U on dit que *f est dérivable par rapport à la i-ème variable sur U*. Si la fonction f est dérivable par rapport à la i-ème variable en $a \in U$ (resp. sur U) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on dit que *les dérivées partielles de f existe au point a (resp. sur U)*.

Dans le cas où $n = 2$, on notera en générale les coordonnées $x = x_1$ et $y = x_2$ et dénotera les dérivées partielles par
$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$
Si dans cette définition, on écrit $f = (f_1, \dots, f_m)$ avec $f_j : U \to \mathbb{R}$, alors f est dérivable par rapport à la i-ème variable en a si et seulement si pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, la fonction f_j est dérivable par rapport à la i-ème variable en a, et on a alors
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right).$$

Si f est dérivable par rapport à chacune des variables $x_1, \dots, x_n$ en un point a alors on définit la matrice jacobienne de f comme étant la matrice
$$J_a(f) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$
Il y a quelques subtilités pour faire le lien entre différentielle et dérivées partielles. En effet les dérivées partielles peuvent exister en un point a que la fonction ne soit différentiable. Par contre si f est différentiable en a, alors f est dérivable par rapport à chacune des variable $x_1, \dots, x_n$ et de plus, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,
$$df_a(h) = J_a(f) \cdot h.$$
Ici on voit h comme un vecteur *colonne*.

La notion suivante nous donne une réciproque.

Définition 6.4: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Notons $(f_1, \dots, f_m)$ les composantes de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$. On dit que f est *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* U (ou plus simplement, f est $\mathscr{C}^1$), si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, la dérivée partielle $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existe sur U et est *continue* sur U.

On a la proposition suivante.

Proposition 6.5: *Avec les notations si dessus, si f est $\mathscr{C}^1$ sur U alors f et differentiable sur U.*

De façon plus générale, on peut définir par récurrence la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^r$ pour tout $r \geqslant 0$.

Définition 6.6: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction.

1. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si f est continue.
2. Pour tout $r \geqslant 1$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^r$ si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et et de classe $\mathscr{C}^{r-1}$ sur U.
3. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^r$ pour tout $r \geqslant 0$.

Remarque 6.7: Les sommes, produits et composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^r$.

La propriété suivante est fondamentale.

Proposition 6.8: *Soit $n, m, \ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $g : V \to \mathbb{R}^\ell$ des applications telles que $f(U) \subseteq V$. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

De façon équivalente,

$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g) J_a(f).$$

Dans ce cours, nous utiliserons essentiellement les cas où $n \in \{1, 2\}$ et $m \in \{1, 2\}$. Illustrons donc les notions précédentes dans ce cadre. Pour simplifier, on suppose que $U = \mathbb{R}^n$ ici, mais les formules sont identiques pour un ouvert U quelconque.

Si $n = 1$ et $m = 1$. C'est le cadre de l'analyse réelle en une variable. On dénote la variable sur $\mathbb{R}$ par t (au lieu de x_1). Alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable si et seulement si f est dérivable si et seulement si la dérivée partielle par rapport à t existe. Dans ce cas on a

$$f' = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Du plus pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que f est différentiable en a, et pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$df_a(h) = f'(a)h.$$

Notons aussi que dans ce cadre la définition de fonction de classe $\mathscr{C}^r$ coincide avec la définition vu en première année de licence.

Si $n = 1$ et $m = 2$. On dénote la variable sur $\mathbb{R}$ par t (au lieu de x_1). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Notons $f = (f_1, f_2)$. Alors f est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables en a. Dans ce cas, on a

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad df_a(h) = \left(f_1'(a)h, f_2'(a)h\right) \ \forall h \in \mathbb{R}.$$

Si $n = 2$ et $m = 1$. On dénote les variables sur $\mathbb{R}^2$ par x et y (au lieu de x_1 et x_2). Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est differentiable en $a \in \mathbb{R}^2$ on a

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \quad \text{et} \quad df_a(s,t) = s\frac{\partial f}{\partial x}(a) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a) \ \ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $n = 2$ et $m = 1$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction et notons $f = (u, v)$. On dénote les variables sur $\mathbb{R}^2$ par x et y (au lieu de x_1 et x_2). Si f est differentiable en $a \in \mathbb{R}^2$ on a

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad df_a(s,t) = \left(s\frac{\partial u}{\partial x}(a) + t\frac{\partial u}{\partial y}(a), s\frac{\partial v}{\partial x}(a) + t\frac{\partial v}{\partial y}(a)\right) \ \ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour finir, nous donnons ici deux cas particuliers (essentiels et à connaitre absolument) de la formule de différentiation des fonctions composées.

Soit $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables. Alors,

$$(g \circ f)' = f_1' \frac{\partial g}{\partial x} + f_2' \frac{\partial g}{\partial y}. \tag{3}$$

Soit $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g \circ f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial g \circ f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé les coordonnées (x, y) sur le $\mathbb{R}^2$ qui est le domaine de définition de f (donc f est une fonction en (x, y)) et les coordonnées (s, t) sur le $\mathbb{R}^2$ qui est le domaine de définition de g (de sorte que g est une fonction en (s, t)).

7 Exercices

7.1 Exercices de révision sur les nombres complexes

Exercice 1. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x+iy$.

a. $(1+i)^2$

b. $(2+3i)(1-i)$

c. $(1+2i)i(1-i)$

d. $(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)$

e. $\dfrac{1}{(2-i)}$

f. $(-2+i)(1-i)^2$

g. $\dfrac{2+i}{2-i}$

h. $\dfrac{4-3i}{i}$

i. $\dfrac{-1+i}{3-i}$

j. $\dfrac{i(1-i)}{2+i}$.

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que z est un nombre réel si et seulement si $z=\bar{z}$.
2. Montrer que z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $z=-\bar{z}$.

Exercice 3. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire.

a. -5 b. $3i$ c. $1+i$ d. $1-i\sqrt{2}$ e. $-\sqrt{3}+i$.

Exercice 4. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x+iy$.

a. $e^{3i\pi}$ b. $e^{-i\pi}$ c. $5e^{i\pi/4}$ d. $e^{7i\pi/6}$ e. $\pi e^{-5i\pi/4}$.

Exercice 5. Soit $\theta \in \mathbb{C}$. Calculer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $(1+i)^n+(1-i)^n$.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

1. $(1+i)z+3i=-3-i$.
2. $iz+\bar{z}=2$.
3. $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.
4. $z^2+(1-i)z+i=0$.
5. $z^2+(3+2i)+1+3i=0$.
6. $2z^2-(6+i)z+1-3i=0$.
7. $\bar{z}^2+(-3+i)\bar{z}+2-2i=0$.

Exercice 8. Dessiner les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants, et déterminer ceux qui sont des ouverts de $\mathbb{C}$.

a. $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \;/\; \mathrm{Im}(z) > 0\}$

b. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$

c. $\mathbb{H} \cup \{z \in \mathbb{C} \;/\; \mathrm{Re}(z) = 1\}$

d. $\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| > 1\}$

e. $\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| \neq 1\}$

f. $\{z \in \mathbb{C} \;/\; 1 < |z| \leqslant 2\}$

g. $\{z \in \mathbb{C} \;/\; 1 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 2\}$

h. $\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z+1-i| < 3\}$

i. $\{z \in \mathbb{C} \;/\; |z+1-i| \leqslant 2 \text{ et } \mathrm{Re}(z) \neq 0\}$

Exercice 9. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| = 1$ et que $|z_2| \neq 1$. Montrer que

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{1-\bar{z}_2 z_1}\right| = 1.$$

7.2 Exercices d'entrainement

Exercice 10. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'ensemble de définition de f puis déterminer les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ (à valeurs réelles) telles que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

a. $f(z) = z^2 - 1$ b. $f(z) = \dfrac{z}{z-i}$ c. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 2}$ d. $f(z) = \dfrac{z^2}{z\bar{z} - 1}$.

Exercice 11. Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{C}^*$, admettent-elles des limites en 0 ?

a. $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$ b. $f(z) = \dfrac{z^2}{|z|}$.

Exercice 12. On considère la fonction $f(z) = \frac{z}{1-z}$.

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Existe-t-il $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = -1$?
3. Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = w$. Combien y-a-t-il de solutions ?
4. Représenter l'ensemble $S = \left\{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\right\}$. Déterminer et dessiner son image par f.
5. Représenter l'ensemble $U = \left\{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}\right\}$. Déterminer et dessiner son image par f.

Exercice 13. On note $S = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$. Pour chacune de fonctions f suivantes, déterminer l'image de S par f.

a. $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$ b. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2}$

Exercice 14. Determiner les zéros des fonctions suivantes :

a. $f_1(z) = 1 + e^z$ b. $f_2(z) = 1 + i - e^z$.

Exercice 15. Parmi les fonctions suivantes, déterminer lesquelles sont holomorphes sur leur ensemble de définition. Pour chacune des fonctions holomorphes, calculer la dérivé.

a. $f(z) = |z|^2$ b. $f(z) = z^3 - z^2$ c. $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ d. $f(z) = \dfrac{z}{1-\bar{z}}$ e. $f(z) = e^{iz^2 - z}$.

Exercice 16. On considère la fonction $f(z) = \sqrt{|xy|}$ où $z = x + iy$.

1. Montrer que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en 0.
2. Montrer que f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en 0.
3. Est-ce en contradiction avec le théorème 4.2 ? Pourquoi ?

Exercice 17. On considère la fonction $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ où $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble où f est $\mathbb{C}$-dérivable.

Exercice 18. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On note $f = u + iv$ où $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est constante,
2. u est constante,
3. v est constante,
4. $|f|$ est constante

Exercice 19. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Montrer que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \quad \text{et} \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

Exercice 20. Pour chacune des fonctions f, déterminer l'ensemble de définition de f et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

a. $f(z) = z^2\overline{z}$ b. $f(z) = e^{\overline{z}}$ c. $f(z) = \dfrac{\overline{z}-i}{z^2+iz-2}$ d. $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$

Exercice 21. On considère la détermination principale du logarithme Log introduite dans l'exemple 2.8.

1. Montrer que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tels que $z_1 z_2 \notin \mathbb{R}_-$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) + 2i\pi n.$$
2. Trouver des nombres complexes $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tels que $z_1 z_2 \notin \mathbb{R}_-$ vérifiant
$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

7.3 Exercices d'approfondissement

Exercice 22. Soit $a, c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $ac - |b|^2 < 0$.

1. Montrer que l'ensemble $E := \left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \; az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0 \right\}$ est une droite si $a = 0$ et un cercle si $a \neq 0$.
2. Montrer que toute droite et tout cercle peut s'écrire sous cette forme.
3. Que ce passe-t-il si $ac - |b|^2 \geqslant 0$?

Exercice 23 (Géométrie de l'inversion)**.** L'objectif de cet exercice est de comprendre géométriquement l'application $\iota : z \mapsto \frac{1}{z}$. On considère l'application

$$\overline{\iota} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\overline{\iota} = \iota \circ c = c \circ \iota$ où c est la conjugaison complexe.
2. (Rappel de géométrie élémentaire). Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Soit C l'unique cercle de diamètre $|a-b|$ passant par a est b, c'est à dire que C est le cercle de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, montrer que $z \in C$ si est seulement si l'angle non-orienté $\widehat{azb}$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que les triangles $z_1 z_2 0$ et $\overline{\iota}(z_1)\overline{\iota}(z_1)0$ sont semblables. Faire un dessin.
4. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $|\overline{\iota}(z_1) - \overline{\iota}(z_2)| = \dfrac{|z_1 - z_2|}{|z_1||z_2|}$.
5. (a) Soit S^1 le cercle de centre 0 et de rayon 1. Montrer que $\overline{\iota}(S^1) = S^1$.
   (b) Soit D une droite passant par 0. Montrer que $\overline{\iota}(D) = D$.

(c) Soit D une droite ne passant pas par 0. Montrer que $\bar{\iota}(D)$ est un cercle passant par 0. Faire un dessin dans les cas suivant : $S^1 \cap D = \varnothing$, $\#(S^1 \cap D) = 1$ et $\#(S^1 \cap D) = 2$.

(Indication : considérer z_0, la projection orthogonale de 0 sur D puis utiliser les questions 2 et 3)

(d) Soit C un cercle qui passe par 0. Montrer que $\bar{\iota}(C)$ est une droite ne passant pas par 0.

(e) Soit C un cercle ne passant pas par 0. Montrer que $\bar{\iota}(C)$ est un cercle ne passant pas par 0. Faire un dessin.

(f) Déduire des questions précédentes que ι envoie les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.

6. Redémontrer le résultat de la question 5f en utilisant le résultat de l'exercice 22.

7. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, déduire des questions précédentes une façon de construire $\bar{\iota}(z)$ à la règle et au compas. Puis en déduire une construction de $\iota(z)$ à la régle et au compas.

Exercice 24 (Quelques propriétés des transformations de Mobius)**.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. La transformation de Mobius associée à ces nombres est l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Si $c = 0$ on utilise la notation $\frac{-d}{c} = \infty$ de sorte que $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} = \mathbb{C}$.

1. Soit f une transformation de Mobius. Déterminer l'image de f. Montrer que f est une bijection sur son image et montrer que l'application réciproque est une transformation de Mobius que l'on déterminera.

2. Montrer que l'ensemble des transformations de Mobius muni de la composition est un groupe.

3. Soit f une transformation de Mobius. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que

$$f = t_\alpha \circ m_\gamma \circ \iota \circ t_\beta,$$

où t_α et t_β sont les translations de vecteur α et β, où m_γ est la multiplication par γ et ι est l'application d'inversion.

4. À l'aide de l'exercice 23 et de la question 3, montrer que les transformations de Mobius envoient les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.

5. Notons $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le *demi-plan de Poincaré*. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$, alors la transformation de Mobius f associée à a, b, c, d vérifie $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

6. Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}$ le *disque unité* aussi appelé *disque de Poincaré*. Soit $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la transformation de Mobius
$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$
vérifie $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

7. Montrer que la transformation de Mobius
$$\varphi(z) = i\,\frac{1 + z}{1 - z}$$
induit un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$. (Un *biholomorphisme* est une application holomorphe bijective dont l'application réciproque est holomorphe).

Exercice 25 (Cauchy Riemann en coordonnée polaires)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On pour tout $z = re^{i\theta} \in U$ note

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).$$

1. Montrer que f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2. Si tel est le cas, montrer que pour tout $z = re^{i\theta} \in U$ on a

$$f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) - i\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)\right).$$

Exercice 26 (Holomorphie de la détermination principale du logarithme)**.** À l'aide de l'exercice 25 montrer que la détermination principale du logarithme Log définie dans l'exemple 2.8 est holomorphe et que

$$\mathrm{Log}'\, z = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Exercice 27 (Laplacien et fonctions harmoniques)**.** Le Laplacien est l'opérateur

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

c'est à dire que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et pour toute fonction $f : U \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on pose

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On dit que f est harmonique si $\Delta(f) = 0$.

1. Montrer que

$$\Delta(f) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} := 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right).$$

2. Montrer que si f est holomorphe alors f est harmonique.

3. Montrer que si f est holomorphe, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont harmoniques.

4. Montrer que si f est holomorphe et ne s'annule jamais, alors $\log|f|$ est harmonique.

5. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $g : V \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique. On suppose que f est holomorphe et que $f(U) \subset V$. Montrer que $g \circ f$ est harmonique.

UE 601: Analyse complexe

Chapitre II:
Fonctions analytiques

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Définitions

1.1 Motivation

Ce chapitre recouvre en partie le cours sur les séries entières présentée dans l'UE 301 : *Analyse 2* en deuxième année de licence. Nous commençons par motiver l'utilité de l'utilisation des nombres complexes pour l'étude des séries entières par un exemple de calcul de rayon de convergence.

On considère les fonctions suivante :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

et

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{définie sur } \mathbb{R}.$$

On veut les développer en séries entières centrées en 0. Rappelons (voir lemme 8.4) que l'on a

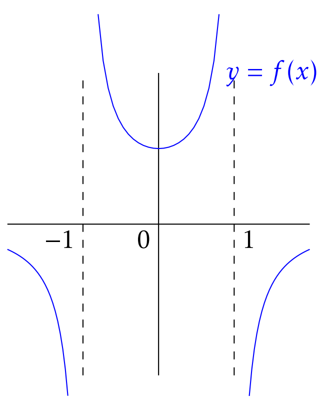
$$\frac{1}{1-\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \quad \forall \lambda \in]-1,1[.$$

Donc pour tout $x \in]-1,1[$, on a

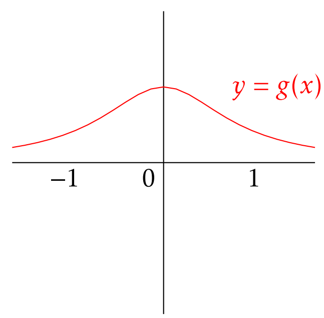
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

On voit facilement (voir l'exemple 1.5) que le rayon de convergence de ces deux séries entières est 1. On peut alors se demander si l'on peut interpréter géométriquement ce rayon de convergence.

Voici les graphes de ces fonctions :



Problème en -1 et 1.



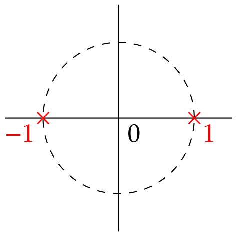
Pas de problème visible.

Dans le cas de la fonction f, on voit que la fonction “explose” en 1 et en -1. Il est donc clair que le rayon de convergence du développement en série entière de f ne peut pas être plus grand que 1, en on envie de dire que c'est 1 car il n'y a pas d'obstruction géométrique évidente nous incitant à penser que la série ne converge pas sur $]-1,1[$. Par contre, pour la fonction g, on ne voit aucun problème sur le graphe. De ce point de vu, géométriquement, on pourrait penser que le rayon de convergence est infini.

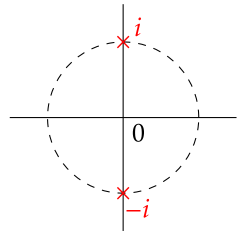
Pour voir le problème, il faut étendre ces fonctions aux nombres complexes, on a

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1-iz)(1+iz)}$$

et l'on interprète naturellement, de façon géométrique, le rayon de convergence comme étant la distance entre 0 et les "problèmes" :



Problèmes en −1 et 1.



Problèmes en $-i$ et i.

1.2 Definition et rayon de convergence

Cette section contient des rappels concernant la notion de rayon de convergence pour les séries entières.

Définition 1.1: Une *série entière* est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et z est une variable complexe.

Lemme 1.2 (Lemme d'Abel): *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ un nombre réel positif tel que la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. De plus, pour tout $0 < r' < r$ la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $B(0, r')$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|a_n| r^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$. On a alors

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n| r^n \frac{|z|^n}{r^n} \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Or la série de terme général $M\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge, car c'est une série géométrique de raison $\frac{|z|}{r} < 1$. La seconde assertion est une conséquence immédiate. □

Définition 1.3: Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Le *rayon de convergence* de f est le réel

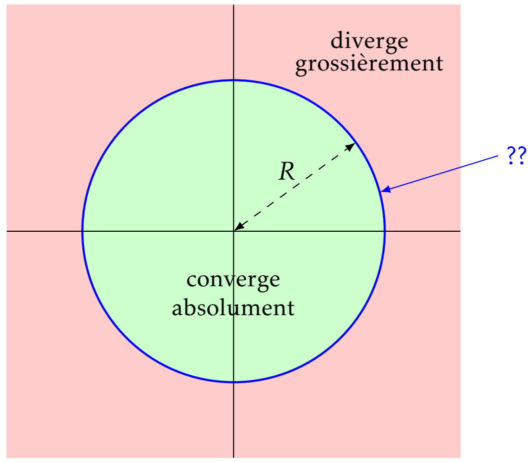
$$R \overset{\text{déf}}{=} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \text{la suite } |a_n| r^n \text{ est bornée}\}.$$

Le *disque de convergence* de f est $B(0, R)$. Le rayon de convergence est caractérisé par les conditions suivantes :

1. Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

Nous renvoyons à la section 8 pour des rappels de terminologie concernant les séries numériques.

Voici un dessin illustrant cette définition.



Remarque 1.4:

1. En général, on ne peut pas dire quel est le comportement de la série $\sum_n a_n z^n$ sur le bord du disque de convergence. (Voir les exercices 2 et 17)
2. Nous ferons souvent l'abus de langage d'utiliser le terme “la série entière f” pour désigner la fonction $z \mapsto \sum_n a_n z^n$ définie sur le disque de convergence de cette série entière.

Exemple 1.5: Étudions les séries entières : $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}$ et $f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$.

La série f_1 est la série géométrique (voir lemme 8.4). Cette série diverge grossièrement si $|z| \geqslant 1$ et converge absolument si $|z| < 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

En particulier le rayon de convergence de cette série entière est 1. La série entière f_2 peut s'étudier en posant $w = z^2$. Avec cette notation, on a $|w| < 1$ si et seulement si $|z| < 1$ et donc que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Le rayon de convergence de f_2 est donc 1 et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = f_1(w) = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-z^2}.$$

De la même manière, en posant $w = -z^2$, on montre que le rayon de convergence de f_3 vaut 1 et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| < 1$, on a

$$f_3(z) = f_1(w) = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1+z^2}.$$

1.3 Calcul du rayon de convergence

Il existe plusieurs critères pour calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Proposition 1.6 (Critère de d'Alembert): *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Si $|a_n| > 0$ pour tout n suffisamment grand et si la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existe, alors en la notant $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, le rayon de convergence de f est

$$R = \frac{1}{\ell},$$

où l'on utilise la convention $+\infty = \frac{1}{0}$ et $0 = \frac{1}{+\infty}$.

Démonstration. Observons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \ell|z|.$$

Donc si $|z| < \frac{1}{\ell}$ alors le critère de d'Alembert pour les séries numériques implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge absolument. D'autre part, si $|z| > \frac{1}{\ell}$ alors le critère de d'Alembert implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ diverge grossièrement, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. □

Exemple 1.7: Déterminons le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{n+3} z^n$.

Nous pouvons utiliser le critère de d'Alembert puisque ici $a_n = \frac{n^2+n-1}{n+3}$ est bien non-nul pour tout $n \in \mathbb{N}$. On voit alors facilement que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(n+1)^2+n+1-1\right|}{|n+1+3|} \frac{|n+3|}{\left|n^2+n-1\right|} = \frac{\left|n^2+3n+1\right|}{|n+1|} \frac{|n+3|}{\left|n^2+n-1\right|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{1} = 1$.

Remarque 1.8: Le critère de d'Alembert ne s'applique pas pour de séries entières avec une infinité de termes nuls, comme par exemple les séries entière de la forme $\sum_n a_n z^{2n}$. Dans ce genre de cas, on peut néanmoins utiliser l'astuce suivante. Supposons pour simplifier que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum_n a_n w^n$ et on tente d'appliquer le critère de d'Alembert (il n'est pas garantie que ce critère nous permette de conclure). Si le critère nous permet de déduire que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n w^n$ est R alors la définition de rayon de convergence et la substitution $w = z^2$ impliquent alors que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$.

Remarque 1.9: Une erreur qui est souvent commise pour déterminer le rayon de convergence d'une série de la forme $\sum_n a_n z^{2n}$ est de faire le "changement d'indice" $N = 2n$ et de se ramener à l'étude de la série entière $\sum_N a_{\frac{N}{2}} z^N$. Ceci ne marche pas. En effet, on peut par exemple observer pour tout $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$ on a

$$\sum_{N=0}^{+\infty} z^N = \frac{1}{1-z} \neq \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}.$$

Proposition 1.10 (Critère de Cauchy): *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Si le limite*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

existe, alors en la notant $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, le rayon de convergence de f est

$$R = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \ell|z|$. Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, c'est à dire $|z|\ell < 1$ alors le critère de Cauchy pour les séries numériques implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge absolument. D'autre part, si $|z| > \frac{1}{\ell}$ alors le critère de Cauchy implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ diverge grossièrement, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. □

Exemple 1.11: Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

Ici, on a $a_n = \frac{1}{n^n}$, donc

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{1}{n^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc le critère de Cauchy implique que le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{0} = +\infty$.

Les deux critères précédents ne marche pas toujours. De façon générale, nous avons la formule suivante.

Proposition 1.12 (Formule d'Hadamard): *Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Notons $\ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, alors le rayon de convergence de f est donné par*

$$R = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors on a $\limsup\limits_{n\to+\infty}(|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}) = |z|\ell$. Supposons que $|z| < \frac{1}{\ell}$, c'est à dire $|z|\ell < 1$. Alors il existe $|z|\ell < r < 1$. Par définition de lim sup, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} < r$. C'est à dire que $|a_n z^n| < r^n$. Comme $r < 1$, la série géométrique de raison r converge, par le critère de comparaison, cela implique que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. Supposons maintenant que $|z| > \frac{1}{\ell}$, c'est à dire que $|z|\ell > 1$. Soit $r \in]1, |z|\ell[$. Par définition de lim sup, il existe une infinité d'entiers n tels que $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > r$. Pour tout ce n on a alors $|a_n z^n| > r^n$. Comme $r > 1$, cela montre que la suite $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc, par définition, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ diverge grossièrement, et il en est donc de même pour la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. □

Notons aussi que le critère de comparaison nous donne un énoncé simple pour borner le rayon de convergence.

Proposition 1.13: *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout n à partir d'un certain rang, alors $R_1 \geqslant R_2$.*

Exemple 1.14: Le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos n)^{n!} \sin^n\left(e^{\pi n^n}\right) z^n$$

vérifie $R \geqslant 1$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|(\cos n)^{n!} \sin^n\left(e^{\pi n^n}\right)\right| \leqslant 1,$$

puisque $|\cos x| \leqslant 1$ et $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et puisque l'on sait que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ vaut 1, la propriété implique que le rayon de convergence de la série ci-dessus est plus grand que 1.

2 Opérations sur les séries entières

On peut additionner des séries entières.

Proposition 2.1: *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

La produit de Cauchy pour le produit de séries numériques implique que l'on peut aussi faire le produit de séries entières et que l'on a de plus une expression explicite de ce produit.

Proposition 2.2: *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ vérifie $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

3 Continuité

Rappelons la propriété suivante, dont en laisse la preuve en exercice de révision.

Proposition 3.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions* continues *$f_n : U \to \mathbb{C}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$, alors f est continue.*

On en déduit alors :

Proposition 3.2: *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction f est continue sur le disque de convergence $B(0, R)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $0 < r < R$, la fonction $f|_{B(0,r)}$ est continue. Cela découle immédiatement du fait que la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur $B(0,r)$ (par le lemme d'Abel). $\square$

4 Holomorphie des séries entières

Le théorème suivant généralise le théorème analogue pour les séries entières réelles vu dans le cours *Analyse 2*, et permet de construire de nombreux exemples de fonctions holomorphes.

Théorème 4.1: *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ a rayon de convergence R. De plus, la fonction $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe, et pour tout $z \in B(0,R)$ on a*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Démonstration. Pour la première assertion nous utilisons la formule d'Hadamard (et le résultat de l'exercice 6)

$$\limsup_{n\to+\infty} |na_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Montrons maintenant que f est holomorphe. Soit $z_0 \in B(0,R)$. Il s'agit d'étudier la limite de

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

quand $z \to z_0$. Soit $r < R$ tel que $|z_0| < r$. Pour tout $z \in B(0,r) \setminus \{z_0\}$. On a

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \frac{(z-z_0)}{z-z_0}(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1}) = (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1}).$$

On en déduit que

$$\left| a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} \right| \leqslant |a_n|(|z|^{n-1} + |z|^{n-2}|z_0| + \cdots + |z_0|^{n-1}) \leqslant |a_n| n (\max\{|z|, |z_0|\})^{n-1} \leqslant n|a_n| r^{n-1}.$$

Comme, $r < R$ et que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n n z^{n-1}$ est R, ceci implique que la série de fonctions (définies sur $B(0,r)$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}$$

converge normalement, donc uniformement sur $B(0,r)$. En particulier, on a

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_0^{n-1}.$$

La fonction f est donc $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_0^{n-1}$. Donc f est holomorphe sur $B(0,R)$. $\square$

Ceci implique la proposition suivante

Proposition 4.2: *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $B(0,R)$ et l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Ici, nous disons qu'une fonction est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable, si elle est holomorphe, que sa dérivée est holomorphe, que la dérivée de la dérivée est holomorphe, etc.

Démonstration. On montre par une récurrence immédiate que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}.$$

Il suffit alors d'évaluer cette égalité au point $z = 0$ pour obtenir $f^{(k)}(0) = k!a_k$. □

Cette proposition implique en particulier que les coefficients a_n d'une série entière sont uniquement déterminés par la donnée de f dans un voisinage de 0.

Corollaire 4.3: *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergences respectifs $R_1, R_2 > 0$. Si il existe $0 < \varepsilon \leqslant \min\{R_1, R_2\}$ tel que pour tout $x \in B(0,\varepsilon)$*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n,$$

alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

5 Fonctions analytiques

Dans la section précédente nous avons étudié les fonctions qui s'écrivent comme série entière centrée en 0. Par translation, on peut étudier les fonctions qui peuvent s'écrire comme série entière centrée en un autre point.

Définition 5.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $z_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *développable en série entière en z_0* si il existe une série entière $\sum a_n w^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $0 < r \leqslant R$ tel que $B(z_0, r) \subset U$ et tel que pour tout $z \in B(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Par translation, tous les résultats vus pour les fonctions développables en série entière en 0 s'étendent à ce contexte plus général. Avant d'énoncer quelques implications de cette remarque, nous introduisons la notion de fonction analytique.

Définition 5.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $z_0 \in U$ un point. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *analytique* si f est développable en série entière en tout point de U.

Remarque 5.3: Il est vrai, même si ce n'est pas clair à priori vu la définition, que les séries entières sont analytiques sur leur disque de convergence. Cela peut se montrer directement, mais il est plus élégant de le déduire des résultats que nous démontrerons dans le chapitre IV.

Exemple 5.4: Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ est analytique

En effet, fixons un point $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, et montrons que la fonction f est développable en série entière entière centrée en z_0. On pose $r_0 = |a - z_0|$. Alors, pour tout $z \in B(z_0, r_0)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - a} = \frac{1}{z_0 - a} \frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a} + 1} = \frac{1}{z_0 - a} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{a-z_0}} = \frac{1}{z_0 - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{a-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(a-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n.$$

Pour developper la fonction en série entière, nous avons utilisé de façon cruciale que $\left| \dfrac{z_0 - z}{z_0 - a} \right| < 1$ puisque $|z_0 - z| < |z_0 - a|$. Cette écriture montre donc que f est développable en série entière centrée en z_0. Comme ceci est vraie pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, cela implique que f est analytique. Observons au passage que cet exemple montre que le rayon de convergence du développement en série entière centrée en z_0 *dépend* de z_0.

Une conséquence directe de cette définition et du théoreme 4.1 est la suivante.

Théorème 5.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction* analytique. *Alors f est holomorphe sur U.*

Remarque 5.6: Nous verrons plus tard que la réciproque de ce théorème est vraie, c'est à dire que les fonctions holomorphes sont analytiques.

Notons que l'on peut être encore plus précis.

Proposition 5.7: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur U et pour tout $a \in U$, il existe un réel $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset U$, tel que le rayon de convergence de la série entière $\sum f^{(n)}(a) w^n$ soit plus grand que r_a et tel que pour tout $z \in B(a, r_a)$ on ait*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

En vu des propositions 2.1 et 2.2 on obtient le résultat suivant.

Proposition 5.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Alors $f + g$ et fg sont des fonctions analytiques sur U*

Il est vrai aussi que si une fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ ne s'annule jamais alors, la fonction $\frac{1}{f}$ est analytique. Pour montrer cela, on peut par exemple montrer que si une fonction g qui est la somme d'une série entière ne s'annulant pas en 0, alors on peut déterminer une série entière h (de rayon de convergence éventuellement plus petit) tel que $gh = 1$ (voir l'exercice 15). Une façon plus satisfaisante d'obtenir ce résultat est de le déduire de la propriété correspondantes pour les fonctions holomorphes une fois que nous aurons démontré que les fonctions holomorphes sont analytiques.

6 Principe des zéros isolés et prolongement analytique

6.1 Principe des zéros isolés

Théorème 6.1 (Principe des zéros isolés): *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B(0,R)\setminus\{0\}$ qui tend vers 0 et telle que*

$$f(z_n) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ et notons $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. On peut alors écrire

$$f(z) = z^m \sum_{n\geqslant m} a_n z^{n-m}. \tag{1}$$

On pose alors $g(z) = \sum_{n\geqslant m} a_n z^{n-m}$. C'est une série entière de rayon de convergence R et donc en particulier g est continue en 0. De plus $g(0) = a_m \neq 0$. En particulier, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in B(0,\varepsilon)$. Mais par ailleurs, par (1), on obtient que $g(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est une contradiction car $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$. □

6.2 Prolongement analytique

Comme conséquence du principe des zéros isolés, on a le résultat suivant qui montre que les fonctions analytiques sont extrêmement rigides, il suffit de les connaitre sur un ensemble très petit pour les connaitre sur tout l'ensemble de définition (tout du moins si cet ensemble est connexe).

Théorème 6.2 (Prolongement analytique): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $a \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *La fonction f est identiquement nulle sur U.*
2. *La fonction f est identiquement nulle sur un voisinage de a*
3. *Il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U qui tend vers a et telle que $f(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
4. *On a $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Les implications $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ et $\boxed{2 \Rightarrow 3}$ sont évidentes. L'implication $\boxed{3 \Rightarrow 4}$ découle du principe des zéros isolés. Il nous reste à démontrer l'implication $\boxed{4 \Rightarrow 1}$. Ici, l'hypothèse de connexité est essentielle. Notons

$$V := \left\{z \in U \,;\, f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nous allons montrer que V non-vide, fermé dans U et ouvert dans U. Comme U est connexe, on en déduit alors que $V = U$ et donc que f s'annule identiquement sur U. Notons déjà que V est non-vide par hypothèse. D'autre part, V est fermé car

$$V = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (f^{(n)})^{-1}(\{0\})$$

est une intersection de fermés car $f^{(n)}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que V est ouvert. Soit $z_0 \in V$. D'après la proposition 5.7 il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$ et tel que $f|_{B(z_0,r)}$ est identiquement nul. En particulier, $B(z_0, r) \subset V$. Ceci montre que V est ouvert. $\square$

Le terme prolongement analytique provient de l'interpretation suivante : "si une fonction analytique se prolonge, alors ce prolongement est unique". Plus précisément, on a

Corollaire 6.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Si il existe $a \in U$ et $V \subset U$ un voisinage ouvert de a tel que $f|_V = g|_V$, alors $f = g$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 6.2 à la fonction $f - g$. $\square$

7 Exponentielle, sinus et cosinus

Dans cette section, nous étendons sur le plan complexe plusieurs fonctions usuelles qui peuvent s'écrire comme série entière.

Proposition 7.1: *La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a rayon de convergence infini. De plus pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Remarque 7.2: Rappelons que nous avons défini dans la chapitre 1 la fonction exponentielle comme étant la fonction définie par

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Il est cependant usuel de définir l'exponentielle directement comme série entière.

Démonstration. Pour montrer que le rayon de convergence vaut $+\infty$ comme annoncé, il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert. Nous pouvons donc considérer la fonction f définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il s'agit de montrer que $f = \exp$. D'après la théorème 4.1, on obtient que f est holomorphe et vérifie, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z).$$

Donc nous avons $f' = f$. De plus, il est immédiat de voir que $f(0) = 1$. Rappelons aussi que nous avons montré durant chapitre 1 que $\exp' = \exp$ et que l'on a $\exp(0) = e^0 = 1$. Nous allons maintenant montrer que ceci entraine que $f = \exp$. En effet, considérons la fonction $g : z \mapsto e^{-z} f(z)$. Alors g est holomorphes comme produit de fonctions holomorphe et l'on a

$$g'(z) = -e^{-z} f(z) + e^{-z} f'(z) = -e^{-z} f(z) + e^{-z} f(z) = 0.$$

D'après ce que nous avons vu au chapitre 1, ceci entraine que g est constante. Comme de plus $g(0) = 1$, on en déduit que $g(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{e^{-z}} = \frac{1}{e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y))} = \frac{e^x}{\cos y - i\sin y} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y)}{(\cos y - i\sin y)(\cos y + i\sin y)} \\ &= \frac{e^x(\cos y + i\sin y)}{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 7.3:

1. *Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a*
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z \neq 0$ et l'on a*
$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Démonstration. Notons que nous avons déjà démontré la seconde assertion au cours de la preuve de la proposition 7.3. On pourrait démontrer la première de façon similaire en utilisant les formules trigonométriques usuelles. Ici nous choisissons de le démontrer en utilisant le produit de Cauchy. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

La seconde assertion s'en déduit en remarquant que $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. □

La fonction exponentielle permet d'étendre sur le plan complexe les fonctions cos, sin. Il suffit de poser, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De la même façon, on peut définir les fonctions trigonométriques hyperboliques.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

8 Appendice : Rappels sur les séries numériques et les séries de fonctions

Nous faisons ici quelques brefs rappels sur les séries numériques et les séries de fonctions. Comme ceci a déjà été vu dans les cours précédents, nous ne donnons presque aucune preuve.

Définition 8.1: Soit $\sum u_n$ une série de nombres complexes. On dit que cette série :

1. *converge* si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. *diverge* si elle ne converge pas.
3. *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.
4. *diverge grossièrement* si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Proposition 8.2: *Une série qui diverge grossièrement diverge.*

Démonstration. Par contraposition. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Si cette série est convergente alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$. On a alors, quand $n \to +\infty$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0.$$

□

Comme $\mathbb{C}$ est complet, le critère de convergence de Cauchy implique le

Théorème 8.3: *Une série absolument convergente est convergente.*

On aura besoin du résultat suivant concernant les séries géométriques.

Lemme 8.4: *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *Si $|\lambda| < 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n$ converge absolument et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}.$$
2. *Si $|\lambda| \geqslant 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n$ diverge grossièrement.*

Démonstration. Supposons $|\lambda| < 1$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k$. On a alors

$$S_n - \lambda S_n = 1 - \lambda^{n+1}.$$

On en déduit que $S_n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$. Comme par ailleurs $\lambda^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\lambda}$. Ce qui implique la première assertion. La deuxième assertion est immédiate puisque si $|\lambda| \geqslant 0$, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. □

Il existe différents critère pour démontrer que des séries numériques convergent. On a déjà le critère de comparaison.

Proposition 8.5: *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *des séries à termes* réels positifs. *Si* $u_n \leqslant v_n$ *pour tout* n *à partir d'un certain rang et si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*

Le critère de d'Alembert est souvent utile en pratique.

Proposition 8.6: *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels strictement positifs. Supposons qu'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \ell$$

1. *Si* $\ell < 1$*, alors la série* $\sum_n u_n$ *converge.*
2. *Si* $\ell > 1$*, alors la série* $\sum_n u_n$ *diverge grossièrement.*

On a aussi le critère de Cauchy

Proposition 8.7: *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels strictement positifs. Supposons qu'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \ell$$

1. *Si* $\ell < 1$*, alors la série* $\sum_n u_n$ *converge.*
2. *Si* $\ell > 1$*, alors la série* $\sum_n u_n$ *diverge grossièrement.*

Pour multiplier des séries, on peut utiliser le produit de Cauchy.

Proposition 8.8: *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *des séries de nombres complexes absolument convergentes. Alors la série de terme général* $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *est absolument convergente et l'on a de plus*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right).$$

Rappelons aussi le critère de convergence de Dirichlet, qui pourra être utilisé dans les exercices.

Théorème 8.9: *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs, telles que :*

1. *La suite des sommes partielle de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée,*
2. *La suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et tend vers* 0.

Alors, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ *converge.*

Démonstration. C'est une conséquence de la transformation d'Abel : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \quad \text{(Transformation d'Abel)}$$

En effet

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = a_0 b_0 + A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= a_0 b_0 + A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).\end{aligned}$$

Puisque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par hypothèse et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on voit que la partie $(a_0b_0+A_nb_n-A_0b_1)$ converge vers $a_0(b_0-b_1)$. Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k-b_{k+1})$ converge, pour cela, nous allons montrer que cette série converge absolument, et il suffit pour cela de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})|$$

est majorée (puisque une série de termes positifs majorée converge). Notons $M \in \mathbb{R}$ un réel positif tel que $|A_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui existe par hypothèse. On a alors (en observant que $b_k \geqslant b_{k+1}$, par hypothèse, et donc que $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| &= \sum_{k=1}^{n-1} |A_k||(b_k - b_{k+1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M\,|b_k - b_{k+1}| = M \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| \\ &= M \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = M \sum_{k=1}^{n-1} (b_1 - b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M b_1.\end{aligned}$$

Cette série est donc majorée, donc convergente, d'où le résultat. □

On termine cette section de rappels en mentionnant la définition de série normalement convergente.

Définition 8.10: Soit E un ensemble et soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. Alors on note

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

Définition 8.11: Soit E un ensemble et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées $f_n : E \to \mathbb{C}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$$

converge.

L'intérêt de cette définition provient principalement du théorème suivant.

Théorème 8.12: *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément (rappelons que cela veut dire que la suite des sommes partielles converge uniformément).*

9 Exercices

9.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Déterminer le rayon des convergence des séries suivantes :

a. $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n$

b. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$

c. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n z^n$

d. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$

e. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$

f. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{(2n)!} z^n$

g. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$

h. $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{2^n}$

i. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$.

Exercice 2. Montrer que le rayon de convergences des séries entières ci-dessous est 1 puis prouver que :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$ ne converge en aucun point du cercle $S^1 = \{|z| = 1\}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle S^1.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle S^1 sauf au point $z = 1$.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^n$ ont pour rayon de convergence respectifs R_1 et R_2. Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

Exercice 4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum a_n z^{pn}$ a pour rayon de convergence $R^{\frac{1}{p}}$.

Exercice 5. Soit $R_1, R_2 > 0$. Donner un exemple de série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence R_1 et un exemple de série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence R_2 telles que la séries entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.

1. Est-il vrai que
$$\limsup_{n\to+\infty} u_n v_n = \left(\limsup_{n\to+\infty} u_n\right)\left(\limsup_{n\to+\infty} v_n\right)$$

2. On suppose que (u_n) converge vers une limite $\ell \neq 0$. Montrer que
$$\limsup_{n\to+\infty} u_n v_n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)\left(\limsup_{n\to+\infty} v_n\right).$$

Exercice 7. 1. Montrer que les fonctions cos est sin sont holomorphes et que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

3. A-t-on $|\sin z| \leqslant 1$ et $|\cos z| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

4. Déterminer l'ensemble des solutions de $\cos z = 0$ et l'ensemble des solutions de $\sin z = 0$.

5. Determiner les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ où cos, sin, cosh et sinh prennent : (i) des valeurs réelles (ii) des valeurs imaginaires pures.

Exercice 8. Montrer que pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on a les relation suivantes

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \quad \text{et} \quad \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

Exercice 9. On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Montrer que si l'on note $z_n = \frac{1}{\pi n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce en contradiction avec le théorème de prolongement analytique ? Pourquoi ?

Exercice 10. On considère la série entière $\ell(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est 1.
2. Montrer que pour tout $z \in B(0,1)$, $\ell'(z) = \dfrac{1}{1+z}$.
3. En déduire que $\ell(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ pour tout $z \in B(0,1)$. (On admettra ici le résultat de l'exercice 26 du chapitre I).

Exercice 11. Montrer que les fonction f suivante sont analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ puis calculer leur série de Taylor en 0: $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$, $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^3}$.

Exercice 12. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

est analytique, puis pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ calculer le développement en série entière de f centré en z_0.

9.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 13. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. On note $\mathscr{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication de fonctions, $\mathscr{A}(U)$ est un anneau intègre. Que se passe-t-il si l'on retire l'hypothèse de connexité ?

Exercice 14. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Liouville pour les séries entières de rayon de convergence infini à l'aide des résultats sur les séries de Fourier (vu par exemple dans l'UE 503 : *Topologie et analyse hilbertienne*).

Théorème 9.1 (Liouville): *Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$. Si f est bornée alors f est constante.*

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On dénote, pour tout $z \in B(0,R)$, par $f(z)$ la somme de cette série. Pour tout $r \in]0,r[$ on considère la fonction $g : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $g_r(t) = f(re^{it})$. On considère aussi, pour tout $r \in]0,R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $g_{n,r} : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $g_{n,r}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n e^{int}$.

1. Montrer que pour tout $r \in]0,R[$, la suite $(g_{n,r})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_r.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $r \in]0,R[$, on a
$$r^n a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt.$$
3. En déduire, que pour tout $r \in]0,R[$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 dt.$$
4. Montrer que si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_m \neq 0$, alors $\lim\limits_{r\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = +\infty$.
5. Supposons que $R = +\infty$. Supposons de plus que f est bornée, c'est à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que f est constante.
6. Plus généralement, en supposant toujours que $R = +\infty$, montrer que si il existe des constante $A, B \in \mathbb{R}$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que
$$|f(z)| \leqslant A|z|^m + B \;\; \forall z \in \mathbb{C}$$
alors f est un polynôme de degré $\leqslant m$.

Exercice 15. Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et telle que $a_0 \neq 0$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

1. On suppose que ceci est le cas et que $\dfrac{1}{f(z)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant le relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pout tout $n \geqslant 0$, on a
$$|b_n| \leqslant \frac{C^n}{|a_0|}.$$
3. En déduire que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

Exercice 16. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $F' = f$. Montrer que F est analytique. En déduire que le logarithme principal Log est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (on admettra ici le résultat de l'exercice 26 du chapitre I).

Exercice 17. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Un point $z_0 \in \partial B(0,R)$ est un *point régulier* de f si il existe une extension analytique de f dans un voisinage de $B(0,R) \cup \{z_0\}$. Si $z_0 \in \partial B(0,R)$ n'est pas régulier pour f, on dit que c'est un *point singulier* de f. On note $\mathrm{Sing}(f) \subset \partial B(0,R)$ l'ensemble des points singuliers de f.

1. Considère la série entière $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ (de rayon de convergence 1).
   (a) Montrer que $\mathrm{Sing}(f) = \{1\}$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ne converge en aucun point du bord du disque de convergence.

2. Considère la série entière $f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$ (de rayon de convergence 1).

   (a) Montrer que $\mathrm{Sing}(f) = \{1\}$. (On pourra utiliser la détermination principale du logarithme).

   (b) Montrer que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$ converge en tout point du bord du disque de convergence.

3. Y-a-t'il un lien entre la régularité d'un point $z_0 \in \partial B(0,R)$ et la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$?

4. Montrer que $\mathrm{Sing}(f)$ est fermé.

5. On considère $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

   (a) Montrer que le rayon de convergence de f est 1.

   (b) Montrer que 1 est un point singulier de f. (Indication, montrer que $\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2^n} = +\infty$).

   (c) Plus généralement, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, toute racine 2^m-ième de 1 est un point singulier de f. (Indication, observer que si z_0 est une racine 2^m-ème de l'unité, alors pour tout $t \in]0,1[$ on a $f(tz_0) = \sum_{n=0}^{m-1} (tz_0)^{2^n} + \sum_{n=m}^{+\infty} t^{2^n}$ et utiliser l'argument de la question précédente).

   (d) En déduire que $\mathrm{Sing}(f) = \partial B(0,1)$.

L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre III: Intégration curviligne

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Integration de fonction à valeur complexe sur un intervalle

Dans cette section nous considérons des applications $f : I \to \mathbb{C}$ où $I = [a,b]$ est un segment (intervalle fermé borné) de $\mathbb{R}$. Nous dirons qu'une telle application est *continue par morceaux* si il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ telle que pour tout $i \in \{0,\ldots,k-1\}$, $f|_{]t_i,t_{i+1}[}$ est continue et admet une limite finie en t_i et t_{i+1}. De façon analogue, si f est continue, on dira que f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux si pour tout $i \in \{0,\ldots,k-1\}$, $f|_{[t_i,t_{i+1}]}$ est $\mathscr{C}^1$.

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction, on note $\mathrm{Re} f : I \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im} f : I \to \mathbb{R}$ les parties réelles et imaginaires de f. Notons que f et continue par morceaux (resp. $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si et seulement $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues par morceaux (resp. $\mathscr{C}^1$ par morceaux).

Définition 1.1: Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On définit

$$\int_a^b f(t)dt \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \mathrm{Re} f(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im} f(t)dt.$$

Remarque 1.2: Comme dans le cas réel, on posera, sous les mêmes hypothèses, $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

Comme conséquences immédiate de la définition et des propriétés de linéarité des intégrales réelles, on a la proposition suivante

Proposition 1.3: *Soit $I = [a,b]$ un segment. Soit $f,g : I \to \mathbb{C}$ des fonctions continues par morceaux et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda\int_a^b g(t)dt$
2. $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}dt = \overline{\int_a^b f(t)dt}.$

Le théorème fondamental de l'analyse s'adapte dans ce cadre sous la forme suivante

Proposition 1.4: *Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue et soit $F : I \to \mathbb{C}$ une primitive de f, c'est à dire que F est $\mathscr{C}^1$ et que $F' = f$. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Par définition, on a $\mathrm{Re}(F)' = \mathrm{Re}(F') = \mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(F)' = \mathrm{Im}(F') = \mathrm{Im}(f)$. En particulier,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt = \mathrm{Re}(F(b)) - \mathrm{Re}(F(a)) + i\Big(\mathrm{Im}(F(b)) - \mathrm{Im}(F(a))\Big) = F(b) - F(a).$$

□

La formule de changement de variable s'applique aussi dans ce cas là.

Théorème 1.5: *Soit $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$ des segments de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\varphi : J \to I$ une fonction $\mathscr{C}^1$. Alors on a*

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(s)ds.$$

En particulier, si $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$, alors

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(s)ds.$$

Démonstration. Soit $F : I \to \mathbb{C}$ une primitive de f (une telle primitive existe toujours, il suffit de poser $F(x) = \int_a^x f(t)dt$). Par la proposition 1.4 on a

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(s)ds = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_c^d (F \circ \varphi)'dt = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

□

Terminons cette section par le lemme suivant qui sera très utile.

Lemme 1.6: *Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application continue par morceaux. Alors*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Démonstration. Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, l'inégalité est vérifiée. Supposons donc $\int_a^b f(t)dt \neq 0$ et soit $\theta \in R$ un argument de $\int_a^b f(t)dt$. On a donc

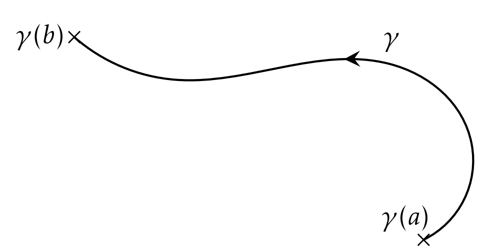
$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)dt\right| &= e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt\right) = \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt\right) \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right)dt \leqslant \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right|dt = \int_a^b \left|f(t)\right|dt. \end{aligned}$$

□

2 Chemin dans le plan complexe

Définition 2.1: Un *chemin* dans $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ où $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est un segment. Si γ est de plus $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors on dit que le chemin est $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

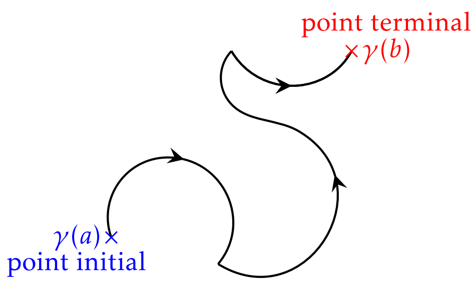
Graphiquement, on représente en général en chemin en dessinant son image dans $\mathbb{C}$, et en indiquant le sens de parcourt du chemin, comme sur le dessin ci-contre.

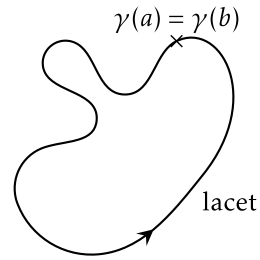


Voici un peu de terminologie supplémentaire concernant les chemins

Définition 2.2: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin.

1. On dit que $\gamma(a)$ est le *point initial* de γ et que $\gamma(b)$ est le *point terminal* de γ.
2. On dit que ce chemin est un *lacet* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.



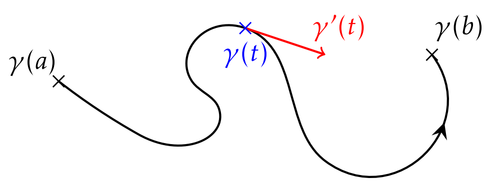


Pour ce qui concerne l'integration curviligne on s'intéressera principalement aux chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On peut définir la longueur d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Définition 2.3: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. La *longueur* de γ est

$$\ell(\gamma) \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

où $x = \operatorname{Re}\gamma$ et $y = \operatorname{Im}\gamma$.

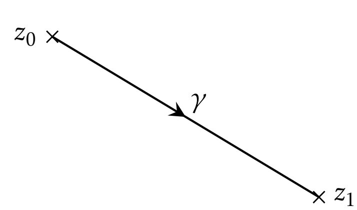


Voici quelques exemples importants.

Exemple 2.4: Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Le chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$$

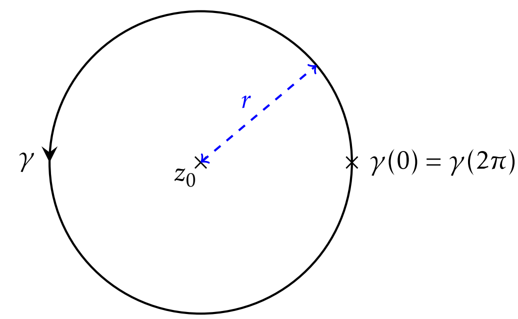
paramètre le segment allant de z_0 à z_1. On a $\ell(\gamma) = |z_1 - z_0|$.



Exemple 2.5: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit $r > 0$. Le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$$

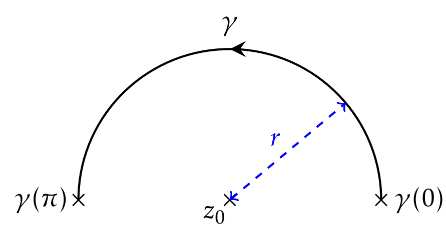
paramètre le cercle de centre z_0 et de rayon r. On a $\ell(\gamma) = 2\pi r$.



Exemple 2.6: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit $r > 0$. Le chemin $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(t) = z_0 + re^{i\theta}$$

paramètre un demi-cercle de centre z_0 et de rayon r. On a $\ell(\gamma) = \pi r$.



Observons que quitte à faire un changement de variable, on pourrait définir tous les chemins sur l'intervalle $[0, 1]$. Il est néanmoins plus simple de s'autoriser des intervalles plus généraux.

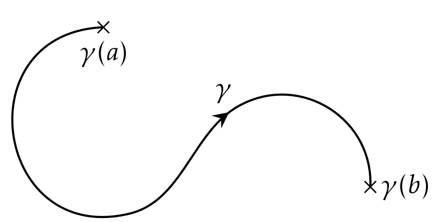
Notons deux opérations que l'on peut faire sur des chemins.

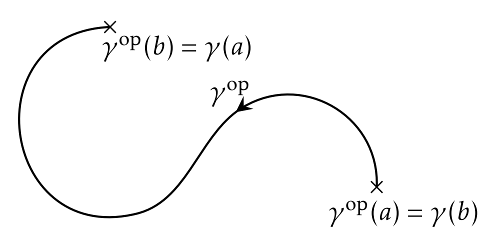
Définition 2.7: Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin, alors le chemin *opposé* de γ est le $\gamma^{\text{op}} : [a, b] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma^{\text{op}}(t) = \gamma(a + b - t).$$

Si γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors γ^{op} est $\mathscr{C}^1$ par morceaux aussi.

Le chemin opposé de γ représente juste le chemin γ parcouru dans l'autre sens.





Exemple 2.8:

1. Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ et $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, $\forall t \in [0, 1]$. Alors $\gamma^{\text{op}}(t) = (1-t)z_1 + tz_0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Alors $\gamma^{\text{op}}(t) = z_0 + re^{-it}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

On peut aussi concaténer des chemins.

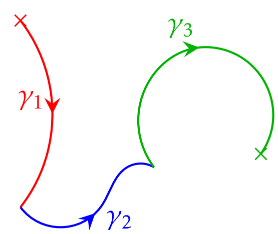
Définition 2.9: Soit $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ des chemins tels que

$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2).$$

La *concaténation* de γ_1 et γ_2 est le chemin $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbb{C}$ défini par

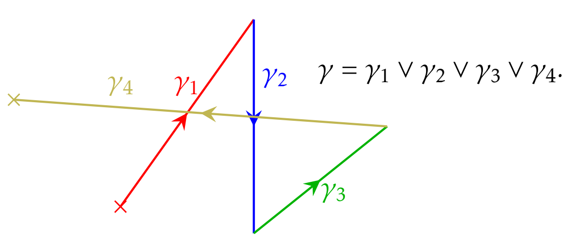
$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si} \quad a_1 \leqslant t \leqslant b_1 \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si} \quad b_1 \leqslant t \leqslant b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

De façon récursive, étant donnée des chemins $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a $\gamma_k(b_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$, on peut définir la concaténation $\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sont $\mathscr{C}^1$ par morceaux, alors $\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

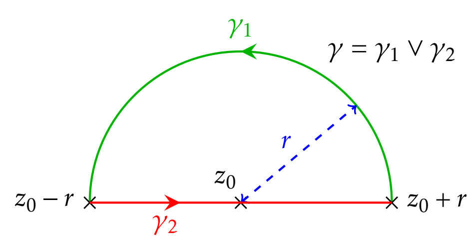


$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3.$

Exemple 2.10: Soit $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on considère $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_k(t) = (1-t)z_{k-1} + tz_k$. Alors la concaténation $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$, représenté si dessous, est le chemin $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ donné par
$\gamma(t) = (k+t)z_{k-1} + (t-k+1)z_k$ si $k-1 \leqslant t \leqslant k$.



Exemple 2.11: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Notons $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_1(t) = z_0 + re^{i\theta}$ et $\gamma_2 : [-r\pi, r\pi]$ le chemin défini par $\gamma_2(t) = z_0 + t$. Alors la concaténation $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ est le lacet représenté ci-dessous :



La proposition suivante est immédiate, et sa preuve est laissée en exercice.

Proposition 2.12: *Soit $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ le point terminal de γ_i coincide avec le point initial de γ_{i+1}. Alors :*

$$\ell\left(\gamma^{\text{op}}\right) = \ell(\gamma) \quad \textit{et} \quad \ell\left(\gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n\right) = \ell(\gamma_1) + \cdots + \ell(\gamma_n).$$

3 Intégrale le long d'un chemin

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale d'une fonction complexe le long d'un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Définition 3.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application *continue*. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors *l'intégrale de f le long de γ* est

$$\int_\gamma f(z)dz \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)dt.$$

Remarque 3.2: Un moyen mnémotechnique pour ce souvenir de cette définition est le suivant : il suffit de penser à la formule du changement de variable et poser $z = \gamma(t)$ “donc” $dz = \gamma'(t)dt$.

Commençons par quelques exemples.

Exemple 3.3: Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = e^{it}$. On considère les fonctions $f_1(z) = z$ $f_2(z) = |z|$ et $f_3(z) = \frac{1}{z}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f_1(z)dz &= \int_0^{2\pi} f_1(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f_1(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} e^{it}ie^{it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} ie^{2it}dt = \frac{1}{2}\left[e^{2it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{4i\pi} - e^{0i}\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0. \\
\int_\gamma f_2(z)dz &= \int_0^{2\pi} f_2(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f_2(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} 1 \times ie^{it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} ie^{it}dt = \left[e^{it}\right]_0^{2\pi} = \left(e^{2i\pi} - e^{0i}\right)(1-1) = 0. \\
\int_\gamma f_3(z)dz &= \int_0^{2\pi} f_3(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f_3(e^{it})ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}ie^{it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi.
\end{aligned}$$

Une des propriétés clés de l'intégrale curviligne est qu'elle ne dépend pas du choix de paramétrisation du chemin choisi.

Proposition 3.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application* continue. *Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une application $\mathscr{C}^1$ strictement croissante telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(b) = d$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que γ est $\mathscr{C}^1$. Dans ce cas, d'après la formule du changement de variable, on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz &= \int_c^d f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma\circ\varphi)'(t)dt = \int_c^d f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma'\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt\\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

Si γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on fait applique l'argument précédent sur chaque morceaux. En effet, si $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ est une subdivision de $[a,b]$ telle que pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ est $\mathscr{C}^1$, alors $c = \varphi^{-1}(t_0) < \varphi^{-1}(t_1) < \cdots < \varphi^{-1}(t_k) = d$ est une subdivision de $[c,d]$ et l'on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)dz &= \int_c^d f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma\circ\varphi)'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\varphi^{-1}(t_j)}^{\varphi^{-1}(t_{j+1})} f(\gamma\circ\varphi(t))(\gamma'\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

□

Le propriété suivante est une conséquence directe de la proposition 1.3

Proposition 3.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des applications continues. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a*

$$\int_\gamma (f(z) + \lambda g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \lambda \int_\gamma g(z)dz.$$

Comme conséquence du lemme 1.6 nous obtenons :

Lemme 3.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \ell(\gamma) \max_{t\in[a,b]} \left\{|f(\gamma(t))|\right\}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leqslant \int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|dt = \int_a^b \left|f(\gamma(t))\right|\left|\gamma'(t)\right|dt\\ &\leqslant \max_{t\in[a,b]}\left\{|f(\gamma(t))|\right\}\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \ell(\gamma)\max_{t\in[a,b]}\left\{|f(\gamma(t))|\right\}.\end{aligned}$$

□

La relation Chalses se transpose dans le ce cadre sous la forme suivante :

Proposition 3.7: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U tels que le pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ le point terminal de γ_i coincide avec le point initial de γ_{i+1}. Alors*

$$\int_{\gamma_1\vee\cdots\vee\gamma_n} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Dernièrement, nous avons la relation suivante.

Proposition 3.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. Alors*

$$\int_{\gamma^{\mathrm{op}}} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

Les démonstrations des propriétés 3.5, 3.7 et 3.8 sont laissées en exercice.

4 Primitive et intégrale

4.1 Définition et première propriétés des primitives

En général, l'intégrale curviligne d'une fonction dépend du chemin choisi et pas seulement du point initial et terminal. Par exemple, si $\gamma_1, \gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ sont définis par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(t) = e^{-it}$, alors on a bien $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_1(\pi) = \gamma_2(\pi)$ mais par contre

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = i\pi \neq -i\pi = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}.$$

Comprendre sous quelles conditions l'intégrale est indépendante du chemin nous amènera à d'interessantes considérations topologiques dans les chapitres suivants.

Dans cette section, nous allons voir une condition sous laquelle l'intégrale curviligne ne dépend que des extrémités du chemin d'intégration.

Définition 4.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. On dit qu'une fonction $F : U \to \mathbb{C}$ est une *primitive* de f si F est holomorphe et vérifie $F' = f$. Si une telle fonction existe, on dit que f *admet une primitive*.

Exemple 4.2:

1. Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $p_n = z \mapsto z^n$ admet une primitive, par exemple la fonction $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$.
2. Plus généralement, si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors f admet une primitive sur $B(0,R)$, par exemple la fonction définie par la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} z^{n+1}.$$

Comme dans le cas réel, les primitives sont uniques à constante près dans le sens suivant.

Proposition 4.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Si $F_1 : U \to \mathbb{C}$ et $F_2 : U \to \mathbb{C}$ sont des primitives de f, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que*

$$F_1(z) = F_2(z) + c \quad \forall z \in U.$$

Démonstration. Notons, $F = F_1 - F_2 : U \to \mathbb{C}$. Par hypothèse, F est holomorphe et l'on a $F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. D'après le corollaire 4.2 du chapitre I (on utilise ici l'hypothèse de connexité), on en déduit que F est constante. $\square$

4.2 Intégrale curviligne d'une fonction admettant une primitive

Dans ce cadre on a la version suivante du théorème fondamental de l'analyse.

Proposition 4.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue qui admet une primitive $F : U \to \mathbb{C}$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Remarque 4.5: En particulier, cette proposition montre que si f admet une primitive, alors l'intégrale de f le long d'un chemin ne dépend que du point initial et du point terminal de ce chemin.

Démonstration. Soit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ est $\mathscr{C}^1$ pour tout $j \in \{0,\ldots,k-1\}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (F\circ\gamma)'(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}\Big(F(t_{j+1}) - F(t_j)\Big) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

□

En particulier, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 4.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue qui admet une primitive. Alors pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceau. Notons $F : U \to \mathbb{C}$ une primitive de f, alors $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ car $\gamma(a) = \gamma(b)$. □

Exemple 4.7: En particulier, la fonction $\iota : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $\iota(z) = \dfrac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. En effet le chemin $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$ est un lacet $\mathscr{C}^1$, mais

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0.$$

4.3 Critère d'existence de primitives

Il est crucial de noter que le corollaire 4.6 admet une réciproque.

Théorème 4.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Si pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U, on a*

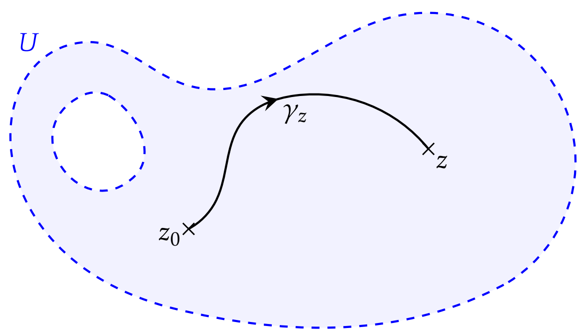
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Alors f admet une primitive sur U.

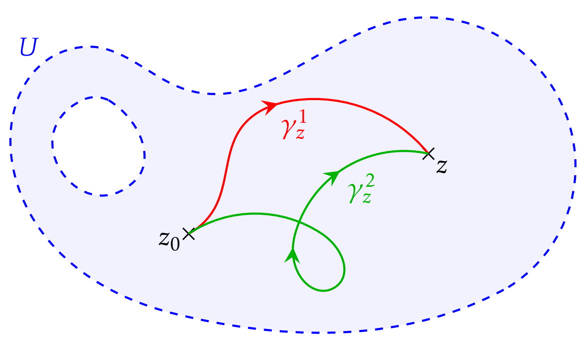
Démonstration. Soit $z_0 \in U$. On considère l'application $F : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw \quad \forall z \in U$$

où γ_z est un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dont le point initial est z_0 et dont le point terminal est z. Un tel chemin existe toujours d'après l'exercice 6 car U est connexe.



Cette fonction est bien définie par notre hypothèse. En effet, prenons γ_z^1 et γ_z^2 deux chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux dont le point initial et z_0 et le point terminal et z.

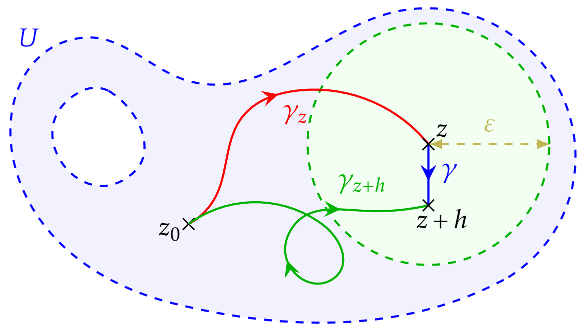


Alors $\gamma_z^1 \vee (\gamma_z^2)^{\mathrm{op}}$ est un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux et donc

$$0 = \int_{\gamma_z^1 \vee (\gamma_z^2)^{\mathrm{op}}} f(z)dz = \int_{\gamma_z^1} f(z)dz + \int_{(\gamma_z^2)^{\mathrm{op}}} f(z)dz = \int_{\gamma_z^1} f(z)dz - \int_{\gamma_z^2} f(z)dz$$

et donc $\int_{\gamma_z^1} f(z)dz = \int_{\gamma_z^2} f(z)dz$.

Il s'agit maintenant de montrer que F est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et que $F' = f$. Soit $z \in U$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon) \subset U$. Soit $h \neq 0$ tel que $z + h \in B(z,\varepsilon)$, c'est à dire que $|h| < \varepsilon$. Soit γ le segment reliant z à $z+h$, c'est à dire $\gamma : [0,1] \to U$ est défini par $\gamma(t) = z + th$.



Comme l'integrale de f le long de chaque lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux est nulle, et que $\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}$ est un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on obtient

$$0 = \int_{\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}} f(w)dw = \int_{\gamma_z} f(w)dw + \int_{\gamma} f(w)dw - \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw$$

et donc que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt = h\int_0^1 f(z+th)dt.$$

Donc le taux d'accroissement est

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt.$$

Il reste à montrer que $\int_0^1 f(z+th)dt \to f(z)$ quand $h \to 0$. D'après le lemme 1.6, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 f(z+th)dt - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 f(z+th)dt - \int_0^1 f(z)dt\right| = \left|\int_0^1 \Big(f(z+th) - f(z)\Big)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|f(z+th) - f(z)\right|dt \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left|f(z+th)-f(z)\right| \to_{h\to 0} 0 \end{aligned}$$

par continuité de f. D'où le résultat.

□

4.4 Critère d'existence de primitive sur un ouvert étoilé

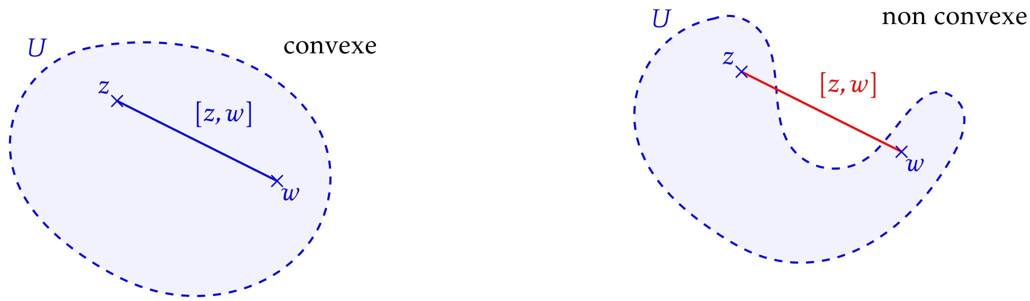
Nous allons démontrer que pour certains types d'ouverts, il existe un critère un peu plus fort. Commençons par introduire un peu de terminologie.

Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on introduit le segment entre z et w

$$[z,w] \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{(1-t)z + tw \ ; \ t \in [0,1]\Big\}.$$

Définition 4.9: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que U est *convexe* si pour tout $z, w \in U$, on a$[z,w] \subset U$.

Voici les dessins à avoir en tête :

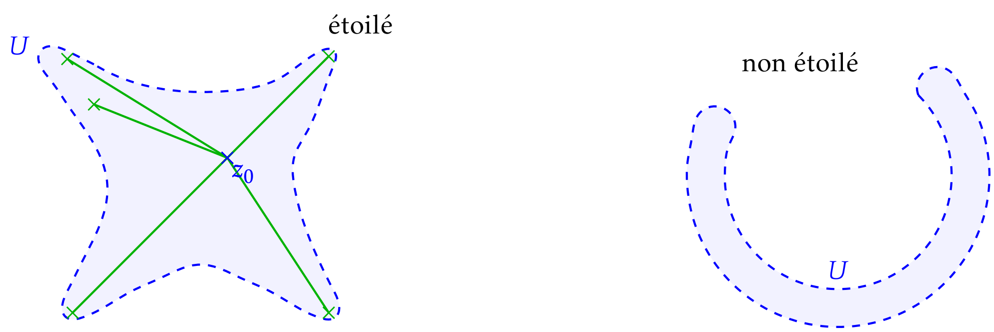


Exemple 4.10: L'ouvert $\mathbb{C}$ est convexe. Les boules ouvertes sont convexes. Les demi-plans ouverts sont convexes (un demi-plan ouvert est un sous-ensemble de la forme $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \;\; ax + by > c\}$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$. Les ouverts $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ne sont pas convexes.

Remarque 4.11: Les ouverts convexes sont connexes pas arcs et donc connexe, mais la réciproque est bien entendu complètement fausse.

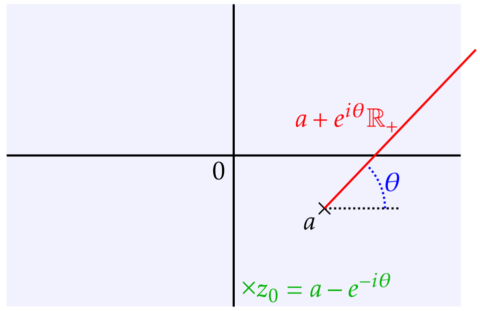
Dans ce cours, nous utiliserons aussi la notion suivante :

Définition 4.12: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que U est *étoilé* si il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$, on a $[z_0, z] \subset U$.



Remarque 4.13: Les ouverts convexes sont étoilées, car si U est convexe, n'importe quel point $z_0 \in U$ vérifie la condition de la définition d'ouvert étoilé. Comme le montre le dessin ci-dessus, les ouverts étoilés ne sont pas nécessairement convexe. Par ailleurs, on voit facilement que les ouverts étoilés sont connexes par arcs et donc connexes. Mais bien entendu, un ouvert connexe n'est pas nécessairement étoilé (comme le montre le dessin ci-dessus).

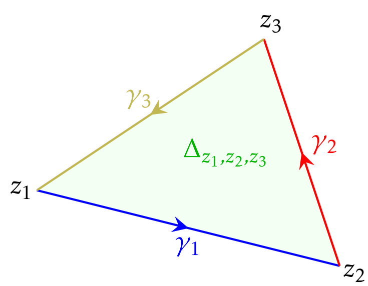
Exemple 4.14: L'ouvert $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé. Par contre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est étoilé. Plus généralement, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, pour tout θ, l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \left(a + e^{i\theta}\mathbb{R}_+\right)$ est un ouvert étoilé. En effet, dans ce cas, le point $z_0 = a - e^{i\theta}$ vérifie les conditions de la définition d'ouvert étoilé.



Définition 4.15: Un *triangle* dans $\mathbb{C}$ est l'enveloppe convexe de 3 points non-alignés de $\mathbb{C}$. Pour être plus précis, étant donné 3 points non-alignés $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, le *triangle de sommets* z_1, z_2 *et* z_3 est l'ensemble

$$\Delta_{z_1,z_2,z_3} := \left\{ w \in \mathbb{C} \; ; \; \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}_+ \text{ vérifiant } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \text{ et } w = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 \right\}.$$

Le bord $\partial\Delta_{z_1,z_2,z_3}$ du triangle Δ_{z_1,z_2,z_3} peut être parametré par un lacet γ_{z_1,z_2,z_3}. On choisit un paramétrisation qui parcours le lacet dans le sens direct. Par exemple dans le cas du triangle ci-dessous, on peut prendre une paramétrisation de la forme $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ où γ_1 est le segment qui relie z_1 à z_2, γ_2 est le segment qui relie z_2 à z_3 et γ_3 est le segment qui relie z_3 à z_1.



Si f est une fonction définie sur un voisinage de $\partial\Delta_{z_1,z_2,z_3}$, on note, avec les notations ci-dessus,

$$\int_{\partial\Delta_{z_1z_2z_3}} f(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_\gamma f(z)dz.$$

On a le critère suivant

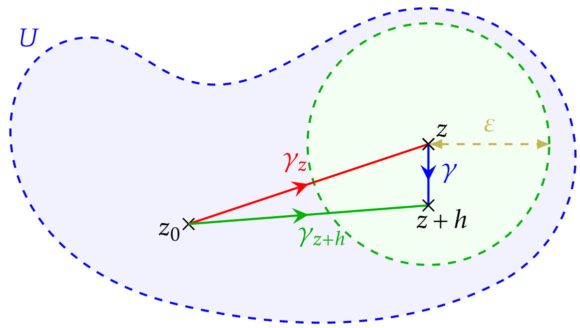
Proposition 4.16: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue telle que l'intégrale de f le long du bord de tout triangle inclus dans U est nulle. Alors f admet une primitive sur U.*

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ tel que $[z_0, z] \subset U$ pour tout $z \in U$. Un tel z_0 existe car U est étoilé. Pour tout $z \in U$ on note $\gamma_z : [0,1] \to U$ le segment joignant z_0 à z, c'est à dire le chemin défini par $\gamma_z(t) = (1-t)z_0 + tz$. On considère alors la fonction $F : U \to \mathbb{C}$, définie par

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw.$$

Puisque U est étoilé, γ_z est bien un chemin dans U. Il s'agit maintenant de montrer que F est une primitive de f. C'est à dire que F est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et que $F' = f$. Soit $z \in U$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que

$B(z,\varepsilon) \subset U$. Soit $h \neq 0$ tel que $z+h \in U$, c'est à dire tel que $|h| < \varepsilon$. Soit γ le segment reliant z à $z+h$, c'est à dire $\gamma : [0,1] \to U$ est défini par $\gamma(t) = z + th$.



Comme l'integrale de f le long du bord de chaque triangle est nulle, et que $\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}$ paramètre le bord d'un triangle, on obtient

$$0 = \int_{\gamma_z \vee \gamma \vee \gamma_{z+h}^{\mathrm{op}}} f(w)dw = \int_{\gamma_z} f(w)dw + \int_{\gamma} f(w)dw - \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw$$

et donc que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_{\gamma} f(w)dw = \int_0^1 f(z+th)hdt = h\int_0^1 f(z+th)dt.$$

Donc le taux d'accroissement est

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)dt.$$

Il reste donc à montrer que $\int_0^1 f(z+th)dt \to f(z)$ quand $h \to 0$. D'après le lemme 1.6, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(z+th)dt - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 f(z+th)dt - \int_0^1 f(z)dt\right| = \left|\int_0^1 \Big(f(z+th) - f(z)\Big)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|f(z+th) - f(z)\right|dt \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left|f(z+th) - f(z)\right| \to_{h\to 0} 0.\end{aligned}$$

Ce qui conclue la preuve. □

5 Passage à la limite sous l'intégrale

Nous aurons besoin d'un résultat de passage à la limite sous l'intégrale.

Définition 5.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : U \to \mathbb{C}$. On dit que *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts* si pour tout compact $K \subset U$, la suite de fonction $\left(f_n|_K\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. C'est à dire que pour tout compact $K \subset U$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N_{\varepsilon,K} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $z \in K$, on a

$$|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Si une suite de fonctions sur U converge uniformément alors elle converge uniformément sur les compacts. La réciproque est en générale fausse.

Rappelons le cas particulier élémentaire suivant du théorème de convergence dominée (cf l'UE 301 *Analyse 2* ou l'UE 501 *Intégration et probabilités*).

Proposition 5.2: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un segment. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : U \to \mathbb{C}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Alors f est continue et l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Cela implique le résultat suivant pour les intégrales curvilignes, dont on donne ici une preuve directe.

Proposition 5.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : U \to \mathbb{C}$ qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$. Alors f est continue et l'on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Démonstration. Montrons déjà la continuité de f. Soit $z_0 \in U$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Par convergence uniforme sur les compacts, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$, on a

$$\left|f(z) - f_n(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $n \geqslant N$. Par continuité de f_n, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in B(z_0, \delta)$ on a

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité triangulaire, on obtient donc, pour tout $z \in B(z_0, \min\{\delta, r\})$

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Nous allons maintenant démontrer l'égalité annoncée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma \Big(f_n(z) - f(z)\Big)dz\right| \leqslant \ell(\gamma) \sup_{t\in[a,b]} \left|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))\right|.$$

Par convergence uniforme sur le compact $K = \gamma([a,b])$, on a

$$\sup_{t\in[a,b]} \left|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))\right| = \sup_{z\in K} \left|f_n(z) - f(z)\right| \to_{n\to\infty} 0.$$

D'où le résultat. □

On peut en déduire le résultat utile suivant sur les séries.

Corollaire 5.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : U \to \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ soit normalement convergente. Alors*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)\right) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 5.3 à la suite des sommes partielles. □

6 Formes différentielles

Cette section n'est pas strictement nécessaire pour le compréhension du cours. Néanmoins, le point de vu des formes différentielles est un point de vu naturel qui permet de comprendre plus en profondeur l'analyse complexe. La lecture de cette section, destinée aux étudiants les plus motivés, est optionnelle.

Dans cette section, nous identifions toujours $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ en via $x+iy \leftrightarrow (x,y)$.

6.1 Les 1-formes

Définition 6.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une *1-forme $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes* est une expression de la forme

$$\omega = f\,dx + g\,dy$$

où $f,g : U \to \mathbb{C}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$.
L'ensemble des 1-formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes sur U est noté $\Omega^1(U)$.

Remarque 6.2:

1. On peut aussi définir des 1-formes $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs réelles, on prend alors $f,g : U \to \mathbb{R}$.
2. Dans cette définition et dans ce qui suit, pour des question de simplicité d'exposition, on demande que les fonctions f et g soient $\mathscr{C}^\infty$, on aurait aussi pu juste demander que ces fonctions soient continues, $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$... les résultats sont similaires, mais il faut faire un peu attention pour voir quelles sont les bonnes hypothèses de régularité.

Les 1-formes différentielles peuvent s'additionner, et on peut les multiplier par des fonctions $\mathscr{C}^\infty$. En effet, étant donné, $\omega = f\,dx + g\,dy \in \Omega^1(U)$ et $h \in \mathscr{C}^\infty(U)$, on pose

$$h\omega := (hf)dx + (hg)dy.$$

D'autre part, étant donné $\omega_1 = f_1dx + g_1dy \in \Omega^1(U)$ et $\omega_2 = f_2dx + g_2dy \in \Omega^1(U)$, on pose

$$\omega_1 + \omega_2 := (f_1 + f_2)dx + (g_1 + g_2)dy.$$

Il est immédiat de vérifier que ces opérations vérifient les propriétés usuelles d'associativité, commutativité, distributivité....

L'intérêt des notations dx, dy provient de la définition suivante.

Définition 6.3: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$. La *différentielle de f* est la 1-forme $df \in \Omega^1(U)$ définie par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Remarque 6.4: Dans cette définition, il suffit que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ pour que df ait un sense et soit continue. De façon plus générale, si f est de classe $\mathscr{C}^r$ avec $r \geqslant 1$, alors df est de classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

A priori, on pourrait croire que cela entraine un conflit de notation (et de terminologie) avec la définition de différentielles que nous avons utilisé précédemment pour des fonctions à valeurs réelles (rappelé dans l'appendice du chapitre I). Mais il suffit d'interpreter dx et dy de manière convenable pour retrouver exactement la même notion. En effet, notons x l'application du $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y)\mapsto x$, c'est à dire la première projection, de même on utilise y pour désigner la seconde projection. Alors par définition, dx et dy sont les applications

$$dx:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\\ a & \mapsto & dx_a=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (s,t) & \mapsto & dx_a(s,t):=s\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \text{et} \quad dy:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\\ a & \mapsto & dy_a=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (s,t) & \mapsto & dy_a(s,t):=t\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Si maintenant U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:U\to\mathbb{R}$ est une fonction $\mathscr{C}^1$, alors df est l'application $df:U\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définie par

$$df_a(s,t)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)s+\frac{\partial f}{\partial y}(a)t=\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx_a(s,t)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)dy_a(s,t),\quad \forall a\in U.$$

C'est à dire $df_a=\frac{\partial f}{\partial x}(a)dx_a+\frac{\partial f}{\partial y}(a)dy_a$ pour tout $a\in U$, ou plus simplement $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Exemple 6.5: On considérant les fonctions $z\mapsto z$ et $z\mapsto\overline{z}$, on trouve

$$dz=dx+idy \quad \text{et} \quad d\overline{z}=dx-idy.$$

Avec ces notations, nous avons la proposition suivante, dont la démonstration est laissée en exercice.

Proposition 6.6: *Soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f:U\to\mathbb{C}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$. On a*

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}d\overline{z}.$$

Là encore cette proposition reste vraie si f est seulement de classe $\mathscr{C}^1$. Si de plus, f est holomorphe, en appliquant cela et les équations de Cauchy-Riemann, on trouve

$$df=f'dz.$$

6.2 Les 2-formes

Définition 6.7: Soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert. Une *2-forme $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes* est une expression de la forme

$$\alpha=f\,dx\wedge dy$$

où $f:U\to\mathbb{C}$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$.
L'ensemble des 2-formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs complexes sur U est noté $\Omega^2(U)$.

On peut aussi définir des 2-formes à valeurs réelles en demandant que f soit à valeurs réelles. Comme dans le cas des 1-formes, on peut considérer plus généralement des 2-formes de classe $\mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}^1$...

On peut additionner des 2-formes entre elles et multiplier une 2-forme par une fonction. En effet, étant donne $\alpha_1=f_1dx\wedge dy\in\Omega^2(U)$ et $\alpha_2=f_2dx\wedge dy\in\Omega^2(U)$ on pose

$$\alpha_1+\alpha_2=(f_1+f_2)dx\wedge dy.$$

D'autre part, étant donné $\alpha=f\,dx\wedge dy\in\Omega^2(U)$ et $h\in\mathscr{C}^\infty(U)$, on pose

$$h\alpha=(hf)dx\wedge dy.$$

On peut aussi construire des 2-formes à partir de 1-formes en utilisant les opérations suivantes.

Définition 6.8: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

1. Soit $\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(U)$. La *différentielle de* ω est la 2-forme $d\omega \in \Omega^2(U)$ définie par
$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$
2. Soit $\omega_1 = f_1 dx + g_1 dy \in \Omega^1(U)$ et $\omega_2 = f_2 dx + g_2 dy \in \Omega^1(U)$, alors le *produit extérieur de* ω_1 *et* ω_2 est la 2-forme $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^2(U)$ définie par
$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \left(f_1 g_2 - f_2 g_1\right) dx \wedge dy.$$

Remarque 6.9: Dans cette définition, il suffit que ω soit de classe $\mathscr{C}^1$ pour que $d\omega$ soit bien définie et de classe $\mathscr{C}^0$. Plus généralement si ω est de classe $\mathscr{C}^r$ pour $r \geqslant 1$, alors $d\omega$ sera de classe $\mathscr{C}^{r-1}$.

Pour se souvenir des règles des signes dans la seconde définition, il suffira de se souvenir que pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(U)$ on a
$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1.$$
En effet, ceci implique que
$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad \text{que} \quad dx \wedge dx = 0 \quad \text{et que} \quad dy \wedge dy = 0.$$
La formule générale de $\omega_1 \wedge \omega_2$ s'en déduit en développant puis en simplifiant.

Pour se souvenir de la formule pour $d\omega$, il suffit de se souvenir de plus que
$$d(f dx) = df \wedge dx \quad \text{et que} \quad d(f dy) = df \wedge dy.$$
La formule générale s'en déduit en développant puis en simplifiant. La propriété suivante, dont la preuve est laissée en exercice, décrit certaines règles de calcul concernant les formes differentielles.

Proposition 6.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.*

1. *Pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(U)$, on a $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$.*
2. *Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ et pour tout $\omega \in \Omega^1(U)$ on a $d(f\omega) = df \wedge \omega$.*
3. *Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$, on a $ddf := d(df) = 0$*

Puisque l'on travaille sur $\mathbb{C}$ il est naturel, comme dans le cas des 1-formes, d'utiliser dz et $d\overline{z}$ à la place de dx et dy. Cela est justifié car l'on a
$$dz \wedge d\overline{z} = -2i dx \wedge dy.$$
En effet,
$$dz \wedge d\overline{z} = (dx + i dy) \wedge (dx - i dy) = dx \wedge dx - i dx \wedge dy + i dy \wedge dx + dy \wedge dy = -2i dx \wedge dy.$$
Formelement, on peut utiliser les mêmes règles de calcul, par exemple, si $\omega = f dz + g d\overline{z}$ alors
$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) dz \wedge d\overline{z}. \tag{1}$$

En particulier, cette relation (qui est vraie aussi pour des 1-formes seulement de classe $\mathscr{C}^1$) entraine que si $f \in \mathscr{C}^1(U)$, alors f est holomorphe si et seulement si la 1-forme $\omega = f dz$ vérifie

$$d\omega = 0.$$

6.3 Integrations de formes différentielle

On peut intégrer les 1-formes différentielles le long d'un chemin.

Définition 6.11: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, Soit $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : I \to U$ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(U)$. *L'intégrale de ω le long de γ* est définie comme étant

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \Big(f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + g(\gamma(t))\gamma_2'(t) \Big) dt.$$

Remarque 6.12: Si par exemple f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur U, et si on pose $\omega = f dz = f dx + i f dy$. alors

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \Big(f(\gamma(t)\gamma_1'(t) + i f(\gamma(t)\gamma_2'(t)) \Big) dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_\gamma f(z) dz.$$

C'est à dire que la notion d'intégrale de forme différentielles généralise en ce sens la notion d'intégrale de curviligne définie dans les sections précédentes.

Définition 6.13: Un *compact à bord régulier* de $\mathbb{C}$ est un sous-ensemble compact K de $\mathbb{C}$ dont le bord ∂K peut être paramétré par un nombre fini de lacet simple $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux.

Étant donné un compact à bord régulier K, on choisi des lacets $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux $\gamma_K^1, \dots, \gamma_K^n$ qui parcourent le bord de K dans le sens *direct*, c'est à dire que "l'intérieur" du compact se trouve à gauche et "l'extérieur" du compact se trouve à droite. On pose alors, pour toute forme différentielle ω définie dans un voisinage ouvert de K

$$\int_{\partial K} \omega := \int_{\gamma_K} \omega.$$

Cette intégrale est indépendante du choix de lacets.

La notion d'intérieur et d'extérieur et motivée par le théorème suivant, d'intuition évidente mais dont la démonstration est difficile.

Théorème 6.14 (Jordan): *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet continue et* simple. *Alors $\mathbb{C} \setminus \gamma\big([a,b]\big)$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non-bornée. La composante connexe bornée est appelée* l'intérieur du lacet *et la composante connexe non-bornée appelée* l'exterieur du lacet.

On peux intégrer des 2-formes sur un compact à bord régulier.

Définition 6.15: Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact à bord régulier. Soit $\alpha := f dx \wedge dy$ une 2-forme différentielle définie sur un voisinage de K. Alors l'intégrale de α sur K est l'intégrale double

$$\int_K \alpha := \iint_K f(x,y) dx dy.$$

Le théorème fondamental reliant l'intégrale d'une 1-forme sur le bord et l'intégrale d'une 2-forme sur le compact, est le théorème de Stokes (qui dans notre situation est aussi connu sous le nom de formule de Green-Riemann), que nous donnons ici sans démonstration.

Théorème 6.16 (Stokes): *Soit K un compact à bord régulier. Soit ω une 1-forme différentielle définie sur un voisinage ouvert de K. Alors*

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega.$$

Remarque 6.17: Si on pose $\omega = f dx + g dy$, on obtiens $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$. On retrouve ainsi la formulation usuelle de la formule de Green-Riemann

$$\int_{\partial K} f dx + g dy = \int_K \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy.$$

Une conséquence important est la suivante, qui sera détaillée dans le chapitre IV.

Corollaire 6.18: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $K \subset U$ un compact à bord régulier. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et de classe $\mathscr{C}^1$. Alors,*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0.$$

Démonstration. On a

$$\int_{\partial K} f dz = \int_K d(f dz) = \int_K \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = \int_K 0 d\overline{z} \wedge dz = 0.$$

□

7 Exercices

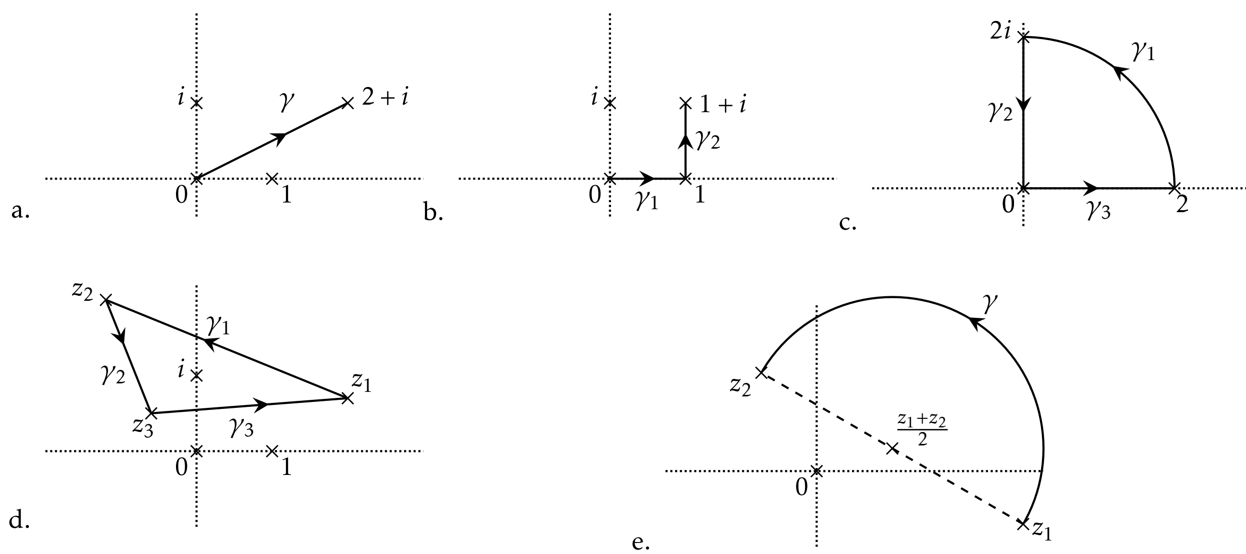
7.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Représenter graphiquement les chemins suivants de $\mathbb{C}$:

a. $\gamma(t) = t + it$, $t \in [0,1]$, b. $\gamma(t) = t^2 - it$, $t \in [0,1]$, c. $\gamma(t) = |t| + it$, $t \in [-1,1]$,

d. $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ où : $\gamma_1(t) = it^2$, $t \in [0,1]$; $\gamma_2(t) = t + (1-t)i$, $t \in [0,1]$; $\gamma_3(t) = e^{-it}$, $t \in [0,\pi]$.

Exercice 2. Donner une paramétrisation pour chacun des chemins suivants :



Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma z^2 dz$ pour $\gamma(t) = 1 + t(1+i)$, $t \in [0,1]$.
2. $\int_\gamma (z^3+1) dz$ pour $\gamma(t) = |t| - it$, $t \in [-1,1]$.
3. $\int_\gamma \mathrm{Im}(z) dz$ pour $\gamma(t) = t + i\inf\{t,1\}$, $t \in [0,2]$.
4. $\int_\gamma \mathrm{Re}(z^2) dz$ pour $\gamma(t) = 1 - it + t^2$, $t \in [0,1]$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On considère le chemin $\gamma(t) = e^{it}$ pour $t \in [0,2\pi]$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$.

Exercice 5. On considère la fonction F définie sur le plan complexe par

$$F(z) = z^2 e^{\cos\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)}.$$

Et on considère le chemin suivant $\gamma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\pi t}$ pour $t \in [0,1]$.

1. Justifier que F est holomorphe, et calculer F'.
2. En déduire
$$\int_\gamma z\left(2 - z\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)\right)e^{\cos\left(\frac{\pi}{4}(z-1)\right)} dz.$$

Exercice 6. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble.

- On dit que A est connexe par arcs si pour tout $z, w \in U$ il existe un chemin $\gamma : [a,b] \to U$ tel que $\gamma(a) = z$ et $\gamma(b) = w$.
- On dit que A est connexe par chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux si pour tout $z, w \in U$ il existe un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux $\gamma : [a,b] \to U$ tel que $\gamma(a) = z$ et $\gamma(b) = w$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Montrer que

$$U \text{est connexe} \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ est connexe par arcs} \quad \Leftrightarrow \quad U \text{ est connexe par arc } \mathscr{C}^1 \text{ par morceaux}$$

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des focntions holomorphes. Soit $z_0, z_0 \in U$ et soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U allant de z_0 à z_1. Montrer que l'on a l'analogue suivant de la formule d'intégration par partie :

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_\gamma f'(z)g(z)dz.$$

Exercice 8. Soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{C}$ allant de 0 à i. Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ avec :

1. $f(z) = z^2 \sin z$
2. $f(z) = ze^{iz}$.

7.2 Exercices plus avancés

Exercice 9.

1. Pour tout $r > 0$, montrer que
$$\int_{\partial B(0,r)} \overline{z} dz = 2i \operatorname{Aire}\Big(B(0,r)\Big).$$
2. Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ des points non-alignés. On note Δ le triangle de sommets z_1, z_2, z_3. Montrer que
$$\int_{\partial\Delta} \overline{z} dz = 2i \operatorname{Aire}(\Delta).$$
3. De façon générale. Soit K un compact à bord régulier. Montrer que
$$\int_{\partial K} \overline{z} dz = 2i \operatorname{Aire}(K).$$
(Indication : utiliser le théorème de Stokes)

Exercice 10. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant 0. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset U$, on a
$$\int_{\partial B(0,r)} f(z)dz = 2i \int_{B(0,r)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dx dy.$$
(Indication : utiliser le théorème de Stokes)
2. En déduire que
$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{2i\pi r^2} \int_{\partial B(0,r)} f(z)dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(0).$$

Exercice 11 (Lemme de Poincaré)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\omega \in \Omega^1(U)$. On dit que ω est *fermée* si $d\omega = 0$. On dit que ω est *exacte* si il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ telle que $\omega = df$.

1. Montrer que si ω est exacte alors elle est fermée.

2. Montrer que si $\omega = f dz$ pour une certaine fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$, alors f est fermée si et seulement si f est holomorphe, et f est exacte si et seulement si f admet une primitive.

3. Soit $\omega \in \Omega^1(U)$ une forme exacte. Montrer que $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U.

4. Montrer que la forme $\dfrac{dz}{z} \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$ est fermée mais pas exacte.

5. Nous allons maintenant montrer que les forme fermée sont localement exactes (c'est le lemme de Poincaré). Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ et soit $r > 0$. Notons $U = B(z_0, r)$ Soit $\omega = P dx + Q dy$ une forme fermée sur U. Pour tout $z \in U$ on pose γ_z le segment allant de z_0 à z. On pose, pour tout $z \in U$,
$$f(z) = \int_{\gamma_z} \omega.$$
   (a) Montrer que
   $$f(z) = \int_0^1 \Big((x - x_0)P(\gamma_z(t)) + (y - y_0)Q(\gamma_z(t))\Big)dt.$$
   (b) Montrer que f est C^1 et que pour tout $z = x + iy \in B(z_0, r)$, on a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \int_0^1 \Big(P(\gamma_{(z)}(t)) + (x - x_0)t\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_z(t)) + (y - y_0)t\frac{\partial Q}{\partial x}(\gamma_z(t))\Big)dt$$
   et que
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \int_0^1 \Big(Q(\gamma_z(t)) + (x - x_0)t\frac{\partial P}{\partial y}(\gamma_z(t)) + (y - y_0)t\frac{\partial Q}{\partial y}(\gamma_z(t))\Big)dt$$
   Indication : Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral (UE 301 : Analyse 2).
   (c) Montrer que l'application $h(t) = P(\gamma_z(t))$ est $\mathscr{C}^1$ et que
   $$h'(t) = (x - x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(\gamma_z(t)) + (y - y_0)\frac{\partial P}{\partial y}(\gamma_z(t)).$$
   En déduire, par une intégration par partie en utilisant l'hypothèse que ω est fermée, que
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = P(z).$$
   (d) Montrer de même que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(z)$.
   (e) Conclure.

L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre IV:
Théorème de Cauchy, formules de Cauchy et applications

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Lemme de Goursat

Le résultat suivant est à la base de l'approche que nous suivons dans ce cours.

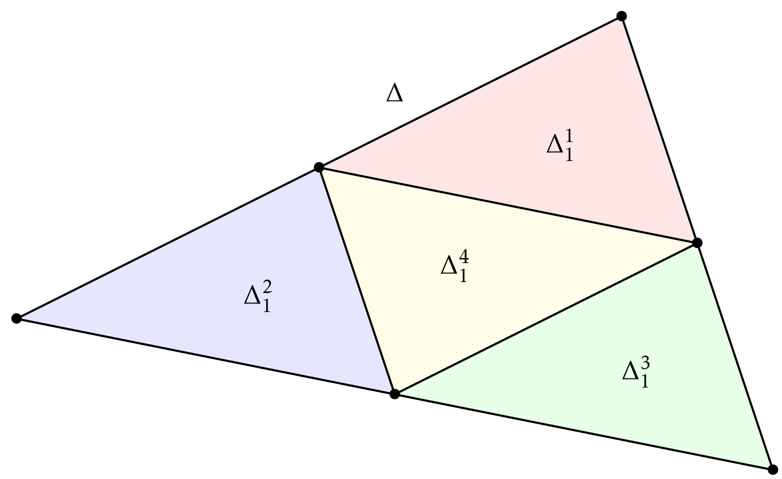
Lemme 1.1 (Goursat): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors, pour tout triangle Δ dans U, on a*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Observons déjà que l'hypothèse d'holomorphie implique que f est continue sur U.

Pour tout triangle Δ, nous notons $\delta(\Delta)$, le *diamètre* de $\partial\Delta$, c'est le maximum des longueurs des côtés de Δ.

Soit $\Delta \subset U$ un triangle. En considérant le milieu de chaque côté de $\partial\Delta$, ce triangle peut être subdivisé en 4 triangles semblables $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$ comme sur le dessin ci-dessous :



Pour tout $i \in \{1, \ldots, 4\}$, nous avons

$$\ell(\partial\Delta_1^i) = \frac{1}{2}\ell(\partial\Delta) \quad \text{et} \quad \delta(\Delta_1^i) = \frac{1}{2}\delta(\Delta).$$

D'autre part, nous avons

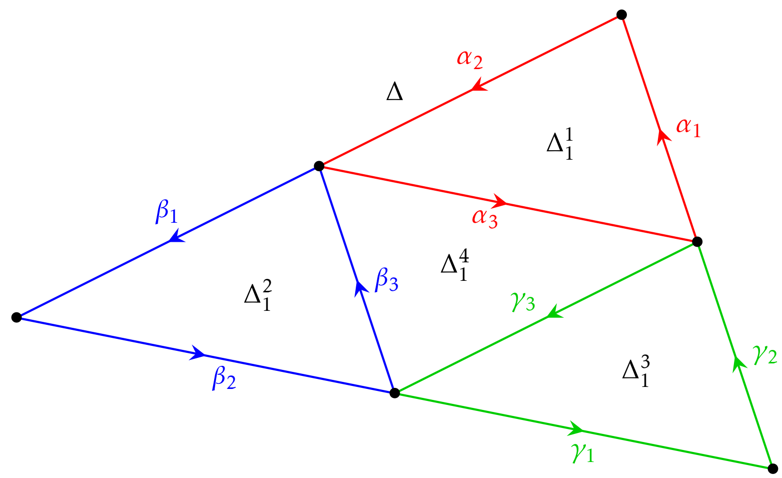
$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^i} f(z)dz. \tag{1}$$

En effet en introduisant les chemins $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ comme sur le dessin ci-dessous, l'on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_1^1} f(z)dz &= \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz + \int_{\alpha_3} f(z)dz \\
\int_{\Delta_1^2} f(z)dz &= \int_{\beta_1} f(z)dz + \int_{\beta_2} f(z)dz + \int_{\beta_3} f(z)dz \\
\int_{\Delta_1^3} f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\Delta_1^4} f(z)dz = \int_{\alpha_3^{\mathrm{op}}} f(z)dz + \int_{\beta_3^{\mathrm{op}}} f(z)dz + \int_{\gamma_3^{\mathrm{op}}} f(z)dz = -\int_{\alpha_3} f(z)dz - \int_{\beta_3} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz$$



On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}\int_{\Delta} f(z)dz &= \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz + \int_{\beta_1} f(z)dz + \int_{\beta_2} f(z)dz \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\ &= \int_{\Delta_1^1} f(z)dz - \int_{\alpha_3} f(z)dz + \int_{\Delta_1^2} f(z)dz - \int_{\beta_3} f(z)dz + \int_{\Delta_1^3} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz \\ &= \int_{\Delta_1^1} f(z)dz + \int_{\Delta_1^2} f(z)dz \int_{\Delta_1^3} f(z)dz + \int_{\Delta_1^4} f(z)dz,\end{aligned}$$

ce qui démontre (1).

Par définition de maximum, il existe $i_1 \in \{1, \ldots, 4\}$ tel que

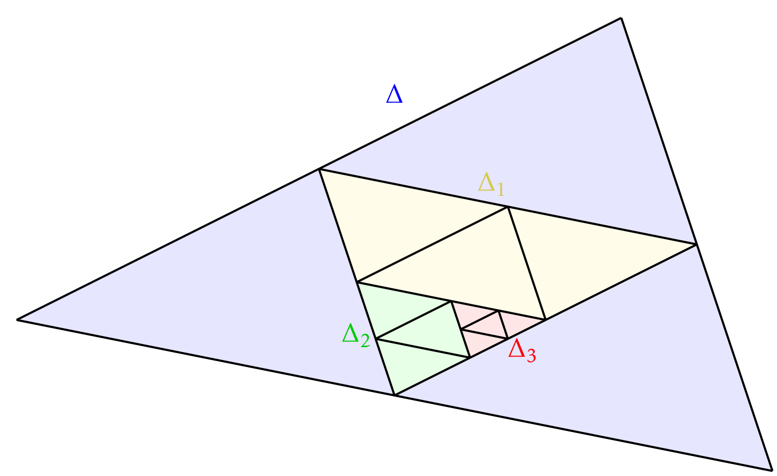
$$\left|\int_{\partial\Delta_1^{i_1}} f(z)dz\right| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\left\{\left|\int_{\partial\Delta_1^{i}} f(z)dz\right|\right\}.$$

Notons $\Delta_1 := \Delta_1^{i_1}$. On a

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leqslant 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right|.$$

En réitérant ce processus de subdivision, on trouve une suite de triangles

$$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \supseteq \cdots$$



tels que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\ell(\partial\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\ell(\partial\Delta_n), \quad \delta(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\delta(\Delta_n) \quad \text{et} \quad \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \leqslant 4\left|\int_{\partial\Delta_{n+1}} f(z)dz\right|.$$

Par récurrence, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ell(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\ell(\partial\Delta), \quad \delta(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\delta(\Delta) \quad \text{et} \quad \left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on choisit un point $z_n \in \Delta_n$ (par exemple, le barycentre de Δ_n). La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy, en effet : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^N}\delta(\Delta) < \varepsilon$. Alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \geqslant N$ et $q \geqslant \mathbb{N}$, on a $z_p \in \Delta_p \subset \Delta_N$ et $z_q \in \Delta_p \subset \Delta_N$ et donc

$$|z_p - z_q| \leqslant \delta(\Delta_N) = \frac{1}{2^N}\delta(\Delta) < \varepsilon.$$

Comme $\mathbb{C}$ est complet (par rapport à la topologie euclidienne), la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $z_\infty \in U$ (en fait, on peut facilement vérifier que $\{z_\infty\} = \bigcap_{n\geqslant 1}\Delta_n$). Par hypothèse, f est holomorphe sur U, il existe donc une fonction continue $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(z_\infty) = 0$ et telle que

$$f(z) = f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty) + (z - z_\infty)\varepsilon(z).$$

Par intégration sur $\partial\Delta_n^{i_n}$, on obtient

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n}\Big(f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty)\Big)dz + \int_{\partial\Delta_n}(z - z_\infty)\varepsilon(z)dz.$$

Or la fonction $z \mapsto f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty)$ est affine, donc admet une primitive, et donc

$$\int_{\partial\Delta_n}\Big(f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty)\Big)dz = 0.$$

D'autre part, on a

$$\left|\int_{\partial\Delta_n}(z - z_\infty)\varepsilon(z)dz\right| \leqslant \ell(\partial\Delta_n)\sup_{z\in\partial\Delta_n}\Big|(z - z_\infty)\varepsilon(z)\Big| \leqslant \ell(\partial\Delta_n)\delta(\Delta_n)\sup_{z\in\partial\Delta_n}|\varepsilon(z)| \leqslant \frac{1}{4^n}\ell(\partial\Delta)\delta(\Delta)\varepsilon_n,$$

où nous avons noté $\varepsilon_n = \sup_{z\in\partial\Delta_n}|\varepsilon(z)|$. Donc on obtient

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n}(z - z_\infty)\varepsilon(z)dz\right| \leqslant \frac{4^n}{4^n}\ell(\partial\Delta)\delta(\Delta)\varepsilon_n = \ell(\partial\Delta)\delta(\Delta)\varepsilon_n.$$

Or $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ car ε est continue et $\varepsilon(z_\infty) = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons donc

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| = 0.$$

□

2 Théorème de Cauchy sur un ouvert étoilé

Comme conséquence du lemme de Goursat, et du critère d'existence de primitive démontré dans le chapitre III, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.1: *Soit U un ouvert **étoilé**. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors f admet une primitive sur U.*

Démonstration. Le lemme de Goursat nous garantit que $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ pour tout triangle Δ de U. Donc d'après le second critère d'existence de primitive, f admet une primitive sur U. □

Remarque 2.2: Nous verrons au chapitre V, que la « bonne » hypothèse pour cet énoncé est en fait l'hypothèse *ouvert simplement connexe*, plus générale et bien plus utile que la notion d'ouvert étoilé.

On en déduit le théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés.

Théorème 2.3 (Cauchy sur un ouvert étoilé): *Soit U un ouvert étoilé. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U, on a*

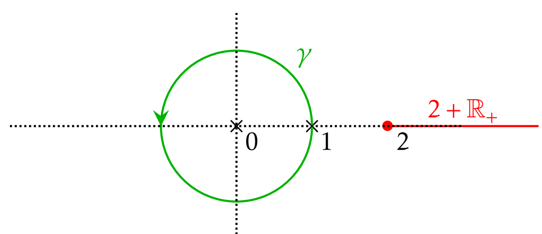
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.1, f étant holomorphe sur U, elle admet une primitive. Donc d'après le chapitre III, l'intégrale le long de tout lacet est nulle. □

Exemple 2.4: Soit γ le lacet défini par $\gamma(t) = e^{it}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\int_\gamma \frac{e^{\sin z}\cosh\left(z^4 - \sin(z^2)\right)}{z-2} dz = 0.$$

En effet, la fonction $z \mapsto \dfrac{e^{\sin z}\cosh\left(z^4 - \sin(z^2)\right)}{z-2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ et en particulier, elle est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (2 + \mathbb{R}_+)$ qui est un ouvert étoilé. Comme par ailleurs le chemin γ est contenu dans $\mathbb{C} \setminus (2 + \mathbb{R}_+)$, on en déduit que l'intégrale ci-dessus est nulle par une application du théorème de Cauchy.



3 Formules de Cauchy pour un cercle

3.1 Formule de Cauchy à l'ordre 0

Le théorème de Cauchy nous permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.1 (Formule de Cauchy sur un disque): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Soit $z_0 \in U$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Alors, pour tout $z \in B(z_0, r)$, on a*

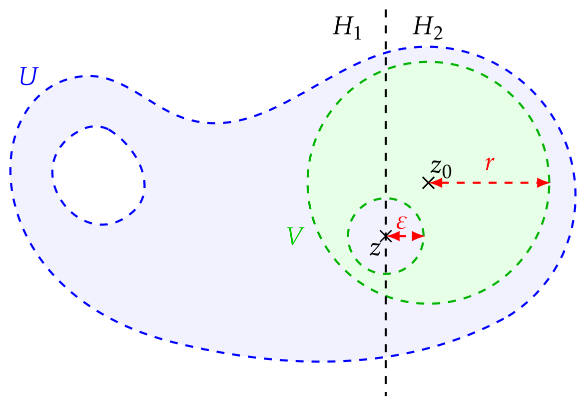
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

où $\int_{C(z_0,r)}$ désigne l'intégrale le long du chemin $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

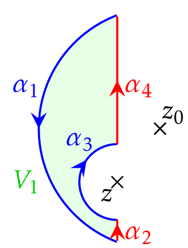
Remarque 3.2: Ce théorème montre en particulier que pour tout $z \in B(z_0, r)$ la valeur de $f(z)$ est complètement déterminée par la valeur de f sur le bord de $B(z_0, r)$.

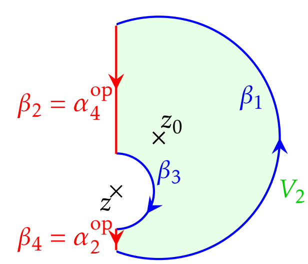
Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Soit $z \in B(z_0, r)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(z, \varepsilon) \subset B(z_0, r)$. On note $V = B(z_0, r) \setminus \overline{B}(z, \varepsilon)$ On découpe V en 2 parties, en l'intersectant avec les demi-plans

$$H_1 = \{w \in \mathbb{C}\ ;\ \ \mathrm{Re}(w) \leqslant \mathrm{Re}(z)\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{w \in \mathbb{C}\ ;\ \ \mathrm{Re}(w) \geqslant \mathrm{Re}(z)\}$$



Notons $V_1 = V \cap H_1$ et $V_2 = V \cap H_2$. On paramètre le bord ∂V_1 de V_1 et ∂V_2 de V_2 par des chemins $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4$ et $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3 \vee \beta_4$ comme sur les dessins suivants :





On a

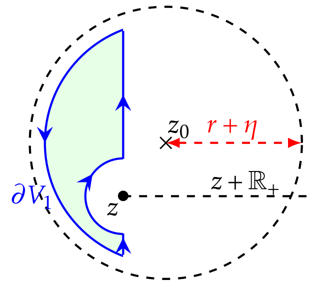
$$\begin{aligned}
\int_{\partial V_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\partial V_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\alpha_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_3} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_4} \frac{f(w)}{w-z} dw \\
&\quad + \int_{\beta_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\beta_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\beta_3} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\beta_4} \frac{f(w)}{w-z} dw \\
&= \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw.
\end{aligned}$$

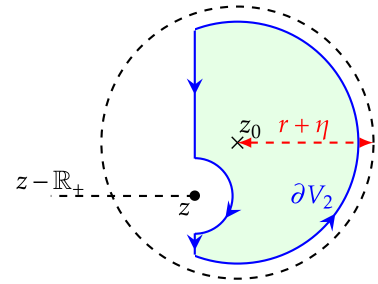
Ici, nous avons utilisé

$$\int_{\beta_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\alpha_4^{\mathrm{op}}} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\int_{\alpha_4} \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad \int_{\beta_4} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\alpha_2^{\mathrm{op}}} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\int_{\alpha_2} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\beta_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{et} \quad \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\int_{\beta_3} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\alpha_3} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Par ailleurs, en prenant $\eta > 0$ tel que $B(z_0, r+\eta) \subset U$, on a $\partial V_1 \subset B(z_0, r+\eta) \setminus (z + \mathbb{R}_+)$ et $\partial V_2 \subset B(z_0, r+\eta) \setminus (z - \mathbb{R}_+)$.





Comme $B(z_0, r+\eta) \setminus (z+\mathbb{R}_+)$ et $B(z_0, r+\eta) \setminus (z-\mathbb{R}_+)$ sont des ouverts étoilés sur lesquels la fonction $w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ est holomorphe, le théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés implique alors que

$$\int_{\partial V_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0 \quad \text{et que} \quad \int_{\partial V_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Par ce qui précède, on en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ (et que le terme de gauche est indépendant de ε), il suffit de démontrer que

$$2i\pi f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{2}$$

Comme f est holomorphe il existe une fonction continue $\delta : U \to \mathbb{C}$ telle que $\delta(z) = 0$ et telle que, pour tout $w \in U$, on a

$$f(w) = f(z) + (w-z)f'(z) + (w-z)\delta(w).$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{w-z} dw + \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{(w-z)f'(z)}{w-z} dw + \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{(w-z)\delta(w)}{w-z} dw \\ &= f(z) \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{1}{w-z} dw + f'(z) \int_{C(z,\varepsilon)} dw + \int_{C(z,\varepsilon)} \delta(w) dw. \end{aligned}$$

Nous avons $\int_{C(z,\varepsilon)} \frac{1}{w-z} dw = 2i\pi$, en effet

$$\int_{C(z,\varepsilon)} \frac{1}{w-z} dw = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{z+\varepsilon e^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi.$$

On a aussi $\int_{C(z,\varepsilon)} dw = 0$ car la fonction $z \mapsto 1$ admet une primitive.

Il reste donc à observer que

$$\left| \int_{C(z,\varepsilon)} \delta(w) dw \right| = \ell(C(z,\varepsilon)) \max_{w \in C(z,\varepsilon)} |\delta(w)| = 2\pi\varepsilon \max_{w \in C(z,\varepsilon)} |\delta(w)| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc que $\int_{C(z,\varepsilon)} \delta(w) dw \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui démontre (2) et conclu la preuve.

□

Exemple 3.3: On a par exemple

$$\int_{C(1,2)} \frac{dz}{z+i} = 2i\pi, \quad \int_{C(0,2)} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{z-1} dz = \sqrt{2} i\pi \quad \text{et} \quad \int_{C(2,4)} \frac{e^{iz}}{z-i} dz = \frac{2i\pi}{e}.$$

3.2 Formules de Cauchy à l'ordre n

Comme conséquence de la formule de Cauchy, nous obtenons le résultat remarquable suivant.

Théorème 3.4 (Formule de Cauchy à l'ordre 1): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors $f' : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe. De plus, pour tout $z_0 \in U$ et pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ on a,*

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Montrons déjà que $f'(z)$ est bien donné par la formule annoncée en calculant le taux d'accroissement. Soit $z \in B(z_0, r)$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(z, \varepsilon) \subset B(z_0, r)$. Alors pour tout $h \in B(0, \varepsilon)$, le théorème 3.1 implique alors que

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2i\pi h}\left(\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z-h} dw - \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw\right) = \frac{1}{2i\pi h} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)\big((w-z)-(w-z-h)\big)}{(w-z-h)(w-z)} dw \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)} dw \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.
\end{aligned}$$

Ici pour faire le passage à la limite sous l'intégrale, nous utilisons le critère séquentiel de limite et le théorème de passage à la limite sous le signe intégral. Nous écrivons ici proprement les détails.

D'après la proposition 2.10 du chapitre I, pour montrer que

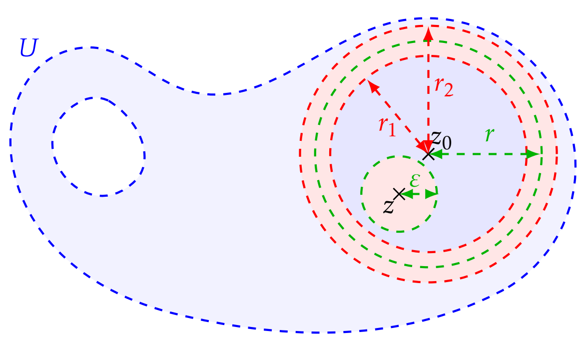
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)} dw \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

il suffit de montrer que pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $B(0, \varepsilon)$ qui converge vers 0, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)} dw \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

On fixe donc une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $B(0, \varepsilon)$ qui converge vers 0. On fixe aussi $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $r_1 < r < r_2$ et tels que

$$\overline{B}(z, \varepsilon) \subset B(z_0, r_1) \quad \text{et tels que} \quad \overline{B}(z_0, r_2) \subset U.$$



On note $A(r_1, r_2) := \{w \in \mathbb{C} \; ; \; r_1 < |w| < r_2\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $g_n : A(r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ par

$$g_n(w) = \frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)}.$$

En notant par ailleurs $g(w) = \dfrac{f(w)}{(w-z)^2}$, on a que g_n converge uniformement vers g sur $A(r_1, r_2)$. En effet, pour tout $w \in A(r_1, r_2)$,

$$\begin{aligned}
|g_n(w) - g(w)| &= \left|\frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)} - \frac{f(w)}{(w-z)^2}\right| = \left|\frac{f(w)}{(w-z)}\right| \cdot \left|\frac{1}{w-z-h_n} - \frac{1}{w-z}\right| = \left|\frac{f(w)}{(w-z)}\right| \cdot \left|\frac{h_n}{(w-z-h_n)(w-z)}\right| \\
&= \left|\frac{f(w)}{(w-z)^2}\right| \cdot \left|\frac{h_n}{w-z-h_n}\right| \leqslant \frac{|f(w)|}{(r_1 - |z-z_0|)^2} \cdot \frac{|h_n|}{r_1 - |z-z_0|} \leqslant \frac{M}{(r_1 - |z-z_0|)^2} \cdot \frac{|h_n|}{r_1 - \varepsilon - |z-z_0|}.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé que $|w-z| > r_1 - |z-z_0|$ et que $|w-z-h_n| > r_1 - \varepsilon - |z-z_0|$ pour tout $w \in A(r_1, r_2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici, $M \in \mathbb{R}_+$ désigne un nombre réel tel que $|f(w)| \leqslant M$ pour tout $w \in A(r_1, r_2)$. Un tel M existe car f est continue sur $\overline{A}(r_1, r_2)$ qui est un compact.

Comme le majorant $\dfrac{M}{(r_1 - |z-z_0|)^2} \cdot \dfrac{|h_n|}{r_1 - \varepsilon - |z-z_0|}$ est indépendant de $w \in A(r_1, r_2)$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que g_n converge uniformément vers g sur $A(r_1, r_2)$ et en particulier uniformément sur les compacts. On peut donc appliquer la proposition 5.3 du Chapitre III pour en déduire que

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)} dw = \int_{C(z_0,r)} g_n(w) dw \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{C(z_0,r)} g(w) dw = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw,$$

comme annoncé plus haut.

Pour montrer que f' est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $B(z_0, r)$, on fait de même en calculant le taux d'accroissement. Soit $z \in B(z_0, r)$ et soit $h \neq 0$ tel que $z + h \in B(z_0, r)$. La formule démontrée précédemment implique alors que

$$\begin{aligned}
\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} &= \frac{1}{2i\pi h}\left(\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h)^2} dw - \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw\right) = \frac{1}{2i\pi h} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)\big((w-z)^2 - (w-z-h)^2\big)}{(w-z-h)^2(w-z)^2} dw \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)\big(2(w-z) - h\big)}{(w-z-h)^2(w-z)^2} dw \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw.
\end{aligned}$$

Ici pour faire le passage à la limite sous l'intégrale, nous utilisons le critère séquentiel de limite et le théorème de passage à la limite sous le signe intégral comme précédement. Ceci montre donc que f' est $\mathbb{C}$-dérivable et que $f''(z) = \dfrac{2}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$.

□

Exemple 3.5: On a par exemple

$$\int_{C(1,2)} \frac{dz}{(z+i)^2} = 0, \quad \int_{C(0,2)} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} z)}{(z-1)^2} dz = \frac{\sqrt{2} i \pi^2}{4} \quad \text{et} \quad \int_{C(2,4)} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2} dz = -\frac{2\pi}{e}.$$

Un argument tout à fait similaire implique le résultat suivant (nous en laissons la démonstration en exercice).

Théorème 3.6 (Formule de Cauchy à l'ordre n): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z_0 \in U$ et pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ on a,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Exemple 3.7: On a par exemple $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{(z-1)^3}dz = \frac{-i\pi^3}{16\sqrt{2}}$.

4 Théorème de Morera

Théorème 4.1 (Morera): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U. Si pour tout triangle Δ inclus dans U,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

alors f est holomorphe.

Démonstration. L'holomorphie est une propriété qui peut se vérifier localement. Soit B un disque ouvert inclus dans U. Comme l'intégrale de f le long de tout triangle dans U est nulle, en particulier, l'intégrale le long de tout triangle dans B est nulle. Comme B est un ouvert étoilé, d'après le second critère d'existence de primitive, $f|_B$ admet une primitive F_B sur B. Par définition, F_B est holomorphe, donc d'après le théorème 3.4, $f|_B = F_B'$ est holomorphe. Ceci étant vraie pour tout disque inclus dans U, on en déduit que f est holomorphe sur U. □

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Voici un diagramme récapitulatif :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f \text{ admet une primitive}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Chap III cor 4.6 + thm 4.8}"'] & \boxed{f \text{ est holomorphe}} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Chap IV lem 1.1 + thm 4.1}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\text{Si U est étoilé !}"', "\text{Chap IV thm 2.3}"] \\
\boxed{\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ pour tout lacet}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{trivial}"'] & \boxed{\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \text{ pour tout triangle } \Delta \subset U}.
\end{tikzcd}$$

De plus, si U est un ouvert étoilé, alors toutes les flèches sont des équivalences d'après le théorème de Cauchy.

5 Analycité des fonctions holomorphes

Nous avons vu précédemment que les fonctions holomorphes sont en fait infiniment $\mathbb{C}$-dérivables, nous avons même mieux.

Théorème 5.1: *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors f est analytique sur U.*

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème plus précis suivant.

Théorème 5.2: *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$. Alors la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} w^n$ a un rayon de convergence R vérifiant $R \geqslant r$. De plus, pour tout $z \in B(z_0, r)$, on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$. Soit $0 < r' < r$. D'après la formule de Cauchy, pour tout $z \in B(z_0, r')$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \quad \text{car} \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1.$$

De plus pour tout r_1, r_2 tels que $|z - z_0| < r_1 < r' < r_2 < r$ la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ converge normalement sur la couronne $A(r_1, r_2) := \{w \in \mathbb{C} \,;\, r_1 < |w| < r_2\}$. En effet, $|f|$ est bornée sur cette couronne par $M = \sup_{w \in A(r_1,r_2)} |f(w)|$ et on a donc, pour tout $w \in A(r_1, r_2)$ on a $\left|\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M}{r_1}\left(\frac{|z-z_0|}{r_1}\right)^n$. Comme $|z-z_0| < r_1$ on en déduit la convergence normale.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion de $\int$ et $\sum$ (corollaire 5.4 du chapitre III) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r')} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r')} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right) dw \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r')} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r')} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé les formules de Cauchy d'ordre n dans la dernière ligne. Cette relation étant vrai pour tout $z \in B(z_0, r')$ et pour tout $r' < r$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $z \in B(z_0, r)$. Par définition du rayon de convergence, il en découle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} w^n$ est plus grand que r. □

Remarque 5.3: En plus de montrer que la série de Taylor de f en tout point converge, ce résultat donne une information importante sur le rayon de convergence de la cette série entière.

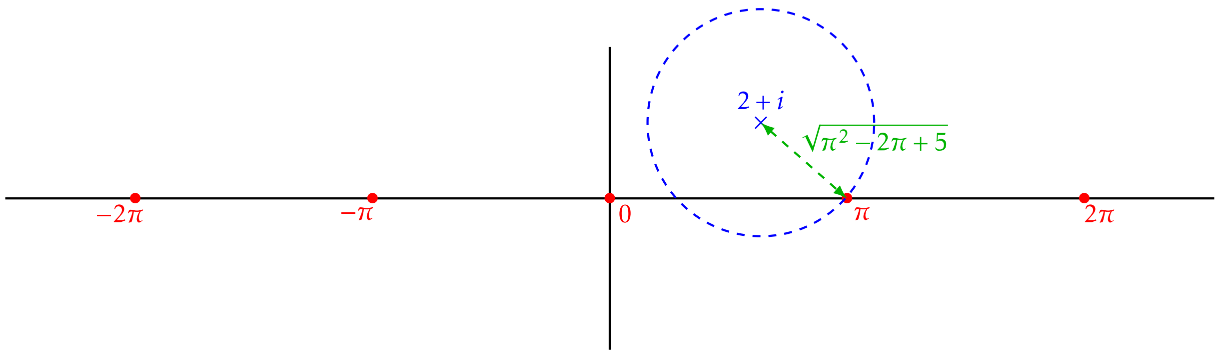
Remarque 5.4: Ce théorème implique que tous les résultats connus pour les fonctions analytiques restent vrais pour les fonctions holomorphes et réciproquement. Par exemple,

1. ***Le principe des zéros isolés et le principe de prolongement analytique sont vérifiés par les fonctions holomorphes***.
2. Si f est une fonction analytique qui ne s'annule jamais, alors $\frac{1}{f}$ est analytique.
3. Les séries entières sont analytiques sur leur disque de convergence.

Exemple 5.5: La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ est analytique. De plus le rayon de convergence du développement en série entière de f au point $2 + i$ est

$$R = \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}.$$

La fonction sin s'annule précisément sur $\pi\mathbb{Z}$, donc f est holomorphe sur $U = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. La distance entre $2+i$ et $\pi\mathbb{Z}$ est $|2+i-\pi| = \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}$. Clairement $R \leqslant \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}$ puisque sinon, la fonction f s'étendrait de façon holomorphe en π, mais ça n'est pas le cas puisque $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to \pi$. D'autre part, puisque $B(2+i, \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}) \subset U$, le théorème 5.2 implique que $R \geqslant \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}$. On obtient donc bien le résultat annoncé.



6 Un petit résumé

Théorème 6.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est holomorphe sur U.*
2. *f est analytique sur U.*
3. *f est $\mathscr{C}^1$ sur U et vérifie les équations de Cauchy-Riemann.*
4. *$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ pour tout triangle Δ inclus dans U.*

Les références des résultats nécessaires pour les différentes implications peuvent être résumées dans le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{f \text{ est analytique}} \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{Chap II thm 4.1}"] & \boxed{f \text{ est holomorphe}} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\text{Chap IV thm 5.1}"] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{Chap I thm 4.2+Chap IV thm 3.5}"] \arrow[d, Rightarrow, shift left, "\text{Goursat}"] & \boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ et vérifie CR}} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\text{Chap I thm 4.2}"] \\
& \boxed{\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \text{ pour tout triangle } \Delta \subset U}. \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\text{Morera}"] &
\end{tikzcd}
$$

7 Applications

7.1 Formule de la moyenne

Un conséquence immédiate de la formule de Cauchy est la suivante.

Théorème 7.1 (Formule de la moyenne): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. La formule de cauchy à l'ordre 0 implique

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

□

7.2 Inégalités de Cauchy

En considérant le module dans les formules de Cauchy, nous obtenons le résultat important suivant :

Théorème 7.2 (Inégalités de Cauchy): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leqslant \frac{n!}{r^n} \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)|$$

Démonstration. La formule de Cauchy à l'ordre n implique

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

En utilisant la majoration démontrée au chapitre III, on obtient

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \ell(C(z_0, r)) \max_{z \in C(z_0,r)} \left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \right|.$$

Par ailleurs, on a $\ell(C(z_0, r)) = 2\pi r$ et pour tout $w \in C(z_0, r)$ on a $\left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|f(w)|}{r^{n+1}}$. D'où le résultat. □

Remarque 7.3: Avec les notations du théorème, les cas $n = 0$ et $n = 1$ s'écrivent :

$$\left| f(z_0) \right| \leqslant \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)| \quad \text{et} \quad \left| f'(z_0) \right| \leqslant \frac{1}{r} \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)|.$$

7.3 Théorème de Liouville

Commençons par une définition.

Définition 7.4: Une *fonction entière* est une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Une fonction entière est donc juste une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. C'est de la terminologie classique. Il ne faut bien entendu pas confondre fonction entière et série entière. On peut néanmoins remarquer que le théorème 5.2 implique qu'une fonction entière peut s'écrire comme une série entière (centrée en 0) de rayon de convergence $R = +\infty$, et réciproquement, une telle série entière (de rayon de convergence $= +\infty$) est une fonction entière.

Théorème 7.5 (Liouville): *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Si f est bornée, alors f est constante.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(z)| \leqslant C$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy pour f', on obtient

$$\left|f'(z_0)\right| \leqslant \frac{1}{r} \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)| \leqslant \frac{C}{r}.$$

En faisant tendre $r \to +\infty$, on en déduit $\left|f'(z_0)\right| = 0$. Donc $f' \equiv 0$. D'après le corollaire 4.4 du Chapitre I, on en déduit que f est constante. □

Nous renvoyons aux exercice 8 et 9 pour des versions plus fortes de ce théorème. La version la plus forte de ce résultat est le théorème de Picard, que nous mentionnons ici sans démonstration car celle-ci est bien plus élaborée. (Cet énoncé est donné à titre culturel et ne saurait être utilisé pour résoudre des exercices ou durant les contrôles !)

Théorème 7.6 (petit théorème de Picard): *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Si f omet au moins deux points distincts de $\mathbb{C}$, alors f est constante.*

7.4 Théorème de d'Alembert-Gauss

On peut maintenant démontrer que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.

Théorème 7.7 (d'Alembert Gauss): *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme non-constant. Alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que P ne s'annule jamais. Alors le fonction $f : z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, c'est à dire une fonction entière. De plus f est bornée car $|f(z)| \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. D'après le théorème de Liouville, on en déduit que f est constante et que donc P est constant, une contradiction. □

7.5 Théorème de l'image ouverte

Théorème 7.8 (Théorème de l'image ouverte): *Soit U un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non-constante. Alors $f(U)$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.*

Nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 7.9: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si*

$$|g(z_0)| < |g(z)| \ \ \forall z \in C(z_0, r),$$

alors il existe $z \in B(z_0, r)$ tel que $g(z) = 0$.

Démonstration du lemme. Supposons par l'absurde que g ne s'annule jamais sur $B(z_0, r)$. Comme g ne s'annule pas non plus sur $C(z_0, r)$, on en déduit que la fonction $h = \frac{1}{g}$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{B}(z_0, r)$. Par hypothèse, $|g(z_0)| < |g(z)|$ pour tout $z \in C(z_0, r)$, donc

$$|h(z_0)| > |h(z)| \quad \forall z \in C(z_0, r).$$

Mais par ailleurs, en appliquant l'inégalité de Cauchy à l'ordre 1 à la fonction h, on obtient

$$|h(z_0)| \leqslant \max_{z \in C(z_0, r)} |h(z)|.$$

Ce qui est une contradiction. □

Démonstration du théorème de l'image ouverte. Puisque f est holomorphe, elle est continue. En particulier $f(U)$ est connexe. Il faut donc montrer que $f(U)$ est ouvert. Soit $w_0 \in f(U)$ et soit $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = w_0$. Par le principe des zéros isolés, il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$ et tel que z_0 soit l'unique point de $\overline{B}(z_0, r)$ tel que $f(z) = w_0$. En effet, si il n'existait pas de tel $r > 0$ alors il existerait une suite de zéros de $f - w_0$ convergent vers z_0, ce qui impliquerait que f est constante. Notons maintenant

$$\varepsilon := \min_{z \in C(z_0, r)} |f(z) - w_0|.$$

Nous allons montrer que $B(w_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset f(U)$. Soit $w \in B(w_0, \frac{\varepsilon}{2})$. Par inégalité triangulaire inversée, on a, pour tout $z \in C(z_0, r)$,

$$|f(z) - w| \geqslant |f(z) - w_0| - |w - w_0| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, on a

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le lemme à la fonction $g : z \mapsto f(z) - w$ implique qu'il existe $z \in B(z_0, r)$ tel que $g(z) = 0$ et donc $f(z) = w$. En particulier, $w \in f(U)$. □

Exemple 7.10: On peut appliquer ce théorème pour montrer que si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non-constante, alors son image n'est pas contenu dans une droite, ou plus généralement, son image n'est pas contenu dans le graphe d'une fonction réelle.

7.6 Principe du maximum

Théorème 7.11 (Principe du maximum): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit $z_0 \in U$. Si z_0 est un maximum local de la fonction $|f|$, alors f est constante.*

Démonstration. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ et tel que

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)| \quad \text{pour tout} \quad z \in B(z_0, r). \tag{3}$$

Notons $w_0 := f(z_0)$. Supposons par l'absurde que f n'est pas constante. Par le théorème de l'image ouverte, $\Omega := f(B(z_0, r))$ est ouvert. Comme de plus $w_0 \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Soit $w_1 \in B(w_0, \varepsilon)$ un point tel que $|w_1| > |w_0|$. Comme $B(w_0, \varepsilon) \subset \Omega$, il existe $z_1 \in B(z_0, r)$ tel que $f(z_1) = w_1$. On en déduit donc que

$$|f(z_1)| > |f(z_0)|$$

contredisant (3) □

Corollaire 7.12: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui s'étend de façon continue sur $\overline{U}$. Alors $|f|$ atteint son maximum sur ∂U. De plus, si f est non-constante, alors $|f|$ atteint son maximum uniquement sur ∂U.*

Démonstration. Comme U est borné, $\overline{U}$ est borné aussi. En particulier, $\overline{U}$ est compact. Comme f est continue sur $\overline{U}$, $|f|$ atteint son maximum en un point $z_0 \in \overline{U}$. Notons que $\overline{U} = U \cup \partial U$. D'après le principe du maximum, si $z_0 \in U$, alors f est constante, et donc $|f|$ atteint aussi son maximum en tout point de ∂U. Si f est non-constante, alors le principe du maximum implique que $z_0 \in \partial U$. □

7.7 Convergence de suites de fonctions holomorphes

Théorème 7.13 (Weierstrass): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes $f_n : U \to \mathbb{C}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers une fonctions $f : U \to \mathbb{C}$, alors :*

1. *f est holomorphe,*
2. *pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément sur les compacts.*

Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons la généralisation suivante des inégalités de Cauchy.

Lemme 7.14: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Soit $0 < r' < r$. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in B(z_0, r')$ on a*

$$\left|g^{(k)}(z)\right| \leqslant \frac{k!r}{(r-r')^{k+1}} \max_{z\in C(z_0,r)} |g(z)|.$$

Démonstration du lemme. Soit $z \in B(z_0, r')$. La formule de Cauchy à l'ordre k implique

$$g^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{g(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$$

En utilisant la majoration démontrée au chapitre III, on obtient

$$\left|g^{(k)}(z_0)\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \ell(C(z_0,r)) \max_{z\in C(z_0,r)} \left|\frac{g(w)}{(w-z)^{k+1}}\right|.$$

Par ailleurs, on a $\ell(C(z_0, r)) = 2\pi r$. De plus, pour tout $w \in C(z_0, r)$ on a $|w-z| \geqslant r-r'$, et donc

$$\left|\frac{g(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\right| = \frac{|g(w)|}{(r-r')^{k+1}}.$$

D'où le résultat. □

Démonstration du théorème de Weierstrass. En vu du théorème de Morera, pour montrer que f est holomorphe, il suffit de démontrer que pour tout triangle $\Delta \subset U$, on a

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0. \tag{4}$$

Soit $\Delta \subset U$. D'après le lemme de Goursat, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers f, on peut appliquer le théorème de convergence sous le signe intégral pour obtenir

$$0 = \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\partial\Delta} f(z)dz,$$

ce qui implique (4).

Montrons maintenant la seconde assertion. On peut déjà voir que $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f^{(k)}$ en utilisant les formule de Cauchy. On effet, pour tout $z_0 \in U$ si $r > 0$ est tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ on a

$$f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f_n(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{k!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw = f^{(k)}(z_0).$$

Pour montrer que l'on a convergence uniforme sur les compacts, nous allons raffiner cet argument. Soit $K \subset U$ un compact. Il existe un nombre fini de points $z_1, \ldots, z_m \in K$ et des réels $0 < r' < r$ tels que :

$$\overline{B}(z_j, r) \subset U \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{et} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(z_j, r').$$

En effet, il suffit de prendre $0 < r < \inf\limits_{\substack{z\in K \\ w\in\mathbb{C}\setminus U}} |z-w|$ et $r' = \frac{r}{2}$ puis d'appliquer Borel-Lebesgue.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $C(z_j, r)$ est compact et donc, comme f_n converge vers f uniformément sur les compacts, à ε fixé, il existe $N_{\varepsilon,j}$ tel que pour tout $n \geqslant N_{\varepsilon,j}$ on a

$$\max_{w\in C(z_j,r)} |f_n(w) - f(w)| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N_\varepsilon := \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} N_{\varepsilon,j}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $z \in K$ on a

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

On fixe donc $\varepsilon > 0$. Notons $C := \frac{k!r}{(r-r')^{k+1}}$ et posons $N := N_{\frac{\varepsilon}{C}}$. Pour tout $z \in K$, comme $K \subset \bigcup_{j=1}^m B(z_j, r')$, il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $z \in B(z_j, r')$. Pour tout $n \geqslant N$, appliquons le lemme à la fonction $g_n = f_n - f$ et à la boule $\overline{B}(z_j, r)$. On obtient,

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \leqslant C \max_{z\in C(z_j,r)} |f_n(z) - f| \leqslant C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

d'où le résultat. □

Exemple 7.15 (Fonction ζ de Riemann): La fonction ζ (dite *fonction zeta de Riemann*) définie par

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est une fonction holomorphe sur le demi plan $U_{\mathrm{Re}>1} := \{s \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Ici, on utilise la notation $\frac{1}{n^s} := e^{-s\ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : U_{\mathrm{Re}>1} \to \mathbb{C}$ la fonction $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$. Clairement f_n est holomorphe (sur $\mathbb{C}$) comme somme de fonctions holomorphe. Il s'agit de montrer que f_n converge uniformément sur les compacts de $U_{\mathrm{Re}>1}$. Soit $K \subset U_{\mathrm{Re}>1}$ un compact. Soit $\alpha := \min_{s \in K} \mathrm{Re}(s)$. Le réel α est bien défini car K est compact et de plus $\alpha > 1$. Donc pout tout $s \in K$, on a

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| := \left|e^{-s \ln n}\right| = \left|e^{-\mathrm{Re}(s)\ln n - i\,\mathrm{Im}(s)\ln n}\right| = e^{-\mathrm{Re}(s)\ln n} \leqslant e^{-\alpha \ln n} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Par le critère de convergence de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc la série de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur le compact K, et donc la suite des sommes partielles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K. Ceci étant vrai pour tout compact $K \subset U_{\mathrm{Re}>1}$, le résultat annoncé découle du théorème de Weierstrass. □

Remarque 7.16: Il est vrai, bien que la démonstration soit non-triviale, que la fonction ζ s'étende en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Cette fonction est d'une importance fondamentale en théorie des nombres.

7.8 Intégrales à paramètres

De façon analogue aux résultats de dérivation sous l'intégrale dans le cadre réel, on a

Théorème 7.17: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Soit $f : U \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que :*

1. *Pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur U.*
2. *Pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction $\varphi_K : I \to \mathbb{R}_+$ integrable telle que*

$$|f(z,t)| \leqslant \varphi_K(t) \quad \forall (z,t) \in K \times I.$$

Alors, la fonction $F : U \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) := \int_I f(z,t)dt$ est bien définie et holomorphe. De plus, en notant $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) := f_t'(z)$ pour tout $(z,t) \in U \times I$, on a

$$F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt \quad \forall z \in U.$$

Remarque 7.18: Notons que si I est un segment, l'hypothèse de domination est toujours vérifiée.

Remarque 7.19: Ce théorème reste vrai pour des hypothèses plus générales sur f, nous l'énonçons ici sous cette forme pour des raisons de simplicité.

La façon la plus naturelle de démontrer ce résultat est sans doute d'utiliser les théorèmes de dérivation partielle sous le signe intégrale et les équations de Cauchy-Riemman. Mais ici nous faisons le choix de le démontrer à l'aide des formules de Cauchy et du théorème de Fubini.

Démonstration. Remarquons déjà que la fonction F est bien définie. En effet, pour tout $z \in U$, l'ensemble $\{z\}$ est un compact. Donc l'hypothèse de domination implique que

$$|f(z,t)| \leqslant \varphi_{\{z\}}(t) \quad \forall t \in I.$$

Puisque $\varphi_{\{z\}}$ est intégrable, on en déduit que $t \mapsto |f(z,t)|$ l'est aussi, et donc $F(z)$ est bien définie.

Montrons maintenant que F est holomorphe. Pour cela nous allons utiliser le théorème de Morera. Il suffit donc de montrer que $\int_{\partial\Delta} F(z)dz = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset U$. Soit Δ un triangle contenu dans U. Notons $\gamma : [a,b] \to U$ une paramétrisation de $\partial\Delta$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} F(z)dz &= \int_{\gamma} F(z)dz = \int_a^b F(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_a^b \left(\int_I f(\gamma(s),t)dt\right)\gamma'(s)ds \\ &= \int_a^b \left(\int_I f(\gamma(s),t)\gamma'(s)dt\right)ds = \int_I \left(\int_a^b f(\gamma(s),t)\gamma'(s)ds\right)dt = \int_I \left(\int_{\partial\Delta} f_t(z)dz\right)dt = 0.\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le théorème de Fubini pour obtenir

$$\int_a^b \left(\int_I f(\gamma(s),t)\gamma'(s)dt\right)ds = \int_I \left(\int_a^b f(\gamma(s),t)\gamma'(s)ds\right)dt.$$

On paut faire cela car en notant $M = \max_{s\in[a,b]} \left|\gamma'(s)\right|$, on a

$$|f(\gamma(s),t)\gamma'(s)| = |\gamma'(s)| \cdot |f(\gamma(s),t)| \leqslant M\varphi_{\partial\Delta}(t) \quad \forall s \in [a,b], \ \ \forall t \in I,$$

et donc la fonction $(s,t) \mapsto f(\gamma(s),t)\gamma'(s)$ est intégrable, et on peut donc appliquer le théorème de Fubini.

Pour montrer $\int_I \left(\int_{\partial\Delta} f_t(z)dz\right)dt = 0$, nous avons juste utiliser le lemme de Goursat et notre hypothèse sur f_t pour avoir directement $\int_{\partial\Delta} f_t(z)dz = 0$.

Démontrons maintenant l'expression de F'. Soit $z \in U$, soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z,r) \subset U$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}F'(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{F(w)}{(w-z)^2}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)}\left(\int_I \frac{f(w,t)}{(w-z)^2}dt\right)dw \\ &= \int_I \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{f_t(w)}{(w-z)^2}dw\right)dt = \int_I f_t'(z)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le théorème de Cauchy à l'ordre 1 pour la fonction f_t. Nous avons aussi utiliser le théorème de Fubini, dont l'utilisation est justifiée par l'hypothèse de domination sur le compact $C(z,r)$. □

Exemple 7.20 (La fonction Γ d'Euler): La fonction Γ définie par

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

est bien définie et holomorphe sur $U_{\mathrm{Re}>0} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Ici, pour tout $t > 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $t^z := e^{z\ln t}$.

Démonstration. Notons $I :=]0,+\infty[$. Soit $K \subset U_{\mathrm{Re}>0}$ un compact. Soit $\alpha = \min_{z\in K}\mathrm{Re}(z)$ et $\beta = \max_{z\in K}\mathrm{Re}(z)$. Les deux réels α et β sont bien défini et l'on a $0 < \alpha < \beta$. Pour tout $(z,t) \in K \times I$ on a, en notant $z = x + iy$,

$$\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = \left|e^{-t}e^{(x-1+iy)\ln t}\right| = \left|e^{-t}e^{(x-1)\ln t}e^{iy\ln t}\right| = e^{-t}t^{x-1} \leqslant \varphi_K(t)$$

où $\varphi_K(t) = t^{\alpha-1}$ si $t \in]0,1]$ et $\varphi_K(t) = t^{\beta-1}e^{-t}$ si $t > 1$. La fonction φ_K est integrable : en 0 d'après le critère de Riemann car $\alpha > 0$, en $+\infty$ par comparaison exponentielle/polynôme. On peut donc appliquer le théorème 7.17 pour conclure que Γ est bien définie et holomorphe sur $U_{\mathrm{Re}>0}$. □

8 Exercices

8.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. 1. Calculer les intégrales suivantes:

(a) $I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i} dz,$

(b) $I_2 = \int_{C(2,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i} dz,$

(c) $I_3 = \int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)\cos(z)}{3z - \pi} dz,$

(d) $I_4 = \int_{C(2i,1)} \frac{e^{z^2}}{z^3(z - 2i)} dz.$

2. Calculer $\int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz$ et $\int_{C(-1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz$. En déduire $\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz$.

3. Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^2 + (1-i)z - i$. Puis calculer $\int_{C(0,2)} \frac{z-1}{z^2 + (1-i)z - i} dz$.

Exercice 2. Pour $r > 0$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{C(0,r)} (|z| - e^{\cos(z)} \sin(z) + \bar{z}) dz.$$

Exercice 3. 1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{z^3 - i}{(z-1)^2} dz,$

(b) $I_2 = \int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^3} dz,$

(c) $I_3 = \int_{C(i,5)} \frac{ze^{iz}}{(1+z)^3} dz,$

(d) $I_4 = \int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z^3(z-2)} dz.$

2. Calculer les intégrales $\int_{C(i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$ et $\int_{C(-i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$. En déduire $\int_{C(0,2)} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$.

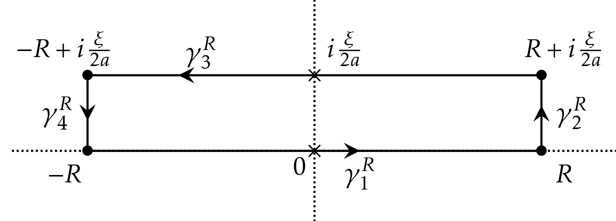
Exercice 4 (Transformé de Fourier d'une Gaussienne)**.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $G_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $G_a(t) = e^{-at^2}$. La transformé de Fourier de G_a est l'application $\widehat{G_a} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{G_a}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-i\xi t} dt.$$

Nous admettrons que $\widehat{G_a}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

1. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{G_a}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} I_a(\xi)$ où $I_a(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+i\frac{\xi}{2a})^2} dt$.

2. Nous allons maintenant montrer que $I_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par
$$f(z) = e^{-az^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, on considère le chemin $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$ représenté graphiquement ci-dessous.



(a) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et en déduire que $\int_{\gamma^R} f(z)dz = 0$ pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$.

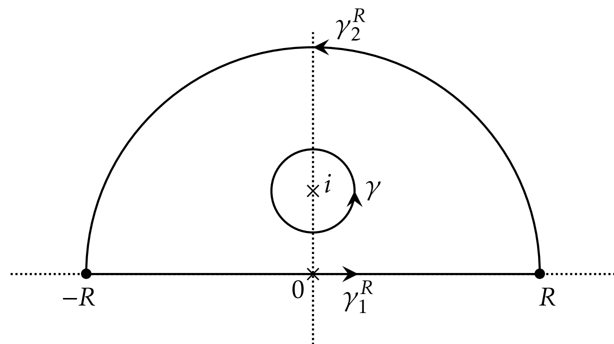
(b) Montrer que $\int_{\gamma_1^R} f(z)dz \to \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ quand $R \to +\infty$.

(c) Montrer que $\int_{\gamma_3^R} f(z)dz \to -I_a(\xi)$ quand $R \to +\infty$.

(d) Montrer que pour $j \in \{2,4\}$, $\int_{\gamma_j^R} f(z)dz \to 0$ quand $R \to +\infty$.

(e) Conclure.

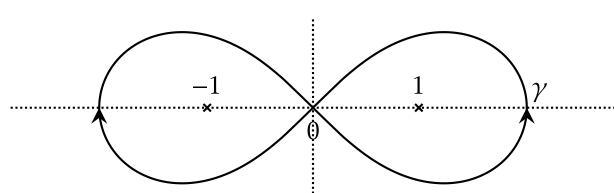
Exercice 5. On considère le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, défini par $\gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$. De plus, pour tout $R \geqslant 2$, on considère le chemin $\gamma^R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$ représenté ci-dessous.



Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

1. Montrer que f est holomorphe sur son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout $R \geqslant 2$, $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma^R} f(z)dz$.
3. À l'aide des formules de Cauchy, déterminer la valeur de $\int_\gamma f(z)dz$.
4. Montrer que $\int_{\gamma_2^R} f(z)dz \to 0$ quand $R \to +\infty$.
5. Montrer que $\int_{\gamma_1^R} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.
6. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.
7. Par la même méthode, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 6. Calculer l'integrale de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ le long du chemin γ représenté ci-dessous.



Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $B(0,1)$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Calculer $\displaystyle\int_{C(0,1)} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz$.

2. En déduire que $\displaystyle\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2f(0) + f'(0)$.

3. Utiliser une stratégie similaire pour calculer $\displaystyle\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $\mathrm{Re}(f)$ est bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 9 (Généralisation de Liouville)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non-constante. Montrer que l'image $f(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.

(Indication : Par l'absurde supposer qu'il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$ et étudier la fonction $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.)

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, montrer qu'elle y est analytique et déterminer le rayon de convergence de son développement en série entière au point z_0 indiqué.

1. $f_1(z) = \frac{1}{(1+z^2)(4-z^2)}$, en $z_0 = 1$.
2. $f_2(z) = \frac{e^{z^3-5z}}{\cosh(z^2)\cos z}$, en $z_0 = i$.
3. $f_3(z) = \frac{\sin z}{z}$, en $z_0 = 1$.

8.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 11. L'objectif de cette exercice est de donner une preuve alternative du théorème 7.11 qui ne repose pas sur le théorème de l'image ouverte. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f|$ admette un maximum local en un point $z_0 \in U$.

1. À l'aide de la formule de la moyenne, montrer que la fonction $|f|$ est constante dans un voisinage de z_0.

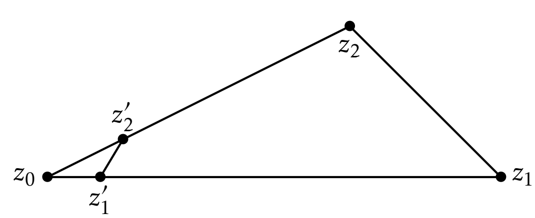
2. À l'aide des équations de Cauchy-Riemann, en déduire que f est constante dans un voisinage de z_0.

3. En déduire que f est constante sur U.

Exercice 12 (Raffinement de Goursat)**.** L'objectif de cet exercice est de démontrer la version suivante du lemme de Goursat :

> **Lemme 8.1 (Goursat):** *Soit U un ouvert. Soit Δ un triangle dans U. Soit $z_0 \in \Delta$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Alors,*
>
> $$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

1. On traite d'abord le cas où z_0 est un sommet du triangle. On dénote les deux autres sommets par z_1 et z_2.



(a) Montrer que pour tout z_1' sur le segment $[z_0, z_1]$ et pour tout z_2' sur le segment $[z_0, z_2]$, comme ci dessus, on a
$$\int_{\partial\Delta_{z_0z_1z_2}} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_{z_0z_1'z_2'}} f(z)dz.$$

(b) Montrer que quand $z_1' \to z_0$ et $z_2' \to z_0$, alors $\displaystyle\int_{\partial\Delta_{z_0z_1'z_2'}} f(z)dz \to 0$.

(c) Démontrer le lemme 8.1 dans ce cas.

2. On suppose dans cette question que $z_0 \in \partial\Delta$. À l'aide de la question précédente, démontrer le lemme 8.1 dans ce cas.

3. On suppose maintenant que $z_0 \in \mathring{\Delta}$. Démontrer le lemme 8.1 dans ce cas. Conclure.

4. Déduire de ce résultat que si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, et holomorphe sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est holomorphe sur U.

Exercice 13 (Théorème d'extension de Riemann)**.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème d'extension de Riemann à l'aide du lemme de Goursat raffiné.

Théorème 8.2 (Extension de Riemann): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ soit $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée dans un voisinage de z_0. Alors f s'étend en une fonction holomorphe sur U.*

Ici, «f bornée dans un voisinage de z_0» signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \subset U$ et tel que f est bornée sur $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. L'expression «$f$ s'étend en une fonction holomorphe sur U» signifie qu'il existe une fonction holomorphe $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ telle que $\hat{f}|_{U\setminus\{z_0\}} = f$.

On considère la fonction $F : U \to \mathbb{C}$ définie par
$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z = z_0 \\ (z - z_0)f(z) & \text{si} \quad z \neq z_0. \end{cases}$$

1. À l'aide de la question 4 de l'exercice 12, démontrer que F est holomorphe sur U.
2. À l'aide de la $\mathbb{C}$-dérivabilité de F en z_0, montrer que f s'étend en une fonction continue sur U.
3. Conclure.

Exercice 14. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $L \subset \mathbb{C}$ une droite. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f|_{U\setminus L}$ est holomorphe. Montrer que f est holomorphe. Indication : utiliser le théorème de Morera et faire une disjonction de cas selon la position du triangle par rapport à L.

Exercice 15 (Principe de reflexion de Schwarz)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On suppose que U est symétrique par rapport à l'axe réel. Notons $U_+ := U \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $U_- := U \cap \{\mathrm{Im}(z) < 0\}$. Soit $f : \overline{U_+} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f|_{U_+}$ est holomorphe et telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \overline{U_+} \cap \mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $g : \overline{U_-} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ est continue sur $\overline{U_-}$ et holomorphe sur U_-.
2. Montrer que l'on peut étendre la fonction f en une fonction continue $h : \overline{U} \to \mathbb{C}$ en posant $h(z) = f(z)$ si $z \in \overline{U_+}$ et $h(z) = g(z)$ si $z \in \overline{U_-}$.
3. Montrer que $h|_U$ est holomorphe. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 14.)

Exercice 16 (Extension de Γ)**.** Notons $U_{\mathrm{Re}>0} := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

1. Montrer que pour tout $z \in U_{\mathrm{Re}>0}$, on a
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{6}$$
2. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Utiliser l'équation (6) afin de montrer que la fonction Γ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Exercice 17 (Égalité de la moyenne et principe du maximum)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f *vérifie la propriété de la moyenne* si pout tout $z_0 \in U$ et pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r)$ on a
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$
L'objectif de cet exercice est de montrer que le principe du maximum est vérifié pour les fonctions vérifiant la propriété de la moyenne.

1. Montrer que les fonctions holomorphes vérifie la propriété de la moyenne.
2. Montrer que si f et g vérifient la propriété de la moyenne, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, les fonctions $f + \lambda g$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\overline{f}$ vérifient aussi la propriété de la moyenne.
3. Nous allons maintenant montrer l'énoncé suivant :

   Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue vérifiant la propriété de la moyenne. Soit $z_0 \in U$. Si f admet un maximum local en z_0, alors f est constante dans un voisinage de z_0.

   (a) Montrer que l'on peut supposer que $f(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$, ce que l'on fera par la suite.
   (b) On considère la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \mathrm{Re}(f(z)) - f(z_0)$. Montrer que g vérifie la propriété de la moyenne.
   (c) Montrer que $g(z_0) = 0$ et que g est à valeurs réelles.
   (d) Montrer qu'il existe un voisinage V de z_0 tel que $g(z) \leqslant 0$ pour tout $z \in V$.
   (e) En déduire que $g \equiv 0$ sur V.
   (f) Conclure.
4. Démontrer l'analogue suivant du théorème 7.11.

   Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue vérifiant la propriété de la moyenne. Soit $z_0 \in U$. Si z_0 est un maximum global de la fonction $|f|$, alors f est constante.

Exercice 18 (Lemme de Schwarz)**.** L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

> **Théorème 8.3 (Lemme de Schwarz):** *Notons $\mathbb{D} := B(0,1)$. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors :*
>
> 1. *$|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| \leqslant 1$.*
> 2. *S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}^*$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$ et que $f(z) = az$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Pour montrer ce résultat, on considère la fonction $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par
$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

2. Pour tout $0 < r < 1$, en appliquant le principe du maximum sur $B(0,r)$, montrer $|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$ pour tout $z \in B(0,r)$. En déduire la première assertion de l'énoncé.

3. Supposons que $z_0 \in d$ vérifie $|f(z_0)| = |z_0|$. À l'aide du principe du maximum, montrer que g est constante et en déduire la seconde assertion dans ce cas.

4. Supposons que $|f'(0)| = 1$. Montrer que g est constant et en déduire la seconde assertion dans ce cas.

Exercice 19 (Automorphismes du disque unité)**.** L'objectif de cet exercice est d'utiliser le lemme de Schwarz (exercice 18) afin de décrire les automorphismes (c'est à dire les biholomorphismes) de $\mathbb{D} := B(0,1)$. L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{D}$ est noté $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Pour tout $a \in \mathbb{D}$, on considère la fonction

$$f_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

1. Montrer que f_a définie un automorphisme de $\mathbb{D}$ et déterminer f_a^{-1}.

2. Montre à l'aide du lemme de Schwarz que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est un automorphisme tel que $f(0) = 0$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta}z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

3. Montrer que si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$ tel que

$$f(z) = e^{i\theta}f_a(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Exercice 20 (Schwarz-Pick)**.** Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Montrer que pour tout $z_1, z_2, z \in \mathbb{D}$ on a

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leqslant \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1 z_2}\right| \quad \text{et} \quad \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Exercice 21. Cet exercice a pour but de donner une introduction à la géométrie du disque. Cela donnera aussi une interpretation géométrique du lemme de Schwarz. On note $\mathbb{D}$ le disque unité. Étant donné un vecteur tangent ξ en un point $z \in \mathbb{D}$, on note sa norme euclidienne par $\|\xi\|_2$ et on défini sa norme *hyperbolique* ou sa norme de *Poincaré* par

$$\|\xi\|_{\text{hyp}} := \frac{\|\xi\|_2}{1-|z|^2}.$$

La *longueur hyperbolique* d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ est définie par

$$\ell_{\text{hyp}}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\text{hyp}}dt = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|_2}{1-|\gamma(t)|^2}dt.$$

La *distance hyperbolique* ou *distance de Poincaré* entre deux points $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ est définie par

$$d_{\text{hyp}}(z_0,z_1) := \inf_{\gamma} \ell_{\text{hyp}}(\gamma)$$

où le inf est pris sur tous les chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{D}$ allant de z_0 à z_1. L'espace métrique $(\mathbb{D}, d_{\text{hyp}})$ est appelé *disque de Poincaré*. Les courbes de longueur minimale sont appelées *géodésiques* ou *droites hyperboliques*.

A. (a) À l'aide du lemme de Schwarz-Pick, montrer que toute application holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est décroissante par rapport à la distance de Poincaré, c'est à dire que pour tout $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$,

$$d_{\text{hyp}}(f(z_1), f(z_1)) \leqslant d_{\text{hyp}}(z_0,z_1).$$

(b) En déduire que pour tout automorpohisme du disque $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est une isométrie de $(\mathbb{D}, d_{\text{hyp}})$.

B. On veut maintenant obtenir une expression explicite pour d_{hyp}.

(a) Soit $w \in]0,1[$. Montrer que la géodésique allant de 0 à w est le segment $[0,w]$ et montrer

$$d_{\text{hyp}}(0,w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$

(b) Soit $w \in \mathbb{D}^*$. À l'aide d'un automorphisme judicieusement choisi, montrer que la géodésique de allant de 0 à w est le segment $[0,w]$ et montrer que

$$d_{\text{hyp}}(0,w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|w|}{1-|w|}\right).$$

(c) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^*$. À l'aide d'un automorphisme judicieusement choisi, montrer que la géodésique de allant de z_1 à z_2 est une partie du cercle orthogonal à $\partial\mathbb{D}$ passant par z_1 et z_2 et que

$$d_{\text{hyp}}(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1-z_1\overline{z}_2|+|z_1-z_2|}{|1-z_1\overline{z}_2|-|z_1-z_2|}\right) = 2\operatorname{argtanh}\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z}_2}\right|.$$

(d) Montrer que d_{hyp} est bien une distance sur $\mathbb{D}$. Montrer aussi que les *boules hyperboliques* sont des boules euclidiennes (pas nécessairement avec le même centre ou le même rayon).

C. La géometrie du disque hyperbolique définie ci-dessus est appelée *géométrie hyperbolique*. Vérifier qu'en géométrie hyperbolique, les axiomes d'Euclide sont vérifiés, à l'exception du cinquième postulat.

D. Rappelons (voir l'exercice 25 du chapitre I), que $\mathbb{D}$ est biholomorphe au demi-plan $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (dit *demi-plan de Poincaré*), via l'application $\varphi : z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. Décrire les géodésiques de $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ où $d_{\mathbb{H}}$ est la métrique induite par d_{hyp} via φ.

E. Nous concluons maintenant par une preuve plus «géométrique» du théorème de Liouville. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe bornée.

(a) Montrer que l'on peut supposer que $f(z) \in \mathbb{D}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ce que l'on supposera dans la suite).

(b) Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ on considère l'application $f_R : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ définie par $f_R(z) = f(Rz)\ \forall z \in \mathbb{D}$. À l'aide la propriété de décroissance de la distance de Poincaré, montrer que pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $z_1, z_2 \in B(0,R)$,

$$d_{\text{hyp}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\text{hyp}}\Big(f_R\Big(\frac{z_1}{R}\Big), \Big(\frac{z_2}{R}\Big)\Big) \leqslant d_{\text{hyp}}\Big(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}\Big)$$

(c) En déduire que f est constante.

UE 601: Analyse complexe

Chapitre V:
Formules de Cauchy généralisées et déterminations du logarithme

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Homotopie et simple connexité

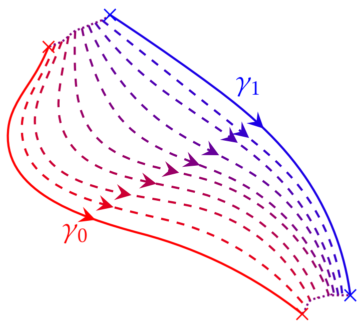
On commence par la définition suivante

Définition 1.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ deux chemins dans U. Une *homotopie* entre γ_0 et γ_1 est une fonction *continue* $H : [0,1] \times [a,b] \to U$ telle que $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [a,b]$. Si une telle homotopie existe, on dit alors que γ_1 et γ_2 sont *homotopes*.

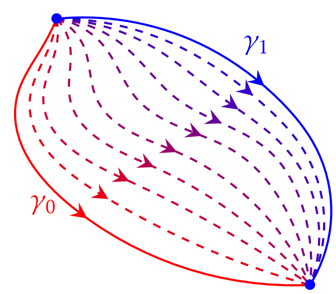
1. On dit que H est une *homotopie stricte* si il existe $z_0, z_1 \in U$ tels que $H(s,a) = z_0$ et $H(s,b) = z_1$ pour tout $s \in [0,1]$. Dans ce cas on dit que γ_1 et γ_2 sont *strictement homotopes*.

2. On dit que H est une *homotopie de lacets* si $H(s,a) = H(s,b)$ pour tout $s \in [0,1]$. Dans ce cas, on dit que γ_1 et γ_2 sont *homotopes au sens des lacets*.

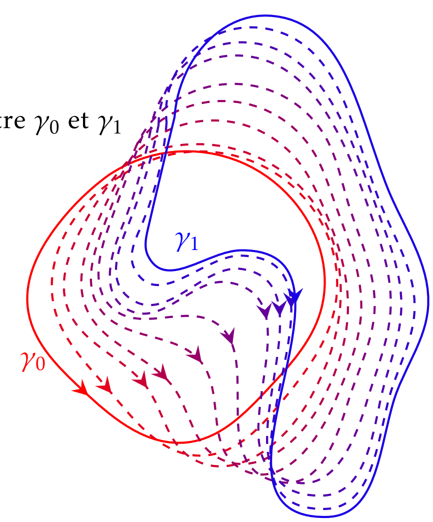
homotopie entre γ_0 et γ_1



homotopie stricte entre γ_0 et γ_1



Homotopie de lacets entre γ_0 et γ_1



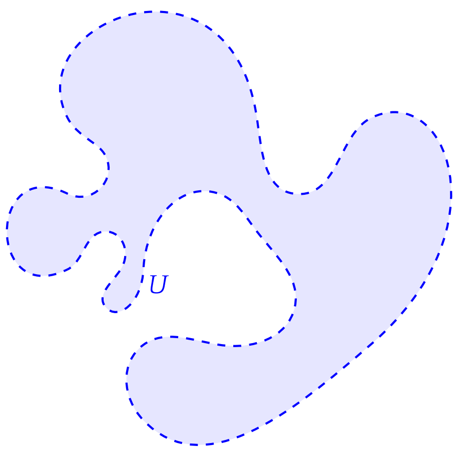
Définition 1.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet. On dit que γ est *homotopiquement trivial dans U* si il est homotope au sens des lacets à un chemin constant.

Définition 1.3: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que U est *simplement connexe* si U est connexe et si tout lacet dans U est homotopiquement trivial dans U.

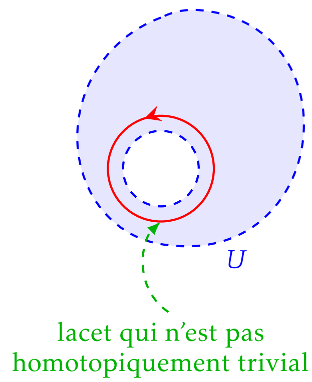
Remarque 1.4: Dans les situations concrètes, il est facile de «voir» si un ouvert est simplement connexe ou non. Géométriquement un ouvert est simplement connexe si et seulement si il n'a pas de «trou».

Exemple 1.5: Voici deux exemples :

Simplement connexe



Non-simplement connexe.



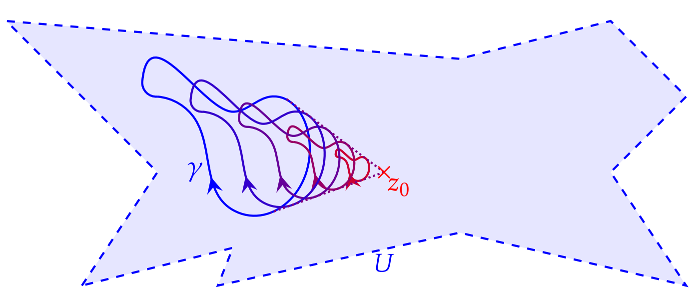
Nous énonçons ici deux résultats permettant de construire des ouverts simplement connexes.

Proposition 1.6: *Si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert étoilé, alors U est simplement connexe.*

Démonstration. Par définition, il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$, le segment $[z_0, z]$ est inclus dans U. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet dans U. On considère alors l'application

$$H : \begin{cases} [0,1] \times [a,b] & \to & U \\ (s,t) & \mapsto & (1-s)\gamma(t) + sz_0. \end{cases}$$

Il est immédiat de voir que H est une homotopie de lacets entre γ et le lacet trivial $t \mapsto z_0$. Donc γ est homotopiquement trivial. Comme ceci est vrai pour tout γ, on en déduit que U est simplement connexe.



□

La proposition suivante est un cas extrêmement particulier du théorème de Seifert-van Kampen.

Proposition 1.7: *Soit $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ des ouverts simplement connexes tels que $U_1 \cap U_2$ est non-vide et connexe. Alors $U_1 \cup U_2$ est simplement connexe.*

La démonstration de cette proposition n'est pas extrêmement difficile, mais elle est un peu laborieuse si on souhaite l'écrire précisément. Nous renvoyons les étudiant(e)s intéressé(e)s par les détails à faire l'exercice 13.

2 Théorème de Cauchy homotopique

Théorème 2.1 (Cauchy homotopique): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma_0; \gamma_1 : [a,b] \to U$ des lacets $\mathscr{C}^1$ par morceaux qui sont homotopes au sens des lacets dans U. Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

En particulier, si $\gamma : [a,b] \to U$ est un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux homotopiquement trivial, alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Avant de démontrer ce théorème important, soulignons les deux corollaires suivantes.

Corollaire 2.2 (Cauchy pour les ouverts simplement connexes): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Démonstration du corollaire 2.2. Par définition, n'importe quel lacet γ est homotopiquement trivial. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Cauchy. □

Corollaire 2.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux qui sont strictement homotopes dans U. Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Démonstration du corollaire 2.3. Le lacet $\gamma_0 \vee \gamma_1^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial (voir exercice 13). Donc d'après le théorème de Cauchy homotopique, on a

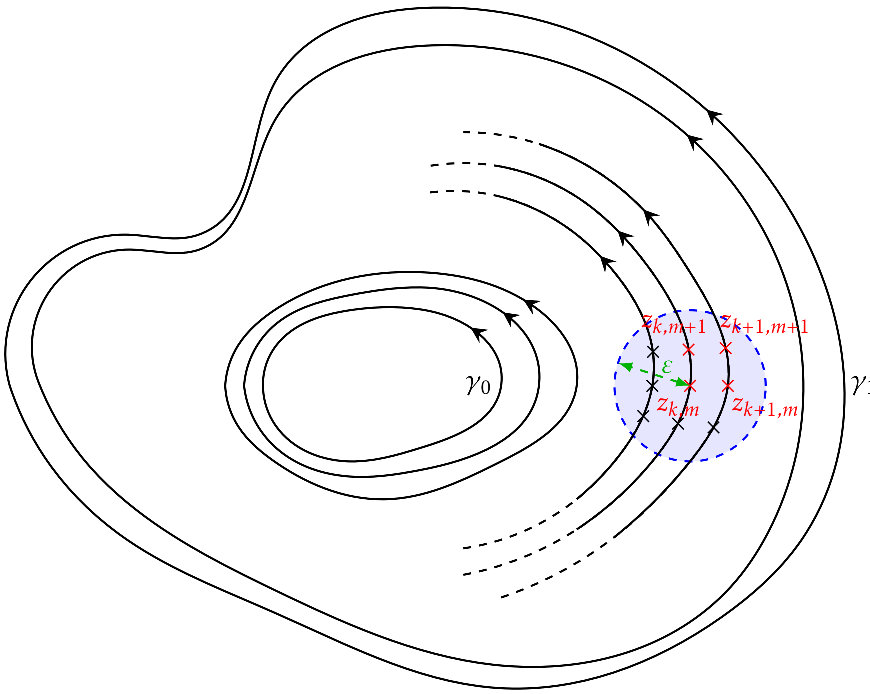
$$\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz \quad = \quad \int_{\gamma_0 \vee \gamma_1^{\mathrm{op}}} f(z)dz = 0.$$

D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 2.1. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a = 0$ et que $b = 1$, ce que nous ferons dans la suite. Soit $H : [0,1]\times[0,1] \to U$ une homotopie de lacet entre γ_0 et γ_1. Comme H est continue et que $[0,1]\times[0,1]$ est compact, H est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que pour tout $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$, $\overline{B}(H(s,t),\varepsilon) \subset U$ (un tel ε existe par compacité de l'image de H). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand tel que, pour tout $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in [0,1]\times[0,1]$, si $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$ et $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{n}$, alors

$$|H(s_1,t_1) - H(s_2,t_2)| < \varepsilon.$$

Un tel n existe par continuité uniforme. Pour tout $k,m \in \{0,\dots,n\}$ on pose $z_{k,m} := H(\frac{k}{n},\frac{m}{n})$. Observons que pout tout $k,m \in \{0,\dots,n-1\}$, les quatre points $z_{k,m}, z_{k,m+1}, z_{k+1,m}$ et $z_{k+1,m+1}$ appartiennent à la boule $B(z_{k,m},\varepsilon)$.



Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ et pour tout $m \in \{0,\dots,n-1\}$ on considère le chemin $\tilde{\gamma}_{k,m}$ parcourant le segment de $z_{k,m}$ à $z_{k,m+1}$. On pose aussi $\tilde{\gamma}_k := \tilde{\gamma}_{k,0} \vee \tilde{\gamma}_{k,1} \vee \cdots \vee \tilde{\gamma}_{k,n-1}$. Nous allons montrer les choses suivantes :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)dz \tag{1}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z)dz \tag{2}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_{k+1}} f(z)dz \text{ pour tout } k \in \{0,\dots,n-1\} \tag{3}$$

Le résultat en est alors une conséquence immédiate.

Commençons par démontrer (1). Notons pour tout $m \in \{0,n-1\}$, $\gamma_{0,m} := \gamma|_{[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}]}$. Observons que l'image de $\gamma_{0,m}$ est incluse dans $B(z_{0,m},\varepsilon)$. On a $\gamma_0 = \gamma_{0,0} \vee \cdots \vee \gamma_{0,n-1}$. De plus, pour tout $m \in \{0,\dots,n-1\}$, $\gamma_{0,m}$ et $\tilde{\gamma}_{k,m}$ ont pour point initial $z_{0,m}$ et pour point terminal $z_{0,m+1}$. En particulier, comme f admet une primitive sur $B(z_{0,m},\varepsilon)$ (car la boule est un ouvert étoilé et que f est holomorphe), ceci implique que

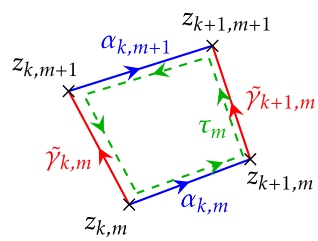
$$\int_{\gamma_{0,m}} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_{0,m}} f(z)dz.$$

On en déduit donc que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{m=0}^{n-1}\int_{\gamma_{0,m}} f(z)dz = \sum_{m=0}^{n-1}\int_{\tilde{\gamma}_{0,m}} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)dz.$$

Ce qui démontre (1). La relation (2) se démontre de façon identique.

Démontrons maintenant le point (3). Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Pour tout $m \in \{0,\dots,n\}$ on considère α_m, le chemin allant de $z_{k,m}$ à $z_{k+1,m}$ en parcourant le segment. Posons de plus $\tau_m := \alpha_{k,m} \vee \tilde{\gamma}_{k+1,m} \vee \alpha_{k,m+1}^{\mathrm{op}} \vee \tilde{\gamma}_{k,m}^{\mathrm{op}}$, comme sur le dessin ci-dessous.



Le chemin τ_m est un lacet contenu dans $B(z_{k,m},\varepsilon)$. Comme f est holomorphe et que $B(z_{k,m},\varepsilon)$ est un ouvert étoilé, le théorème de Cauchy sur les convexes implique que

$$\int_{\tau_m} f(z)dz = 0.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{m=0}^{n-1}\int_{\tau_m} f(z)dz = \sum_{m=0}^{n-1}\left(\int_{\alpha_{k,m}} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}_{k+1,m}} f(z)dz - \int_{\alpha_{k,m+1}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_{k,m}} f(z)dz\right)\\
&= \int_{\alpha_{k,0}} f(z)dz - \int_{\alpha_{k,n}} f(z)dz + \sum_{m=0}^{n-1}\int_{\tilde{\gamma}_{k+1,m}} f(z)dz - \sum_{m=0}^{n-1}\int_{\tilde{\gamma}_{k,m}} f(z)dz\\
&= \int_{\tilde{\gamma}_{k+1}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, nous avons utilisé le fait que $\alpha_{k,0} = \alpha_{k,n}$ puisque H est une homotopie de lacet. Ceci démontre donc (3) et conclu la preuve. □

Notons que grace à ce théorème et au premier critère d'existence de primitive vu au chapitre III, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f admet une primitive sur U.*

Démonstration. Par définition, tout lacet γ dans U est homotopiquement trivial. Par le théorème de Cauchy homotopique, $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Ceci étant vrai pour tout lacet dans U, le premier critère d'existence de primitives implique que f admet une primitive. □

Comme autre corollaire de la formule de Cauchy homotopique, on a l'énoncé de topologie suivant.

Corollaire 2.5: *L'ouvert $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. La fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais $\int_{C(0,1)} f(z)dz = 2i\pi \neq 0$. Le théorème de Cauchy homotopique implique donc que le lacet $C(0,1)$ n'est pas homotopiquement trivial dans $\mathbb{C}^*$. En particulier $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. □

3 Indice d'un lacet

Définition 3.1: Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point n'appartenant pas à l'image de γ. *L'indice de γ par rapport à z_0* est

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}.$$

Exemple 3.2: Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Soit $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = z_0 + re^{int}$. Alors

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = n.$$

En effet, on a

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{rine^{int}}{z_0 + re^{int} - z_0}dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} in dt = \frac{2i\pi n}{2i\pi} = n.$$

Remarque 3.3: À l'aide de l'exemple précédent, du théorème de Cauchy homotopique et de l'exemple précédent, on peut se convaincre géométriquement que $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$ est toujours un entier qui compte le nombre de fois où γ tourne autour de z_0 dans le sens direct.

Le théorème suivant contient une preuve rigoureuse du premier point de la remarque précédent. Le second point de cette remarque sera illustré dans la section 4.

Théorème 3.4: *Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point n'appartenant pas à l'image de γ. Alors*

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. On peut supposer que l'ensemble de définition de γ est $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$g(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}ds.$$

De sorte que g est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, de dérivée $g'(t) = \frac{1}{2i\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$ et vérifie

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = \mathrm{ind}_\gamma(z_0).$$

Nous allons montrer que

$$e^{2i\pi g(1)} = 1. \tag{4}$$

Ce qui démontrera le théorème. Posons de plus $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$h(t) = e^{-2i\pi g(t)}(\gamma(t) - z_0).$$

La fonction h est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et l'on a

$$\begin{aligned} h'(t) &= -2i\pi g'(t)e^{-2i\pi g(t)}(\gamma(t)-z_0)+e^{-2i\pi h(t)}\gamma'(t) \\ &= -2i\pi e^{-2i\pi g(t)}(\gamma(t)-z_0)\left(g'(t)-\frac{1}{2i\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\right)=0. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $h(t) = c$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc

$$\gamma(t)-z_0 = ce^{2i\pi g(t)} \quad \forall t \in [0,1].$$

Comme le membre de gauche ne s'annule jamais, on en déduit que $c \neq 0$. Et finalement

$$e^{2i\pi g(1)} = c^{-1}(\gamma(1)-z_0) = c^{-1}(\gamma(0)-z_0) = e^{2i\pi g(0)} = e^0 = 1.$$

Ce qui démontre (4) et conclut la preuve. □

Proposition 3.5: *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction $\mathrm{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$ qui à z associe $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. De plus, cette fonction s'annule sur l'unique composant connexe non-bornée.*

Démonstration. La fonction ind_γ prend bien ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ en vu du résultat précédent. Elle est continue par le théorème de continuité sous le signe $\int$, elle est donc constante sur chaque composante connexe de son ensemble de définition.

Observons que $U := \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ admet une unique composante connexe non-bornée. En effet, l'ensemble $\gamma([a,b])$ étant compact, il est contenu dans la boule $\overline{B}(0,R)$ pour un certain $R > 0$. Si U admettait deux composantes connexes non-bornées, alors cela impliquerait que $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,R)$ n'est pas connexe, une contradiction.

Par passage à la limite sous le signe integral, on a

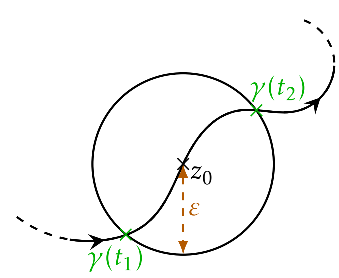
$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \underset{|z_0|\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 0$ pour tout z_0 dans la composante connexe non-bornée de U. □

4 Calcul pratique de l'indice

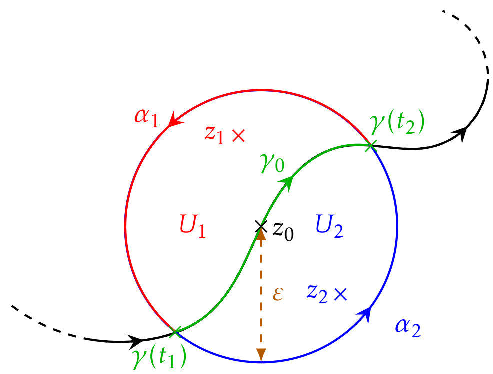
En pratique, l'indice d'un lacet se calcule très facilement. Le proposition 3.5 garantie que l'indice est constant sur chaque composante connexe du complémentaire de l'image du chemin γ et que l'indice s'annule sur l'unique composante connexe non-bornée. Il s'agit donc de savoir comment determiner géométriquement la valeur de l'indice sur chaque composante connexe en comprenant comment l'indice change quand on passe d'une composante connexe à l'autre en traversant le chemin. Considérons donc un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Prenons un point $t_0 \in]a,b[$ vérifiant les hypothèses suivantes : en notant $z_0 = \gamma(t_0) \in \mathbb{C}$, Il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $t_1, t_2 \in]a,b[$ avec $t_1 < t_0 < t_2$ tels que

1. $\gamma(t_1) \in \partial B(z_0,\varepsilon)$ et $\gamma(t_2) \in \partial B(z_0,\varepsilon)$,
2. $\gamma(t) \in B(z_0,\varepsilon)$ pour tout $t \in]t_1,t_2[$,
3. $\gamma(t) \notin B(z_0,\varepsilon)$ pour tout $t \in [a,b] \setminus]t_1,t_2[$,
4. $B(z_0,\varepsilon) \setminus \gamma(]t_1,t_2[)$ a exactement deux composantes connexes.



C'est à dire que dans un voisinage de t_0, le chemin γ traverse la boule $B(z_0,\varepsilon)$ de part en part sans se croiser.

On pose $\gamma_0 := \gamma|_{[t_1,t_2]}$. On considère le chemin α_1 allant de $\gamma(t_2)$ à $\gamma(t_1)$ en parcourant le bord $\partial B(z_0,\varepsilon)$ dans le sens direct et on considère le chemin α_2 allant de $\gamma(t_1)$ à $\gamma(t_2)$ en parcourant le bord $\partial B(z_0,\varepsilon)$ dans le sens direct. On pose U_1 la composante connexe de $B(z_0,\varepsilon)\setminus\gamma(]t_1,t_2[)$ telle que α_1 parcours une partie du bord de U_1 et U_2 l'autre composante connexe. On est donc dans la situation du dessin ci-dessous.



Nous allons montrer que, pour tout $z_1\in U_1$ et pour tout $z_2\in U_2$

$$\boxed{\operatorname{ind}_\gamma(z_1)=\operatorname{ind}_\gamma(z_2)+1.} \tag{5}$$

Posons $\gamma_1=\gamma|_{[a,t_1]}$ et $\gamma_2=\gamma|_{[t_2,b]}$ de sorte que

$$\gamma=\gamma_1\vee\gamma_0\vee\gamma_2.$$

Posons aussi

$$g(z)=\frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right).$$

De sorte que

$$\operatorname{ind}_\gamma(z_1)-\operatorname{ind}_\gamma(z_2)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_1}-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_2}=\int_\gamma g(z)dz.$$

D'autre part, comme z_1 et z_2 sont dans la même composante connexe du complémentaire du chemin $\gamma_1\vee\alpha_1^{\mathrm{op}}\vee\gamma_2$, la proposition 3.5 implique que

$$\int_{\gamma_1\vee\alpha_1^{\mathrm{op}}\vee\gamma_2}g(z)dz=\operatorname{ind}_{\gamma_1\vee\alpha_1^{\mathrm{op}}\vee\gamma_2}(z_1)-\operatorname{ind}_{\gamma_1\vee\alpha_1^{\mathrm{op}}\vee\gamma_2}(z_2)=0.$$

On en déduit que

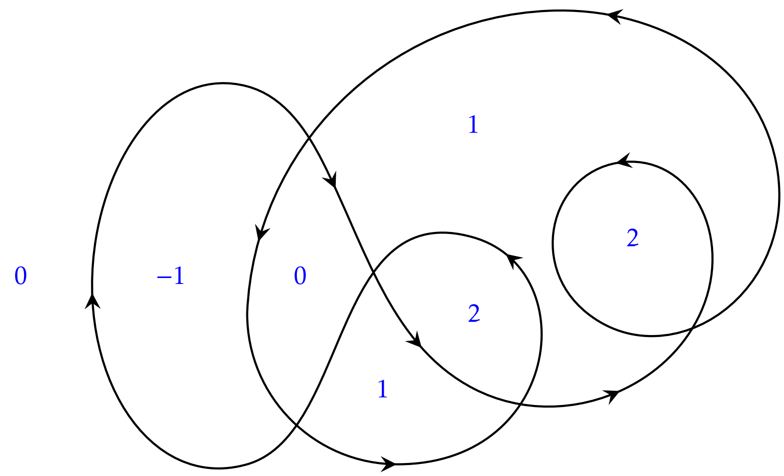
$$\operatorname{ind}_\gamma(z_1)-\operatorname{ind}_\gamma(z_2)=\int_\gamma g(z)dz=\int_{\gamma_1\vee\gamma_0\vee\gamma_2}g(z)dz=\int_{\gamma_1\vee\alpha_1^{\mathrm{op}}\vee\gamma_2}g(z)dz+\int_{\gamma_0\vee\alpha_1}g(z)dz=\int_{\gamma_0\vee\alpha_1}g(z)dz.$$

Observons maintenant que $\operatorname{ind}_{\gamma_0\vee\alpha_1}(z_2)=0$ car z_2 appartient à la composant connexe non-bornée du complémentaire du lacet $\gamma_0\vee\alpha_1$ et que de même, $\operatorname{ind}_{\alpha_2\vee\gamma_0^{\mathrm{op}}}(z_1)=0$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_\gamma(z_1)-\operatorname{ind}_\gamma(z_2)=\int_{\gamma_0\vee\alpha_1}g(z)dz &= \operatorname{ind}_{\gamma_0\vee\alpha_1}(z_1)-\operatorname{ind}_{\gamma_0\vee\alpha_1}(z_2)=\operatorname{ind}_{\gamma_0\vee\alpha_1}(z_1)\\ &= \operatorname{ind}_{\gamma_0\vee\alpha_1}(z_1)+\operatorname{ind}_{\alpha_2\vee\gamma_0^{\mathrm{op}}}(z_1)=\operatorname{ind}_{\alpha_1\vee\alpha_2}(z_1)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière égalité, nous avons utilisé la formule de Cauchy sur un disque. Ceci démontre donc (5).

Ceci nous permet de déduire la valeur de l'indice sur chaque composante connexe du complémentaire de γ en procédant de proche en proche à partir de la composante connexe non-bornée. Par exemple, pour le chemin suivant, les indices de chaque composante connexe sont les suivants.



Une façon plus rapide pour calculer l'indice en un point donné (sans avoir à le calculer pour toutes les composantes connexes) est de procéder comme suit. On fixe un point z_0 dans le complémentaire de l'image de γ, puis on trace une demi-droite partant de z_0 dans une direction telle que la demi droite n'intersecte le chemin γ qu'en des points suffisamment régulier comme le point $\gamma(t_0)$ ci-dessus. Puis, on compte chaque intersection comme $+1$ si elle se fait dans le sens direct, et comme -1 si elle se fait dans le sens indirect. La somme ainsi obtenu est $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$.

5 Formules de Cauchy homotopiques

La notion d'indice permet d'énoncer la version suivante des formules de Cauchy.

Théorème 5.1 (Formules de Cauchy homotopique): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$ et soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U,* homotopiquement trivial *dans U et ne passant pas par z_0. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz.$$

Remarque 5.2: En particulier, si U est *simplement connexe*, alors cette formule est vérifiée pour n'importe quel lacet dans U, puisque tous les lacets sont homotopiquement triviaux.

Démonstration. On commence par démontrer le cas $k = 0$, c'est à dire la relation

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Par définition de l'indice, cette relation est équivalente à l'égalité suivante

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0. \tag{6}$$

Pour démontrer la formule (6), on introduit la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0. \end{cases}$$

Cette fonction est une fonction holomorphe. Cela peut par exemple se voir en utilisant le théorème d'extension de Riemann, ou alternativement, on peut procéder de la façon suivante. Clairement g est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$, il suffit donc de montrer que g est holomorphe dans un voisinage de z_0. Comme la fonction f est holomorphe, elle est analytique. Considérons son développement en série entière centré en z_0, c'est à dire pour tout z dans un voisinage suffisament petit de z_0, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. On a $a_0 = f(z_0)$ et $a_1 = f'(z_0)$. On a donc, pour tout z dans un voisinage de z_0, $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}$. Comme une série entière est holomorphe sur son disque de convergence, on en déduit que g est holomorphe sur un voisinage de z_0.
Comme g est holomorphe et que γ est homotopiquement trivial, le théorème de Cauchy homotopique implique que $\int_\gamma g(z)dz = 0$, ce qui est exactement la relation (6).

Le formules de Cauchy d'ordre supérieur se déduisent par récurrence de la formule de Cauchy à l'ordre 0 par le théorème d'holomorphie sous le signe $\int$, ou plus naïvement, en calculant le taux d'accroissement comme dans la preuve des formules de Cauchy d'ordre supérieur sur un disque vue au chapitre IV. □

6 Homologie

Le théorème et les formules de Cauchy homotopiques sont tout à fait satisfaisants dans le cas où l'ouvert U est simplement connexe. Si l'ouvert n'est pas simplement connexe, il peut être délicat de déterminer si un lacet est homotopiquement trivial ou non. Dans cette section, nous présentons une version encore plus fine du théorème et des formules de Cauchy en considérant la notion d'*homologie*.

Remarque 6.1: Attention ! La façon dont nous introduisons la notion d'homologie ici est non-standard. Notre approche est analytique alors que l'approche standard est topologique. Notre présentation est motivée par le fait qu'elle nécessite le moins de topologie possible et repose juste sur le fait de savoir calculer l'indice d'un lacet, ce que l'on sait faire grâce à la section 4.

On commence par définir la notion de cycles.

Définition 6.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Un *1-cycle* de U est une combinaison linéaire à coefficients entiers de lacets de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. C'est à dire, une somme formelle de la forme

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k,$$

où $n_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \{1,\dots,m\}$ et γ_k est un lacet de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. Le support de Γ est la réunion des images des γ_k pour $k \in \{1,\dots,m\}$ et est noté $\mathrm{Supp}(\Gamma)$.

Remarque 6.3:

1. Il est important de bien comprendre que la somme dans la définition de Γ est juste formelle, elle n'est par relié à la somme sur les nombres complexes.

2. Par contre, on peut définir une structure de groupe abélien sur l'ensemble des cycles en posant

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \gamma_k^1 + \sum_{k=1}^{m_2} n_k \gamma_k^2, \quad \text{pour tous cycles} \quad \Gamma_1 = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \gamma_k^1,\ \Gamma_2 = \sum_{k=1}^{m_2} n_k \gamma_k^2,$$

$$-\Gamma = \sum_{i=1}^{m} (-n_k)\gamma_k, \quad \text{pour tout cycle} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^{m} n_k \gamma_k.$$

On peut intégrer les fonctions continues sur les cycles.

Définition 6.4: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k \gamma_k$ un 1-cycle de U. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. L'intégrale de f le long de Γ est définie comme étant.

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^m n_k \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

En particulier, on a la notion d'indice d'un cycle.

Définition 6.5: Soit $\Gamma = \sum_{k=1}^m n_k \gamma_k$ un 1-cycle de $\mathbb{C}$. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$, l'*indice de* Γ *au point* z_0 est

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{k=1}^m n_k \,\mathrm{ind}_{\gamma_k}(z_0).$$

On peut maintenant définir la notion d'homologie.

Définition 6.6: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

1. Un 1-cycle Γ de U est *homologiquement trivial* (dans U) si $\mathrm{ind}_\Gamma(z_0) = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$.

2. Deux 1-cycles Γ_1 et Γ_2 de U sont *homologues* (dans U) si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ est homologiquement trivial, c'est à dire, si $\mathrm{ind}_{\Gamma_1}(z_0) = \mathrm{ind}_{\Gamma_2}(z_0)$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$.

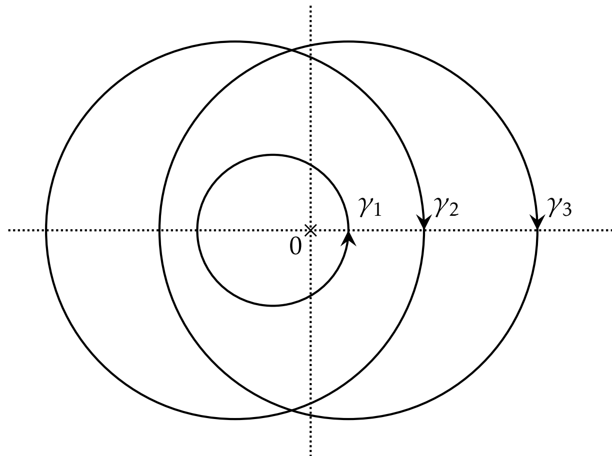
Remarque 6.7:

1. Si γ est un lacet dans U, on dira qu'il est homologiquement trivial si le 1-cycle associé $\Gamma = 1 \cdot \gamma$ est homologiquement trivial.

2. Déterminer si un cycle est homologiquement trivial ou non est un problème facile à résoudre en pratique. Illustrons cela sur quelques exemples:

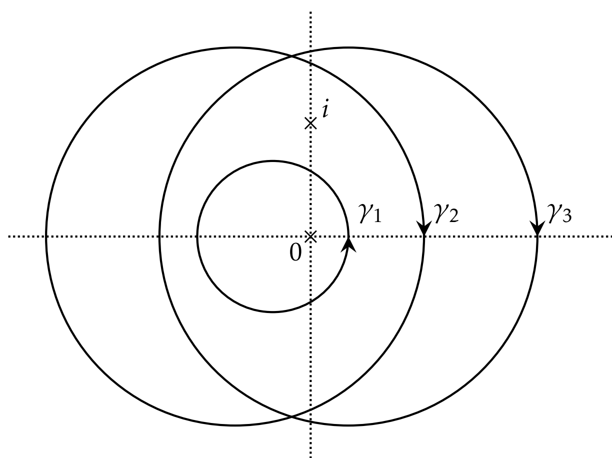
a. Dans $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ le cycle $\gamma = \gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3$, représentés ci dessous, est homologiquement trivial car

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(0) + 2\,\mathrm{ind}_{\gamma_2}(0) - \mathrm{ind}_{\gamma_3}(0) = 1 + 2 \times (-1) - (-1) = 0.$$



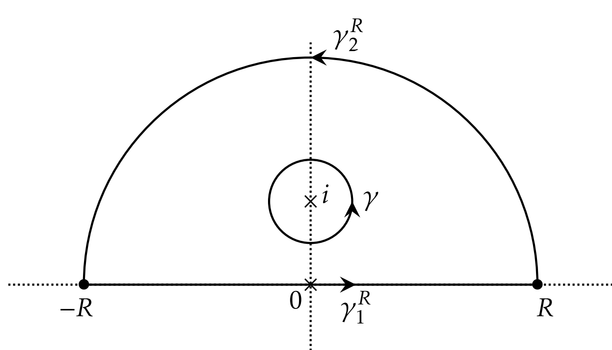
b. Dans $U = \mathbb{C} \setminus \{0, i\}$ le cycle $\gamma = \gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3$, représentés ci dessous, *n'*est *pas* homologiquement trivial car

$$\mathrm{ind}_{\gamma}(i) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(i) + 2\,\mathrm{ind}_{\gamma_2}(i) - \mathrm{ind}_{\gamma_3}(i) = 0 + 2 \times (-1) - (-1) = -1 \neq 0.$$

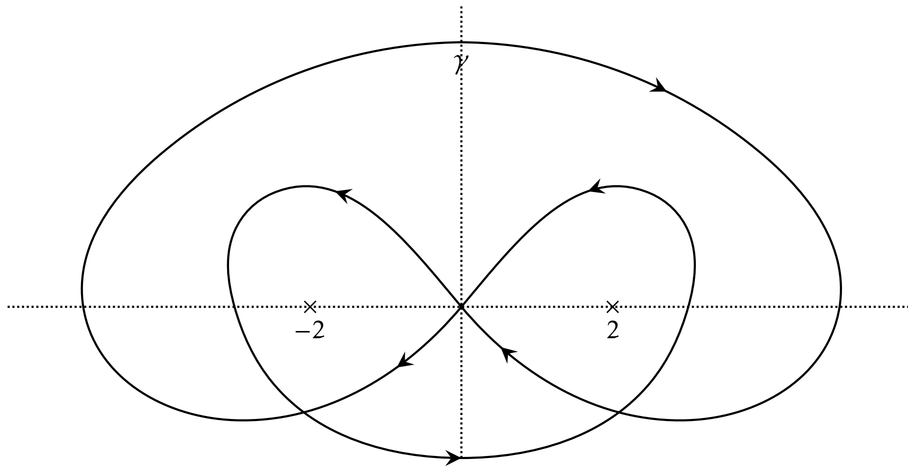


c. Pour tout $R > 1$, le cycle $\gamma_1^R \vee \gamma_2^R - \gamma$ représenté ci-dessous est homotopiquement trivial dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. En effet,

$$\mathrm{ind}_{\gamma}(i) = \mathrm{ind}_{\gamma_1^R \vee \gamma_2^R}(i) = 1.$$



d. Le lacet γ représenté ci dessous est homologiquement trivial dans $\mathbb{C}\backslash\{-2,2\}$ puisque $\mathrm{ind}_\gamma(2) = \mathrm{ind}_\gamma(-2) = 0$. Mais par contre ce lacet n'est pas homotopiquement trivial dans $\mathbb{C}\backslash\{-2,2\}$ (on s'en convainc facilement mais n'est pas si simple de le démontrer...)



Le théorème de Cauchy homotopique implique immédiatement le résultat suivant.

Proposition 6.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. Si γ est homotopiquement trivial, alors γ est homologiquement trivial. En particulier, si U est simplement connexe, alors tous les 1-cycles de U sont homologiquement triviaux.*

Démonstration. Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux homotopiquement trivial. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$, la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z - z_0}$ est une fonction holomorphe sur U. Le théorème de Cauchy homotopique implique donc que $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ et donc, par définition de l'indice, $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 0$. La 1-cycle γ est donc homologiquement trivial. $\square$

Remarque 6.9:

1. Il est vrai qu'un ouvert U est simplement connexe si et seulement si tous les 1-cycles de U sont homologiquement triviaux. C'est un résultat que nous ne démontrerons pas ici.

2. Par contraste avec la remarque précédente, et comme nous l'avons vu dans l'exemple ci-dessus, il existe des ouverts U contenant des lacets homologiquement triviaux mais pas homotopiquement triviaux.

7 Théorème et formules de Cauchy homologiques

On peut maintenant énoncer et démontrer la version suivante des formules de Cauchy.

Théorème 7.1: *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit Γ un 1-cycle* homologiquement trivial *dans U. Alors :*

1. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$. *(Théorème de Cauchy homologique).*
2. *Pour tout $z \in U \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*
$$\mathrm{ind}_\Gamma(z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw \quad \textit{(formules de Cauchy homologiques).}$$

Remarque 7.2: Ce théorème est une généralisation du théorème de Cauchy homotopique et des formules de Cauchy homotopiques au vu de la proposition 6.8.

Démonstration. Observons déjà que si l'on connait la formule de Cauchy à l'ordre 0, alors on peut en déduire la formule de Cauchy à l'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}$ par dérivation sous le signe intégral.

Observons aussi que la formule de Cauchy homologique à l'ordre 0 implique le théorème de Cauchy homologique. En effet, soit Γ un cycle homologiquement trivial de U, et soit $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. Soit $z \in U \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$. La fonction $F : w \mapsto (w-z)f(w)$ est une fonction holomorphe telle que $F(z) = 0$. En appliquant la formule de Cauchy on obtient donc

$$0 = 2i\pi\,\mathrm{ind}_\Gamma(z)F(z) = \int_\Gamma \frac{F(w)}{w-z}dw = \int_\Gamma f(w)dw.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que, avec les notations de l'énoncé,

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z)f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Par définition, de l'indice, c'est équivalent à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = 0 \tag{7}$$

Pour cela introduisons la fonction $g : U \times U \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(w,z) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si} \quad z \neq w \\ f'(z) & \text{si} \quad z = w. \end{cases}$$

La fonction g est continue sur $U \times U$. Pour voir cela, fixons $(z_0, w_0) \in U \times U$ et montrons que g est continue au point (z_0, w_0). Si $z_0 \neq w_0$, alors il existe un voisinage de (z_0, w_0) dans lequel $z \neq 0$, et la fonction g y est alors continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il reste donc à traiter le cas $z_0 = w_0$. Dans ce cas, $g(z_0, w_0) = f'(z_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(z,w) \in B(z_0,\delta) \times B(z_0,\delta)$ pour un $\delta > 0$ suffisamment petit à déterminer.

- Si $z = w$, alors $g(z,w) = f'(z)$ et l'on a donc $g(z_0,w_0) - g(z,w) = f'(z_0) - f'(z)$. Comme par ailleurs f' est continue, cette différence est de module plus petit que ε pour un certain $\delta > 0$.

- Si $z \neq w$, alors, en notant τ le segment reliant w à z (ce segment est inclus dans U car $z, w \in B(z_0, \delta)$ est que les boules sont convexes),

$$\begin{aligned} |g(z_0, w_0) - g(z, w)| &= \left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| = \left| f'(z_0) - \frac{1}{z - w} \int_\tau f'(\xi) d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{z - w} \int_\tau f'(z_0) d\xi - \frac{1}{z - w} \int_\tau f'(\xi) d\xi \right| = \left| \frac{1}{z - w} \int_\tau (f'(z_0) - f'(\xi)) d\xi \right| \\ &\leqslant \frac{\ell(\tau)}{|z - w|} \sup_{\xi \in \mathrm{Supp}(\tau)} |f'(z_0) - f'(\xi)| = \sup_{\xi \in \mathrm{Supp}(\tau)} |f'(z_0) - f'(\xi)| < \varepsilon \end{aligned}$$

si δ est suffisamment petit. Ceci démontre la continuité de g en (z_0, w_0).

Observons de plus que g est holomorphe par rapport à la première variable. C'est à dire que pour tout $w \in U$, la fonction $g_w : z \mapsto g(z, w)$ est holomorphe. Cela se démontre comme dans la preuve du théorème de Cauchy homotopique (par exemple en utilisant le théorème d'extension de Riemann).

Le théorème d'holomorphie sous le signe intégral implique alors que la fonction $h : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \int_\Gamma g(z, w) dw$$

est holomorphe sur U.

Nous allons maintenant étendre h en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour voir cela, on considère l'ensemble

$$U_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \,;\, \mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0\}.$$

C'est un ouvert car c'est une union de composantes connexes du complémentaire de $\mathrm{Supp}(\Gamma)$. De plus, comme Γ est homologiquement trivial par hypothèse, on sait que $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus U$ et en particulier $\mathbb{C} \setminus U \subset U_0$. Donc $U \cup U_0 = \mathbb{C}$.

De plus, pour tout $z \in (U \cap U_0) \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ on a

$$h(z) = \int_\Gamma g(z, w) dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_\Gamma \frac{f(z)}{w - z} dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - 2i\pi \,\mathrm{ind}_\Gamma(z) f(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, ou par un calcul de taux d'accroissement, on voit que la fonction $z \mapsto \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ et donc en particulier sur U_0. On définit la fonction $\hat{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\hat{h} = \begin{cases} h(z) & \text{si} \quad z \in U \\ \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw & \text{si} \quad z \in U_0. \end{cases}$$

Comme ces deux expressions coincident sur $U \cap U_0$, la fonction $\hat{h}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Pour conclure, nous allons utiliser le théorème de Liouville afin de montrer que $\hat{h} \equiv 0$. Pour cela il suffit de montrer que $|\hat{h}| \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Soit $R' > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\Gamma) \subset B(0, R')$. Observons que $\mathbb{C} \setminus B(0, R')$ est donc inclus dans U_0. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R'$ on a

$$|\hat{h}(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \right| \leqslant m\ell(\Gamma) \sup_{w \in \mathrm{Supp}(\Gamma)} \left| \frac{f(w)}{w - z} \right| \leqslant m\ell(\Gamma) \sup_{w \in \mathrm{Supp}(\Gamma)} \frac{|f(w)|}{|z| - R'} = \frac{m\ell(\Gamma)}{|z| - R'} \sup_{w \in \mathrm{Supp}(\Gamma)} |f(w)| \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ici m est le max des multiplicité de Γ. C'est à dire que si $\gamma = \sum_{k=1}^p n_k \gamma_k$ alors $m = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |n_k|$. On en déduit (par la continuité de $\hat{h}$), que $\hat{h}$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Le théorème de Liouville implique donc que $\hat{h}$ est constante. Comme de plus $\hat{h}(z)$ tend vers 0 quand z tend vers l'infini, on en déduit que $\hat{h}$ est identiquement nulle. Elle est donc en particulier nulle sur U, ce qui est exactement ce que l'on cherchait à démontrer. □

8 Déterminations du logarithme

8.1 Définition et premières propriétés

Commençons par observer que pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ fixé, les solutions w de l'équation

$$e^w = z$$

sont les nombres complexes de la forme

$$z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comme il n'y a pas de façon canonique de choisir un argument, on ne peut pas définir le logarithme sur $\mathbb{C}^*$. On introduit donc la définition suivante.

Définition 8.1: Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ une ouvert connexe. Une *détermination du logarithme sur* U est une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{f(z)} = z \quad \forall z \in U.$$

Exemple 8.2: Soit $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$. Alors la *détermination principale du logarithme* introduite dans le chapitre I et définie par

$$\mathrm{Log}(z) = \ln r + i\theta, \quad \forall z = re^{i\theta} \ \text{ où } \ \theta \in]-\pi, \pi[$$

est une détermination du logarithme sur U.

Remarque 8.3: Si f est une détermination du logarithme sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^*$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction f_k définie par

$$f_k(z) = f(z) + 2i\pi k$$

est aussi une détermination du logarithme. En particulier, si une détermination du logarithme existe, alors il en existe une infinité.

On peut généraliser la définition de la détermination principale du logarithme de la façon suivante.

Exemple 8.4: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\Delta_\alpha := \mathbb{R}_+ \cdot e^{i\alpha}$ la demi-droite d'angle α, et $U_\alpha := \mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha$. On définit alors la fonction $\mathrm{Log}_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$, par

$$\mathrm{Log}_\alpha z := \ln r + i\theta \quad \forall z = re^{i\theta} \in U_\alpha \ \text{ où } \ \theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[.$$

La fonction Log_α est une détermination du logarithme sur U_α. Avec cette notation, la détermination principale du logarithme est $\mathrm{Log} = \mathrm{Log}_{-\pi}$.

Proposition 8.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe. Supposons qu'il existe une détermination du logarithme f sur U. Alors la fonction f est injective, holomorphe et vérifie*

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in U.$$

Démonstration. La fonction f est injective car pour tout $z_1, z_2 \in U$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$ on a $z_1 = e^{f(z_1)} = e^{f(z_2)} = z_2$.

Pour montrer que f est holomorphe, et montrer la formule annoncée pour la dérivée, il suffit de calculer le taux d'accroissement. Soit $z_0 \in U$. Posons $w_0 = f(z_0)$. On a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{e^{f(z)} - e^{f(z_0)}} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

□

On a la caractérisation suivante de l'existence de détermination du logarithme.

Proposition 8.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe une détermination du logarithme sur U.*
2. *La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur U.*

Démonstration. L'assertion $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ est immédiate d'après la proposition précédente. En effet, si une détermination principale du logarithme existe sur U, alors c'est une primitive sur de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Montrons $\boxed{2 \Rightarrow 1}$. Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une primitive de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$. Alors la fonction $g : z \mapsto ze^{-F(z)}$ est holomorphe de dérivée

$$g'(z) = e^{-F(z)} - \frac{z}{z} e^{-F(z)} = 0.$$

Comme U est connexe, la fonction g est constante. De plus, elle est non-nulle car l'exponentielle ne s'annule pas. Notons cette constante sous la forme e^a avec $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f := F + a$ est alors une détermination du logarithme sur U. En effet,

$$e^{f(z)} = e^{F(z)+a} = e^{F(z)} e^a = z \quad \forall z \in U.$$

□

Exemple 8.7: Il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. Supposons par l'absurde qu'une telle décomposition existe. Alors d'après la proposition, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive. Ceci impliquerait que $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 0$. Or nous savons que $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$, d'où une contradiction.

En vu du corollaire 2.4, on obtient le critère suivant.

Corollaire 8.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert simplement connexe. Alors il existe une détermination du logarithme sur U.*

8.2 Détermination du logarithme d'une fonction holomorphe

On peut généraliser la notion de détermination du logarithme de la façon suivante.

Définition 8.9: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais. Une *détermination du logarithme de g* est une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{f(z)} = g(z) \quad \forall z \in U.$$

Nous avons la proposition suivante, qui généralise la proposition 8.6

Proposition 8.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une détermination du logarithme de g sur U.*
2. *La fonction $z \mapsto \frac{g'(z)}{g(z)}$ admet une primitive sur U.*

Démonstration. L'assertion $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ est immédiate. En effet, si une détermination principale du logarithme de g existe sur U. Alors on a alors c'est une primitive de $\frac{g'}{g}$. En effet, comme $g(z) = e^{f(z)}$ pour tout $z \in U$, on a

$$g'(z) = f'(z)e^{f(z)} = f'(z)g(z) \quad \text{et donc} \quad f'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} \quad \forall z \in U.$$

Montrons $\boxed{2 \Rightarrow 1}$. Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une primitive de la fonction $z \mapsto \frac{g'(z)}{g(z)}$. Alors la fonction $h : z \mapsto g(z)e^{-F(z)}$ est holomorphe de dérivée

$$h'(z) = g'(z)e^{-F(z)} - g(z)F'(z)e^{-F(z)} = g'(z)e^{-F(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}e^{-F(z)} = 0$$

Comme U est connexe, la fonction h est constante. De plus, elle est non-nulle car g et l'exponentielle ne s'annulent pas. Notons cette constante sous la forme e^a avec $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f := F + a$ est alors une détermination du logarithme de g sur U. En effet,

$$e^{f(z)} = e^{F(z)+a} = e^{F(z)}e^a = g(z) \quad \forall z \in U.$$

□

Cette proposition, implique le critère suivant.

Corollaire 8.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction qui ne s'annule jamais. Alors il existe une détermination du logarithme de g sur U.*

Si l'on sait qu'il existe une détermination du logarithme log sur $g(U)$, alors on pourrait juste prendre $\log g$ comme détermination du logarithme de g. Mais soulignons que dans ce résultat, on ne demande pas qu'il existe une détermination du logarithme sur $g(U)$. Par exemple, si $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ est la fonction $g(z) = z^2$. Le corollaire implique qu'il existe une détermination du logarithme de $z \mapsto z^2$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ mais $g(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \mathbb{C}^*$, et nous savons qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

8.3 Fonctions puissances

L'existence d'une détermination du logarithme permet de construire d'autres fonctions, comme par exemple les fonctions *puissances*. En effet, si $z \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, il n'y a pas de façon canonique de définir z^a (sauf bien entendu si $a \in \mathbb{Z}$). Il raisonnable de vouloir poser

$$z^a = e^{a \log z}.$$

Mais comme nous avons vu dans la section précédente il n'existe pas de fonction log définie naturellement sur $\mathbb{C}^*$, et le logarithme n'est défini qu'à $2i\pi$ près.

Exemple 8.12: Essayons de définir i^i. Le logarithme de i peut-être choisi dans l'ensemble suivant

$$\left\{\dots, -\frac{7\pi}{2}i, -\frac{3\pi}{2}i, \frac{\pi}{2}i, \frac{5\pi}{2}i, \frac{9\pi}{2}i, \dots\right\} = \left\{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a un candidat naturel pour i^i donné par

$$i^i = e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

Nous introduisons tout de même la définition suivante.

Définition 8.13: Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe sur lequel il existe une determination du logarithme $\log : U \to \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors la fonction

$$z \mapsto e^{a \log z}$$

est appelée une *détermination de la puissance a-ième*. On note, abusivement,

$$z^a := e^{a \log z}.$$

Puisque toute détermination du logarithme est holomorphe, on en déduit que toutes les détermination de la puissance a-ième sont aussi holomorphes. De plus on a

$$\frac{\partial z^a}{\partial z} = a z^{a-1}.$$

Exemple 8.14: Soit $a = i$ et prenons la détermination principal du logarithme $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$. Alors la détermination de la puissance i-ième associée est définie par

$$z^i = e^{i \,\mathrm{Log}\, z} = e^{i(\ln r + i\theta)} = e^{i \ln r} e^{-\theta} = e^{-\theta}(\cos(\ln r) + i \sin(\ln r)) \quad \forall z = re^{i\theta}, \text{ où } \theta \in]-\pi, \pi[\text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*.$$

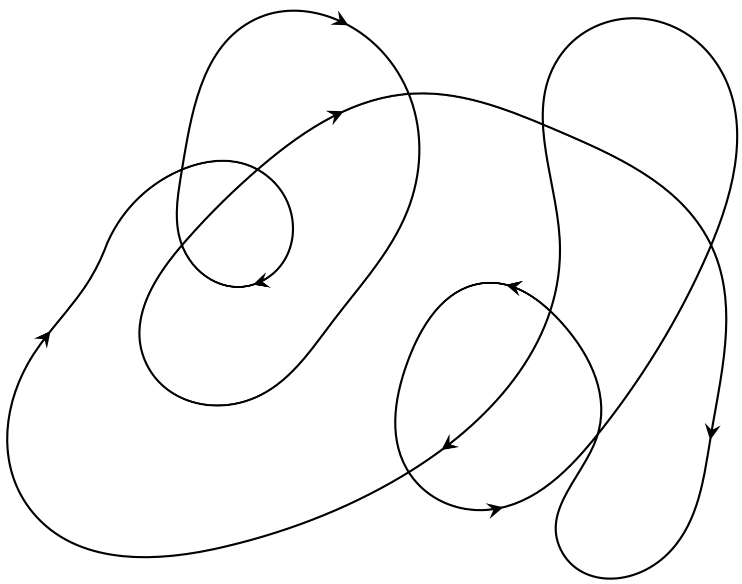
9 Exercices

9.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Pour chacun des ouverts suivants de $\mathbb{C}$, le dessiner et dire si il est simplement connexe ou non.

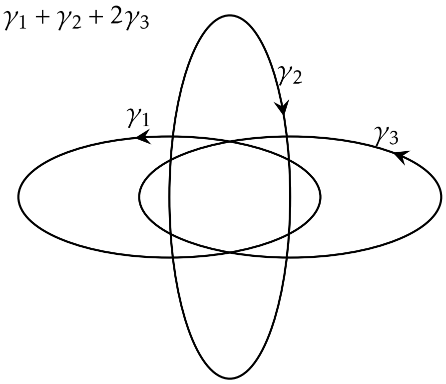
1. $U_1 := \mathbb{C} \setminus B(0,1)$
2. $U_2 := U_1 \setminus \mathbb{R}^+$.
3. $U_3 := \left\{z = re^{i\theta}\ ;\ 0 < r < 1 \text{ et } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11\pi}{6}\right\}$
4. $U_4 := U_3 \setminus B\left(\frac{i}{2}, \frac{1}{10}\right)$
5. $U_5 := \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{R}_+ \cup (1 + i + \mathbb{R}_-) \cup (1 - i + \mathbb{R}_-)\right)$
6. $U_6 := \left\{z = re^{i\theta}\ ;\ \theta \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta < r < \theta + 1\right\}$.

Exercice 2. Pour le lacet suivant, déterminer l'indice de tout point en dehors de son image.

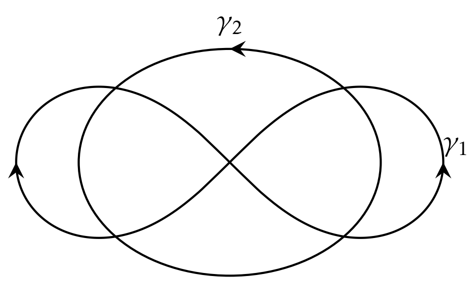


Exercice 3. Pour chacun des cycles suivants, déterminer l'indice de tout point en dehors de son support.

1. $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3$

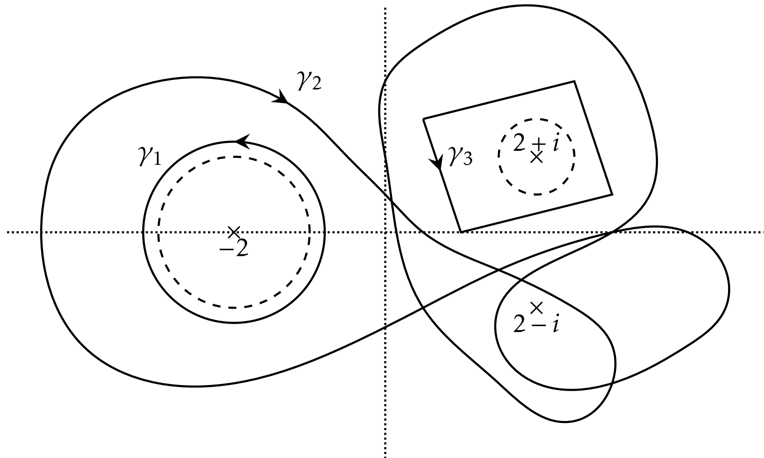


2. $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$



Exercice 4. Dessinez un cycle ou un lacet ainsi qu'un point dans le complémentaire de son support, et demandez à votre voisine ou votre voisin de trouver l'indice de ce cycle par rapport au point donné.

Exercice 5. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \left(B(-2,1) \cup B(2+i, \frac{1}{2} \cup \{2-i\}\right)$. Le cycle $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ suivant est-il homologiquement trivial dans U ?



Exercice 6. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Montrer que $U \setminus \{z_0\}$ n'est pas simplement connexe.

9.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit γ_1 et γ_2 des lacets dans U de point initial (et terminal) z_0. Montrer que si γ_1 et γ_2 sont homotopiquement triviaux, alors $\gamma_1 \vee \gamma_2$ est homotopiquement trivial.

Exercice 8 (Détermination de la racine n-ième)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z, w \in \mathbb{C}$. On dit que w est une *racine n-ième de z*, si $w^n = z$. Si $z = 1$, on dit que w est une *racine n-ième de l'unité*.

1. (a) Montrer que l'ensemble des racines n-ième de l'unité est l'ensemble

$$\left\{1, \omega_n, \dots, \omega_n^{n-1}\right\} \quad \text{où} \quad \omega_n := e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

   (b) Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et notons $\mu = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$. Montrer que l'ensemble des racines n-ième de z, est l'ensemble

$$\left\{\mu, \mu\omega_n, \dots, \mu\omega_n^{n-1}\right\} = \left\{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\right\}_{0 \leqslant k \leqslant n-1}.$$

2. Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe sur lequel il existe une détermination du logarithme, $\log : U \to \mathbb{C}$.

   (a) Montrer que les determinations de la racine n-ième sur U sont les fonctions de la forme

$$z \mapsto \omega_n^k e^{\frac{1}{n}\log z}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

   (Ici on utilise le terme *détermination de la racine n-ième* au lieu de *détermination de la puissance $\frac{1}{n}$-ième.*)

   (b) Soit $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue vérifiant $(f(z))^n = z$ pour tout $z \in U$. Montrer que f est une détermination de la racine n-ième.

Exercice 9. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On cherche à définir une fonction $z \mapsto \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. C'est à dire une fonction holomorphe f (dont l'ensemble de définition est à determiner) vérifiant $f(z)^2 = \frac{z-a}{z-b}$. On note g la fonction définie par $g(z) = \frac{z-a}{z-b}$. Notons $U := \mathbb{C} \setminus [a, b]$, le plan complex privé du segment reliant a à b.

1. Déterminer l'ensemble $g(U)$, et montrer qu'il existe une détermination du logarithme sur $g(U)$.

2. En déduire toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(z)^2 = g(z)$ pour tout $z \in U$.

Exercice 10. On cherche à définir la fonction $z \mapsto \sqrt{z(z+1)}$.

1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f_1 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ telle que $f_1(1) = 1$ et telle que $f_1(z)^2 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
2. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f_2 : \mathbb{C} \setminus (-1 + \mathbb{R}_-) \to \mathbb{C}$ telle que $f_2(1) = \sqrt{2}$ et telle que $f_2(z)^2 = z + 1$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (1 + \mathbb{R}_-)$.
3. Montrer que la fonction $f = f_1 f_2$ définie sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_-)$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$.
4. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g : \mathbb{C} \setminus [-1, 0] \to \mathbb{C}$ vérifiant $g(z)^2 = z(z+1)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ et telle que $h(1) = \sqrt{2}$.

Exercice 11. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Montrer que la relation «être homotopes au sens des lacets» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacet de U.

Exercice 12.

1. On note $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ les chemins définies par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(t) = 2e^{it}$. Donner explicitement une homotopie entre γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}^*$.
2. Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ et soit $r, \varepsilon > 0$ tels que $\overline{B}(z_1, \varepsilon) \subset B(z_0, r)$. On note $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ les chemins définie par $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$ et $\gamma_2(t) = z_1 + \varepsilon e^{it}$. Donner explicitement une homotopie de lacet entre γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$.

Exercice 13. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

1. Soit $\gamma : [0, 1] \to U$ un chemin. Montrer que le lacet $\gamma \vee \gamma^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial.
2. Soit γ_1 et γ_2 des chemins dans U. Supposons que γ_1 et γ_2 sont strictement homotopes. Montrer que $\gamma_1 \vee \gamma_2^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial.
3. Soit γ_1 et γ_2 des chemins dans U qui ont même point initial et même point terminal. Montrer que si le lacet $\gamma_1 \vee \gamma_2^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial alors γ_1 et γ_2 sont strictement homotopes.
4. Nous allons maintenant démontrer la Proposition 1.7. Soit U_1, U_2 des ouverts simplement connexes tels que l'intersection $U_1 \cap U_2$ est non-vide et connexe. Soit $U = U_1 \cup U_2$. Soit $\gamma : [0, 1] \to U$ un lacet. Nous allons montrer que γ est homotopiquement trivial. (On suppose ici que γ est défini sur l'intervalle $[0, 1]$, ce n'est pas une perte de généralité car on peut toujours se ramener à cette situation par reparamétrisation).
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, on a soit $B(\gamma(t), \varepsilon) \subset U_1$ soit $B(\gamma(t), \varepsilon) \subset U_2$. On fixe maintenant un tel ε. (Indication : utiliser la compacité de l'image de γ).
   (b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, si on note $t_k := \frac{k}{n}$ et $z_k := \gamma(t_k)$ pour tout $k \in \{0, \dots n\}$ (de sorte que $z_0 = z_n$), pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $\gamma([t_k, t_k + 1]) \subset B(z_k, \varepsilon) \cap B(z_{k+1}, \varepsilon)$.
   (c) Soit $a \in U_1 \cap U_2$ un point fixé. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe une chemin τ_k allant de a à z_k tel que l'image de τ_k est incluse dans U_1 si $z_k \in U_1$ et tel que l'image de τ_k est incluse dans U_2 si $z_k \in U_2$ (en particulier, l'image de τ_k est incluse dans $U_1 \cap U_2$) si $z_k \in U_1 \cap U_2$.
   (d) Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on note $\gamma_k := \gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le lacet $\tau_k \vee \gamma_k \vee \tau_{k+1}^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial. (Ici on pose $\tau_n := \tau_0$).
   (e) Montrer que le lacet γ est homotope au sens des lacets au lacet $\gamma_0^{\mathrm{op}} \vee \gamma_1 \vee \gamma_1^{\mathrm{op}} \vee \dots \vee \gamma_{n-1}^{\mathrm{op}} \vee \gamma_0$.
   (f) En déduire que γ est homotopiquement trivial.

UE 601: Analyse complexe

Chapitre VI:
Séries de Laurent, singularités isolées, et fonctions méromorphes

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Développement en série de Laurent

Nous avons vu que si l'on a une fonction holomorphe f définie sur une boule $B(z_0, r)$ alors on peut l'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à r.

Dans cette section nous allons étudier comment donner une description similaire pour une fonction holomorphe sur une couronne, c'est à dire un ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |z - a| < r_2\}$. Par exemple la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z}$ définie sur la couronne $\mathbb{C}^*$ (avec $r_1 = 0$ et $r_2 = +\infty$), s'écrit

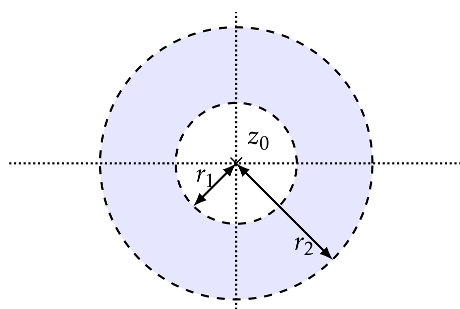
$$f(z) = \frac{1}{z} = z^{-1}.$$

C'est à dire que bien que la fonction f ne soit pas développable en série entière en 0 (simplement car elle n'est pas définie en 0), elle admet une expression particulièrement simple si l'on s'autorise à regarder des puissances *négatives* et pas seulement des puissances positives ou nulles.

Introduisons déjà une notation. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que $r_1 < r_2$, on note

$$A_{z_0}(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

la couronne centrée en z_0 comprise entre les cercles de rayons r_1 et r_2.



Pour étudier les fonctions holomorphes sur de telles couronnes nous introduisons la notion de série de Laurent.

Définition 1.1: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Une série de Laurent centrée en z_0 est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On dit que cette série converge en un point $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ et la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ sont toutes deux convergentes. La série (entière) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est appelée *la partie régulière* et la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ est appelée *partie principale* ou *partie polaire* .

Proposition 1.2: *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ une série de Laurent centrée en z_0. Notons r_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ et $\frac{1}{r_1}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$. Alors :*

1. *La série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolument en tout point de $B(z_0,r_2)$, et de plus cette série de fonctions converge normalement sur tout compact de $B(z_0,r_2)$.*
2. *La série de fonction $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ converge absolument en tout point de $\mathbb{C}\setminus\overline{B}(z_0,r_1)$, et de plus cette série de fonctions converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\setminus\overline{B}(z_0,r_1)$.*

En particulier, la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge pour tout $z \in A_{z_0}(r_1,r_2)$. De plus, cette série de Laurent définie une fonction holomorphe sur $A_{z_0}(r_1,r_2)$.

Démonstration. Le premier point est juste une conséquence de la définition du rayon de convergence et du lemme d'Abel. Pour le second point on considère la fonction $g : \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{1}{z-z_0}.$$

Cette fonction vérifie $g(\mathbb{C}\setminus\overline{B}(z_0,r_1)) = B(0,r_1)$. Par définition de rayon de convergence, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$ converge absolument en tout point de $w \in B(0,r_1)$, en particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{B}(z_0,r_1)$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} g(z)^n$ converge absolument. De plus, par le même argument, pour tout compact $K \subset \mathbb{C}\setminus\overline{B}(z_0,r_1)$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} g(z)^n$ converge normalement sur K, car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}w^n$ converge normalement sur le compact $g(K)$. Le reste de l'assertion s'en déduit en utilisant le théorème de convergence de Weierstrass.

□

Remarque 1.3: Observons que grace à la convergence normale, au résultat de passage à la limite sous l'intégrale et au théorème de convergence de Weirestrass, on peut dériver les série de Laurent terme à terme, et on peut échanger les signes $\sum$ et $\int$ lorsque l'on intègre le long d'un chemin de $A_{z_0}(r_1,r_2)$.

Réciproquement, une fonction holomorphe sur une couronne admet un développement en série de Laurent sur cette couronne.

Théorème 1.4: *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que $r_1 < r_2$. Soit $f : A_{z_0}(r_1,r_2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le nombre*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

est indépendant du choix de $r \in]r_1,r_2[$. De plus la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ a rayon de convergence plus grand que r_2, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$ a rayon de convergence plus grand que r_1^{-1} et pour tout $z \in A_{z_0}(r_1,r_2)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Démonstration. Le fait que a_n soit indépendant du choix de r est une conséquence du théorème de Cauchy homologique (ou homotopique). Soit $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$. Soit $\rho_1, \rho_2 \in]r_1, r_2[$ telle que $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$. Notons γ_1, γ_2 les lacets définis par $\gamma_1(t) = z_0 + \rho_1 e^{it}$ et $\gamma_2(t) = z_0 + \rho_2 e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Le cycle $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ est homologiquement trivial dans $A_{z_0}(r_1, r_2)$, et $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 1$. Donc la formule de Cauchy homologique implique que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Notons

$$f_2(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw \quad \text{et} \quad f_1(z) = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Étudions déjà $f_2(z)$. Observons que $|z - z_0| < |w - z_0|$ pour tout $w \in C(z_0, \rho_2)$, donc on obtient

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z}dw \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)(1+\frac{z_0-z}{w-z_0})}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}dw \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\right)(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$, la définition du rayon de convergence implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ est plus grand que r_2.

Étudions maintenant $f_1(z)$. Comme $|z - z_0| > |w - z_0|$ pour tout $w \in C(z_0, \rho_1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z}dw \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z_0-z)(\frac{w-z_0}{z_0-z}+1)}dw = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z_0-z)}\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}dw \\
&= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(z_0-z)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} f(w)(w-z_0)^n dw\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n-1}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$, la définition du rayon de convergence implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n}w^n$ est plus grand que r_1^{-1}. De plus, nous avons bien

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

□

Exemple 1.5: Soit $f : \mathbb{C}^* = A_0(0, +\infty) \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$. Le développement en série de Laurent de f est

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots.$$

2 Singularités isolées

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que z_0 est une singularité isolée de f si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$.

Ceci veut dire que f est définie (et holomorphe) dans un voisinage épointé de z_0.

Exemple 2.2: Les fonctions $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto \frac{\cos z}{z}$ et $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$, ont toute une singularité isolée en 0 car elles sont holomorphes sur $\mathbb{C}^*$.

Exemple 2.3: La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ a un singularité isolée en i et une singularité isolée en $-i$.

Exemple 2.4: Le point -1 n'est pas une singularité isolée de la détermination principale du logarithme $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$.

Proposition 2.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Notons Z l'ensemble des singularités isolées de f. Alors $U' := U \cup Z$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et Z est un sous ensemble fermé et discret de U'.*

Démonstration. Montrons que l'ensemble U' est un ouvert. Si $z_0 \in U$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \subset U \subset U'$ puisque U est ouvert. Si $z_0 \in U' \setminus U = Z$, il existe par définition $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$ et donc que $B(z_0, \varepsilon) \subset U'$. L'ensemble Z est fermé car $U' \setminus Z = U$ est un ouvert. Le fait que Z est discret est une conséquence immédiate de la définition de singularité isolée. □

2.2 Classification

À l'aide du développement en série de Laurent on peut classifier les singularité isolées en trois types.

Définition 2.6: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$. On considère le développement en série de Laurent de f sur la couronne $A_{z_0}(0, \varepsilon) = B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n \leqslant -1} a_n z^n + \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n.$$

1. Si la partie polaire est nulle (i.e. $a_n = 0$ pour tout $n \leqslant -1$), on dit que z_0 *est une singularité éliminable de* f.
2. Si la partie polaire est non-nulle mais contient un nombre fini de termes (i.e. il existe $n_0 \leqslant -1$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ mais $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$), on dit que z_0 *est un pôle de* f.
3. Si la partie polaire contient une infinité de termes non-nuls, on dit que z_0 *est une singularité essentielle de* f.

Exemple 2.7: Considérons la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Le point 0 est une singularité isolée de f. Néanmoins, nous savons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

En particulier, le développement en série de Laurent de f et 0 et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n},$$

et donc 0 est une singularité éliminable.

Exemple 2.8: La fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}$ a une singularité isolée en 0. C'est un pôle car, le développement en série de Laurent en 0 est

$$\frac{1}{z} = z^{-1}.$$

Exemple 2.9: Considérons la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. Le point 0 est une singularité isolée de f. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

En particulier, le développement en série de Laurent de f et 0 et

$$\frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \cdots$$

et donc 0 est un pôle de f.

Exemple 2.10: Considérons la fonction $f : \mathbb{C}^* \to 0$ définie par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Le point 0 est une singularité isolée de f. De plus pour tout $w \in \mathbb{C}$ on a

$$e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Le point 0 est donc une singularité essentielle de f.

Les propriétés suivantes donnent des caractérisations équivalentes, de nature plus géométrique, pour caractériser les différents types de singularités.

Proposition 2.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *z_0 est une singularité éliminable de f.*
2. *f s'étend en une fonction holomorphe sur $U \cup \{z_0\}$.*
3. *f est bornée dans un voisinage de z_0.*

Démonstration. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$. Si z_0 est une singularité éliminable, alors le développement en série de Laurent de f en z_0 est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, c'est à dire une série entière de rayon de convergence > 0. Comme les séries entières sont holomorphes sur leur disque de convergence, on peut étendre f de façon holomorphe en z_0 en posant $f(z_0) := a_0$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$. Si f s'étend en une fonction holomorphe $\hat{f}$ en z_0, alors le développement série de Laurent de f en z_0 coincide avec le developpement en série de Taylor de $\hat{f}$ en z_0 et donc z_0 est une singularité éliminable.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ est évident et $\boxed{3 \Rightarrow 2}$ est une conséquence du théorème d'extension de Riemann. □

Proposition 2.12: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *z_0 est un pôle de f.*
2. *$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.*
3. *Il existe $m \in \mathbb{N}$ telle que la fonction $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ est bornée dans un voisinage de z_0 mais $f(z)$ n'est pas borné dans un voisinage de z_0.*

Démonstration. $\boxed{1 \Rightarrow 3}$. Si z_0 est un pôle de f, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que le développement en série de Laurent de f en z_0 est de la forme

$$\sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

C'est à dire qu'il existe un voisinage V de z_0 tel que pour tout $z \in V \setminus \{z_0\}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

En particulier, la fonction $g : z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ vérifie

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\},$$

donc g s'étend en une fonction holomorphe en z_0, qui est donc en particulier bornée dans voisinage de z_0. D'autre part f n'est pas bornée dans un voisinage de z_0 car sinon z_0 serait une singularité éliminable.
$\boxed{3 \Rightarrow 1}$. Si la fonction $g : z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ est bornée dans un voisinage de z_0, alors elle s'étend en une fonction holomorphe $\hat{g}$ en z_0. En notant considérant le développement en série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$ de $\hat{g}$ en z_0, on trouve que pour tout z dans un voisinage V de z_0, on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{et donc} \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=-m}^{+\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n,$$

et donc z_0 est soit une singularité éliminable de f (si $b_j = 0$ pour tout $j < m$) soit un pôle de f. Comme $f(z)$ n'est pas bornée dans un voisinage de z_0, on sait que z_0 n'est pas une singularité éliminable, c'est donc un pôle.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ est évident. Montrons que $\boxed{2 \Rightarrow 3}$. Par définition de singularité isolé et puisque $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset U$ et tel que f ne s'annule jamais sur $V := B(0, r) \setminus \{z_0\}$. En particulier, la fonction $g = \frac{1}{f}$ est holomorphe sur V. De plus $\lim_{z\to z_0} |g(z)| = 0$, donc d'après le théorème d'extension de Riemann g s'étend en une fonction holomorphe sur $B(z_0, r)$. Le developpement en série de Taylor de (l'extension) de g en 0 est de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \text{où} \quad m = \min\{m \in \mathbb{N}\ ;\ b_m \neq 0\}.$$

Donc $g(z) = (z - z_0)h(z)$ pour tout $z \in B(z_0, r)$ où $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+m}(z - z_0)^n$ définit une fonction holomorphe sur $B(z_0, r)$ qui ne s'annule pas sur $B(z_0, r)$. Donc la fonction

$$z \mapsto (z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{h(z)}$$

est bien bornée dans un voisinage de z_0. De plus, l'hypothèse implique directement que f n'est pas bornée dans un voisinage de z_0. □

Théorème 2.13 (Casorati-Weierstrass): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Alors z_0 est une singularité essentielle de f si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$, l'image*

$$f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big)$$

est dense dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Si pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, l'image $f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big)$ est dense dans $\mathbb{C}$, il est clair que f n'est pas bornée dans un voisinage de z_0 et que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| \neq +\infty$, en particulier, z_0 n'est ni une singularité éliminable ni un pôle. Donc z_0 est une singularité essentielle.

Montrons maintenant la réciproque. Par contraposition, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big)$$

ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $w_0 \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$ tels que $f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big) \cap \overline{B}(w_0, \delta) = \varnothing$. Le fonction

$$g : z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$

est donc holomorphe sur $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ et g est majorée par ε^{-1}. Par extension de Riemann, la fonction g se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(z_0, \varepsilon)$, de plus pour tout $z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \varepsilon + \frac{1}{g(z)}.$$

Donc z_0 est une singularité éliminable si $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$ et z_0 est un pôle si $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$. En particulier, z_0 n'est pas une singularité essentielle. □

3 Fonctions méromorphes

3.1 Fonctions méromorphes

Définition 3.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une *fonction méromorphe sur U* est une fonction holomorphe $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ telle que :

1. Z est un ensemble fermé et discret de U,
2. Chaque point $z \in Z$ est un pôle ou une singularité éliminable de f.

On note $\mathscr{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.

Remarque 3.2:

1. En particulier, les fonctions holomorphes sont méromorphes (avec $Z = \varnothing$).
2. Par définition, une fonction méromorphe est une fonction holomorphe en dehors d'un certain ensemble. Mais cet ensemble dépend de la fonction méromorphe. C'est à dire que si f et g sont toutes deux méromorphes, les fonctions holomorphes associées n'ont pas nécessairement le même ensemble de définition.

Exemple 3.3:

1. La fonction
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$
est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Avec les notations de la définition, on a $Z = \{1, 2\}$.
2. La fonction
$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)(z^2-1)}$$
est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Avec les notations de la définition, on a $Z = \{1, -1, i, -i\}$.
3. La fonction
$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$
n'est pas méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f, g \in \mathscr{M}(U)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, $f + \lambda g$ et fg sont des fonctions méromorphes sur U.*

Démonstration. Le premier point est facile à voir, il suffit de faire la somme des développement de série de Laurent en chaque point. Pour voir le second point, on peut utiliser la caractérisation 3 de la proposition 2.12.

□

Proposition 3.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Alors la fonction f' est aussi une fonction méromorphe sur U.*

Ici, avec les notations de la définition par f', nous entendons la fonction holomorphe f' définie sur $U \setminus Z$.

Démonstration. Avec les notations de la définition. La fonction f' est holomorphe sur $U \setminus Z$. Il suffit donc de démontrer que tout point de $z_0 \in Z$ est un pôle de f'. En notant

$$\sum_{n \geqslant -m} a_n (z - z_0)^n$$

le développement en série de Laurent de la fonction f au point z_0, par dérivation sous le signe $\sum$ (autorisé par convergence normale de la série de Laurent sur les compacts de la couronne où la série converge), on en déduit que le développement en série de Laurent de f' en 0 est

$$\sum_{n \geqslant -m} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n \geqslant -m-1} (n+1) n a_{n+1} (z - z_0)^n.$$

Donc z_0 est un pôle de f'. □

3.2 Ordre de zéros et de pôles

Nous introduisons aussi un peu de terminologie concernant les zéros et les pôles.

Définition 3.6: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ tel que f est holomorphe en z_0. Soit $m \in \mathbb{N}$. On dit que z_0 est *un zéro d'ordre* m, ou *un zéro de multiplicité* m si il existe une fonction méromorphe $g \in \mathscr{M}(U)$, holomorphe en z_0, telle que $g(z_0) \neq 0$ et vérifiant

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \ \ \forall z \in U.$$

On dit que m est *l'ordre* du zéro z_0 de f.

Remarque 3.7: Avec cette définition, si f n'est pas identiquement nulle, alors f s'annule en z_0 si et seulement si z_0 est un zéro d'ordre m pour un certain $m \geqslant 1$.

Remarque 3.8: De façon plus générale, avec les mêmes notations, si $f(z_0) = w \in \mathbb{C}$, on dira que f *prend la valeur w avec multiplicité m* si z_0 est un zéro de multiplicité m de la fonction $z \mapsto f(z) - w$.

On peut caractériser l'ordre d'un zéro de la façon suivante.

Proposition 3.9: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$. Soit $m \geqslant 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *z_0 est un zéro d'ordre m de f.*
2. *Le développement en série de Taylor de f en z_0 est de la forme $f(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n (z - z_0)^n$ où $a_m \neq 0$.*
3. *$f^{(k)}(z_0) = 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant m - 1$ et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.*

De façon analogue on peut définir l'ordre d'un pôle.

Définition 3.10: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ un pôle de f. L'ordre du pôle z_0 est l'entier $m \geqslant 1$ défini comme étant le plus petit entier tel que la fonction

$$z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$$

soit bornée dans un voisinage de z_0. On dit alors que z_0 est un pôle d'ordre m de f.

On a les caractérisations équivalentes suivantes pour l'ordre d'un pôle.

Proposition 3.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ un pôle de f. Soit $m \geqslant 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *z_0 est un pôle d'ordre m de f.*
2. *Le développement de série de Laurent de f au point z_0 est de la forme $f(z) = \sum_{n \geqslant -m} a_n z^n$ où $a_{-m} \neq 0$.*
3. *Il existe une fonction holomorphe $h : U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ telle que $h(z_0) \neq 0$ et telle que*
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m} \quad \forall z \in U.$$
4. *z_0 est un zéro d'ordre m de la fonction $\frac{1}{f}$.*

Pour traiter simultanément la notion de zéros et de pôles, on peut utiliser la notion d'ordre suivante.

Définition 3.12: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $z_0 \in U$. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U qui n'est pas identiquement nulle. L'ordre de f en z_0 est l'entier

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) := \min\{n \in \mathbb{Z} \,;\, a_n \neq 0\},$$

où

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

est le développement en série de Laurent de f centré en z_0.

Observons que l'on a

- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = 0$ si et seulement si f est holomorphe en z_0 et que $f(z_0) \neq 0$.
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m > 0$ si et seulement si f est holomorphe en z_0 et que z_0 est un zéro d'ordre m de f.
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = -m < 0$ si et seulement si z_0 est un pôle d'ordre m en f.

En particulier, en vu des résultats précédents, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m$ si et seulement si il existe une fonction méromorphe $g \in \mathscr{M}(U)$ qui est holomorphe en z_0, ne s'annule pas en z_0 et qui vérifie

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

À partir de cette observation, la preuve de la proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.13: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f, g \in \mathscr{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur U pas identiquement nulles. Alors pour tout $z_0 \in U$,*

$$\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(g).$$

Nous avons aussi la proposition suivante.

Proposition 3.14: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f, g \in \mathscr{M}(U)$ des fonctions méromorphes pas identiquement nulle. Alors $\frac{f}{g}$ est une fonction méromorphe sur U et de plus, pour tout $z_0 \in U$, on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) - \mathrm{ord}_{z_0}(g).$$

Remarque 3.15:

1. En particulier, si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe U, alors $\frac{1}{f}$ est une fonction méromorphe sur U
2. En vu de la proposition 3.4, on voit que si U est un ouvert connexe, alors $\mathscr{M}(U)$ est un corps.

Remarque 3.16: Les démonstrations des propositions 3.9, 3.11, 3.13 et 3.14 sont laissées en exercices.

Exemple 3.17: La fonction $z \mapsto \sin z$ a un zéro de multiplicité 1 en 0. La fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ a un pôle d'ordre 1 en i et un pôle d'ordre 1 en $-i$. La fonction $z \mapsto \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$ a un pôle d'ordre 2 en i et un pôle d'ordre 2 en $-i$. La fonction $z \mapsto (\cos z)^{-2}$ a un pôle d'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$.

4 Sphère de Riemann

Comme souligné dans la remarque 3.2, il faut faire attention à l'ensemble de définition d'une fonction méromorphe. En effet, une fonction méromorphe f sur U n'est pas définie en tout point de U, car on ne peut pas définir $f(z_0)$ si z_0 est un pôle de f. Néanmoins, comme nous savons que $|f(z)| \to +\infty$ quand z tend vers un pôle de f, il est légitime de vouloir poser

$$f(z_0) = \infty$$

si z_0 est un pôle de f. On peut donner un sens à cela en introduisant la notion de *sphère de Riemann*.

Définition 4.1: La *sphère de Riemann* est l'ensemble

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Muni de la topologie suivante. Les ouverts de $\hat{\mathbb{C}}$ sont les sous-ensembles de $\hat{\mathbb{C}}$ de l'une des formes suivantes :

1. $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.
2. $U \cup \{\infty\}$ où $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert tel que il existe un compact $K \subset \mathbb{C}$ vérifiant $\mathbb{C} \setminus K \subset U$.

On vérifie que les ouverts ainsi définis forment une topologie de $\hat{\mathbb{C}}$. Nous avons la propriété suivante.

Proposition 4.2: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U. Si l'on définie $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ par $\hat{f}(z) = f(z)$ si f est holomorphe en z et $\hat{f}(z) = \infty$ sinon, alors $\hat{f} : U \to \hat{\mathbb{C}}$ est une application continue.*

Démonstration. Pour montrer que $\hat{f}$ est continue, il faut montrer que pour tout $z_0 \in U$, et pour tout voisinage ouvert W de $w_0 := \hat{f}(z_0)$, il existe un voisinage ouvert de V de z_0 tel que $\hat{f}(V) \subset W$.

Si $w_0 \in \mathbb{C}$, alors f est holomorphe en z_0 et donc continue en z_0. En particulier si W et un voisinage ouvert de w_0 dans $\hat{\mathbb{C}}$, quitte à prendre un voisinage plus petit, on peut supposer que W est un ouvert de $\mathbb{C}$. Donc par continuité de f il existe un voisinage ouvert V de z_0 tel que $\hat{f}(V) = f(V) \subset W$.

Supposons maintenant que $w_0 = \infty$ (et donc que z_0 est un pôle de f) et soit W un voisinage ouvert de w. Par la définition de la topologie sur $\hat{\mathbb{C}}$, $W = W' \cup \{\infty\}$ où W' est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{C}$ vérifiant $\mathbb{C} \setminus K \subset W'$. La proposition 2.12 implique que $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to z_0$, en particulier, pour un $\delta > 0$ suffisamment petit $f(B(z_0, \delta)) \subset \mathbb{C} \setminus K \subset U$. D'où le résultat. $\square$

La façon naturelle de comprendre $\hat{\mathbb{C}}$ est d'y penser comme une sphère. Cela est justifié par la projection stéréographique, qui est définie comme suit. On pose

$$S^2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}.$$

On note $N = (0,0,1)$ le pôle nord de la sphère. On considère la projection *stéréographique* de $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2).$$

Cette application est une bijection dont l'application réciproque est

$$\varphi^{-1}(x + iy) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1).$$

Cette application s'étend en une bijection $\varphi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ en posant $\varphi(N) := \infty$. On peut vérifier que φ est un homéomorphisme entre $\hat{\mathbb{C}}$ muni de la topologie introduite ci-dessus et S^2 muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^3$. En particulier, $\hat{\mathbb{C}}$ est compact.

5 Exercices

5.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition des séries de Laurent suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{|n|}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n+1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2+2}$.

Exercice 2. Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes sur la couronne $A_{z_0}(r_1, r_2)$ indiquée.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)}$ sur $A_0(0,1)$,
2. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ sur $A_1(0,+\infty)$,
3. $f(z) = \dfrac{(z-z_0)^2}{(z-a)^2}$ sur $A_{z_0}(|z_0-a|,+\infty)$,
4. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$ sur $A_1(1,2)$,
5. $f(z) = \left(\dfrac{z}{z-1}\right)^k$ sur $A_0(1,+\infty)$ et $k \in \mathbb{N}$,
6. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ sur $A_1(2,+\infty)$.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $|a| < |b|$. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}$$

1. Décomposer $f(z)$ en éléments simples.
2. Calculer le développement en série de Laurent de f centré en 0, dans les couronnes suivants :

   (a) $A_0(0,|a|)$, (b) $A_0(|a|,|b|)$, (c) $A_0(|b|,+\infty)$.

Exercice 4. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}.$$

1. Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^{\frac{1}{z}} = 1$ et en déduire l'ensemble de définition de f.
2. En déduire que 0 n'est pas une singularité isolée de f.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le type de singularité du point z_0 indiqué. Si c'est une singularité éliminable, déterminer comment prolonger la fonction holomorphiquement en ce point, si c'est un pôle, déterminer la partie principale du développement en série de Laurent de la fonction en ce point.

1. $f(z) = \dfrac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$ en $z_0 = -i$,
2. $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$ en $z_0 = 0$,
3. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^4}$ en $z_0 = 0$,
4. $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ en $z_0 = 1$,
5. $f(z) = \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ en $z_0 = \frac{\pi}{2}$,
6. $f(z) = \sin\left(\dfrac{\pi}{z^2+1}\right)$ en $z_0 = i$,

5.2 Exercices plus avancés

Exercice 6. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Soit $z_0 \in U$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que z_0 est un zéro de multiplicité m de f et que z_0 est un zéro de multiplicité m de g. Montrer que z_0 est une singularité éliminable de la fonction $\frac{f}{g}$, puis montrer que

$$\frac{f(z)}{g(z)} \to \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)} \quad \text{quand} \quad z \to z_0.$$

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Montrer que z_0 n'est pas un pôle de e^f.

Exercice 8. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle en z_0. Soit $g_0, \dots, g_n : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes.

1. Montrer que le point z_0 est une singularité essentielle de la fonction $g_n f^n + g_{n-1} f^{n-1} + \cdots + g_1 f + a_0$.

2. Est-ce que ce résultat reste vrai si les fonctions $g_0, \dots, g_n$ peuvent avoir un pôle en z_0 ?

Exercice 9. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle en z_0. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \subset U$. On considère la fonction $M :]0, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ définie par

$$M(r) = \sup_{z \in C(z_0, r)} |f(r)|.$$

Montrer que

$$\lim_{r \to 0} r^k M(r) = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 10. L'objectif de cet exercice est de démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont les fonctions affines non-constantes, c'est à dire les fonctions de la forme $z \mapsto az+b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. (Un automorphisme de $\mathbb{C}$ est par définition un biholomorphisme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.)

1. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$ tel que $f(0) = 0$. Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

   (a) Montrer que qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que si $|z| < \varepsilon$ alors $|g(z)| > C$.

   (b) En déduire que 0 n'est pas une singularité essentielle de g.

   (c) En déduire que f est un polynôme et que de plus $\deg P = 1$.

2. Démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont exactement les fonctions affines non-constantes.

Exercice 11. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de U. Montrer que f est méromorphe sur U si et seulement si elle s'écrit localement comme quotient de deux fonctions holomorphes (c'est à dire si pour tout $z_0 \in U$, il existe une voisinage V de z_0, et des fonctions holomorphes $g, h \in \mathcal{O}(U)$ tels que h ne s'annule pas sur un ouvert et tels que $f(z) = \frac{g}{h}$ pour tout $z \in V$ tel que $h(z) \neq 0$).

UE 601: Analyse complexe

Chapitre VII : Théorème des résidus et applications

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Théorème des résidus

Définition 1.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. Alors le *résidu de f en z_0* est le nombre complex

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,\varepsilon)} f(z)dz,$$

où $\varepsilon > 0$ vérifie $\overline{B}(z_0,\varepsilon) \subset U$.

Remarque 1.2:

1. Le théorème de Cauchy homologique (ou homotopique), montre que le résidu est indépendant du choix de ε dans cette définition.
2. Il nous arrivera, pour alleger les notations dans les calculs, d'écrire $\mathrm{res}_{z_0}(f(z))$ au lieu d'écrire $\mathrm{res}_{z_0}(f)$. Par exemple il nous arrivera d'écrire $\mathrm{res}_0\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$, au lieu d'écrire $\mathrm{res}_0(f)$ où $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est la fonction définie par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
3. On peut utiliser la même définition pour définir le résidu d'une fonction en un point z_0 où f est holomorphe, dans ce cas, par le théorème de Cauchy, on a toujours $\mathrm{res}_{z_0}(f) = 0$. Ce même argument montre que si z_0 est une singularité éliminable, alors $\mathrm{res}_{z_0}(f) = 0$.

Le théorème de Cauchy homologique permet d'obtenir facilement le résultat important suivant.

Théorème 1.3 (Théorème des résidus): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $Z \subset U$ un sous-ensemble fermé et discret de U. Soit $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit Γ un cycle de U*, homologiquement trivial dans *U et vérifiant* $\mathrm{Supp}(\Gamma) \subset U \setminus Z$. *Alors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z\in Z} \mathrm{ind}_\Gamma(z)\mathrm{res}_z(f).$$

Remarque 1.4:

1. Comme nous le verrons dans la preuve, la somme de droite est en fait un somme finie, même si Z peut-être infini.
2. De plus, comme $\mathrm{res}_z(f) = 0$ pour tout $z \in U \setminus Z$, on pourrait aussi écrire le résultat de ce théorème sous la forme
$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z\in U\setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)} \mathrm{ind}_\Gamma(z)\mathrm{res}_z(f).$$
3. Soulignons, que si U est *simplement connexe*, ce résultat s'applique à n'importe quel lacet de U. C'est sous cette forme que nous utiliserons le résultat le plus souvent.

Démonstration. Montrons déjà que la somme $\sum_{z\in Z} \mathrm{ind}_\Gamma(z)\mathrm{res}_z(f)$ est une somme finie. Pour cela, nous allons montrer que $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \in Z$ sauf éventuellement un nombre fini. Notons U_0 la réunion des composant connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ sur lesquelles l'indice par rapport à Γ est nul. Notons V la réunion des autres composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$. Par définition de «homologiquement trivial» on sait que $\mathbb{C} \setminus U \subset U_0$ et donc que $\overline{V} = V \cup \mathrm{Supp}(\Gamma) \subset U$. De plus, on sait aussi que l'unique composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ est incluse dans U_0. En particulier, on en déduit que $\overline{V}$ est borné, c'est donc un compact inclus dans U. Comme $\overline{V}$ est compact est que Z est fermé et discret, on en déduit que $V \cap Z = \overline{V} \cap Z$ est un ensemble fini. Par construction, nous savons que $V \cap Z$ est l'ensemble des points z de Z vérifiant $\mathrm{ind}_\Gamma(z) \neq 0$ et donc cet ensemble est fini.

Notons $Z \cap V = \{z_1, \dots, z_m\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, on a $\overline{B}(z_k, \varepsilon) \subset U$ et tel que $\overline{B}(z_k, \varepsilon) \cap Z = z_0$, ceci est possible car U est ouvert et que Z est discret. Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ on pose $\gamma_k : [0, 2\pi] \to U$ le chemin défini par $\gamma_k(t) = z_k + \varepsilon e^{it}$, c'est à dire le lacet parcourant le cercle de rayon ε et de centre z_k une fois dans le sens direct. Nous allons montrer que le cycle

$$\Gamma' = \Gamma - \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\Gamma(z_k)\gamma_k.$$

Nous allons montrer que Γ' est homologiquement trivial dans $U \setminus Z$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus (U \setminus Z)$. Si $z \in \mathbb{C} \setminus U$, alors $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$ par hypothèse et $\mathrm{ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ puisque $z \notin \overline{B}(z_0, \varepsilon)$. On en déduit que $\mathrm{ind}_{\Gamma'}(z) = 0$.

Si $z \in Z \setminus V$, alors $z \in U_0$ et on en déduit que $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$. De plus, puisque $z \notin \{z_1, \dots, z_m\}$, on a par choix de ε que $\varepsilon \notin \overline{B}(z_k, \varepsilon)$ et donc que $\mathrm{ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$. En particulier, on en déduit que $\mathrm{ind}_{\Gamma'}(z) = 0$.

Il reste à traiter le cas $z \in \{z_1, \dots, z_m\}$. Soit $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que $z_k = z$. On a alors $\mathrm{ind}_{\gamma_k}(z) = 1$ et $\mathrm{ind}_{\gamma_j}(z) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}$. On en déduit que

$$\mathrm{ind}_{\Gamma'}(z) = \mathrm{ind}_\Gamma(z) - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{ind}_\Gamma(z_j)\,\mathrm{ind}_{\gamma_j}(z) = \mathrm{ind}_\Gamma(z) - \mathrm{ind}_\Gamma(z_k) = 0.$$

Par définition, cela veut dire que Γ' est homologiquement trivial dans $U \setminus Z$. Puisque de plus f est holomorphe sur $U \setminus Z$, le théorème de Cauchy homologique implique que $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0$ et donc que

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\Gamma(z_k) \int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\Gamma(z_k)\Big(2i\pi\,\mathrm{res}_{z_k}(f)\Big) \\ &= 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\Gamma(z_k)\,\mathrm{res}_{z_k}(f) = 2i\pi \sum_{z \in Z} \mathrm{ind}_\Gamma(z)\,\mathrm{res}_z(f). \end{aligned}$$

□

Pour reformuler ce résultat dans le cas particulier le plus souvent utilisé en pratique, nous énonçons deux théorèmes que nous ne démontrerons pas ici mais qui, dans tous les cas rencontrés en pratique sont triviaux à vérifier.

Théorème 1.5 (Jordan): *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet continue et* simple *(aussi appelé* lacet de Jordan*). Alors $\mathbb{C} \setminus \gamma\big([a, b]\big)$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non-bornée. La composante connexe bornée est appelée* l'intérieur du lacet *et la composante connexe non-bornée appelée* l'exterieur du lacet.

Remarque 1.6:

1. Il est clair que si γ est un lacet de Jordan, alors $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$ pour tout z dans l'extérieur de γ. En particulier, si γ est un lacet de Jordan dans un ouvert U tel que l'intérieur de γ est contenue dans U, alors γ est homologiquement trivial dans U. On peut même montrer que γ est homotopiquement trivial, mais c'est plus difficile.

2. On dira qu'un lacet de Jordan $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ est orienté dans le sens direct si $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ pour tout z dans l'intérieur de γ.

Remarque 1.7: Pour les résultats que nous allons énoncer dans la suite, l'étudiant pointilleux, qui ne souhaite pas utiliser des théorèmes non démontrés dans le cours, pourra remplacer l'hypothèse «*Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U.*» par l'hypothèse «*Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U tel que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ a deux composantes connexes, l'une non-bornée et une autre noté U_1 qui est bornée, incluse dans U et vérifie* $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ *pour tout $z \in U_1$.*». Puis, remplacer «*l'intérieur de γ*» par «*la composante U_1*». Ces deux hypothèses sont en fait équivalentes, immédiatement vérifiable en pratique, et c'est vraiment la seconde version que l'on utilise dans les preuves.

La version du théorème des résidus la plus souvent utilisée est la suivante.

Théorème 1.8 (Théorème des résidus): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U. Soit γ un lacet de Jordan $\mathscr{C}^1$ par morceaux de U, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Supposons que f n'a ni zéro ni pôle sur l'image de γ, et notons $z_1, \ldots, z_m$ l'ensemble des pôles de f situés dans l'intérieur de γ. Alors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k}(f).$$

2 Méthodes de calcul de résidus

Pour pouvoir utiliser le théorème des résidu, il est important de savoir calculer des résidus en pratique. Observons déjà que par la définition et la linéarité de l'intégrale, le résidu est linéaire de la façon suivante.

Proposition 2.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a*

$$\mathrm{res}_{z_0}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{res}_{z_0}(f) + \mu \mathrm{res}_{z_0}(g).$$

Ensuite observons que le résidu peut se lire directement sur le développement en série de Laurent.

Proposition 2.2: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. On considère le développement en série de Laurent de la fonction f centré en z_0*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n,$$

alors

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = a_{-1}.$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$2i\pi\,\mathrm{res}_{z_0}(f) = \int_{C(z_0,\varepsilon)} f(z)dz = \int_{C(z_0,\varepsilon)} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n\right)dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{C(z_0,\varepsilon)} a_n(z-z_0)^n dz\right) = 2i\pi a_{-1}.$$

Ici nous avons utilisé la convergence normale de la série de Laurent sur les compacts pour pouvoir intervertir le signe $\int$ et le signe $\sum$. □

Exemple 2.3: On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Le développement en série de Laurent de f au point 0 est

$$\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$$

Donc

$$\mathrm{res}_0\left(e^{\frac{1}{z}}\right) = \mathrm{res}_0(f) = 1.$$

Comme mentionné précédemment, d'après le théorème de Cauchy, le résidu de f est nul en un point où la fonction f est holomorphe, c'est donc le cas pour les singularités éliminables. Pour calculer le résidu en un pôle, on peut utiliser la propriété suivante.

Proposition 2.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors, en notant g la fonction définie par $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$, on a*

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

En particulier, on a le corollaire suivant très utile en pratique.

Corollaire 2.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. Si z_0 est un pôle simple de f, alors, en notant g la fonction définie par $g(z) = (z-z_0)f(z)$, on a*

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = g(z_0).$$

Démonstration de la proposition 2.4. On considère le développement en série de Laurent de f au point z_0 :

$$f(z) = \sum_{n\geqslant -m} a_n(z-z_0)^n.$$

Le developpement en série de Taylor en z_0 de la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ est alors

$$g(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n.$$

En dérivant $m-1$ fois, on trouve que le developpement en série de Taylor en z_0 de g^{m-1} est

$$g^{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} n(n-1)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m+1} = \sum_{n=m}^{+\infty} a_{n-m} n(n-1)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m+1}.$$

En évaluant cette relation en z_0, on trouve

$$g^{m-1}(z_0) = (m-1)! a_{-1}.$$

En. vu de la proposition 2.2, on trouve que $\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$. □

Exemple 2.6: Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ la fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ a un pôle d'ordre 1 en i et un pôle d'ordre 1 en $-i$. D'après le formule précédente, on a

$$\mathrm{res}_i(f) = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i} \quad \text{et} \quad \mathrm{res}_i(f) = \frac{1}{-i-i} = \frac{-1}{2i}.$$

Exemple 2.7: Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ la fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ a un pôle d'ordre 2 en i et un pôle d'ordre 2 en $-i$. D'après le formule précédente, en notant $g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$, on a

$$\mathrm{res}_i(f) = g'(i) = \frac{-2}{(i+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

3 Principe de l'argument et théorème de Rouché

Le théorème des résidus peut être utilisé pour compter le nombre de zéros et de pôles de fonctions méromorphes. Pour cela commençons par l'observation suivante.

Lemme 3.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$. Alors*

$$\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = \mathrm{ord}_{z_0}(f).$$

Démonstration. Notons $m := \mathrm{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$. D'après ce que nous avons vu dans le chapitre VI, il existe une fonction holomorphe $g \in \mathscr{M}(U)$, holomorphe au voisinage de z_0, telle que $g(z_0) \neq 0$ et telle que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in U.$$

On a alors

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z),$$

et donc
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{(z-z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Comme le fonction $\frac{g'}{g}$ est holomorphe sur $U \cup \{z_0\}$, on en déduit que
$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m \operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g'}{g}\right) = m = \operatorname{ord}_{z_0}(f).$$

□

Remarque 3.2: Cet énoncé implique donc que $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m$ si z_0 est un zéro d'ordre m de f et que $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = -m$ si z_0 est un pôle d'ordre m de f.

En vu de ce lemme, une application directe du théorème des résidus implique alors le résultat suivant.

Théorème 3.3 (Principe de l'argument): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit Γ un 1-cycle homologiquement trivial de U tel que f n'a pas de zéro ni de pôle sur* $\operatorname{Supp}(\Gamma)$, *alors on a*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\in U} \operatorname{ind}_\Gamma(z)\operatorname{ord}_z(f).$$

Comme cas particulier, on obtient la formulation plus classique suivante.

Corollaire 3.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U telle que f n'a ni zéro ni pôle sur l'image de γ. Notons, $z_1,\dots,z_k$ les zéros de f dans l'intérieur de γ et notons $m_1,\dots,m_k$ leurs multiplicités. De même, notons $w_1,\dots,w_\ell$ les pôles de f dans l'intérieur de γ et notons $p_1,\dots,p_\ell$ leurs ordres (en tant que pôles). Alors on a*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{k} m_j - \sum_{j=1}^{\ell} p_j.$$

Démonstration. Nous utilisons juste le théorème 3.3, en remarquant (comme ci-dessus) que $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 1$ pour tout z dans l'intérieur de γ et que γ est homologiquement trivial dans U. □

Si f est holomorphe, alors l'intégrale ci-dessus calcul directement le nombre de zéros (compté avec multiplicité) de f dans l'intérieur de γ. De façon plus générale, si l'on ceut calculer le nombre de fois où f prend une valeur $w \in \mathbb{C}$, on peut utiliser la version suivante du principe de l'argument.

Corollaire 3.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Soit $w \in \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{O}(U)$ une fonction holomorphe sur U telle que f ne prend jamais la valeur w sur l'image de γ. Notons, $z_1,\dots,z_k$ les points de l'intérieur de γ sur lesquels f prend la valeur w avec multiplicités $m_1,\dots,m_k$. Alors on a*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \sum_{j=1}^{k} m_j.$$

On parle de *principe de l'argument* car l'intégrale apparaissant dans ce corollaire vérifie, par changement de variable,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{f\circ\gamma}\frac{d\xi}{\xi-w} = \mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(w),$$

et compte donc le nombre de fois où l'image de γ par f tourne autour de w. Or à un facteur 2π près, ce nombre est la variation de *l'argument* de $f\circ\gamma(t)-w$ lorsque t varie dans l'ensemble de définition de γ.

En pratique, pour calculer le nombre de zéros de certaines fonctions holomorphes dans certaines régions du plan, on pourra essayer d'utiliser le théorème de Rouché.

Théorème 3.6 (Rouché): *Soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f,g : U\to\mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Supposons que*

$$|g(z)-f(z)| < |f(z)| \quad \forall z\in\mathrm{im}(\gamma),$$

alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans l'intérieur de γ.

Démonstration. Pour tout $\lambda\in[0,1]$ on note $h_\lambda := (1-\lambda)f+\lambda g = f+\lambda(g-f)$. Par hypothèse on a

$$\lambda|g(z)-f(z)| \leqslant |g(z)-f(z)| < |f(z)| \quad \forall z\in\mathrm{im}(\gamma)$$

et en particulier, on en déduit que pour tout $\lambda\in[0,1]$, h_λ ne s'annule pas sur $\mathrm{im}(\gamma)$. La fonction $Z:[0,1]\to\mathbb{C}$ définie par

$$Z(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}dz$$

est donc bien définie, et ne prend que des valeurs entières d'après le principe de l'argument. De plus, par continuité sous le signe intégral, la fonction Z est continue. Comme $[0,1]$ est connexe, on en déduit que Z est constante. De plus, comme $h_0=f$, le principe de l'argument implique que $Z(0)$ est le nombre de zéros de f dans l'intérieur de γ comptés avec multiplicités, et comme $h_1=g$ le principe de l'argument implique que $Z(0)$ est le nombre de zéros de g dans l'intérieur de γ comptés avec multiplicités. D'où le résultat. □

Exemple 3.7: Nous cherchons à compter le nombre de zéros dans $B(0,1)$ (comptés avec multiplicité) de la fonction $z\mapsto z^5-3z+1$. On pose $g(z)=z^5-3z+1$ et $f(z)=3z-1$. La fonction f a un unique zéro dans $B(0,1)$, le point $\frac{1}{3}$ avec multiplicité 1. De plus, pour tout $z\in C(0,1)$ on a

$$|g(z)-f(z)| = |z^5| = 1 < 2 \leqslant |3z-1| = |f(z)|.$$

Le théorème de Rouché implique donc que g a exactement un zéro dans $B(0,1)$.

Exemple 3.8: Nous cherchons à compter le nombre de zéros dans $B(0,2)$ (comptés avec multiplicité) de la fonction $z\mapsto z^5-3z+1$. On pose $g(z)=z^5-3z+1$ et $f(z)=z^5$. La fonction f a un unique zéro dans $B(0,0)$, le point 0 avec multiplicité 5. De plus, pour tout $z\in C(0,2)$ on a

$$|g(z)-f(z)| = |-3z+1| \leqslant 7 < 32 = 2^5 =\leqslant |z^5| = |f(z)|.$$

Le théorème de Rouché implique donc que g a 5 zéros (comptés avec multiplicité) dans $B(0,2)$.

4 Applications au calcul d'intégrales réelles

Dans cette section, nous allons illustrer comment le théorème des résidus peut-être utilisé pour calculer différents types d'intégrales réelles.

Remarque 4.1: **ATTENTION !** Nous donnons ici des résultats généraux avec un certains nombre de formules, néanmoins nous soulignons fortement que **ces formules ne sont pas à connaitre par cœur, mais il faut savoir les retrouver dans chaque cas particulier**. Il est cependant bien de connaitre les différents lemmes permettant d'estimer les différents termes d'erreur, ainsi que leur démonstration.

4.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

Dans cette partie on cherche à calculer une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

où $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité. Cette hypothèse garantie que la fonction $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par

$$R(\cos\theta, \sin\theta), \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

est bien définie et continue (donc intégrable).

Remarque 4.2 (Idée à retenir): L'idée pour calculer cette intégrale est de se ramener à une intégrale curviligne sur le cercle unité en utilisant le "changement de variable"

$$z = e^{i\theta},$$

qui implique

$$\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

De façon plus formelle, on introduit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right).$$

C'est bien une fonction méromorphe car R est une fraction rationnelle, de plus f n'a pas de pôles sur $C(0,1)$ par notre hypothèse sur R. On note $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\int_\gamma f(z)dz &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)d\theta = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta. \end{aligned}$$

D'autre part, le théorème des résidus implique que

$$\frac{1}{i}\int_\gamma f(z)dz = 2\pi \sum_{z \in B(0,1)} \mathrm{res}_z(f).$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 4.3: *Soit $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité. Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ la fonction méromorphe définie par*

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right).$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi \sum_{z \in B(0,1)} \mathrm{res}_z(f).$$

Exemple 4.4: Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel vérifiant $a > 1$. On cherche à calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}.$$

En appliquant l'approche ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} &= \int_{C(0,1)} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1} \\ &= \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)},\end{aligned}$$

où

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2-1} \in B(0,1) \quad \text{et} \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2-1} \notin B(0,1).$$

Le résidu en z_1 de la fonction $z \in\mapsto \frac{1}{z^2+2az+1}$ est donc

$$\mathrm{res}_{z_1}\left(\frac{1}{z^2+2az+1}\right) = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}},$$

et le théorème des résidus implique alors que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1} = 4\pi\, \mathrm{res}_{z_1}\left(\frac{1}{z^2+2az+1}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exemple 4.5: Notons que dans certains cas, on peut en déduire encore d'autres intégrales. Par exemple, ici, par périodicité et parité de la fonction sous l'intégrale, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

4.2 Intégrales sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationelle

Dans cette section, nous étudions les intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

où f est une fraction rationnelle (à coefficients complexes) qui n'a pas de pôle sur l'axe réel. Si l'on écrit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ sont premiers entre eux, comme par hypothèse Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, une condition nécéssaire et suffisante pour que f soir intégrable sur $\mathbb{R}$ est que

$$\deg Q \geqslant \deg P + 2.$$

Ce que nous supposerons à partir de maintenant.

Remarque 4.6 (Idée à retenir): L'idée pour calculer cette intégrale est de calculer $\displaystyle\int_{\gamma^R} f(z)dz$ le long du lacet $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$ ci-dessous. De faire tendre $R \to +\infty$ et de montrer que l'intégrale de f le long de γ_2^R tend vers 0 et que l'intégrale de f le long de γ_1^R tend vers l'intégrale que l'on recherche.

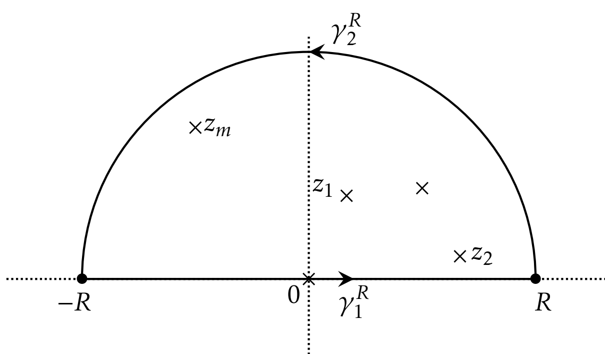


figure 1.

De façon plus précise, on note

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\} \quad \text{le demi-plan de Poincaré.}$$

On note $z_1, \ldots, z_m$, les pôles de la fonction f qui appartiennent à $\mathbb{H}$. Notons que f est une fonction méromorphe car c'est une fraction rationnelle. On note $R_0 = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,m\}} |z_k|$. Pour tout $R > R_0$ on introduit le chemin $\gamma_1^R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_1^R(t) = t$ pour tout $t \in [-R, R]$ et le chemin $\gamma_2^R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma_2^R(t) = Re^{it}$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant \pi$. C'est à dire les chemins représentés ci-dessus. D'une part, nous avons

$$\int_{\gamma_R^1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt,$$

et donc, puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_1^R} f(z)dz.$$

D'autre part, pour tout $R > R_0$, le théorème des résidus implique que, en notant $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k}(f) = 2i\pi \sum_{z \in \mathbb{H}} \mathrm{res}_z(f).$$

Comme

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)dz,$$

il nous reste juste à calculer la limite quand $R \to +\infty$ de l'intégrale $\int_{\gamma_2^R} f(z)dz$. Pour cela, il suffit de voir que

$$\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)dz\right| = \ell(\gamma_2^R) \sup_{z\in\gamma_2^R([0,\pi])} |f(z)| = \pi R \sup_{|z|=R} |f(z)| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour obtenir cela, nous avons utilisé le fait que $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est le quotient de deux polynôme tels que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. En effet, cette condition implique qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(z)| \leqslant \frac{\alpha}{|z|^2}$ pour $|z|$ suffisamment grand en particulier, pour R suffisamment grand

$$\pi R \sup_{|z|=R} |f(z)| \leqslant \pi R \sup_{|z|=R} \frac{\alpha}{|z|^2} = \frac{\alpha\pi}{R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant:

Proposition 4.7: *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et telle que f n'a pas de pôle sur l'axe réel. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2i\pi \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_z(f).$$

Illustrons cela sur l'exemple suivant (que nous avions déjà traité de cette façon dans l'exercice 5 du chapitre 4).

Exemple 4.8: Calculons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ici $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$. La fonction f vérifie bien les hypothèse de la propriété puisque le dénominateur est de degré 2, que le numérateur est de degré 0 et que de plus f a deux pôles simples, l'un en $i \in \mathbb{H}$ et l'autre en $-i \notin \mathbb{H}$. La proposition implique donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2i\pi\, \mathrm{res}_i(f) = \frac{2i\pi}{i+i} = \pi.$$

Voici un exemple un autre exemple.

Exemple 4.9: Calculons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$$

Ici

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z^2-i)(z^2+i)} = \frac{1}{(z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)(z-\xi_4)},$$

où

$$\xi_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \xi_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \xi_3 = e^{3i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \xi_4 = e^{-3i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

La fonction f vérifie bien les hypothèse de la propriété puisque le dénominateur est de degré 4, que le numérateur est de degré 0 et que de plus f n'a pas de pôle réel, puisque l'ensemble de ses pôles est $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Les pôles du demi-plan de Poincaré sont donc ξ_1 et ξ_3. La proposition implique donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2i\pi\Big(\mathrm{res}_{\xi_1}(f) + \mathrm{res}_{\xi_3}(f)\Big).$$

On a

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{\xi_1}(f) &= \frac{1}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)(\xi_1-\xi_4)} = \frac{2\sqrt{2}}{((1+i)-(1-i))((1+i)-(-1+i))((1+i)-(-1-i))} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2i\times 2\times(2+2i)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{-1+i} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(-1-i)}{2} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

De même on trouve

$$\operatorname{res}_{\xi_3}(f) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4} = 2i\pi\Big(\operatorname{res}_{\xi_1}(f)+\operatorname{res}_{\xi_3}(f)\Big) = 2i\pi\left(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Notons que cette approche peut aussi permettre de calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de fonctions un peu plus générale que des fractions rationnelle. En effet, les hypothèses que l'on a utilisé étaient que f était méromorphe avec un nombre fini de pôle dans $\mathbb{H}$, pas de pôle sur $\mathbb{R}$ et une décroissance suffisamment rapide à l'infini. Pour détailler ce dernier point, notons le lemme suivant.

Lemme 4.10: *Soit $R_0 > 0$. On note $S := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \text{ et } |z| \geqslant R_0\}$. Soit $f = S \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que*

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in S}} zf(z) = 0.$$

Alors si on pose $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$ et pour tout $R \geqslant R_0$ on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse implique qu'il existe $M > R_0$ tel que pour tout $z \in S$ vérifiant $|z| \geqslant M$ on a $|zf(z)| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $R \geqslant M$, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \leqslant \pi(\theta_2-\theta_1)R\sup_{\substack{z\in S \\ |z|=R}}|f(z)| \leqslant \pi(\theta_2-\theta_1)\varepsilon.$$

Ce qui implique bien le résultat annoncé. □

La même preuve que celle de la proposition 4.7 implique le résultat plus général suivant.

Proposition 4.11: *Soit f une fonction méromorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$ qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$, qui n'a qu'un nombre fini de pôle sur $\mathbb{H}$ et qui vérifie de plus que $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{\mathbb{H}}}} |zf(z)| = 0$. Alors l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2i\pi\sum_{z\in\mathbb{H}}\operatorname{res}_z(f).$$

Plutôt que de faire les détails de la preuve, nous la faisons dans un exemple.

Exemple 4.12: Considérons la détermination de la racine carré de la fonction $z \mapsto z+i$, définie sur $\mathbb{C} \setminus (-i+\mathbb{R}_-)$, donné par

$$\sqrt{z+i} := e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z+i)}$$

où Log est la détermination principale du logarithme. On peut alors chercher à calculer, sous réserve qu'elle existe, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+i}}{1+x^2} dx.$$

Notons $f : \mathbb{C} \setminus (-i+\mathbb{R}_-)$ la fonction définie par

$$f(z) = \frac{\sqrt{z+i}}{1+z^2}.$$

La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-i+\mathbb{R}_-)$ avec un pôle simple en i. De plus, on a pour tout z suffisamment grand dans $\overline{\mathbb{H}}$, on a

$$\begin{aligned} |z||f(z)| &= \frac{|z|}{|1+z^2|}\left|e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z+i)}\right| = \frac{|z|}{|1+z^2|} e^{\frac{1}{2}\ln|z+i|} \leqslant \frac{|z|}{|1+z^2|} e^{\frac{1}{2}\ln(|z|+1)} = \frac{|z|\sqrt{|z|+1}}{|1+z^2|} \\ &\leqslant \frac{|z|\sqrt{|z|+1}}{|z|^2-1} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Avec les notations de la figure 1, le lemme implique alors

$$\int_{\gamma_2^R} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, la majoration ci dessus implique que $f(x) \leqslant \frac{\sqrt{|x|+1}}{x^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc, d'après le critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, le théorème des résidus implique que pour tout $R > 1$, on a

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = 2i\pi \operatorname{res}_i(f) = 2i\pi\frac{\sqrt{2i}}{2i} = \pi\sqrt{2i} = \pi(1+i).$$

En vu de ceci, l'égalité

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)dz,$$

implique que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \pi(1+i).$$

4.3 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$

Dans cette section nous étudions des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt.$$

Ce genre d'intégrale apparait en particulier pour calculer des transformées de Fourier, mais notons aussi qu'en utilisant la relation $e^{it} = \cos t + i \sin t$, comprendre ces intégrales nous permettra aussi de calculer les intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos t dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin t dt.$$

Nous allons pour l'instant supposer que $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle telle que, $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ et que f n'a pas de pôles sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4.13 (Idée à retenir): L'idée est de faire le même raisonnement que celui de la section précédente, en utilisant le chemin d'intégration décrit dans la figure 1, mais en faisant une estimation plus fine pour contrôler le terme d'erreur. Pour cela, il faut se souvenir que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta \leqslant \theta.$$

Notons $z_1, \ldots, z_m$ les pôles de f qui appartiennent à $\mathbb{H}$ et posons $R_0 := \max_{1\leqslant k\leqslant m} |z_k|$. Pour tout $R \geqslant R_0$ on considère les chemins γ_1^R, γ_2^R et $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$ décrits dans la figure 1. Tout d'abord, le théorème des résidus implique que pour tout $R \geqslant R_0$, on a

$$\int_{\gamma^R} f(z)e^{iz}dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k}(f(z)e^{iz}) = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

Nous allons maintenant étudier l'intégrale le long de γ_2^R. On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)e^{iz}dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} f\Big(Re^{i\theta}\Big)e^{iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi}\left|f\Big(Re^{i\theta}\Big)e^{iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}\right|d\theta \\
&\leqslant R\Big(\max_{\theta\in[0,\pi]}|f(Re^{i\theta})|\Big)\int_0^{\pi}\left|e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|d\theta = R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}d\theta \\
&= 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta \leqslant 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta \\
&= 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\left[\frac{-\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leqslant 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\frac{\pi}{2R} \\
&= \pi\max_{|z|=R}|f(z)| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne nous avons utilisé le fait que $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ de sorte que $|f(z)| \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. En vu de cela, et du fait que

$$\int_{\gamma_1^R} f(z)e^{iz}dz = \int_{-R}^{+R} f(t)e^{it}dt,$$

la relation

$$\int_{\gamma^R} f(z)e^{iz}dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)e^{iz}dz$$

implique que que

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(t)e^{it}dt = 2i\pi\sum_{w\in\mathbb{H}}\mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).}$$

À priori, cela n'est pas suffisant pour dire que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge. Mais une integration par partie donne, pour tout

$$\int_0^R f(t)e^{it} = [-if(t)e^{it}]_0^R + \int_0^{+\infty} f'(t)ie^{it}dt = -if(R)e^{iR} + if(0)\int_0^{+\infty} f'(t)ie^{it}dt.$$

Mais f' est une fraction rationnelle telle que le degré du dénominateur et plus grand que le degré du numérateur plus 2, donc la fonction $f'(t)ie^{it}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comme par ailleurs $-if(R)e^{iR} \to 0$

quand $R \to +\infty$, nous voyons que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge, et l'on montre de même que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 f(t)e^{it}dt$ converge.

Nous avons donc démontré la proposition suivante

Proposition 4.14: *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que* $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ *et telle que f n'a pas de pôle sur l'axe réel. Alors l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge et l'on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.15: Pour tout réel $a > 0$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi e^{-a}}{a},$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi e^{-a}}{a} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{a^2+t^2}dt = 0.$$

En effet, ici la fonction f est la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{a^2+z^2} = \dfrac{1}{(z-ia)(z+ia)}$. La fonction $z \mapsto f(z)e^{iz}$ a donc un pôle simple en $ia \in \mathbb{H}$ et un pôle simple en $-ia \notin \mathbb{H}$, et l'on a

$$\mathrm{res}_{ia}\left(f(z)e^{iz}\right) = \frac{e^{i(ia)}}{(ia+ia)} = \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{-ie^{-a}}{2a}$$

La proposition précédente implique alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{a^2+t^2}dt = 2i\pi\, \mathrm{res}_{ia}(f(z)e^{iz}) = 2i\pi\left(\frac{-ie^{-a}}{2a}\right) = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

En lisant attentivement la démonstration de la proposition 4.14, on remarque que les hypothèses essentielles que nous avons utilisé sur f sont, la finitude des pôles dans $\mathbb{H}$, l'absence de pôles sur $\mathbb{R}$ et le fait que $\lim\limits_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in S}} |f(z)| = 0$. En effet, les arguments ci-dessus impliquent facilement le lemme suivant

Lemme 4.16: *Soit $R_0 > 0$. On note $S := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ et $|z| \geqslant R_0\}$. Soit $f : S \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que*

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in S}} |f(z)| = 0.$$

Alors si on pose $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$ et pour tout $R \geqslant R_0$, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Grace à ce lemme, la proposition 4.14 se généralise de la façon suivante.

Proposition 4.17: *Soit f une fonction méromorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$ qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$, qui n'a qu'un nombre fini de pôle sur $\mathbb{H}$ et qui vérifie de plus que* $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{\mathbb{H}}}} |f(z)| = 0$. *Alors*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(t)e^{it}dt = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

Remarque 4.18: À priori, cette la preuve que nous donnons de cette proposition n'implique pas que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge. C'est en fait le cas, comme nous le démontrerons dans l'exercice 27.

Nous continuons dans la situation de cette proposition, mais nous allons supposer que la fonction f a un pôle simple en $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, nous considérons le chemin d'intégration suivant:

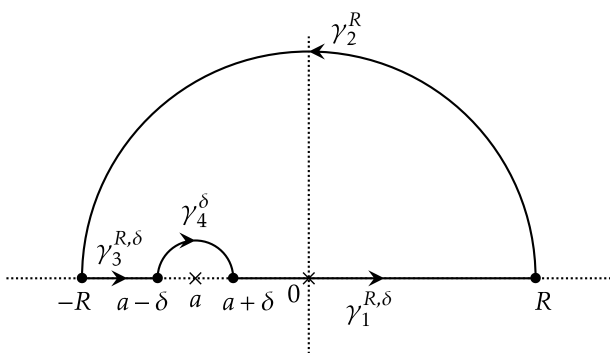


figure 2.

En vu du lemme 4.10, il nous reste à comprendre $\int_{\gamma_4^\delta} f(z)e^{iz}dz$. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 4.19: *Soit $a \in \mathbb{R}$ soit f une fonction méromorphe définie au voisinage de a et ayant un pôle simple en a. Pour tout $\delta > 0$, on considère le chemin $\gamma_\delta : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma_\delta(\theta) = a + \delta e^{i\theta}$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$. Alors on a*

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\gamma_\delta} f(z)dz = i\pi\, \mathrm{res}_a(f).$$

Démonstration. Notons $\alpha = \mathrm{res}_a(f)$. Comme a est un pôle simple de f, il existe une fonction g, holomorphe dans un voisinage de a telle que pour tout z suffisamment proche de a, on a

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + g(z).$$

En intégrant cette relation le long de γ_δ pour $\delta > 0$ suffisamment petit, on obtient

$$\int_{\gamma_\delta} f(z)dz = \alpha \int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\delta} g(z)dz.$$

Un calcul direct montre que $\int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z} = i\pi$ et puisque g est holomorphe, on a aussi que $\int_{\gamma_\delta} g(z)dz \to 0$ quand $\delta \to 0$. D'où le résultat. □

De la on déduit la proposition suivante

Proposition 4.20: *Soit f une fonction méromorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$ qui n'a qu'un nombre fini de pôle sur $\mathbb{H}$ et qui a pour unique pôle réel un pôle simple en $a \in \mathbb{R}$. Supposons de plus que $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{\mathbb{H}}}} |f(z)| = 0$.*

Alors

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(\int_{-R}^{a-\varepsilon} f(t)e^{it}dt + \int_{a+\varepsilon}^{R} f(t)e^{it}dt \right) = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}) + i\pi\,\mathrm{res}_a(f(z)e^{iz}).$$

Remarque 4.21: Ici, encore une fois nous ne disons pas que les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t)e^{it}$ et $\int_{-\infty}^{a} f(t)e^{it}$ convergent, c'est d'ailleurs faux en général.

Démonstration. En notant $\gamma^{R,\delta} = \gamma_3^{R,\delta} \vee \gamma_4^{\delta} \vee \gamma_1^{R,\delta} \vee \gamma_2^{R}$, on a d'après le théorème de résidus, pour tout R suffisamment grand et pour tout δ suffisamment petit

$$\int_{\gamma^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

D'autre part, on a

$$\int_{\gamma^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz = \int_{\gamma_1^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_2^{R}} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_3^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_4^{\delta}} f(z)e^{iz}dz.$$

Donc

$$\int_{-R}^{a-\delta} f(t)e^{it}dt + \int_{a+\delta}^{R} f(t)e^{it}dt = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}) - \int_{\gamma_4^{\delta}} f(z)e^{iz}dz - \int_{\gamma_2^{R}} f(z)e^{iz}dz,$$

en faisant tendre $\delta \to 0$ et $R \to +\infty$, les lemmes 4.16 et 4.19 impliquent le résultat. $\square$

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.22: On cherche à calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Observons déjà que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. En effet, en $t = 0$ la fonction $\frac{\sin t}{t}$ est intégrable car elle se prolonge continûment en 0. En $+\infty$, on voit que la fonction est intégrable un faisant une intégration par partie. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \int_\delta^R \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \left(\int_\delta^R \frac{\sin t}{t} dt + \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt \right).$$

En appliquant la proposition précédente à la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$, on obtient

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \left(\int_\delta^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt \right) = i\pi\,\mathrm{res}_0\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) = i\pi$$

En prenant la partie imaginaire, on en déduit que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \left(\int_\delta^R \frac{\sin t}{t} dt + \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt \right) = \pi$$

et donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4.4 Quelques intégrales sur $\mathbb{R}_+$

Nous illustrons maintenant une méthode permettant de calculer certaines intégrales sur $\mathbb{R}_+$ inaccessibles par les méthodes précédentes. On se concentrera sur des intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx, \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Où f est une fonction rationnelle. Commençons par le première type. On suppose que $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle qui n'a pas de pôles sur $\mathbb{R}_+$ sauf éventuellement en 0 où l'on suppose que f a au plus un pôle d'ordre 1. On suppose aussi que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. On fixe $0 < \alpha < 1$. D'après le critère de Riemann, la fonction $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons maintenant calculer

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)dt$$

en utilisant le théorème des résidus.

Remarque 4.23 (Idée à retenir): L'idée pour faire ce calcul est de prendre une détermination de la puissance α-ième sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et d'intégrer la fonction $z \mapsto z^\alpha f(z)$ sur le chemin suivant

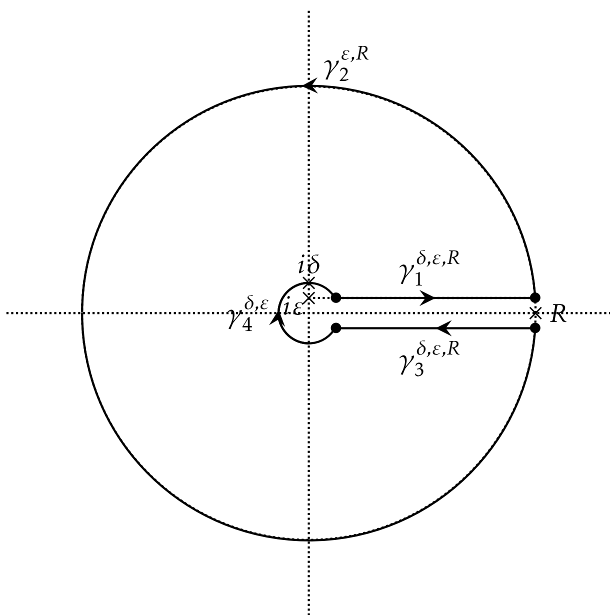


figure 3.

On pose $\gamma^{\delta,\varepsilon,R} := \gamma_1^{\delta,\varepsilon,R} \vee \gamma_2^{\varepsilon,R} \vee \gamma_3^{\delta,\varepsilon,E} \vee \gamma_4^{\delta,\varepsilon}$. De façon détaillée, on considère Log_0 la détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\mathrm{Log}_0(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \quad \forall \theta \in]0, 2\pi[.$$

La puissance α-ième associée à ce choix de logarithme est la fonction $z \mapsto z^\alpha$ où

$$z^\alpha := e^{\alpha \mathrm{Log}_0 z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

La fonction $z \mapsto z^\alpha f(z)$ est alors une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Le théorème des résidus implique que pour $\delta > 0$ suffisamment petit et pour R suffisamment grand, on a

$$\int_{\gamma^{R,\delta}} z^\alpha f(z)dz = 2i\pi \sum_{w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \mathrm{res}_w(z^\alpha f(z)).$$

Par ailleurs, comme dans la preuve du lemme 4.10, on montre que

$$\int_{\gamma_2^{\varepsilon,R}} z^\alpha f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, on a

$$\left|\int_{\gamma_4^{\delta,\varepsilon}} z^\alpha f(z)dz\right| \leqslant 2\delta\pi \max_{|z|=\delta}|z^\alpha f(z)| = 2\delta^{1+\alpha}\pi \max_{|z|=\delta}|f(z)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, comme f a au plus un pôle d'ordre 1 en 0, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(z)| \leqslant \frac{c}{|z|}$ dans un voisinage de 0, ce qui permet immédiatement de conclure de l'intégrale le long de γ_4^δ tend vers 0. Il reste donc à comprendre les intégrale le long de $\gamma_1^{R,\delta}$ et de $\gamma_3^{R,\delta}$. Pour cela observons que l'on a, pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $x > 0$ et $y > 0$,

$$(x+iy)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}_0(x+iy)} = e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2+y^2})+i\arg(x+iy)\right)} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2})\right)} = e^{\alpha\ln x} = x^\alpha.$$

Ici on a utilisé le fait que $\arg(x+iy) \in]0,2\pi[$ et tend donc vers 0 quand y tend vers 0^+. En particulier, par passage à la limite sous le signe intégral, on obtient

$$\int_{\gamma_1^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_\delta^R x^\alpha f(x)dx.$$

Faisant tendre $\delta \to 0$ et $R \to \infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \delta\to 0}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_1^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz = \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx.$$

De façon similaire, pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $x > 0$ et $y < 0$,

$$(x+iy)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}_0(x+iy)} = e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2+y^2})+i\arg(x+iy)\right)} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2})+2i\pi\right)} = e^{\alpha\ln x}e^{2i\alpha\pi} = x^\alpha e^{2i\alpha\pi}.$$

Ici on a utilisé le fait que $\arg(x+iy) \in [0,2\pi]$ et tend donc vers 2π quand y tend vers 0^-. En particulier, par passage à la limite sous le signe intégral, on obtient

$$\int_{\gamma_3^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -e^{2i\alpha\pi} \int_\delta^R x^\alpha f(x)dx.$$

Faisant tendre $\delta \to 0$ et $R \to \infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \delta\to 0}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_3^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz = -e^{2i\alpha\pi} \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx.$$

En sommant tout cela et en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$ et $R \to +\infty$, on trouve

$$(1-e^{2i\alpha\pi}) \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{res}_w(z^\alpha f(z)).$$

Nous avons donc montré la proposition suivante.

Proposition 4.24: *Soit $0 < \alpha < 1$. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. On suppose que f n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+^*$ et au plus un pôle d'ordre 1 en 0. Alors*

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx = \frac{2i\pi}{1-e^{2i\alpha\pi}} \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{res}_w(z^\alpha f(z)).$$

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.25: Soit $0 < \alpha < 1$ alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

En effet, on applique la propriété précédente à la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$. Cette fonction a un pôle simple en 0 et un pôle simple en -1. De plus, on a

$$\operatorname{res}_{-1}\left(\frac{z^\alpha}{z(z+1)}\right) = \frac{(-1)^\alpha}{-1} = -e^{\alpha \operatorname{Log}_0(-1)} = -e^{i\alpha\pi}.$$

Donc la propriété précédente implique que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(x+1)} dx = \frac{-2i\pi e^{i\alpha\pi}}{1-e^{2i\alpha\pi}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\alpha\pi}-e^{i\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Passons maintenant aux intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ où $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle telle que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+$. Nous cherchons à calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Remarque 4.26 (Idée à retenir): L'idée est ici d'intégrer la fonction $f(z)\operatorname{Log}_0(z)$ sur le chemin représenté dans la figure 3.

Faisons les détails. Soit $\operatorname{Log}_0 : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ la détermination du logarithme utilisé ci-dessus. Le théorème des résidus appliqué au chemin $\gamma^{\varepsilon,\delta,R}$ ci-dessus implique que, pour tout R suffisamment grand, et pour $\varepsilon, \delta > 0$ suffisamment petits, on a

$$\int_{\gamma^{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\operatorname{Log}_0(z)dz = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{res}_w(f(z)\operatorname{Log}_0 z).$$

Comme précédemment, on montre que

$$\int_{\gamma_2^{\varepsilon,R}} f(z)\operatorname{Log}_0(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_4^{\varepsilon,\delta}} f(z)\operatorname{Log}_0(z)dz \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, pour tout $x > 0$ on a

$$\operatorname{Log}_0(x+iy) \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} \ln x \quad \text{et} \quad \operatorname{Log}_0(x+iy) \underset{y\to 0^-}{\longrightarrow} \ln x + 2i\pi.$$

On en déduit donc par passage à la limite sous l'intégrale, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_1^{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\operatorname{Log}_0(z)dz = \int_\delta^R f(x)\ln x dx \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_3^{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\operatorname{Log}_0(z)dz = -\int_\delta^R f(x)\ln x dx - 2i\pi \int_\delta^R f(x)dx.$$

Faisant tendre $\varepsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$ et $R \to +\infty$, nous obtenons donc

$$-2i\pi \int_0^{+\infty} f(x)dx = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{res}_w(f(z)\operatorname{Log}_0 z).$$

Nous avons donc démontré la proposition suivante.

Proposition 4.27: *Soit* $f = \frac{P}{Q}$ *une fraction rationnelle telle que* $\deg Q = \deg P + 2$*. Supposons que* f *n'a pas de pôle sur* $\mathbb{R}_+$*. Alors*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \mathrm{res}_w(f(z)\,\mathrm{Log}_0(z)).$$

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.28: On cherche à calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Ici, la fonction f est définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$. La fonction $z \mapsto \frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ et a trois pôles simples,

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \xi_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}).$$

Un calcul immédiat montre que

$$\mathrm{res}_{\xi_1}\left(\frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}\right) = \frac{i\pi}{3}, \quad \mathrm{res}_{\xi_2}\left(\frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}\right) = \frac{(\sqrt{3}-i)\pi}{18} \quad \text{et} \quad \mathrm{res}_{\xi_3}\left(\frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}\right) = \frac{-5(\sqrt{3}-i)\pi}{18}.$$

En appliquant la proposition précédente, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5 Exercices

5.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. On considère la fonction
$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

1. Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus.
2. En déduire un développement en série de Laurent sur $\mathbb{C}^*$ de la fonction f.
3. En déduire $\mathrm{res}_0(f)$.

Exercice 2. On considère la fonction
$$f(z) = \frac{e^{z-1}}{e^z - 1}.$$

1. Montrer que 0 est un pôle d'ordre 1 de f.
2. Calculer $\mathrm{res}_0(f)$.

Exercice 3. Calculer les résidus des fonctions suivantes aux points indiqués :

1. $f(z) = \dfrac{z}{(2-3z)(4z+3)}$ en $z_0 = \frac{2}{3}$ et $z_0 = \frac{-3}{4}$.
2. $f(z) = \dfrac{2z^2+1}{z^2+9}$ en $z_0 = 3i$.
3. $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{16 - z^4}$ en $z_0 = 2$.
4. $f(z) = \dfrac{\cos^2(z)}{(2\pi - z)^3}$ en $z_0 = 2\pi$.
5. $f(z) = \dfrac{z+1}{(z^2+4)^2}$ en $z_0 = 2i$.
6. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$ en $z_0 = 0$.
7. $f(z) = \dfrac{(z^3-1)(z+2)}{(z^4-1)^2}$ en $z_0 = 1$.
8. $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{16 - z^4}$ en $z_0 = 2$.
9. $f(z) = \dfrac{\sinh(z) - z}{z^8}$ en $z_0 = 0$.
10. $f(z) = \dfrac{\sin z}{1 - 2\cos(z)}$ en $z_0 = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4. Calculer les résidus des fonctions suivantes au point 0 :

1. $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$,
2. $f(z) = \dfrac{\sin 2z - 2\sin z}{(\sin z)(\sin z - z)}$,
3. $f(z) = \dfrac{\tan z - z}{(1-\cos z)^2}$,
4. $f(z) = \dfrac{z-1}{\mathrm{Log}(z+1)}$.

Exercice 5. En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{C(0,8)} \frac{1+z}{1-e^z}\,dz$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_{C(i,5)} \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}\,dz$,
3. $I_3 = \displaystyle\int_{C(0,2)} z^9 e^{\frac{1}{z}}\,dz$.
4. $I_4 = \displaystyle\int_{C(0,4)} \frac{dz}{z^2-5z+6}$.
5. $I_5 = \displaystyle\int_{C(0,\frac{5}{2})} \frac{dz}{z^2-5z+6}$.
6. $I_6 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^{az}dz}{z^2+1}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $0 < a < b < c$ des nombres réels. À l'aide du théorème des résidus, calculer, pour tout $r \in \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$, la valeur de l'intégrale
$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Exercice 7. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit f et g des fonctions holomorphes sur un ouvert U telles que z_0 est une singularité isolée de f et de g.

1. Est-il vrai que $\mathrm{res}_{z_0}(f+g) = \mathrm{res}_{z_0}(f) + \mathrm{res}_{z_0}(g)$? Justifier.
2. Est-il vrai que $\mathrm{res}_{z_0}(fg) = \mathrm{res}_{z_0}(f)\mathrm{res}_{z_0}(g)$? Justifier.

Exercice 8. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $z_0 \in U$. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ et $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes.

1. Montrer que z_0 est un pôle simple de f alors $\mathrm{res}_{z_0}(fg) = g(z_0)\mathrm{res}_{z_0}(f)$.
2. Montrer que si z_0 est un zéro d'ordre 1 de f, alors $\mathrm{res}_{z_0}\left(\dfrac{g}{f}\right) = \dfrac{g(z_0)}{f'(z_0)}$.
3. Montrer que si z_0 est un zéro d'ordre m, alors $\mathrm{res}_{z_0}\left(\dfrac{f'g}{f}\right) = g(z_0)m$.
4. Montrer que si z_0 est un pôle d'ordre m, alors $\mathrm{res}_{z_0}\left(\dfrac{f'g}{f}\right) = -g(z_0)m$.

Exercice 9. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant 0 tel que U est symétrique par rapport au point 0. Soit f une fonction holomorphe sur U en dehors d'un nombre fini de singularités isolées telle que f soit symétrique par rapport à 0. C'est à dire que $f(-z) = f(z)$ pour tout $z \in U$ où f est définie.

1. Montrer que
$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = -\mathrm{res}_{-z_0}(f) \quad \forall z_0 \in U.$$
2. En déduire $\mathrm{res}_0(f)$.

Exercice 10. 1. Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto 2z^4 - 5z + 2$ dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,1)$.

2. Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ dans la boule $B(0,1)$.
3. Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto z^5 + iz^3 - 4z + i$ dans la couronne $A_0(1,2)$.

Exercice 11. On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 6z + 3$.

1. Démontrer que P admet ses 4 racines dans la boule $B(0,2)$.
2. Démontrer que P admet une unique racine dans la boule $B(0,1)$.
3. Démontrer que P n'admet aucune racine dans la boule $B\left(0, \frac{1}{3}\right)$.
4. Notons $a \in B(0,1)$ l'unique racine de P dans le disque $B(0,1)$. Montrer que
$$2i\pi a = \int_{C(0,1)} \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z\,dz.$$

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{5+3\sin\theta} d\theta,$ 2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(3+2\cos\theta)^2}.$ 3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta},$

Exercice 13. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta}$, où $a > 1$,
2. $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(2t)}{1 - 2a\cos t + a^2}$, où $-1 < a < 1$.

Exercice 14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$,
2. $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$,
3. $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$,
4. $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 6x^2 + 8}$.
5. $I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x^2+4)}$,
6. $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x + 13}$,
7. $I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{16 + x^2}$,
8. $I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx)^n}$ où $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + a}$ où $a > 0$,
2. $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$,
3. $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{\frac{-i\pi}{2} x}}{x^2 - 2x + 5} dx$,
4. $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx$, où $a > 0$, $b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(b) > 0$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x} dx}{1 + x^2} = \pi e^{-|\xi|}.$$

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(x+t)(x+2t)}$ où $t > 0$ et $0 < \alpha < 1$,
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$, où $-1 < \alpha < -\frac{2}{3}$.

5.2 Exercices plus avancés

Exercice 18. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $Z \subset U$ un sous-ensemble fermé et discret. Soit $f : U \backslash Z \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f admet une primitive si et seulement si $\mathrm{res}_z(f) = 0$ pour tout $z \in U$.

Exercice 19. Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soit $f : U \to V$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$ un point tel que $f'(z_0) \neq 0$. Notons $w_0 = f(z_0)$. Soit $g : V \setminus \{z_0\}$ une fonction holomorphe avec un pôle d'ordre 1 en w_0. Calculer $\mathrm{res}_{z_0}(g \circ f)$ en fonction de $\mathrm{res}_{w_0} g$.

Exercice 20. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de U. Montrer que f est méromorphe sur U si et seulement si elle s'écrit localement comme quotient de deux fonctions holomorphes (c'est à dire si pour tout $z_0 \in U$, il existe une voisinage V de z_0, et des fonctions holomorphes $g, h \in \mathscr{O}(U)$ tels que h ne s'annule pas sur un ouvert et tels que $f(z) = \frac{g}{h}$ pour tout $z \in V$ tel que $h(z) \neq 0$).

Exercice 21. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|^{1+\varepsilon}} \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - z} dx$$

Exercice 22. Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe qui n'a qu'un nombre fini de pôles $z_1, \dots, z_m$. Soit

$$R_0 := \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |z_k|.$$

et pour tout $R > R_0$, on pose

$$\mathrm{res}_\infty(f) := \frac{-1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} f(z) dz.$$

C'est le *résidu à l'infini de* f.

1. Montrer que $\mathrm{res}_\infty(f)$ est indépendant du choix de $R > R_0$.
2. Montrer que l'on a

$$\sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} \mathrm{res}_z(f) = 0.$$

   Où l'on note $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann.

Exercice 23. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U. Soit γ un lacet de Jordan $\mathscr{C}^2$ par morceaux dans U, orienté dans le sens direct tel que f n'a pas de pôle sur l'image de γ. Notons

$$M := \sup_{z \in \mathrm{im}(\gamma)} |f(z)|.$$

Notons N le nombre de pôle de f dans l'intérieur de γ (comptés avec multiplicités). Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| > M$, la fonction f prend la valeur w exactement N fois (comptés avec multiplicité) dans l'intérieur de γ.

Exercice 24. Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss à l'aide du théorème de Rouché.

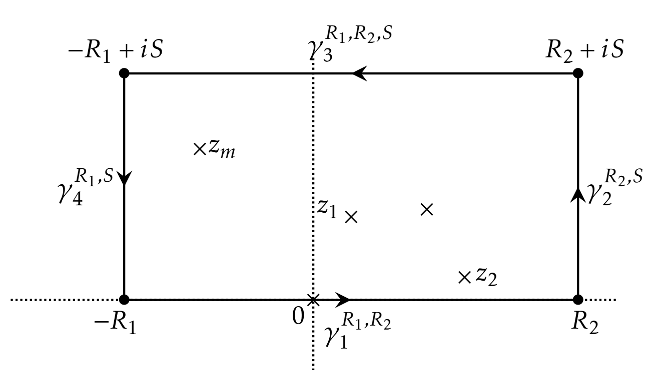
Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Soit $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Montrer qu'il existe un point $z_0 \in C(0,1)$ tel que $P(z_0) \geqslant 1$.

Exercice 26. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$. Montrer que l'équation $e^{-z} + z = \lambda$ a une unique racine sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,; \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Exercice 27. Nous allons donner ici une preuve un peu plus fine de la proposition 4.17. Soit f une fonction méromorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$. Supposons que f n'a un nombre fini de pôles sur $\mathbb{H}$ (que nous noterons $z_1, \dots, z_m$) et n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$. Supposons de plus que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0.$$

Pour tout $R_1, R_2, S \in \mathbb{R}_+$, on considère le chemin $\gamma^{R_1,R_2,S} = \gamma_1^{R_1,R_2} \vee \gamma_2^{R_2,S} \vee \gamma_3^{R_1,R_2,S} \vee \gamma_4^{R_1,S}$



On suppose à partir de maintenant que R_1, R_2, S sont suffisamment grands pour que tous les pôles de f situés dans $\mathbb{H}$ sont dans le rectangle délimité par le chemin $\gamma^{R_1,R_2,S}$.

1. Montrer que il existe $M, C \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|} \quad \forall z \in \operatorname{im}(\gamma^{R_1,R_2,S}).$$
2. Montrer que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$\left| \int_{\gamma_2^{R_2,S}} f(z)e^{iz} dz \right| \leqslant \frac{C}{R_1}.$$
3. Montrer que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$\left| \int_{\gamma_4^{R_1,S}} f(z)e^{iz} dz \right| \leqslant \frac{C}{R_2}.$$
4. Montrer que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$\left| \int_{\gamma_3^{R_1,R2,S}} f(z)e^{iz} dz \right| \leqslant \frac{C(R_1+R_2)e^{-S}}{S}.$$
5. En déduire que l'intégrale impropre
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx$$
converge et exprimer cette intégrale en fonction des résidus de f aux points $z_1, \ldots, z_m$.

Exercice 28. Soit f une fonction méromorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$. Supposons que f n'a un nombre fini de pôles sur $\mathbb{H}$ et que sur $\mathbb{R}$, f a au plus un pôle d'ordre 1 en un point a. Supposons de plus qu'il existe $R_0 > 0$, $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que
$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|^{1+\varepsilon}}$$
pour tout $z \in \overline{\mathbb{H}}$ tel que $|z| \geqslant R$. Exprimer
$$\lim_{\delta \to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} f(x)dx + \int_{a+\delta}^{+\infty} f(x)dx \right)$$
en fonction des résidus de f.

Exercice 29. On utilisera ici le résultat de l'exercice 28.

1. Pour tout $\xi > 0$ calculer
$$\lim_{\delta \to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} \frac{1-e^{i\xi x}}{x^2} dx + \int_{a+\delta}^{+\infty} \frac{1-e^{i\xi x}}{x^2} dx \right).$$
2. En déduire, pour tout $\xi > 0$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos \xi x}{x^2} dx.$$
3. En déduire aussi
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Exercice 30. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+$ et qui vérifie $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. En intégrant la fonction

$$z \mapsto f(z)(\mathrm{Log}_0 z)^2$$

le long du chemin présenté dans la figure 3, déterminer une formule en terme de résidus pour l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x dx.$$

Utiliser cette formule pour calculer, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx.$$

Exercice 31. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle qui vérifie $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. Supposons en plus que f n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+$, sauf éventuellement en 0 où f a au plus un pôle d'ordre 1. Soit $0 < \alpha < 1$. Déterminer une formule de type résidus pour l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x) \ln x dx.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx.$$