Interrogation 1

Dans les énoncés, lorsqu'on écrit $z := x + iy$, il est sous-entendu que x et y sont des réels.

Exercice 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$.

1. Soit $f : U \to \mathbb{C}$. Définir les assertions « f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 » et « f est holomorphe sur U. »
2. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable. Définir l'assertion « f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en z_0. »

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Ré}(z)\,\mathrm{Im}(z) = 0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{\overline{z}}{\mathrm{Ré}(z)\,\mathrm{Im}(z)}$.

1. Écrire f comme une fonction d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et calculer sa matrice jacobienne en tout point.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan où f est $\mathbb{C}$-dérivable.
3. Existe-t-il des ouverts du plan sur lesquels f est holomorphe et si oui lesquels ?

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, x + iy \mapsto e^y \cos x$. Déterminer toutes les fonctions $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telles que $f := u + iv$ soit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Écrire alors f en fonction de la variable z en donnant une expression simplifiée.

Exercice 4. Rappeler la définition des notations de Wirtinger $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, puis calculer $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}\right)$.

Correction de l'interrogation 1

Correction de l'exercice ??.

1. La fonction f est dérivable au sens complexe en z_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite (finie) lorsque z tend vers z_0 dans U. La fonction f est holomorphe sur U si elle est dérivable au sens complexe en tout point de U.
2. Notons u et v les parties réelle et imaginaire de f. Alors, f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en z_0 si $\partial_x u(z_0) = \partial_y v(z_0)$ et $\partial_y u(z_0) = -\partial_x v(z_0)$. Ceci est équivalent au fait que la matrice jacobienne de f en z_0 soit une matrice $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont réels.

Correction de l'exercice ??.

1. On obtient $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/y \\ -1/x \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Jac}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1/y^2 \\ 1/x^2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. La fonction f étant différentiable, elle est donc dérivable au sens complexe exactement là où les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, c'est-à-dire aux points $(x,y) \in U$ pour lesquels $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2}$, c'est-à-dire $x^2 = y^2$, c'est-à-dire $x = y$ ou $x = -y$. Il s'agit de l'union de deux droites.
3. Le lieu où f est dérivable au sens complexe est d'intérieur vide. Il n'existe donc pas d'ouvert de U sur lequel la fonction f est holomorphe.

Correction de l'exercice ??.

Soit $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ différentiable et soit $f = u + iv$. Si f est holomorphe sur U , alors f satisfait les conditions de Cauchy-Riemann en tout point. Ceci permet d'obtenir les deux dérivées partielles de v grâce à celles de u, qui sont connues :

$$\partial_x v = -\partial_y u = -e^y \cos(x) \text{ et } \partial_y v = \partial_x u = -e^y \sin(x).$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction partielle $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto v(x,y)$ a pour dérivée $y \mapsto \partial_y v = \partial_x u = -e^y \sin(x)$. On en déduit que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \partial_y v + e^y \sin(x)$ a une dérivée nulle, donc est localement constante sur $\mathbb{R}$ qui est connexe, donc est constante sur $\mathbb{R}$. On note $h(x)$ cette constante, qui dépend du réel x qui a été fixé en début de paragraphe. On a donc $v(x,y) = -e^y \sin(x) + h(x)$.

Faisons maintenant varier x. Comme f est différentiable, la fonction $x \mapsto h(x)$ est dérivable, en la variable x et en dérivant suivant x on obtient $\partial_x v(x,y) = -e^y \cos(x) + h'(x)$.

Or, d'après les relations de Cauchy-Riemann rappelées plus haut, on sait que $\partial_x v = -\partial_y u = -e^y \cos(x)$, d'où l'on tire que h a une dérivée nulle, donc est localement constante. Comme $\mathbb{C}$ est connexe, h est constante, égale à un réel K.

Finalement, si $f = u + iv$ est holomorphe, on a prouvé qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $v(x,y) = -e^y \sin(x) + K$.

Réciproquement, si K est un réel et $v(x,y) := -e^y \sin(x) + K$, alors la fonction $f := u + iv$ est différentiable et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$, donc est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Enfin, on voit que $f(z) = e^y(\cos x - i \sin x) + iK = e^y e^{-ix} + iK = e^{y-ix} + iK = e^{-iz} + iK$. Si on ne voit pas directement que $y - ix = -iz$, on utilise la méthodologie de base : $y - ix = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} - i\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} + \dfrac{z+\bar{z}}{2i} = \dfrac{2z}{2i} = -iz$.

Correction de l'exercice ??.

D'après le cours, les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sont définis par $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

On a

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{\bar{z}^2} + 0 = -\frac{1}{\bar{z}^2}$$

Si on veut justifier le calcul de $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$, on peut par exemple utiliser la formule du produit appliquée à $1 = \bar{z} \times \dfrac{1}{\bar{z}}$ ce qui donne $0 = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(1) = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{z}) \times \dfrac{1}{\bar{z}} + \bar{z} \times \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$. On peut bien sûr tout écrire en fonction de x et y et revenir à la définition.