

Examen du 24 Mai 2023
13h30-16h30

Instructions :

- Tous les documents, téléphones portables, calculatrices... sont interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. (Question de cours). (4 pts)

1. Rappeler l'énoncé des inégalités de Cauchy.

On rappelle le théorème de Liouville : Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée. Alors f est constante.

2. Redémontrer ce théorème à partir des inégalités de Cauchy.

Exercice 2. (4 pts) Soit $\alpha > 0$. Calculer l'intégrale suivante, au moyen du théorème des résidus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{t^2 + t + 1} dt.$$

On prendra garde à bien justifier les diverses majorations employées au cours du calcul. Comment effectuer le calcul si $\alpha < 0$?

Exercice 3. (5 pts) Dans la suite, \mathbb{H} désignera le demi-plan supérieur complexe :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

et l'on notera aussi $\Delta = D(0, 1)$ le disque unité.

On considère deux applications holomorphes $\psi : z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{z-i}{z+i} \in \Delta$, et $\phi : z \in \Delta \mapsto i \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{H}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$, on a $|z+i|^2 - |z-i|^2 = 4\operatorname{Im}(z)$, et vérifier ensuite que $\psi(z) \in \Delta$ pour tout $z \in \mathbb{H}$.
2. Montrer que si $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, on a $\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ et vérifier ensuite que $\phi(z) \in \mathbb{H}$ pour tout $z \in \Delta$.
3. Montrer que $\psi : \mathbb{H} \rightarrow \Delta$ et $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{H}$ sont des applications holomorphes réciproques l'une de l'autre.

L'objectif des questions suivantes est de démontrer l'énoncé suivant :

(♣) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante. Alors il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(f(z)) = 0$.

Pour ce faire, on raisonne par contraposée, et l'on considère une application holomorphe telle que $\text{Im}(f(z)) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On va montrer que f est constante.

4. Justifier que l'on a ou bien $\text{Im}(f(z)) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, ou bien $\text{Im}(f(z)) < 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
5. Dans cette question, on suppose qu'on est dans le cas où $\text{Im}(f(z)) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et donc que $f(z) \in \mathbb{H}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Utiliser le théorème de Liouville pour montrer que la fonction f est constante. (Indication : considérer la fonction $\psi \circ f$)
6. Dans le cas où $\text{Im}(f(z)) < 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, comment peut-on montrer que f est constante ?
7. L'énoncé (♣) reste-t-il vrai si l'on remplace f par une application holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, où $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert quelconque de \mathbb{C} ?

Exercice 4. (7 pts) Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe 1-périodique, c'est-à-dire telle que $f(z+1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Dans cette question, on suppose que f ne s'annule pas en dehors du fermé

$$F = \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \text{Im}(z) \leq 1\}.$$

- (a). Justifier que f ne s'annule qu'en un nombre fini de points de l'ensemble $C = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Re}(z) < 1\}$.

Notons z_1, \dots, z_m les zéros de f dans C , et a_1, \dots, a_m leurs multiplicités.

- (b). Montrer que la fonction g définie par la formule

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^m \sin(2\pi(z - z_i))^{a_i}}$$

est une fonction méromorphe n'ayant que des singularités éliminables sur \mathbb{C} .

- (c). Justifier que g ne s'annule pas sur \mathbb{C} , et en conclure qu'il existe une fonction holomorphe $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = e^{h(z)} \prod_{i=1}^m \sin(2\pi(z - z_i))^{a_i}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. On ne fait maintenant plus d'hypothèse sur f en dehors de sa 1-périodicité. L'objectif de la question est de montrer qu'il existe une application holomorphe $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = h(e^{2i\pi z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On notera $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ et $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} \mid t \leq 0\}$.

- (a). Montrer que l'application $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2i\pi}(\text{Log}_1(z) - \text{Log}_2(z))$ est à valeurs dans \mathbb{Z} . Justifier qu'il existe des déterminations du logarithme $\text{Log}_1 : \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ et $\text{Log}_2 : \mathbb{C} - \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$.

(b). Justifier qu'il existe deux entiers $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\operatorname{Log}_1(z) - \operatorname{Log}_2(z) = 2i\pi k \quad (\text{resp. } \operatorname{Log}_1(z) - \operatorname{Log}_2(z) = 2i\pi l)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Im}(z) > 0$ (resp. tel que $\operatorname{Im}(z) < 0$).

(c). Déduire de la question précédente que les deux fonctions holomorphes

$$h_1 : z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_- \mapsto f\left(\frac{\operatorname{Log}_1(z)}{2i\pi}\right)$$

et

$$h_2 : z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_+ \mapsto f\left(\frac{\operatorname{Log}_2(z)}{2i\pi}\right)$$

coincident sur l'ouvert $\mathbb{C} - \mathbb{R} = (\mathbb{C} - \mathbb{R}_-) \cap (\mathbb{C} - \mathbb{R}_+)$.

(Indication : il faut utiliser le fait que f est 1-périodique).

(d). Justifier qu'il est possible de définir une application holomorphe $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $h|_{\mathbb{C} - \mathbb{R}_-} = h_1$ et $h|_{\mathbb{C} - \mathbb{R}_+} = h_2$.

(e). Montrer enfin que $f(z) = h(e^{2i\pi z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (Indication : commencer par montrer que $\frac{\operatorname{Log}_1(e^{2i\pi z})}{2i\pi} - z \in \mathbb{Z}$).

(f). (Hors barème) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $h_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$h_t : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x + it) \in \mathbb{C}.$$

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\|h_t\|_\infty \leq C$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que les fonctions h_t convergent uniformément vers une fonction constante quand $t \rightarrow +\infty$.