TD 7 : Résidus

Exercice 1. [Échauffement] En utilisant les compacts $K_R = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \geq 0 \text{ et } |z| \leq R\}$ et le théorème des résidus, redémontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Exercice 2. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{2+3x^2}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x+x^2}$ directement à l'aide de résidus, sans se ramener à l'exercice précédent.

Exercice 3. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 4. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}$ puis que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 5. À l'aide de la même méthode, montrer que pour $n \geq 2$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$.

⋆ ⋆ ⋆ Pôles multiples ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 6. Calculer les résidus aux pôles des fonctions méromorphes $\displaystyle\frac{e^z}{z^2(z-1)}$ et $\displaystyle\frac{e^z}{z(z-1)^2}$.

Exercice 7. Calculer les résidus aux pôles de la fonction méromorphe $\displaystyle\frac{1+z+z^2}{z(z^2+1)^2}$.

Exercice 8. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 9. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin(t)} = \int_{\mathscr{C}(0,1)} \frac{2dz}{z^2+6iz-1}$ et en déduire que sa valeur est $\displaystyle\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Exercice 12. À l'aide la même méthode, montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t+\sin t} = \pi\sqrt{2}$.

Exercice 13. [Transformée de Fourier] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Calculer sa transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Exercice 14. À l'aide de la fonction méromorphe $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{z^2+z+1}$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} dx = -\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

[Cas non abordés dans cette feuille : intégrales avec logarithmes ou racines carrées (ou autres puissances non entières). Vous pouvez regarder un peu dans le polycopié de Michèle Audin pour prendre de l'avance.]

Solutions des exercices

[Solutions succinctes, pour autocorrection. Vérifiez vos résultats sur wolframalpha (résidus, intégrales etc)]

[Solutions peu ou pas relues pour l'instant. Si vous trouvez ce qui vous semble être une erreur, confirmez avec un ou une camarade et avec un logiciel, et faites d'autres exercices pour vérifier que ce n'est pas dû à une incompréhension. Ensuite, vous pouvez me contacter pour signaler l'erreur.]

Correction de l'exercice ??. [Ce premier exercice est rédigé avec le niveau de détail demandé à l'examen. On a séparé en plusieurs étapes pour plus de lisibilité : 1) définition et holomorphie de f, 2) ce qui touche au compact, 3) calcul de l'intégrale curviligne avec les résidus, 4) limite de l'intégrale curviligne, 5) conclusion]

1. Si $z \in \mathbb{C}$, l'expression $\dfrac{1}{1+z^2}$ est définie ssi $z \notin \{-i, i\}$. La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{1+z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Elle admet deux singularités isolées, en i et $-i$.
2. Soit $R > 0$. L'ensemble K_R est l'intersection du fermé $\overline{\mathbb{H}}$ et du compact $\overline{\mathbb{D}}(0, R)$, donc est compact. Le bord de K_R est paramétré par les deux chemins γ_1^R et γ_2^R définis par :
$$\gamma_1^R : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t,$$
$$\gamma_2^R : [0, \pi]/ \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}.$$
[On admet que le compact est à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$ même si la définition du cours demande plus que simplement paramétrer le bord par un nombre fini de chemins de classe $\mathscr{C}^1$.]
Si $R \in R^* \setminus \{1\}$, le bord du compact K_R est inclus dans le domaine de définition de f et on peut donc définir l'intégrale curviligne $I(R) := \displaystyle\int_{\partial K_R} f(z)dz$.
$$\text{Dans toute la suite, } R > 1.$$
3. Si $R > 1$, calculons $I(R)$ grâce au théorème des résidus. Aux points i et $-i$, la fonction f admet des pôles simples. D'après le théorème des résidus, comme i est la seule singularité isolée de f à l'intérieur de K_R, on a
$$I(R) := \int_{\partial K_R} f(z)dz = 2i\pi \,\text{rés}_i(f).$$
Calculons ce résidu. La fonction f est de la forme g/h avec g et h holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec $g = 1$ et $h = z^2 + 1$, ayant des zéros <u>simples</u> et vérifiant $h'(z) = 2z$. D'après le cours [1], le résidu en i vaut donc
$$\text{rés}_i(f) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \boxed{\frac{1}{2i}}.$$
Le théorème des résidus donne donc :
$$\boxed{\text{Pour } R > 1, \quad I(R) = 2i\pi\frac{1}{2i} = \pi.}$$
4. Étudions le comportement de $I(R)$ quand $R \to +\infty$. En posant $I_1(R) = \displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)dz$ et $I_2(R) = \displaystyle\int_{\gamma_2^R} f(z)dz$, on a donc $I(R) = I_1(R) + I_2(R)$. On peut calculer dès à présent $\left(\gamma_1^R\right)'(t) = 1$ et $\left(\gamma_2^R\right)'(t) = iRe^{it}$.

1. Autre méthode pour calculer le résidu : $\text{rés}_i(f) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$. Lorsqu'on a des pôles simples et que le dénominateur est développé, il est conseillé d'utiliser la formule avec la dérivée. (Dans le cas présent, très simple, les deux méthodes sont comparables.)

Étudions maintenant séparément les deux termes.

$$\begin{aligned}
I_1(R) &= \int_{\gamma_1^R} f(z)dz \\
&= \int_{-R}^{R} f\left(\gamma_1^R(t)\right)\left(\gamma_1^R\right)'(t)dt \\
&= \int_{-R}^{R} f(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)dt
\end{aligned}$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto f(t)\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)$ sont positives et mesurables (car continues par morceaux) sur $\mathbb{R}$, et $R \mapsto f(t)\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)$ est croissante en R et tend simplement vers f. Par le théorème de convergence monotone[2], on a donc :

$$I_1(R) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = I.$$

Montrons maintenant que le second terme tend vers zéro.

$$\begin{aligned}
\left|I_2(R)\right| &\leq \operatorname{long}(\gamma_2^R) \sup_{t\in[0,\pi]} \left|f\left(Re^{it}\right)\right| \\
&\leq \pi R \sup_{t\in[0,\pi]} \left|\frac{1}{\left(Re^{it}\right)^2+1}\right| \\
&\leq \pi R \cdot \frac{1}{R^2-1} \qquad \text{(on minore le dénominateur par deuxième inégalité triangulaire)} \\
&\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Autre fin de justification si on n'aime pas majorer explicitement : on a $f(z) \sim_{|z|\to+\infty} z^{-2}$, donc $|f(z)| \leq 2|z|^{-2}$ pour $|z|$ assez grand. Donc pour R assez grand, $|I_2(R)| \leq \pi R \times \frac{2}{R^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. J'ai tendance à préférer cette rédaction.

Par somme de limites, on a

$$I(R) = I_1(R) + I_2(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} I + 0 = I.$$

5. (Conclusion) On a vu que si $R > 1$, la fonction $I(R) = I_1(R) + I_2(R)$ est constante en R. Cette constante est égale à sa limite en $+\infty$ et donc on en déduit finalement que

$$\boxed{I = \pi.}$$

Remarque : on peut permuter l'ordre des étapes 3 et 4 (limite de $I(R)$, et calcul de $I(R)$ par les résidus.)

Correction de l'exercice ??. On trouve $\pi/\sqrt{6}$ et $2\pi/\sqrt{3}$.

À chaque fois, on intègre sur un demi-disque supérieur. Pour la première fonction, le résidu en $\alpha = i\sqrt{\frac{2}{3}}$ vaut $\frac{1}{6\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{6i\sqrt{2}} = \frac{1}{2i\sqrt{6}}$.

Correction de l'exercice ??. La fonction à intégrer est de la forme g/h, avec h ayant des zéros simples en $\pm i$ et $\pm 2i$. On intègre comme plus haut sur un demi-disque supérieur, et donc il suffit de calculer uniquement les résidus en i et $2i$.

Le dénominateur ayant des zéros simples, la méthode du cours s'applique, on a $h'(z) = 4z^3 + 10z$, et donc :

$$\text{rés}_i(f) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{1}{-4i+10i} = \frac{1}{6i}$$

2. On peut également terminer avec la convergence dominée comme ceci : f est intégrable sur $\mathbb{R}$ par le critère de Riemann, et pour tout t on a la domination : $\left|f(t)\mathbb{1}_{[-R,R]}(t)\right| \leq |f(t)|$.

$$\text{rés}_{2i}(f) = \frac{g(2i)}{h'(2i)} = \frac{1}{-32i+20i} = -\frac{1}{12i}$$

(Conseil : on peut laisser les i au dénominateur dans les résidus puisqu'on va multiplier par $2i\pi$ ensuite.)

Ensuite, toujours pareil, l'intégrale sur le bord du demi-disque vaut $2i\pi\left(\frac{1}{6i} - \frac{}{12i}\right) = \frac{\pi}{6}$ et par l'argument classique, c'est la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Correction de l'exercice ??. On intègre sur le bord d'un quart de disque pour les deux premiers, fait en classe.

Pour le troisième, on peut procéder de deux manières :

— On calcule d'abord l'intégrale sur $\mathbb{R}$, puis on divise par deux car la fonction est paire. Pour calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer le long du bord d'un demi-disque. Il y a trois résidus à calculer : en $e^{i\pi/6}$, i et $e^{5i\pi/6}$. Ensuite, on peut conclure rapidement.

— On intègre sur le bord d'un sixième de disque, pour ne prendre que le résidu en $e^{i\pi/6}$. Ce résidu vaut $\frac{1}{6(e^{i\pi/6})^5}$ par la méthode habituelle (le pôle est simple). La conclusion est un peu moins rapide car le compact a une forme moins simple. L'intégrale sur le bord du compact vaut $\frac{2i\pi}{6e^{5i\pi/6}} = \frac{\pi}{3}e^{-i\pi/3}$. D'autre part on montre par la méthode habituelle que cette intégrale curviligne tend vers $(1-e^{i\pi/3})I = e^{-i\pi/3}I$ et on obtient bien le résultat.

De préférence, il faut savoir faire rapidement les deux méthodes, pas juste une des deux.

Correction de l'exercice ??. [solution un peu rapide] La fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z^n+1}$ a n pôles simples, aux racines n-èmes de -1. La seule qui va nous intéresser est $e^{i\pi/n}$ (la « première »). On va intégrer sur le bord de la « part de gâteau » : $K_R = \{re^{i\theta}, 0 \le r \le R \text{ et } 0 \le \theta \le 2\pi/n\}$. Pour $R > 0$, ce compact est à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$ et pour $R > 1$, son intérieur contient un seul pôle de f à savoir $e^{i\pi/n}$. On paramètre son bord par trois chemins (pour le troisième o donne le chemin opposé) :

$$\gamma_1^R : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t,\ \gamma_2^R : [0,2\pi/n] \to \mathbb{C}, theta \mapsto Re^{i\theta},\ \gamma_3^{R,op} : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{2i\pi/n}t.$$

Le résidu de f en un pôle (forcément simple) α vaut $\frac{1}{n\alpha^{n-1}}$. En particulier, le résidu en $e^{i\pi/n}$ vaut $\frac{e^{i(1-n)\pi/n}}{n}$.

Par le théorème des résidus, on a donc, pour $R > 1$:

$$\boxed{I(R) := \int_{\partial K_R} f(z)dz = 2i\pi\frac{e^{i(1-n)\pi/n}}{n}.}$$

Comme d'habitude, on a, quand $R \to +\infty$, les limites $I_1(R) \to I$ et $I_2(R) \to 0$. D'autre part, on a

$$I_3(R) = -\int_{\gamma_3^{R,op}} f(z)dz = -\int_0^R \frac{e^{2i\pi/n}dt}{1+(e^{2i\pi/n}t)^n} = -\int_0^R \frac{e^{2i\pi/n}dt}{1+t^n} = -e^{2i\pi/n}I_1(R) \to -e^{2i\pi/n}I.$$

En sommant les limites, on obtient la limite de $I(R)$ lorsque $R \to +\infty$:

$$I(R) = I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} (1-e^{2i\pi/n})I = -2i\sin(\pi/n)e^{i\pi/n}I$$

D'où on tire en identifiant

$$-2i\sin(\pi/n)e^{i\pi/n}I = 2i\pi\frac{e^{i(1-n)\pi/n}}{n} \iff I = \frac{\pi}{n\sin(\pi/n)}.$$

Correction de l'exercice ??.

1. La fonction admet un pôle simple en 1 et un pôle double en 0.

   Le résidu au pôle simple se calcule par la méthode de base :

$$Res(f(z),1) = \lim_{z\to1}(z-1)f(z) = e$$

Pour le résidu en zéro, on développe en série de Laurent. Pour cela, on peut introduire la fonction $g(z) = z^2 f(z)$, qui elle est holomorphe en zéro, et faire un DSE en zéro : le résidu est alors le coefficient devant z.

Pour développer en série entière $g(z) = \dfrac{e^z}{z-1}$, on écrit $\dfrac{1}{z-1} = -1 - z - z^2 - z^3 - \dots$, puis on multiplie ce DSE par celui de l'exponentielle :

$$g(z) = \left(\sum -z^n\right)\left(\sum z^n/n!\right) = (-1 - z - z^2 - z^3 - \dots)(1 + z + z^2/2 + z^3/6 + \dots)$$

Le coefficient devant z est $-1-1=-2$. (En général, le coefficient d'un produit est obtenu par produit de Cauchy.)

2. La fonction admet un pôle double en 1 , et un pôle simple en 0. Le résidu au pôle simple vaut $\lim_{z\to 0} z f(z) = 1$. Le résidu au pôle double est obtenu en calculant le développement en série de Laurent. Pour cela, on introduit la fonction $g(z) = (z-1)^2 f(z)$ qui est holomorphe en 1, et on fait un DSE en 1 de cette fonction. Il est plus simple de poser $w = z-1$ (donc $z = w+1$), de changer de variable, et de faire un DSE en zéro : on doit effectuer un DSE en zéro de $w^2 \dfrac{e^{w+1}}{(w+1)w^2} = e\dfrac{e^w}{1+w}$, et prendre le coefficient devant w.

   Or, on a
   $$e\frac{e^w}{1+w} = e\left(1 + w + w^2/2 + w^3/6 + \dots\right)\left(1 - w + w^2 - w^3 \dots\right)$$
   On voit que le coefficient devant w est nul. Le résidu cherché est donc nul.

Correction de l'exercice ??. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec deux pôles doubles en $\pm i$.

Pour obtenir le résidu de f en i, on multiple par $(z-i)^2$: $g(z) = (z-i)^2 f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2}$. Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de i. On cherche le coefficient en $(z-i)$ dans le DSE en i de g. Pour cela, on peut :

1. Développer en série entière en i (ou de façon équivalente, poser $w = z-i$ et faire un DSE en $w=0$). En fait un DL à l'ordre un suffit, inutile de déterminer tout le DSE. On a :
   $$g(z) = \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(w+2i)^2} = \frac{1}{-4+4iw+w^2} = \frac{-1}{4}\frac{1}{1-iw+o(w)} = \frac{-1}{4}\left(1+iw+o(w)\right)$$
   Le terme en w vaut donc $-\dfrac{i}{4}$, c'est le résidu de f en i.
2. Comme on veut juste le coefficient en w et pas tout le DSE, on peut le récupérer par dérivation, à la Taylor, surtout dans le cas présent, car g est facile à dériver. Le coefficient est donc $\lim_{w\to 0} g'(w) = \lim_{w\to 0} \dfrac{-2}{(w+2i)^3} = \dfrac{1}{4i}$.
   (Note : ici la limite s'avère inutile, le $(z-i)^2$ dans la définition de g se simplifie avec celui déjà présent explicitement au dénominateur dans f, donc il n'y a pas de précaution particulière à prendre.)

Le résidu au pôle double i vaut $-\dfrac{i}{4}$.

Soit $R > 1$ et considérons le compact $K(R) = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ et } |z| \leq R\}$. On note $\Gamma(R) = \partial K(R)$ son bord orienté positivement. Le compact ne contient qu'un seul pôle de f, à savoir i, en son intérieur. La fonction f est méromorphe sur l'ouvert simplement connexe $U = \mathbb{C}$.

Par le théorème des résidus, l'intégrale de f sur le contour $\Gamma(R)$ vaut donc $I(R) = \pi/2$. Elle ne dépend donc pas de R.

D'autre part, on a $I(R) = I_1(R) + I_2(R)$, avec $I_1(R) = \displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$ et $I_2(R)$ l'intégrale sur le demi-cercle. Par le lemme de Jordan, $\lim_{R\to+\infty} I_2(R) = 0$. On en déduit que $I_1(R) \to I = \pi/2$.

Note : une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right)$, mais elle n'est pas immédiate à obtenir.

Correction de l'exercice ??. Le résidu au pôle double i vaut $-i/4$. L'intégrale sur le contour (bord du demi-disque supérieur) vaut donc $2i\pi(-i/4) = \pi/2$, et par ailleurs c'est l'intégrale recherchée.
Correction de l'exercice ??. On remarque que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin(t)} = \int_{\mathscr{C}(0,1)} \frac{2dz}{z^2+6iz-1}$$

La fraction rationnelle a des pôles en $-3i \pm 2i\sqrt{2}$. Dans le cercle de rayon un, il n'y a que le pôle en $\alpha = i(-3+2\sqrt{2})$. Le résidu en ce pôle vaut $\dfrac{2}{2\alpha+6i} = \dfrac{1}{2i\sqrt{2}}$.

L'intégrale vaut donc $2i\pi\dfrac{1}{2i\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

La méthode classique demande de faire le changement de variable $u = \tan(t/2)$, qui est ... pénible. Refaire tout de même pour rappeler la méthode? Rappel : on a alors $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, et $dt = \dfrac{2du}{1+u^2}$. On se retrouve avec l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3+\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{3+3u^2+2u} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Attention aux bornes de la nouvelle intégrale et au changement de variable, on commence par dire que la première intégrale peut être prise entre $-\pi$ et π.

Bon, là c'est encore faisable, mais ce changement de variable devient très vite ingérable.
Correction de l'exercice ??. Commençons par observer que l'intégrale en question est bien définie puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2+x+1 = (x+\dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2+x+1}$ est continue et que de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2+x+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+x+1}$$

et comme le terme de droite est intégrable, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2+x+1}$ est intégrable.

Introduisons maintenant la fonction méromorphe $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}.$$

En notant $z_1 = j = e^{2i\pi/3}$ et $z_2 = \bar{j} = e^{-2i\pi/3}$, f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ et a des singularités isolées en z_1 et z_2.

Notons que seul z_1 est dans le demi plan supérieur $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. De plus z_1 est un pôle d'ordre 1 de f. En effet, en considérant le fonction $g : z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{(z-z_2)}$, on a que g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_2\}$ (qui est un voisinage ouvert de z_1), que

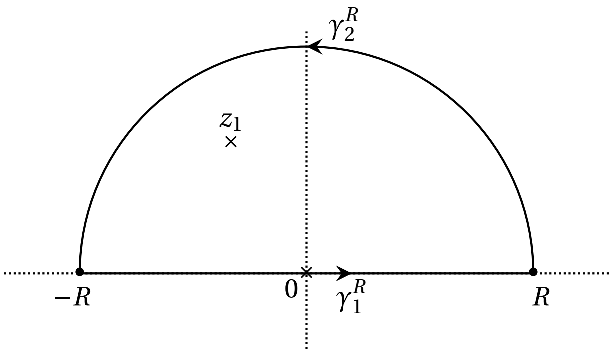
$$g(z_1) = \frac{e^{iz_1}}{z_1-z_2} \neq 0.$$

Et de plus, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ on a $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+z+1} = \dfrac{e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)} = \dfrac{1}{(z-z_1)} g(z)$.

Puisque z_1 est un pôle d'ordre 1, nous savons que, avec les notations ci-dessus,

$$\text{rés}_{z_1}(f) = g(z_1) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{e^{-i/2}}{i\sqrt{3}}$$

Pour tout $R \geqslant 2$ on considère le chemin d'intégration $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$ représenté ci dessous



Puisque $R \geqslant 2$ que $|z_1| = 1 < 2$ nous voyons que z_1 est dans l'intérieur du chemin γ^R (c'est à dire la composante connexe bornée du complémentaire de l'image de γ^R). Puisque de plus z_1 est la seule singularité de f dans $\mathbb{H}$, le théorème des résidus implique que

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = 2i\pi \,\text{rés}_{z_1}(f) = 2i\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'autre part, une paramétrisation de γ_1^R est donnée par

$$\gamma_1^R(t) = t \quad \forall t \in [-R, R]$$

et donc

$$\int_{\gamma_1^R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{t^2+t+1} dt \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2+t+1} dt.$$

De plus, une paramétrisation de γ_2^R est donnée par

$$\gamma_2^R(t) = Re^{it} \quad \forall t \in [0, \pi].$$

Et donc

$$\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)dz\right| = \ell(\gamma_2^R) \max_{z \in \text{supp}(\gamma_2^R)} |f(z)| = \pi R \max_{z \in \text{supp}(\gamma_2^R)} |f(z)|.$$

Nous allons maintenant majorer $\max_{z \in \text{supp}(\gamma_2^R)} |f(z)|$. Soit $z \in \text{supp}(\gamma_2^R)$, on écrit $z = Re^{it}$ pour un certain $t \in [0, \pi]$. On a

$$\begin{aligned}
\left|f(z)\right| &= \left|\frac{e^{iz}}{z^2+z+1}\right| = \left|\frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2 + Re^{it}+1}\right| = \left|\frac{e^{iR(\cos t + i\sin t)}}{(Re^{it})^2 + Re^{it}+1}\right| \\
&= \frac{\left|e^{iR\cos t}\right|\left|e^{-R\sin t}\right|}{\left|(Re^{it})^2 + Re^{it}+1\right|} \leqslant \frac{1}{\left|(Re^{it})^2 + Re^{it}+1\right|} \quad \text{car } \left|e^{iR\cos t}\right| = 1 \text{ et } \left|e^{-R\sin t}\right| \leqslant 1 \\
&\leqslant \frac{1}{\left||(Re^{it})^2| - |Re^{it}+1|\right|} \quad \text{(par inégalité triangulaire inversée)} \\
&= \frac{1}{R^2-R-1} \quad \text{car } R^2 = |Re^{it}|^2 \geqslant R+1 \geqslant |Re^{it}+1|.
\end{aligned}$$

Au final on a

$$\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)dz\right| \leqslant \pi R \max_{z \in \text{supp}(\gamma_2^R)} |f(z)| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2-2Re^{it}+2} iReitdt\right| \leqslant \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2-2Re^{it}+2} iReit\right| dt \\
&= \int_0^\pi \frac{|e^{iRe^{it}}|}{|(Re^{it})^2-2Re^{it}+2|}|iReit|dt = \int_0^\pi \frac{|e^{iR(\cos t+i\sin t)}|}{|(Re^{it})^2-2Re^{it}+2|}Rdt \\
&= R\int_0^\pi \frac{|e^{iR\cos t}||e^{-R\sin t}|}{|(Re^{it})^2-2Re^{it}+2|}dt \leqslant R\int_0^\pi \frac{1}{|(Re^{it})^2-2Re^{it}+2|}dt \\
&\leqslant R\int_0^\pi \frac{1}{||Re^{it}|^2-|2Re^{it}+2||}dt \quad \text{(inégalité triangulaire inversée)} \\
&= R\int_0^\pi \frac{1}{R^2-2R-2}dt \quad \text{car } R^2 = |Re^{it}|^2 > 2R+2 \geqslant |2Re^{it}+2| \\
&= \frac{\pi R}{R^2-2R-2} \overset{[}{R}\rightarrow +\infty] \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Et donc

$$int_{\gamma_2^R} f(z)dz \overset{[}{R}\rightarrow +\infty] \longrightarrow 0$$

On en déduit donc que

$$\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\gamma^R} f(z)dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)dz \overset{[}{R}\rightarrow +\infty] \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2+t+1}dt + 0,$$

et donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

En particulier,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+x+1}dx\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{2\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$