Université de Lorraine,
Année 2018-19

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 3 : Fonctions holomorphes.

Equation de Cauchy-Riemann.

Exercice 1 Pour $z = x + iy$ on pose $f(z) := x + iy^2$.

(a) Vérifier que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$;

(b) En quels points f est $\mathbb{C}$-différentiable ? Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ où f soit holomorphe ?

Exercice 2 Montrer que $z \mapsto |z|^2$ n'est pas holomorphe, de même que $Re(z)$ et $Im(z)$.

Exercice 3 Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Montrer que u et v sont harmoniques, i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Exercice 4 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f une fonction holomorphe sur U. Soit $V := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in U\}$. Pour tout $z \in V$ on pose $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que g est holomorphe sur V.

Exercice 5 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur U. Ecrivons $f = u + iv$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est constante ;

(b) u est constante ;

(c) v est constante ;

(d) $\bar{f}$ est holomorphe ;

(e) $|f|$ est constante.

Exercice 6 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $z = x + iy$ on pose $P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ vérifiant $Re(f) = P$.

Exercice 7 On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ en envoyant (x, y) sur $z = x + iy$. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On note

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \; et \; \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(a) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}$.

(b) Montrer que f holomorphe $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et que dans ce cas $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0),\ \forall z_0 \in U$.

Exercice 8 Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Montrer qu'en tout point $z_0 = x_0 + iy_0$ où $f'(z_0) \neq 0$ les tangentes en z_0 aux courbes $P(x, y) = constante$ et $Q(x, y) = constante$ sont orthogonales.

Exercice 9 Montrer qu'en coordonnées polaires ρ, θ les équations de Cauchy-Riemann pour une fonction f sont équivalentes à

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = i\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}.$$