Université de Lorraine,
Année 2017-18

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Contrôle final – Durée 3 heures.

Notes de cours, calculatrices et téléphones portables interdits.

Rédaction soignée exigée.

Exercice 1 Soient $b, z \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. Rappelons que la fonction *puissance de base* b est définie de la manière suivante :

$$b^z := \exp(z \log(b)),$$

où log est une détermination du logarithme au voisinage de b. Calculer toutes les valeurs possibles de $(1+i)^i$. Montrer que la valeur obtenue en prenant la détermination principale du logarithme est $e^{-\pi/4}(\cos(\ln(\sqrt{2}) + i \sin(\ln(\sqrt{2}))$.

Correction

$|1+i| = \sqrt{2}$ et $arg(1+i) = \pi/4 + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, donc

$$\log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i(\pi/4 + 2n\pi) \text{ et } Log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\pi/4.$$

On en déduit

$$(1+i)^i = \exp(i \log(1+i)) = \exp(-\pi/4 + 2n\pi + i \ln(\sqrt{2}).$$

Exercice 2 Soit $u(x,y) = x^3 + kxy^2 + \ell x^2 + 3x + 4y^2$, $k, \ell \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les valeurs de k et ℓ pour lesquelles il existe une fonction entière f avec $Re(f) = u$.

Correction

On a $\partial u/\partial x = 3x^2 + ky^2 + 2\ell x + 3$. Si l'on veut $f = u + iv$ holomorphe, par Cauchy-Riemann on doit avoir $\partial v/\partial y = \partial u/\partial x = 3x^2 + ky^2 + 2\ell x + 3$. Donc

$$v(x,y) = 3x^2y + k/3y^3 + 2\ell xy + 3y + \alpha(x),$$

où $\alpha(x)$ est une fonction ne dépendant que de x. En procédant de même avec $\partial u/\partial y$ on obtient

$$v(x,y) = -kx^2y + 8xy + \beta(y),$$

où $\beta(y)$ est une fonction ne dépendant que de y. En comparant ces 2 expressions on trouve

$$3y + k/3y^3 - \beta(y) = -kx^2y - 8xy - \alpha(x) - 3x^2y - 2\ell xy. \tag{0.1}$$

De cela on déduit que $3y + k/3y^3 - \beta(y) = c_1$, i.e. $\beta(y) = 3y + k/3 - c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$, et de manière analogue on trouve $\alpha(x) = c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$. On trouve alors que l'égalité (0.1) est vérifiée seulement si $k = -3$ et $\ell = -4$.
Réciproquement on sait que si les dérivées partielles de u et v existent et sont continues et les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées, alors $f = u + iv$ est holomorphe. On trouve alors que si $k = -3$ et $\ell = -4$, alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f une fonction méromorphe sur U ayant un pôle en $z_0 \in U$.

1) Si z_0 est un pôle simple montrer la formule $Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$.

2) Plus en général si z_0 est un pôle d'ordre $m > 0$ montrer que

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}}(z - z_0)^m f(z).$$

3) Énoncer le théorèmes des résidus.

A partir de maintenant soit $f(z) := \frac{1}{3z^2+10iz-3}$.

4) Montrer que f a des pôles simples en $z = -i/3$ et $z = -3i$ et déterminer les résidus de f en ces points.

5) Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin(t)}dt = 2\int_{C_1} f(z)dz$ où C_1 est le cercle de rayon 1 centré en $z = 0$ (et parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre).

6) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin(t)}dt$.

Correction

Pour 1), 2) et 3) cf. le cours. Pour 4) On a $3(z + i/3)(z + 3i) = 3z^2 + 10iz - 3$. On en déduit que $-i/3$ et $3i$ sont des pôles simples de f. Grâce par exemple à la formule de la question 1) on trouve

$$Res(f, -i/3) = 1/8i \text{ et } Res(f, -3i) = -1/8i.$$

Pour 5) : Le paramétrage standard du cercle unité $C_1 = \{e^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$ donne le changement de variable $z = e^{it}$, puis $dz = ie^{it}dt$ d'où $dt = dz/iz$ et $\sin(t) = (e^{it} - e^{-it})/2i = (z - z^{-1})/2i$. On trouve alors

$$2\int_{C_1} f(z)dz = 2\int_{C_1} \frac{1}{z(10i + 3z - 3z^{-1})}dz = \int_{C_1} \frac{1}{5 + 3(\frac{z-z^{-1}}{2i})} \frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin(t)}dt$$

6) Appliquons le théorème des résidus à f et au disque fermé de rayon un. Comme f n'a qu'un pôle à l'intérieur de ce disque, à savoir $-i/3$, on obtient :

$$\int_{C_1} f(z)dz = 2i\pi Res(f, -i/3) = \pi/4,$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin(t)}dt = 2 \times \pi/4 = \pi/2.$$

Exercice 4 1) (Lemme de Jordan) Soit f une fonction continue définie dans un secteur angulaire délimité par $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ et $r \ge r_0 > 0$. Supposons $\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$. Montrer que $\lim_{r\to+\infty} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta = 0$.

2) Soit $f(z) := \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}$. Déterminer les pôles de f et calculer les résidus de f en ces pôles.

3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)}dx$.

Correction

Pour 1) : cf. le cours.

Pour 2) : les pôles sont $\pm 2i, \pm 3i$. On a $Res(f, \pm 2i) = \mp 1/5i$ et $Res(f, \pm 3i) = \pm 3/10i$.

Pour 3) : comme d'habitude on considère Γ_R le lacet donné par le demi-cercle S_R centré à l'origine de rayon $R > 0$ d'ordonnée positive et par le segment $[-R, R]$ contenu dans la droite des réels. Le

Lemme de Jordan s'applique à la fonction f et donne $\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)dz = 0$. Le théorème des résidus donne, pour tout $R > 3$,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2i\pi(Res(f,2i) + Res(f,3i)) = \pi/5,$$

d'où

$$\pi/5 = \lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Pour tout réel $r > 0$ posons

$$M(r) := sup_{|z|=r}|f(z)|.$$

(a) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le développement en série de f à l'origine. A l'aide des inégalités de Cauchy montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

(b) Supposons qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{r^{p+1}} = 0.$$

Déduire alors du point (a) précédent que f est un polynôme de degré au plus p.

Correction

Le point a) découle immédiatement des inégalités de Cauchy et de l'égalité $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. De façon équivalente, on peut écrire a_n sous la forme $a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$, et donc

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|dt \leq \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} M(r)dt \leq \frac{M(r)}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} dt = \frac{M(r)}{r^n}$$

Pour b) : d'après a) pour tout $n \geq 0$ on a $|a_n| \leq M(r)/r^n$. Puisque $M(r)/r^{p+1} \to 0$, pour $r \to +\infty$ on a *a fortiori* $M(r)/r^n \to 0$, pour $r \to +\infty$ et $n \geq p+1$ et donc $|a_n| = 0$ pour tout $n \geq p+1$. Autrement dit, f est un polynôme de degré au plus p.

Exercice 6 Soit $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $a, b \in D$. Montrer que l'équation

$$z^2\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)^3 = b$$

possède exactement 5 solutions dans D.

Correction

$$z^2\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right)^3 = b \Leftrightarrow z^2(z-a)^3 - b(1-\bar{a}z)^3 = 0.$$

Nous voulons appliquer le théorème de Rouché à $f(z) := z^2(z-a)^3 - b(1-\bar{a}z)^3$, $g(z) := z^2(z-a)^3$ sur D. Notons que, puisque $|b| < 1$, on a

$$|f(z) - g(z)| = |b||1 - \bar{a} - z|^3 < |1 - \bar{a}z|^3.$$

Par ailleurs si $|z| = 1$, alors $z = e^{it}$ et donc $\bar{z} = e^{-it} = 1/z$. Donc pour tout $z : |z| = 1$

$$|1 - \bar{a}z|^3 = |1 - \bar{a}/\bar{z}|^3 = \frac{|\bar{z} - \bar{a}|^3}{|\bar{z}|} = |z - a|^3 = |g(z)|.$$

On en déduit que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout $z : |z| = 1$. Par Rouché f et g ont donc même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans D. Or g possède une zéro double en $z = 0$ et un zéro triple en $z = a \in D$, d'où la conclusion.

Exercice 7 1) Donner la définition de singularité apparente (en l'origine). À quelle condition la singularité est-elle apparente ?

2) Donner les définitions de pôle et de singularité essentielle (en l'origine).

3) Donner un exemple de fonction holomorphe sur un voisinage épointé de l'origine ayant une singularité essentielle en 0.

Dans la suite de l'exercice on se propose de démontrer le :

(Théorème de Casorati-Weiestrass) *Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert épointé $\mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$, ayant une singularité essentielle à l'origine. Alors l'image de f est dense dans $\mathbb{C}$.*

Pour cela, on considère $a \in \mathbb{C}$ et on suppose par l'absurde que a n'est pas dans l'adhérence de $\operatorname{Im} f$.

4) Quel est le domaine de définition de $g : z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$? Montrer qu'elle s'étend en une fonction holomorphe $\widetilde{g}$ à l'origine.

5) Que vaut $\widetilde{g}(0)$? En déduire l'écriture locale de $\widetilde{g}$ à l'origine, puis une contradiction sur la nature de f à l'origine.

Correction

1. Cours. La singularité est apparente si et seulement si f est bornée au voisinage du point singulier.
2. Cours.
3. La fonction $f = \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ a une singularité essentielle en l'origine, comme vu en cours. Son développement en série au voisinage de l'origine est $f(z) = \sum_{n \leq 0} \frac{z^n}{(-n)!}$.
4. La fonction g est définie sur $\mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$. Comme par hypothèse a n'est pas dans l'adhérence de l'image de f, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$, $|f(z) - a| > \eta$. On en déduit que pour tout z dans $\mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$, on a la majoration $|g(z)| < \frac{1}{\eta}$. La fonction g est donc bornée au voisinage de l'origine et elle peut donc se prolonger en une fonction $\widetilde{g}$ holomorphe sur $\mathbb{D}(0, r)$.
5. Si $\widetilde{g}(0)$ n'était pas nul, alors $|\widetilde{g}|$ serait strictement minoré dans un voisinage de l'origine, et donc $f(z) = (1 + ag(z))/g(z)$ serait majoré au voisinage de l'origine et donc sa singularité ne serait qu'apparente, ce qui n'est pas le cas. On en déduit donc que $\tilde{g}(0) = 0$.

   La fonction holomorphe $\widetilde{g}$ s'annule donc en l'origine avec une certaine multiplicité $k \geq 1$. Au voisinage de l'origine, on a donc $g(z) = z^k + o(z^k)$. On en déduit qu'au voisinage de l'origine, on a $f(z) = (1 + ag(z))/g(z)$ admet donc un pôle d'ordre k, or la singularité de f en zéro est essentielle, contradiction.