Université de Lorraine,
Année 2018-19

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Contrôle continu – Durée 2 heures.

Notes de cours, calculatrices et téléphones portables interdits.

Rédaction soignée exigée.

Exercice 1 La fonction $z \mapsto |z| \cdot \exp(i\mathrm{Im}(z))$ est-elle holomorphe (justifier sa réponse) ?

Exercice 2 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Montrer qu'il n'existe pas $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \cdot \mathrm{Re}(f) + b \cdot \mathrm{Im}(f) = c$.

Exercice 3 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non constante sur U. On suppose que $|f|$ admet un minimum local sur U. Montrer que f s'annule dans U.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Pour tout réel $r > 0$ posons

$$M(r) := sup_{|z|=r}|f(z)|.$$

(a) Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le développement en série de f à l'origine. A l'aide des égalités de Cauchy montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

(b) Supposons qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{r^{p+1}} = 0.$$

Déduire alors du point (a) précédent que f est un polynôme de degré au plus p.

Exercice 5 Soit $\mathbb{C} := \{z \in C : |z| = 1\}$ le cercle unité parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

(a) Calculer $\int_C z^k dz$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Calculer $\int_C \frac{1}{z}(z + \frac{1}{z})^n dz$, $n \in \mathbb{N}$, en développant par la formule du binôme.

(c) Déduire du point (b) la valeur de l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(t)dt$.

(d) Déduire du point (c) la formule

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2m}(t)dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m)}.$$

Exercice 6 Soit $\mathbb{D}$ le disque unité et $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On appelle *diamètre de* f la quantité (éventuellement infinie) suivante :

$$d := \sup_{w,z\in\mathbb{D}} |f(z) - f(w)|.$$

(a) Montrer que pour tout $0 < r < 1$ on a $2f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(0)} \frac{f(w)-f(-w)}{w^2} dw$.

(b) En déduire que $2|f'(0)| \leq d$.