Correction du partiel du 15 Mars 2021
16h30-18h

Exercice 1 (Questions de cours : 8 points)**.**

1. (1 point) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $z_0 \in U$. Donner les définitions des phrases suivantes :

   - *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.*
     On dit que f est $\mathbb{C}$-*dérivable en* z_0 si la limite suivante existe :
     $$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$
     Si cette limite existe, on la note $f'(z_0)$ et on l'appelle *dérivée de f en z_0*.
   - *f est holomorphe sur U.*
     On dit que f est *holomorphe* (ou *holomorphe sur U*), si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U.

2. (1 point) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui n'est pas holomorphe (on demande pas de le démontrer).
   La fonction conjugaison, $c : z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$. En fait, elle n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

3. (a) (3 points) Énoncer le principe des zeros isolés pour les séries entières puis le démontrer.

   Théorème 1. *(Principe des zéros isolés) Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B(0,R) \setminus \{0\}$ qui tend vers 0 et telle que*
   $$f(z_n) = 0$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Proof. Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ et notons $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. On peut alors écrire
   $$f(z) = z^m \sum_{n\geqslant m} a_n z^{n-m}. \tag{1}$$

On pose alors $g(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n z^{n-m}$. C'est une série entière de rayon de convergence R et donc en particulier g est continue en 0. De plus $g(0) = a_m \neq 0$. En particulier, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in B(0, \varepsilon)$. Mais par ailleurs, par (**??**), on obtient que $g(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est une contradiction car $\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$. □

(b) (1 points) Énoncer le principe de prolongement analytique.

Théorème 2. *(Prolongement analytique) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe*. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $a \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i. La fonction f est identiquement nulle sur U.

ii. La fonction f est identiquement nulle sur un voisinage de a

iii. Il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de U qui tend vers a et telle que $f(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iv. On a $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) (2 points) Montrer que si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f = g$.
On pose $h := f - g$. Par hypothèse, on a $h(x) = f(x) - g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On applique maintenant le principe de prolongement analytique avec la fonction h analytique sur l'ouvert $\mathbb{C}$ (qui est bien un ouvert connexe). La troisième condition du théorème énoncé précédemment est vérifiée, avec $a = 0 \in \mathbb{C}$, et $z_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, puisque $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a en particulier $h(z_n) = h\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on est donc très exactement dans les hypothèses du point *iii*.. Le théorème de prolongement analytique implique alors que $h(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donc que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2 (2 points)**.** Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{C}^*$ de la façon suivante sont-elles holomorphes ?

1. $f(z) := \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$.
2. $g(z) := \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$.

Méthode 1 :

1. On observe que, pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$ on a
$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$
Et donc f n'est pas holomorphe. En effet, supposons que f est holomorphe. Puisque $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a donc que la fonction $c : z \mapsto \frac{1}{f(z)} = \bar{z}$ est holomorphe. Mais ceci est une contradiction puisque nous avons vu en cours que la fonction conjugaison n'est pas holomorphe.

2. On observe que, pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$ on a
$$g(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$
Donc g est holomorphe comme quotient de fonctions holomorphe dont le dénominateur ne s'annule jamais (sur $\mathbb{C}^*$).

Méthode 2 : Nous allons utiliser les équations de Cauchy-Riemann. On pose
$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\}.$$
Les fonctions u et v sont toutes deux différentiable comme quotient de fonctions différentiable dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0\}$:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{0\cdot(x^2+y^2)) - x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{0\cdot(x^2+y^2) - y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

On a donc
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\} \tag{2}$$

1. On a
$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \forall z = x+iy \in \mathbb{C}^*.$$
La fonction f est différentiable (puisque u et v le sont), donc f est holomorphe si et seulement si f vérifie les équations de Cauchy-Riemann, c'est à dire, si et seulement si
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\}.$$
Au vu des relations **??**, si les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées pour f, alors
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \forall (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\},$$
et donc
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \forall (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\}.$$
Mais ceci n'est pas le cas car par exemple $\frac{\partial v}{\partial y}(0,1) = \frac{1-0}{(1+0)^2} = 1 \neq 0$. Donc f n'est pas holomorphe.

2. La fonction g s'écrit
$$g(x+iy) = u_g(x,y) + iv_g(x,y) \quad \forall (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\},$$
où $u_g(x,y) = u(x,y)$ et $v_g(x,y) = -v(x,y)$ $\forall (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\}$. La fonction g est donc différentiable et elle est donc holomorphe si et seulement si elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann
$$\begin{cases} \frac{\partial u_g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v_g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u_g}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v_g}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\}.$$
Au vu de la définition de u_g et v_g, cela est équivalent à
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2) \setminus \{(0,0)\}.$$

Mais ce sont exactement les équations (**??**), donc la fonction g est holomorphe.

Exercice 3 (2 points)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe non-vide. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que

$$\mathrm{Im}(f(z))^2 = \mathrm{Re}(f(z)) \quad \forall z \in U.$$

Montrer que f est constante.

On pose

$$u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy)) \quad \text{et} \quad v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+iy))$$

pour tout $x+iy \in U$, de sorte que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ pour tout $x+iy \in U$. L'hypothèse sur f s'écrit alors

$$v(x,y)^2 = u(x,y) \quad \forall x+iy \in U,$$

ou encore, plus simplement

$$v^2 = u. \tag{3}$$

Puisque f est supposée holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiée,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = & -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

En dérivant (**??**) par rapport à la première variable, on obtient

$$2v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4}$$

En dérivant (**??**) par rapport à la seconde variable, on obtient

$$2v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

En substituant les équations de Cauchy-Riemann dans la relation (**??**), on obtient

$$2v\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

Grâce à (**??**) on obtient donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 2v\left(-2v\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -4v^2\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Donc

$$(1+4v^2)\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Ici nous avons utilisé le fait que $1+4v(x,y)^2 \geqslant 1$ pour tout $x+iy \in U$ et donc que $1+4v(x,y)^2 \neq 0$ pour tout $x+iy \in U$. Puisque $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, l'équation (**??**) implique que $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Comme par ailleurs,

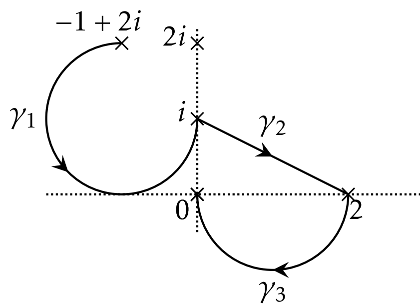
$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad \forall x+iy \in U,$$

on en déduit que

$$f'(z) = 0, \quad \forall z \in U.$$

Puisque U est connexe, on en déduit, d'après une proposition du cours, que f est constante.

Exercice 4 (5,5 points)**.** On considère le chemin $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ représenté graphiquement de la façon suivante :



1. (1 point) Donner une paramétrisation des chemins γ_1, γ_2 et γ_3.
   On a les paramétrisations suivantes pour γ_1, γ_2 et γ_3 :
$$\gamma_1 : \begin{cases} [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -1+i+e^{it}. \end{cases}$$
$$\gamma_2 : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 2t+(1-t)i. \end{cases}$$
$$\gamma_3 : \begin{cases} [0,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 1+e^{-it}. \end{cases}$$

2. (2 points) Déterminer $\displaystyle\int_{\gamma_2} \bar{z}dz$. (Attention, on intègre uniquement sur le chemin γ_2, pas le chemin γ).

   Puisque pour tout $t \in [0,1]$ on a $\gamma(t) = 2t+(1-t)i$ et $\gamma'(t) = 2-i$, on a, par définition d'intégrale curviligne :
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \bar{z}dz &= \int_0^1 \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)dt = \int_0^1 \overline{(2t+(1-t)i)}(2-i)dt = \int_0^1 (2t-(1-t)i)(2-i)dt \\ &= \int_0^1 ((2+i)t-i)(2-i)dt = \int_0^1 (5t-(2i+1))dt = -(2i+1)+5\int_0^1 tdt = -(2i+1)+\frac{5}{2} = \frac{3}{2}-2i. \end{aligned}$$

3. (1 points) Montrer que la fonction $z \mapsto z - \cos(\pi z)$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$, et déterminer une telle primitive.
   La fonction
$$F : z \mapsto \frac{z^2}{2} - \frac{1}{\pi}\sin(\pi z),$$
   définie sur $\mathbb{C}$, est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme somme de fonctions holomorphes. En effet, $z \mapsto \frac{z^2}{2}$ est holomorphe car c'est un polynôme. Et la fonction $z \mapsto -\frac{1}{\pi}\sin(\pi z)$ est holomorphe comme composée de fonction holomorphes car sin est holomorphe d'après le cours et $z \mapsto \pi z$ est holomorphe (d'après le cours).

De plus,

$$F'(z) = z - \cos(\pi z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc par définition, la fonction $f : z \mapsto z - \cos(\pi z)$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$, est de plus F est une primitive de f.

4. (1 point) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \Big(z - \cos(\pi z)\Big)dz$.

   Avec les notations précédentes, puisque F est une primitive de $z \mapsto z - \cos(\pi z)$, que le point initial de γ est $-1+2i$ et que le point terminal de γ est 0 on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \Big(z - \cos(\pi z)\Big)dz &= F(0) - F(-1+2i) = \frac{0^2}{2} - \frac{1}{\pi}\sin(\pi 0) - \frac{(-1+2i)^2}{2} - \frac{1}{\pi}\sin(\pi(-1+2i)) \\
&= \frac{1}{2}(-3-4i) - \frac{1}{2i\pi}(e^{i\pi(-1+2i)} - e^{-i\pi(-1+2i)}) = \frac{-1}{2}(3+4i) - \frac{1}{2i\pi}(e^{-i\pi-2\pi} - e^{i\pi+2\pi}) \\
&= \frac{-1}{2}(3+4i) - \frac{1}{2i\pi}(e^{-i\pi}e^{-2\pi} - e^{i\pi}e^{2\pi}) \\
&= \frac{-1}{2}(3+4i) - \frac{1}{2i\pi}\Big((\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))e^{-2\pi} - (\cos(\pi) + i\sin(\pi))e^{i\pi}e^{2\pi}\Big) \\
&= \frac{-1}{2}(3+4i) - \frac{1}{2i\pi}\Big((-1+0\cdot i)e^{-2\pi} - (-1+i\cdot 0)e^{2\pi}\Big) \\
&= \frac{-1}{2}(3+4i) - \frac{1}{2i\pi}\Big(-e^{-2\pi} + e^{2\pi}\Big) = \frac{-1}{2}(3+4i) + \frac{i}{\pi}\left(\frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2}\right) \\
&= \frac{-1}{2}(3+4i) + \frac{i}{\pi}\sinh(2\pi) = \frac{-3}{2} + i\left(\frac{\sinh(2\pi)}{\pi} - 2\right)
\end{aligned}$$

Exercice 5 (2 ,5 points)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide. On note

$$U' := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \exists w \in U \text{ vérifiant } z = \bar{w}\}$$

C'est à dire U' est le symétrique de U par rapport à la droite horizontale $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. On dit que f est *anti-holomorphe* si l'application $\bar{f} : z \mapsto \overline{f(z)}$ est holomorphe.

Montrer que f est anti-holomorphe si et seulement si l'application

$$g : \begin{cases} U' & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(\bar{z}) \end{cases}$$

est holomorphe sur U'. Dans ce cas, exprimer g' en fonction de $\bar{f}'$.

On peut résoudre cette question de nombreuses façons différentes. Pour illustrer cela, nous en donnons 5 démonstrations différentes.

- Méthode 1 : Avec la définition de $\mathbb{C}$-dérivabilité :

  Par définition, pour tout $z_0 \in U$, la fonction $\bar{f}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si la limite
  $$\lim_{h\to 0} \frac{\bar{f}(z_0+h) - \bar{f}(z_0)}{h}$$
  existe. et dans ce cas,
  $$\bar{f}'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{f}(z_0+h) - \bar{f}(z_0)}{h}$$
  Par ailleurs, pour tout $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_0 + h \in U$, on a
  $$\frac{\bar{f}(z_0+h) - \bar{f}(z_0)}{h} = \frac{\overline{f(z_0+h)} - \overline{f(z_0)}}{h} = \overline{\left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{\bar{h}}\right)}$$
  Par continuité de la fonction $c : z \mapsto \bar{z}$, la fonction
  $$\frac{\bar{f}(z_0+h) - \bar{f}(z_0)}{h}$$
  admet une limite quand h tend vers 0 si et seulement si la fonction
  $$\left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{\bar{h}}\right)$$
  admet une limite quand h tend vers 0. Et si tel est le cas, on a alors
  $$\bar{f}'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{f}(z_0+h) - \bar{f}(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{\bar{h}}\right)} = \overline{\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{\bar{h}}\right)}$$

D'autre part, par définition, pour tout $w_0 \in U'$, la fonction g est $\mathbb{C}$-dérivable en w_0 si et seulement si la limite suivante existe

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{g(w_0+\xi)-g(w_0)}{\xi},$$

et dans ce cas $g'(w_0) = \lim_{\xi\to 0} \frac{g(w_0+\xi)-g(w_0)}{\xi}$.

Par définition de g, on a, pour tout w_0 et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^*$ tel que $w_0+\xi \in U'$,

$$\frac{g(w_0+\xi)-g(w_0)}{\xi} = \frac{f(\overline{w_0+\xi})-f(\overline{w_0})}{\xi} = \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{\bar{h}},$$

où l'on a posé $z_0 = \overline{w_0} \in U$ et $h := \overline{\xi}$, qui vérifie $z_0+h \in U$. En particulier, g est $\mathbb{C}$-dérivable en w_0 si et seulement si la limite suivante existe :

$$\lim_{\bar{h}\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{\bar{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{\bar{h}}.$$

Et dans ce cas

$$g'(w_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{\bar{h}}.$$

Pour résumé, nous avons vu que pour tout $z_0 \in U$, l'existence de la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{\bar{h}}$$

et équivalente à la fois à la $\mathbb{C}$-dérivabilité de $\bar{f}$ en z_0 et à la $\mathbb{C}$-dérivabilité de g en $\overline{z_0}$, et dans ce cas

$$g'(\overline{z_0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{\bar{h}} = \overline{f'(z_0)}.$$

Ceci montre donc bien que $\bar{f}$ est holomorphe sur U si et seulement si g est holomorphe sur U' et pour tout $z \in U$, on a $g(\bar{z}) = \overline{\bar{f}'(z)}$.

- Méthode 2 : Avec les équations de Cauchy-Riemann.

Notons $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ pour tout $x+iy \in U$. Les fonctions u et v sont différentiables car f l'est. Notons aussi

$$\bar{f}(x+iy) = u_{\bar{f}}(x,y) + iv_{\bar{f}}(x,y) \quad \forall x+iy \in U$$

et

$$g(x+iy) = u_g(x,y) + iv_g(x,y) \quad \forall x+iy \in U'.$$

Par définition, on a donc :

$$u_{\bar{f}}(x,y) = u(x,y) \quad \text{et} \quad v_{\bar{f}}(x,y) = -v(x,y) \quad \forall x+iy \in U$$

et

$$u_g(x,y) = u(x,-y) \quad \text{et} \quad v_g(x,y) = v(x,-y) \quad \forall x+iy \in U'.$$

En dérivant par rapport à chacune des variables, on obtient, $\forall x+iy \in U$,

$$\frac{\partial u_{\bar f}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial u_{\bar f}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial v_{\bar f}}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_{\bar f}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

et $\forall x+iy \in U'$

$$\frac{\partial u_g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y), \quad \frac{\partial u_g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y), \quad \frac{\partial v_g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x,-y).$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann, on sait que $\bar f$ est holomorphe si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{\bar f}}{\partial x} &= \frac{\partial v_{\bar f}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{\bar f}}{\partial y} &= -\frac{\partial v_{\bar f}}{\partial x}. \end{cases}$$

c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

De même, la fonction g est holomorphe sur U', si est seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= \frac{\partial v_g}{\partial y} \\ \frac{\partial u_g}{\partial y} &= -\frac{\partial v_g}{\partial x}. \end{cases}$$

ce qui est le cas si et seulement si pour tout $x+iy \in U'$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) &= -\frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y). \end{cases}$$

c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Ceci nous montre donc bien que g est holomorphe si et seulement si $\bar f$ est holomorphe, et dans ce cas, on a, pour tout $z = x+iy \in U$

$$\begin{aligned} g(\bar z) &= g(x-iy) = \frac{\partial u_g}{\partial x}(x,-y) + i\frac{\partial v_g}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\ &= \frac{\partial u_{\bar f}}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial v_{\bar f}}{\partial x}(x,y) = \overline{\frac{\partial u_{\bar f}}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v_{\bar f}}{\partial x}(x,y)} \\ &= \overline{\bar f'(z)} \end{aligned}$$

- Méthode 3 : Avec les notations de Wirtinger.

  La fonction $\bar{f}$ est holomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$ est dans ce cas, on a $\bar{f}' = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z}$. Par ailleurs, en notant $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ pour tout $x+iy \in U$, on a

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + i\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} + i\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\right).$$

  De même (où en appliquant la formule précédente en échangeant le rôle de f et de $\bar{f}$) on a $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$.

  En particulier, on trouve que $\bar{f}$ est holomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, et dans ce cas, on a $\bar{f}' = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}}$.

  D'autre part, en notant $c : z \mapsto \bar{z}$ le morphisme de conjugaison, on a $g = f \circ c$. Donc, pour tout $w \in U'$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial w}(w) = \frac{\partial f}{\partial z}(c(w))\frac{c}{\partial w}(w) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c(w))\frac{\bar{c}}{\partial w}(w) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{w})$$

  et

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w) = \frac{\partial f}{\partial z}(c(w))\frac{c}{\partial \bar{w}}(w) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(c(w))\frac{\bar{c}}{\partial \bar{w}}(w) = \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{w})$$

  En particulier, g est holomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{w}} = 0$, c'est à dire si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, et dans ce cas, pour tout $z \in U$, on a

$$g'(\bar{z}) = \frac{\partial g}{\partial w}(\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z).$$

  D'après ce qui précéde, ceci montre donc que g est holomorphe si et seulement si $\bar{f}$ l'est, et dans ce cas, on a de plus

$$g'(\bar{z}) = \overline{\bar{f}'(z)} \quad \forall z \in U.$$

- Méthode 4 : En développant en série entière.
  D'après le cours, on sait qu'une fonction d'une variable complexe est holomorphe si et seulement elle est analytique. Appliquons cela ici. La fonction $\bar{f}$ est holomorphe si et seulement si $\bar{f}$ est analytique, c'est à dire si et seulement si pour tout $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que pour tout $z \in B(z_0, r)$ on ait

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{7}$$

Et dans ce cas, on a de plus

$$\bar{f}'(z_0) = a_1.$$

De façon similaire, la fonction g est holomorphe si et seulement si g est analytique, c'est à dire si et seulement si pour tout $w_0 \in U'$, il existe $r' > 0$ tel que $\overline{B}(w_0, r') \subset U'$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} b_n(w-w_0)^n$ de rayon de convergence $R' \geqslant r'$ telle que pour tout $w \in B(w_0, r')$ on ait

$$g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(w-w_0)^n. \tag{8}$$

Et dans ce cas, on a de plus

$$\bar{g}'(w_0) = b_1.$$

Montrons que $\bar{f}$ analytique implique que g est analytique. Soit $w_0 \in U'$ et notons $z_0 = \overline{w_0} \in U$. On considère le developpement en série entière de $\bar{f}$ centré en z_0 comme ci-dessus. Alors pour tout $w \in B(w_0, r)$, on a

$$g(w) = \overline{\bar{f}(\bar{w})} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\bar{w}-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n(\bar{w}-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}(w-w_0)^n$$

Donc g est developpable en série entière centrée en w_0, comme ceci est vrai pour tout $w_0 \in U'$, on en déduit que g est analytique (donc holomorphe) sur U'. De plus, avec les notation ci-dessus, on a

$$g'(w_0) = \overline{a_1} = \overline{\bar{f}'(z_0)}.$$

On démontre la réciproque de façon similaire. En effet, supposons que g soit analytique. Soit $z_0 \in U$. Notons $w_0 := \overline{z_0}$. On développe g en série entière centrée en w_0 comme ci-dessus. Alors pour tout $z \in B(z_0, r')$, on a

$$\bar{f}(z) = \overline{g(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\bar{z}-w_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{b_n(\bar{z}-w_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{b_n}(z-z_0)^n.$$

On a donc développé $\bar{f}$ en série entière centrée en z_0, comme cet argument est valide pour tout $z_0 \in U$, la fonction $\bar{f}$ est analytique (donc holomorphe), de plus, on a

$$\bar{f}'(z_0) = \overline{b_1} = \overline{g'(w_0)}.$$

Nous avons donc montré que $\bar{f}$ est analytique si et seulement si g est analytique, et dans ce cas, on a, pour tout $z_0 \in U$

$$g'(\overline{z_0}) = \overline{\bar{f}'(z_0)}.$$

- Méthode 5 : Par intégration curviligne.

D'après le lemme de Goursat et le théorème de Morera, une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si son intégrale le long du bord de n'importe quel triangle de U est nulle.

Supposons tout d'abord que $\bar{f}$ est holomorphe. Soit $\Delta \subset U'$ un triangle de U'. Soit $\gamma : [a,b] \to U'$ une paramétrisation du bord $\partial\Delta$ de Δ dans le sens direct. Alors le chemin $\overline{\gamma} : [a,b] \to U$ défini par $\overline{\gamma}(t) = \overline{\gamma(t)}$ est un chemin qui donne une paramétrisation (dans le sens indirect) du bord de Δ' le symétrique de Δ par rapport à l'axe réel. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} g(z)dz &= \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b f(\overline{\gamma(t)})\gamma'(t)dt = \overline{\int_a^b \bar{f}(\overline{\gamma}(t))\overline{\gamma}'(t)dt} \\
&= \overline{\int_{\overline{\gamma}} \bar{f}(z)dz} = 0,
\end{aligned}$$

d'après le lemme de Goursat. Ceci étant valable pour tout triangle de U', on en déduit que g est holomorphe d'après le théorème de Morera.

Réciproquement, supposons que g soit holomorphe. Soit $\Delta \subset U$ un triangle de U'. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ une paramétrisation du bord $\partial\Delta$ de Δ dans le sens direct. Alors le chemin $\overline{\gamma} : [a,b] \to U'$ défini par $\overline{\gamma}(t) = \overline{\gamma(t)}$ est un chemin qui donne une paramétrisation (dans le sens indirect) du bord de Δ' le symétrique de Δ par rapport à l'axe réel. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} \bar{f}(z)dz &= \int_a^b \bar{f}(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \overline{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt = \overline{\int_a^b f(\gamma(t))\overline{\gamma}'(t)dt} \\
&= \overline{\int_a^b g(\overline{\gamma}(t))\overline{\gamma}'(t)dt} = \overline{\int_{\overline{\gamma}} g(z)dz} = 0,
\end{aligned}$$

d'après le lemme de Goursat. Ceci étant valable pour tout triangle de U, on en déduit que $\bar{f}$ est holomorphe d'après le théorème de Morera.

Nous avons donc montré que $\bar{f}$ est holomorphe si et seulement si g est holomorphe. Si tel est le cas, nous allons maintenant comparer leurs dérivées grace à la formule de Cauchy à l'ordre 1.

Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$. Notons $\gamma : [0, 2\pi] \to U$ le chemin définie par $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

D'après la formule de Cauchy à l'ordre 1, on a

$$\begin{aligned}
\bar{f}'(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\bar{f}(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{f}(\gamma(t))}{(re^{it})^2} ire^{it}dt = \overline{\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{(re^{-it})^2} ire^{-it}dt} \\
&= \overline{\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\overline{\gamma(t)})}{(re^{-it})^2} ire^{-it}dt} = -\overline{\int_{\overline{\gamma}} \frac{g(z)}{(z-\overline{z_0})^2}dz} = \overline{\int_{\overline{\gamma}^{\mathrm{op}}} \frac{g(z)}{(z-\overline{z_0})^2}dz} = \overline{\int_{C(\overline{z_0},r)} \frac{g(z)}{(z-\overline{z_0})^2}dz} = \overline{g'(\overline{z_0})}.
\end{aligned}$$

Où la dernière égalité a été obtenue par une autre application de la formule de Cauchy à l'ordre 1. Nous avons donc bien montré (pour la cinquième fois) que pour tout $z_0 \in U$, on a

$$g'(\overline{z_0}) = \overline{\bar{f}'(z_0)}.$$