L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre II:
Fonctions analytiques

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 **Définitions** 2

2 **Opérations sur les séries entières** 7

3 **Continuité** 7

4 **Holomorphie des séries entières** 8

5 **Fonctions analytiques** 9

6 **Principe des zéros isolés et prolongement analytique** 11

7 **Exponentielle, sinus et cosinus** 12

8 **Appendice : Rappels sur les séries numériques et les séries de fonctions** 14

9 **Exercices** 17

1 Définitions

1.1 Motivation

Ce chapitre recouvre en partie le cours sur les séries entières présentée dans l'UE 301 : *Analyse 2* en deuxième année de licence. Nous commençons par motiver l'utilité de l'utilisation des nombres complexes pour l'étude des séries entières par un exemple de calcul de rayon de convergence.

On considère les fonctions suivante :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

et

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{définie sur } \mathbb{R}.$$

On veut les développer en séries entières centrées en 0. Rappelons (voir lemme 8.4) que l'on a

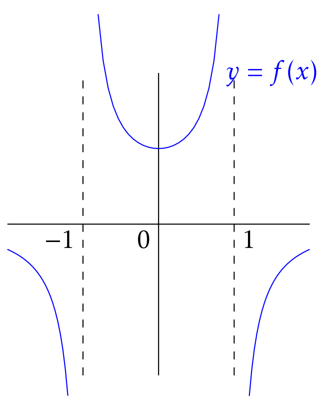
$$\frac{1}{1-\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \quad \forall \lambda \in]-1, 1[.$$

Donc pour tout $x \in]-1,1[$, on a

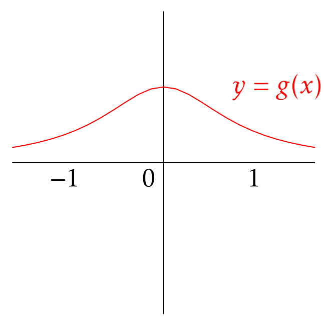
$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

On voit facilement (voir l'exemple 1.5) que le rayon de convergence de ces deux séries entières est 1. On peut alors se demander si l'on peut interpréter géométriquement ce rayon de convergence.

Voici les graphes de ces fonctions :



Problème en -1 et 1.



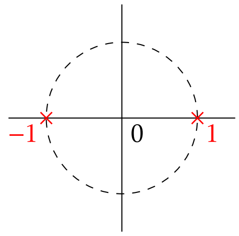
Pas de problème visible.

Dans le cas de la fonction f, on voit que la fonction “explose” en 1 et en -1. Il est donc clair que le rayon de convergence du développement en série entière de f ne peut pas être plus grand que 1, en on envie de dire que c'est 1 car il n'y a pas d'obstruction géométrique évidente nous incitant à penser que la série ne converge pas sur $]-1, 1[$. Par contre, pour la fonction g, on ne voit aucun problème sur le graphe. De ce point de vu, géométriquement, on pourrait penser que le rayon de convergence est infini.

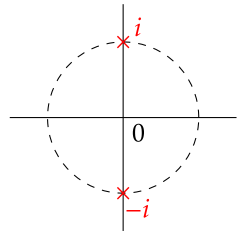
Pour voir le problème, il faut étendre ces fonctions aux nombres complexes, on a

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1-iz)(1+iz)}$$

et l'on interprète naturellement, de façon géométrique, le rayon de convergence comme étant la distance entre 0 et les "problèmes" :



Problèmes en −1 et 1.



Problèmes en $-i$ et i.

1.2 Definition et rayon de convergence

Cette section contient des rappels concernant la notion de rayon de convergence pour les séries entières.

Définition 1.1: Une *série entière* est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et z est une variable complexe.

Lemme 1.2 (Lemme d'Abel): *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ un nombre réel positif tel que la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. De plus, pour tout $0 < r' < r$ la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $B(0, r')$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|a_n| r^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$. On a alors

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n| r^n \frac{|z|^n}{r^n} \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Or la série de terme général $M\left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge, car c'est une série géométrique de raison $\frac{|z|}{r} < 1$. La seconde assertion est une conséquence immédiate. □

Définition 1.3: Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Le *rayon de convergence* de f est le réel

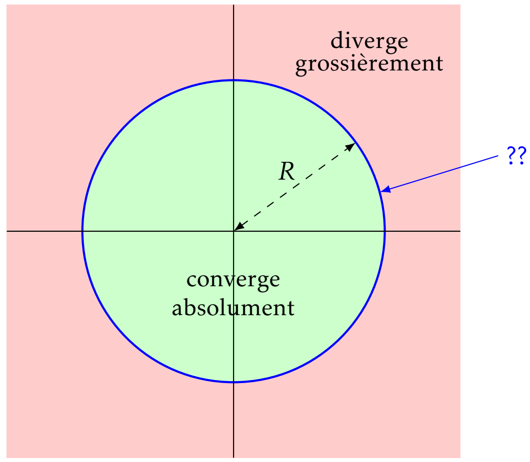
$$R \overset{\text{déf}}{=} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \text{la suite } |a_n| r^n \text{ est bornée}\}.$$

Le *disque de convergence* de f est $B(0, R)$. Le rayon de convergence est caractérisé par les conditions suivantes :

1. Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
2. Si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

Nous renvoyons à la section 8 pour des rappels de terminologie concernant les séries numériques.

Voici un dessin illustrant cette définition.



Remarque 1.4:

1. En général, on ne peut pas dire quel est le comportement de la série $\sum_n a_n z^n$ sur le bord du disque de convergence. (Voir les exercices 2 et 17)
2. Nous ferons souvent l'abus de langage d'utiliser le terme "la série entière f" pour désigner la fonction $z \mapsto \sum_n a_n z^n$ définie sur le disque de convergence de cette série entière.

Exemple 1.5: Étudions les séries entières : $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}$ et $f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$.

La série f_1 est la série géométrique (voir lemme 8.4). Cette série diverge grossièrement si $|z| \geqslant 1$ et converge absolument si $|z| < 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

En particulier le rayon de convergence de cette série entière est 1. La série entière f_2 peut s'étudier en posant $w = z^2$. Avec cette notation, on a $|w| < 1$ si et seulement si $|z| < 1$ et donc que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Le rayon de convergence de f_2 est donc 1 et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = f_1(w) = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1-z^2}.$$

De la même manière, en posant $w = -z^2$, on montre que le rayon de convergence de f_3 vaut 1 et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| < 1$, on a

$$f_3(z) = f_1(w) = \frac{1}{1-w} = \frac{1}{1+z^2}.$$

1.3 Calcul du rayon de convergence

Il existe plusieurs critères pour calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Proposition 1.6 (Critère de d'Alembert): *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Si $|a_n| > 0$ pour tout n suffisamment grand et si la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existe, alors en la notant $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, le rayon de convergence de f est

$$R = \frac{1}{\ell},$$

où l'on utilise la convention $+\infty = \frac{1}{0}$ et $0 = \frac{1}{+\infty}$.

Démonstration. Observons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \ell|z|.$$

Donc si $|z| < \frac{1}{\ell}$ alors le critère de d'Alembert pour les séries numériques implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge absolument. D'autre part, si $|z| > \frac{1}{\ell}$ alors le critère de d'Alembert implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ diverge grossièrement, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. □

Exemple 1.7: Déterminons le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{n+3} z^n$.

Nous pouvons utiliser le critère de d'Alembert puisque ici $a_n = \frac{n^2+n-1}{n+3}$ est bien non-nul pour tout $n \in \mathbb{N}$. On voit alors facilement que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|(n+1)^2+n+1-1\right|}{|n+1+3|} \frac{|n+3|}{\left|n^2+n-1\right|} = \frac{\left|n^2+3n+1\right|}{|n+1|} \frac{|n+3|}{\left|n^2+n-1\right|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{1} = 1$.

Remarque 1.8: Le critère de d'Alembert ne s'applique pas pour de séries entières avec une infinité de termes nuls, comme par exemple les séries entière de la forme $\sum_n a_n z^{2n}$. Dans ce genre de cas, on peut néanmoins utiliser l'astuce suivante. Supposons pour simplifier que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum_n a_n w^n$ et on tente d'appliquer le critère de d'Alembert (il n'est pas garantie que ce critère nous permette de conclure). Si le critère nous permet de déduire que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n w^n$ est R alors la définition de rayon de convergence et la substitution $w = z^2$ impliquent alors que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$.

Remarque 1.9: Une erreur qui est souvent commise pour déterminer le rayon de convergence d'une série de la forme $\sum_n a_n z^{2n}$ est de faire le "changement d'indice" $N = 2n$ et de se ramener à l'étude de la série entière $\sum_N a_{\frac{N}{2}} z^N$. Ceci ne marche pas. En effet, on peut par exemple observer pour tout $z \in B(0,1) \setminus \{0\}$ on a

$$\sum_{N=0}^{+\infty} z^N = \frac{1}{1-z} \neq \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}.$$

Proposition 1.10 (Critère de Cauchy): *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Si le limite*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

existe, alors en la notant $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, le rayon de convergence de f est

$$R = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \ell|z|$. Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, c'est à dire $|z|\ell < 1$ alors le critère de Cauchy pour les séries numériques implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge absolument. D'autre part, si $|z| > \frac{1}{\ell}$ alors le critère de Cauchy implique que la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ diverge grossièrement, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement. □

Exemple 1.11: Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^n}$.

Ici, on a $a_n = \frac{1}{n^n}$, donc

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{1}{n^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc le critère de Cauchy implique que le rayon de convergence de la série entière est $R = \frac{1}{0} = +\infty$.

Les deux critères précédents ne marche pas toujours. De façon générale, nous avons la formule suivante.

Proposition 1.12 (Formule d'Hadamard): *Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Notons $\ell = \limsup\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, alors le rayon de convergence de f est donné par*

$$R = \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors on a $\limsup\limits_{n\to+\infty}(|a_n z^n|^{\frac{1}{n}}) = |z|\ell$. Supposons que $|z| < \frac{1}{\ell}$, c'est à dire $|z|\ell < 1$. Alors il existe $|z|\ell < r < 1$. Par définition de lim sup, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} < r$. C'est à dire que $|a_n z^n| < r^n$. Comme $r < 1$, la série géométrique de raison r converge, par le critère de comparaison, cela implique que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. Supposons maintenant que $|z| > \frac{1}{\ell}$, c'est à dire que $|z|\ell > 1$. Soit $r \in]1, |z|\ell[$. Par définition de lim sup, il existe une infinité d'entiers n tels que $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > r$. Pour tout ce n on a alors $|a_n z^n| > r^n$. Comme $r > 1$, cela montre que la suite $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc, par définition, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n z^n|$ diverge grossièrement, et il en est donc de même pour la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$. □

Notons aussi que le critère de comparaison nous donne un énoncé simple pour borner le rayon de convergence.

Proposition 1.13: *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout n à partir d'un certain rang, alors $R_1 \geqslant R_2$.*

Exemple 1.14: Le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos n)^{n!} \sin^n \left(e^{\pi n^n}\right) z^n$$

vérifie $R \geqslant 1$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|(\cos n)^{n!} \sin^n \left(e^{\pi n^n}\right)\right| \leqslant 1,$$

puisque $|\cos x| \leqslant 1$ et $|\sin x| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et puisque l'on sait que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ vaut 1, la propriété implique que le rayon de convergence de la série ci-dessus est plus grand que 1.

2 Opérations sur les séries entières

On peut additionner des séries entières.

Proposition 2.1: *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

La produit de Cauchy pour le produit de séries numériques implique que l'on peut aussi faire le produit de séries entières et que l'on a de plus une expression explicite de ce produit.

Proposition 2.2: *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ vérifie $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

3 Continuité

Rappelons la propriété suivante, dont en laisse la preuve en exercice de révision.

Proposition 3.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions* continues *$f_n : U \to \mathbb{C}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$, alors f est continue.*

On en déduit alors :

Proposition 3.2: *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction f est continue sur le disque de convergence $B(0, R)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $0 < r < R$, la fonction $f|_{B(0,r)}$ est continue. Cela découle immédiatement du fait que la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge normalement sur $B(0,r)$ (par le lemme d'Abel). □

4 Holomorphie des séries entières

Le théorème suivant généralise le théorème analogue pour les séries entières réelles vu dans le cours *Analyse 2*, et permet de construire de nombreux exemples de fonctions holomorphes.

Théorème 4.1: *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1}$ a rayon de convergence R. De plus, la fonction $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe, et pour tout $z \in B(0,R)$ on a*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Démonstration. Pour la première assertion nous utilisons la formule d'Hadamard (et le résultat de l'exercice 6)

$$\limsup_{n\to+\infty} |n a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Montrons maintenant que f est holomorphe. Soit $z_0 \in B(0,R)$. Il s'agit d'étudier la limite de

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

quand $z \to z_0$. Soit $r < R$ tel que $|z_0| < r$. Pour tout $z \in B(0,r) \setminus \{z_0\}$. On a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)}{z - z_0}(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1}) = (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1}).$$

On en déduit que

$$\left| a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| \leqslant |a_n|(|z|^{n-1} + |z|^{n-2}|z_0| + \cdots + |z_0|^{n-1}) \leqslant |a_n| n (\max\{|z|, |z_0|\})^{n-1} \leqslant n|a_n| r^{n-1}.$$

Comme, $r < R$ et que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n n z^{n-1}$ est R, ceci implique que la série de fonctions (définies sur $B(0,r)$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$$

converge normalement, donc uniformement sur $B(0,r)$. En particulier, on a

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_0^{n-1}.$$

La fonction f est donc $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $f'(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_0^{n-1}$. Donc f est holomorphe sur $B(0,R)$. □

Ceci implique la proposition suivante

Proposition 4.2: *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $B(0,R)$ et l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Ici, nous disons qu'une fonction est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable, si elle est holomorphe, que sa dérivée est holomorphe, que la dérivée de la dérivée est holomorphe, etc.

Démonstration. On montre par une récurrence immédiate que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable et que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}.$$

Il suffit alors d'évaluer cette égalité au point $z = 0$ pour obtenir $f^{(k)}(0) = k! a_k$. □

Cette proposition implique en particulier que les coefficients a_n d'une série entière sont uniquement déterminés par la donnée de f dans un voisinage de 0.

Corollaire 4.3: *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergences respectifs $R_1, R_2 > 0$. Si il existe $0 < \varepsilon \leqslant \min\{R_1, R_2\}$ tel que pour tout $x \in B(0,\varepsilon)$*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n,$$

alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

5 Fonctions analytiques

Dans la section précédente nous avons étudié les fonctions qui s'écrivent comme série entière centrée en 0. Par translation, on peut étudier les fonctions qui peuvent s'écrire comme série entière centrée en un autre point.

Définition 5.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $z_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *développable en série entière en z_0* si il existe une série entière $\sum a_n w^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $0 < r \leqslant R$ tel que $B(z_0, r) \subset U$ et tel que pour tout $z \in B(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Par translation, tous les résultats vus pour les fonctions développables en série entière en 0 s'étendent à ce contexte plus général. Avant d'énoncer quelques implications de cette remarque, nous introduisons la notion de fonction analytique.

Définition 5.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $z_0 \in U$ un point. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *analytique* si f est développable en série entière en tout point de U.

Remarque 5.3: Il est vrai, même si ce n'est pas clair à priori vu la définition, que les séries entières sont analytiques sur leur disque de convergence. Cela peut se montrer directement, mais il est plus élégant de le déduire des résultats que nous démontrerons dans le chapitre IV.

Exemple 5.4: Soit $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ est analytique

En effet, fixons un point $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, et montrons que la fonction f est développable en série entière entière centrée en z_0. On pose $r_0 = |a - z_0|$. Alors, pour tout $z \in B(z_0, r_0)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - a} = \frac{1}{z_0 - a}\frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a} + 1} = \frac{1}{z_0 - a}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{a-z_0}} = \frac{1}{z_0 - a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{a-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{(a-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

Pour developper la fonction en série entière, nous avons utilisé de façon cruciale que $\left|\dfrac{z_0 - z}{z_0 - a}\right| < 1$ puisque $|z_0 - z| < |z_0 - a|$. Cette écriture montre donc que f est développable en série entière centrée en z_0. Comme ceci est vraie pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, cela implique que f est analytique. Observons au passage que cet exemple montre que le rayon de convergence du développement en série entière centrée en z_0 *dépend* de z_0.

Une conséquence directe de cette définition et du théoreme 4.1 est la suivante.

Théorème 5.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction* analytique. *Alors f est holomorphe sur U.*

Remarque 5.6: Nous verrons plus tard que la réciproque de ce théorème est vraie, c'est à dire que les fonctions holomorphes sont analytiques.

Notons que l'on peut être encore plus précis.

Proposition 5.7: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur U et pour tout $a \in U$, il existe un réel $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subset U$, tel que le rayon de convergence de la série entière $\sum f^{(n)}(a) w^n$ soit plus grand que r_a et tel que pour tout $z \in B(a, r_a)$ on ait*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

En vu des propositions 2.1 et 2.2 on obtient le résultat suivant.

Proposition 5.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Alors $f + g$ et fg sont des fonctions analytiques sur U*

Il est vrai aussi que si une fonction analytique $f : U \to \mathbb{C}$ ne s'annule jamais alors, la fonction $\frac{1}{f}$ est analytique. Pour montrer cela, on peut par exemple montrer que si une fonction g qui est la somme d'une série entière ne s'annulant pas en 0, alors on peut déterminer une série entière h (de rayon de convergence éventuellement plus petit) tel que $gh = 1$ (voir l'exercice 15). Une façon plus satisfaisante d'obtenir ce résultat est de le déduire de la propriété correspondantes pour les fonctions holomorphes une fois que nous aurons démontré que les fonctions holomorphes sont analytiques.

6 Principe des zéros isolés et prolongement analytique

6.1 Principe des zéros isolés

Théorème 6.1 (Principe des zéros isolés): *Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B(0,R)\setminus\{0\}$ qui tend vers 0 et telle que*

$$f(z_n) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ et notons $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. On peut alors écrire

$$f(z) = z^m \sum_{n\geqslant m} a_n z^{n-m}. \tag{1}$$

On pose alors $g(z) = \sum_{n\geqslant m} a_n z^{n-m}$. C'est une série entière de rayon de convergence R et donc en particulier g est continue en 0. De plus $g(0) = a_m \neq 0$. En particulier, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in B(0,\varepsilon)$. Mais par ailleurs, par (1), on obtient que $g(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est une contradiction car $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$. □

6.2 Prolongement analytique

Comme conséquence du principe des zéros isolés, on a le résultat suivant qui montre que les fonctions analytiques sont extrêmement rigides, il suffit de les connaitre sur un ensemble très petit pour les connaitre sur tout l'ensemble de définition (tout du moins si cet ensemble est connexe).

Théorème 6.2 (Prolongement analytique): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $a \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *La fonction f est identiquement nulle sur U.*
2. *La fonction f est identiquement nulle sur un voisinage de a*
3. *Il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U qui tend vers a et telle que $f(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
4. *On a $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Les implications $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ et $\boxed{2 \Rightarrow 3}$ sont évidentes. L'implication $\boxed{3 \Rightarrow 4}$ découle du principe des zéros isolés. Il nous reste à démontrer l'implication $\boxed{4 \Rightarrow 1}$. Ici, l'hypothèse de connexité est essentielle. Notons

$$V := \left\{z \in U\ ;\ f^{(n)}(z) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nous allons montrer que V non-vide, fermé dans U et ouvert dans U. Comme U est connexe, on en déduit alors que $V = U$ et donc que f s'annule identiquement sur U. Notons déjà que V est non-vide par hypothèse. D'autre part, V est fermé car

$$V = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (f^{(n)})^{-1}(\{0\})$$

est une intersection de fermés car $f^{(n)}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que V est ouvert. Soit $z_0 \in V$. D'après la proposition 5.7 il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$ et tel que $f|_{B(z_0,r)}$ est identiquement nul. En particulier, $B(z_0, r) \subset V$. Ceci montre que V est ouvert. □

Le terme prolongement analytique provient de l'interpretation suivante : "si une fonction analytique se prolonge, alors ce prolongement est unique". Plus précisément, on a

Corollaire 6.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Si il existe $a \in U$ et $V \subset U$ un voisinage ouvert de a tel que $f|_V = g|_V$, alors $f = g$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 6.2 à la fonction $f - g$. □

7 Exponentielle, sinus et cosinus

Dans cette section, nous étendons sur le plan complexe plusieurs fonctions usuelles qui peuvent s'écrire comme série entière.

Proposition 7.1: *La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a rayon de convergence infini. De plus pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Remarque 7.2: Rappelons que nous avons défini dans la chapitre 1 la fonction exponentielle comme étant la fonction définie par

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Il est cependant usuel de définir l'exponentielle directement comme série entière.

Démonstration. Pour montrer que le rayon de convergence vaut $+\infty$ comme annoncé, il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert. Nous pouvons donc considérer la fonction f définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il s'agit de montrer que $f = \exp$. D'après la théorème 4.1, on obtient que f est holomorphe et vérifie, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z).$$

Donc nous avons $f' = f$. De plus, il est immédiat de voir que $f(0) = 1$. Rappelons aussi que nous avons montré durant chapitre 1 que $\exp' = \exp$ et que l'on a $\exp(0) = e^0 = 1$. Nous allons maintenant montrer que ceci entraine que $f = \exp$. En effet, considérons la fonction $g : z \mapsto e^{-z} f(z)$. Alors g est holomorphes comme produit de fonctions holomorphe et l'on a

$$g'(z) = -e^{-z} f(z) + e^{-z} f'(z) = -e^{-z} f(z) + e^{-z} f(z) = 0.$$

D'après ce que nous avons vu au chapitre 1, ceci entraine que g est constante. Comme de plus $g(0) = 1$, on en déduit que $g(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{e^{-z}} = \frac{1}{e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y))} = \frac{e^x}{\cos y - i\sin y} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y)}{(\cos y - i\sin y)(\cos y + i\sin y)} \\ &= \frac{e^x(\cos y + i\sin y)}{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 7.3:

1. *Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a*
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z \neq 0$ et l'on a*
$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Démonstration. Notons que nous avons déjà démontré la seconde assertion au cours de la preuve de la proposition 7.3. On pourrait démontrer la première de façon similaire en utilisant les formules trigonométriques usuelles. Ici nous choisissons de le démontrer en utilisant le produit de Cauchy. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

La seconde assertion s'en déduit en remarquant que $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. □

La fonction exponentielle permet d'étendre sur le plan complexe les fonctions cos, sin. Il suffit de poser, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De la même façon, on peut définir les fonctions trigonométriques hyperboliques.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

8 Appendice : Rappels sur les séries numériques et les séries de fonctions

Nous faisons ici quelques brefs rappels sur les séries numériques et les séries de fonctions. Comme ceci a déjà été vu dans les cours précédents, nous ne donnons presque aucune preuve.

Définition 8.1: Soit $\sum u_n$ une série de nombres complexes. On dit que cette série :

1. *converge* si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. *diverge* si elle ne converge pas.
3. *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge.
4. *diverge grossièrement* si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Proposition 8.2: *Une série qui diverge grossièrement diverge.*

Démonstration. Par contraposition. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Si cette série est convergente alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$. On a alors, quand $n \to +\infty$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0.$$

□

Comme $\mathbb{C}$ est complet, le critère de convergence de Cauchy implique le

Théorème 8.3: *Une série absolument convergente est convergente.*

On aura besoin du résultat suivant concernant les séries géométriques.

Lemme 8.4: *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *Si $|\lambda| < 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n$ converge absolument et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}.$$

2. *Si $|\lambda| \geqslant 1$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n$ diverge grossièrement.*

Démonstration. Supposons $|\lambda| < 1$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k$. On a alors

$$S_n - \lambda S_n = 1 - \lambda^{n+1}.$$

On en déduit que $S_n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$. Comme par ailleurs $\lambda^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\lambda}$. Ce qui implique la première assertion. La deuxième assertion est immédiate puisque si $|\lambda| \geqslant 0$, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. □

Il existe différents critère pour démontrer que des séries numériques convergent. On a déjà le critère de comparaison.

Proposition 8.5: *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes* réels positifs. *Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n à partir d'un certain rang et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

Le critère de d'Alembert est souvent utile en pratique.

Proposition 8.6: *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to+\infty} \ell$$

1. *Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.*

On a aussi le critère de Cauchy

Proposition 8.7: *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\left(a_n\right)^{\frac{1}{n}} \to_{n\to+\infty} \ell$$

1. *Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.*

Pour multiplier des séries, on peut utiliser le produit de Cauchy.

Proposition 8.8: *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries de nombres complexes absolument convergentes. Alors la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente et l'on a de plus*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right).$$

Rappelons aussi le critère de convergence de Dirichlet, qui pourra être utilisé dans les exercices.

Théorème 8.9: *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs, telles que :*

1. *La suite des sommes partielle de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,*
2. *La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.*

Alors, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

Démonstration. C'est une conséquence de la transformation d'Abel : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \quad \text{(Transformation d'Abel)}$$

En effet

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = a_0 b_0 + A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= a_0 b_0 + A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).\end{aligned}$$

Puisque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par hypothèse et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on voit que la partie $(a_0b_0+A_nb_n-A_0b_1)$ converge vers $a_0(b_0-b_1)$. Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k-b_{k+1})$ converge, pour cela, nous allons montrer que cette série converge absolument, et il suffit pour cela de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})|$$

est majorée (puisque une série de termes positifs majorée converge). Notons $M \in \mathbb{R}$ un réel positif tel que $|A_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui existe par hypothèse. On a alors (en observant que $b_k \geqslant b_{k+1}$, par hypothèse, et donc que $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| &= \sum_{k=1}^{n-1} |A_k||(b_k - b_{k+1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M|b_k - b_{k+1}| = M\sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| \\ &= M\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = M\sum_{k=1}^{n-1} (b_1 - b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Mb_1.\end{aligned}$$

Cette série est donc majorée, donc convergente, d'où le résultat. □

On termine cette section de rappels en mentionnant la définition de série normalement convergente.

Définition 8.10: Soit E un ensemble et soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. Alors on note

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in E} |f(x)|.$$

Définition 8.11: Soit E un ensemble et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées $f_n : E \to \mathbb{C}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$$

converge.

L'intérêt de cette définition provient principalement du théorème suivant.

Théorème 8.12: *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément (rappelons que cela veut dire que la suite des sommes partielles converge uniformément).*

9 Exercices

9.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Déterminer le rayon des convergence des séries suivantes :

a. $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n$

b. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$

c. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n z^n$

d. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$

e. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$

f. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{(2n)!} z^n$

g. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$

h. $\sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{2^n}$

i. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$.

Exercice 2. Montrer que le rayon de convergences des séries entières ci-dessous est 1 puis prouver que :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$ ne converge en aucun point du cercle $S^1 = \{|z| = 1\}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en tout point du cercle S^1.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en tout point du cercle S^1 sauf au point $z = 1$.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^n$ ont pour rayon de convergence respectifs R_1 et R_2. Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

Exercice 4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum a_n z^{pn}$ a pour rayon de convergence $R^{\frac{1}{p}}$.

Exercice 5. Soit $R_1, R_2 > 0$. Donner un exemple de série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence R_1 et un exemple de série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence R_2 telles que la séries entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.

1. Est-il vrai que
$$\limsup_{n\to+\infty} u_n v_n = \left(\limsup_{n\to+\infty} u_n\right)\left(\limsup_{n\to+\infty} v_n\right)$$
2. On suppose que (u_n) converge vers une limite $\ell \neq 0$. Montrer que
$$\limsup_{n\to+\infty} u_n v_n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)\left(\limsup_{n\to+\infty} v_n\right).$$

Exercice 7.

1. Montrer que les fonctions cos est sin sont holomorphes et que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
3. A-t-on $|\sin z| \leqslant 1$ et $|\cos z| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?
4. Déterminer l'ensemble des solutions de $\cos z = 0$ et l'ensemble des solutions de $\sin z = 0$.

5. Determiner les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ où cos, sin, cosh et sinh prennent : (i) des valeurs réelles (ii) des valeurs imaginaires pures.

Exercice 8. Montrer que pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on a les relation suivantes

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \quad \text{et} \quad \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

Exercice 9. On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$. Montrer que si l'on note $z_n = \frac{1}{\pi n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(z_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Est-ce en contradiction avec le théorème de prolongement analytique ? Pourquoi ?

Exercice 10. On considère la série entière $\ell(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est 1.
2. Montrer que pour tout $z \in B(0,1)$, $\ell'(z) = \dfrac{1}{1+z}$.
3. En déduire que $\ell(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ pour tout $z \in B(0,1)$. (On admettra ici le résultat de l'exercice 26 du chapitre I).

Exercice 11. Montrer que les fonction f suivante sont analytiques sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ puis calculer leur série de Taylor en 0: $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$, $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^3}$.

Exercice 12. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

est analytique, puis pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ calculer le développement en série entière de f centré en z_0.

9.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 13. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. On note $\mathscr{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U. Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication de fonctions, $\mathscr{A}(U)$ est un anneau intègre. Que se passe-t-il si l'on retire l'hypothèse de connexité ?

Exercice 14. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Liouville pour les séries entières de rayon de convergence infini à l'aide des résultats sur les séries de Fourier (vu par exemple dans l'UE 503 : *Topologie et analyse hilbertienne*).

Théorème 9.1 (Liouville): *Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$. Si f est bornée alors f est constante.*

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On dénote, pour tout $z \in B(0,R)$, par $f(z)$ la somme de cette série. Pour tout $r \in]0,r[$ on considère la fonction $g : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $g_r(t) = f(re^{it})$. On considère aussi, pour tout $r \in]0,R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $g_{n,r} : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $g_{n,r}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n e^{int}$.

1. Montrer que pour tout $r \in]0,R[$, la suite $(g_{n,r})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_r.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $r \in]0,R[$, on a
$$r^n a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt.$$

3. En déduire, que pour tout $r \in]0,R[$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2 dt.$$

4. Montrer que si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_m \neq 0$, alors $\lim\limits_{r\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} = +\infty$.

5. Supposons que $R = +\infty$. Supposons de plus que f est bornée, c'est à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que f est constante.

6. Plus généralement, en supposant toujours que $R = +\infty$, montrer que si il existe des constante $A, B \in \mathbb{R}$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que
$$|f(z)| \leqslant A|z|^m + B \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
alors f est un polynôme de degré $\leqslant m$.

Exercice 15. Soit $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et telle que $a_0 \neq 0$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

1. On suppose que ceci est le cas et que $\dfrac{1}{f(z)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant le relation de récurrence précédente. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pout tout $n \geqslant 0$, on a
$$|b_n| \leqslant \frac{C^n}{|a_0|}.$$

3. En déduire que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière en 0.

Exercice 16. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $F' = f$. Montrer que F est analytique. En déduire que le logarithme principal Log est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ (on admettra ici le résultat de l'exercice 26 du chapitre I).

Exercice 17. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Un point $z_0 \in \partial B(0,R)$ est un *point régulier* de f si il existe une extension analytique de f dans un voisinage de $B(0,R)\cup\{z_0\}$. Si $z_0 \in \partial B(0,R)$ n'est pas régulier pour f, on dit que c'est un *point singulier* de f. On note $\mathrm{Sing}(f) \subset \partial B(0,R)$ l'ensemble des points singuliers de f.

1. Considère la série entière $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ (de rayon de convergence 1).

   (a) Montrer que $\mathrm{Sing}(f) = \{1\}$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ne converge en aucun point du bord du disque de convergence.

2. Considère la série entière $f(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$ (de rayon de convergence 1).

   (a) Montrer que $\mathrm{Sing}(f) = \{1\}$. (On pourra utiliser la détermination principale du logarithme).

   (b) Montrer que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n-1)}$ converge en tout point du bord du disque de convergence.

3. Y-a-t'il un lien entre la régularité d'un point $z_0 \in \partial B(0,R)$ et la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$?

4. Montrer que $\mathrm{Sing}(f)$ est fermé.

5. On considère $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

   (a) Montrer que le rayon de convergence de f est 1.

   (b) Montrer que 1 est un point singulier de f. (Indication, montrer que $\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2^n} = +\infty$).

   (c) Plus généralement, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, toute racine 2^m-ième de 1 est un point singulier de f. (Indication, observer que si z_0 est une racine 2^m-ème de l'unité, alors pour tout $t \in]0,1[$ on a $f(tz_0) = \sum_{n=0}^{m-1} (tz_0)^{2^n} + \sum_{n=m}^{+\infty} t^{2^n}$ et utiliser l'argument de la question précédente).

   (d) En déduire que $\mathrm{Sing}(f) = \partial B(0,1)$.