Analyse complexe 2023-2024
trame de cours

Damien Mégy

6 avril 2024

Table des matières

Chapitre 1

Holomorphie

Chapitre 2

Fonctions analytiques

Définition 2.0.1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathbb{C}^U$. On dit que f est analytique sur U si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de U.

Proposition : une série entière de rayon R est analytique sur $\mathbb{D}(0,R)$. Preuve : DSE en $z_0 \neq 0$ avec le binôme de Newton.

Définition : un zéro d'une fonction f est un élément α tq $f(\alpha) = 0$.

Une série entière identiquement nulle sur un voisinage de l'origine est identiquement nulle sur son disque ouvert de convergence. Ceci est une conséquence du fait que les coefficients a_n se récupèrent avec les dérivées successives en l'origine.

Le théorème des zéros isolés est une version un peu plus puissante de ce résultat.

Théorème 2.0.2 (Zéros isolés pour les séries entières)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon strictement positif et f sa somme. S'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers zéro et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = 0$, alors tous les a_n sont nuls.

Définitions : point accumulation d'une partie, point isolé. Partie discrète.

Reformulation du théorème des zéros isolés : si 0 est un zéro non isolé de f, alors f est identiquement nulle.

Théorème 2.0.3. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ analytique et $Z := f^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des zéros de f. Si Z admet un point d'accumulation dans U, alors f est constante.

Preuve 1 : on utilise l'ensemble A des points au voisinage desquels f est identiquement nulle.

Preuve 2 : on utilise l'ensemble B des points où toutes les dérivées de f s'annulent.

Chapitre 3

Intégration curviligne

3.1 Chemins

Définitions : chemins, lacets, chemin opposé, concaténation de chemins. Chemins $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

3.2 Formes différentielles

Formes différentielles réelles et complexes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.
Cas particulier : formes holomorphes.

3.3 Intégrales curvilignes

Définition pour une forme différentielle.
Invariance par reparamétrage, classe d'équivalence, arcs orientés.
Majoration du module par la norme infinie et la longueur d'arc.

3.4 Intégration sur le bord d'un compact régulier

Rappel : bord d'une partie.

Définition 3.4.1. Compact à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Orientation canonique du bord bien définie.
Exemples à faire soi-même : nombre fini de trous. L'angle à un point anguleux ne peut être nul.
Remarque : il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux sur le bord. Le bord est paramétrable par un nombre fini d'arcs $\mathscr{C}^1$.

Définition 3.4.2. Intégration d'une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur le bord d'un compact à bord C^1 par morceaux.

3.5 Primitives

Attention aux différentes significations du mot « primitive ».

Définition 3.5.1 (Primitive (holomorphe))**.** On dit que $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admet une primitive (holomorphe,) ou simplement une primitive, s'il existe $F \in \mathscr{O}(U)$ telle que $F' = f$.

Attention, certaines fonctions holomorphes n'ont pas de primitive, contrairement à ce qui se passe en analyse réelle où toute fonction continue admet une primitive. Par exemple la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Le fait d'avoir une primitive dépend de façon cruciale de l'ouvert de définition. Par exemple la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ possède une primitive, à savoir la détermination principale du log, notée Log dans ce cours (ou Log_0, aussi).

Proposition 3.5.2. Si f admet une primitive holomorphe, l'intégrale curviligne $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités du chemin.

Dans ce qui suit, le mot « primitive » a encore un nouveau sens, il s'applique cette fois à des formes différentielles et plus à des fonctions.

Vocabulaire : si ω est une 1-forme exacte, c'est-à-dire qu'il existe f telle que $\omega = df$, alors on dit aussi qu'elle admet une primitive. (La primitive est la fonction f.)

Attention dans ce nouveau contexte, la primitive de la forme différentielle n'est pas forcément une fonction holomorphe, c'est juste une fonction C^1.

Proposition 3.5.3. Soit ω une 1-forme différentielle. Si ω admet une primitive, l'intégrale curvligne $\int_\gamma \omega$ ne dépend que des extrémités du chemin γ.

Remarque 3.5.4.

3.5.1 Convergence

Laissé en exercice :

intégration sur un chemin fixé d'une suite de fonctions qui CVU (ou CVUTC).

Cas plus général : que faire si on n'a pas CVUTC ? dans certaines conditions, écrire explicitement le paramétrage et convergence dominée.

intégration d'une forme donnée sur une suite de chemins qui converge en topologie C^1 vers un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Chapitre 4

Théorème et formule de Cauchy

4.1 Théorème intégral de Cauchy

énoncé. Historique.
Plan de la preuve :

1. Lemme de Goursat
2. Triangulation (et calcul des intégrales curvilignes par sommes de Riemann / approximation d'un chemin par un chemin polygonal). Encapsulation du lemme technique ?
3. Fin de la preuve

4.2 Formule de Cauchy

Formule de Cauchy
Cas particulier avec des cercles.

Théorème 4.2.1. Les fonctions holomorphes sont analytiques. De plus, si $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$, le rayon de convergence du DSE de f en z_0 a un rayon supérieur ou égal à $\mathrm{dist}(z_0, U^c)$.

Conséquence :

1. Les fonctions holomorphes sont $\mathbb{C}^\infty$.
2. Tous les théorèmes vrais pour les fonctions analytiques sont vrais pour les fonctions holomorphes : zéros isolés, prolongement analytique etc.

Dans le cas particulier de cercles centrés, la formule de Cauchy se spécialise en la formule suivante, appelée formule de la moyenne :

Théorème 4.2.2 (Formule de la moyenne)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$. Pour tout $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}(z_0, r} \subseteq U$, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

(Interprétation : la valeur de f en z_0 est la moyenne de ses valeurs sur un cercle centré en z_0. Preuve : c'est juste la formule de Cauchy. Erreur de compréhension possible : la formule ne dit PAS que $f(z_0) = \int_{\mathscr{C}(z_0,r} f(z)dz$.)

4.3 Formules de Cauchy d'ordre supérieur

Théorème 4.3.1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soit $K \subseteq U$ un compact à bords C^1 par morceaux et $z \in K^\circ$. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Remarque : pour $n = 0$, c'est la formule de Cauchy classique.

Cas particulier des cercles centrés : on récupère les formules intégrales pour les coefficients des séries entières.

En prenant les formules de Cauchy et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient ce qu'on appelle les inégalités de Cauchy. Dans le cas particulier de cercles centrés, on obtient les formules suivantes très souvent utiles :

Corollaire 4.3.2 (Inégalités de Cauchy pour cercles centrés)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\overline{\mathbb{D}(z,r)}$ un disque fermé inclus dans U. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{1}{r^n} \max_{w \in \mathscr{C}(z,r)} |f(w)|$$

On étudie maintenant les propriétés locales des fonctions holomorphes. On commence par une conséquence directe de la formule de la moyenne : une fonction holomorphe admettant un maximum local (en module) en un point est localement constante au voisinage de ce point.

Théorème 4.3.3 (Principe du maximum)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0, alors f est constante sur la composante connexe de de U contenant z_0.

Variations, voir feuilles de TD :

1. Sur un compact $K \subset U$, le module atteint son max au bord de K.
2. Principe dit « du minimum ».

Théorème 4.3.4 (de Liouville)**.** Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Si f est bornée, alors f est constante.

Avertissement : il est important que la fonction soit holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Si vous voulez appliquer Liouville, vous l'appliquez à une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et bornée), rien d'autre. Si vous avez une fonction définie sur un ouvert plus petit que $\mathbb{C}$ et que vous souhaitez montrer qu'elle est constante, alors soit vous montrez préalablement qu'elle peut s'étendre en fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (ça n'est pas forcément le cas) et vous appliquez Liouville classique, soit vous faites autrement.

Corollaire 4.3.5 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.**

4.4 Étude locale

Théorème 4.4.1 (Inversion locale)**.** Soit $u \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$ un point tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert V contenant z_0 tel que $W := f(V)$ soit ouvert et que $f|_V$ soit un biholomorphisme de V sur W.

Multiplicité d'un zéro, Point critique, multiplicité d'un point critique

Étude aux points critiques : énoncé, pas démontré.

Théorème 4.4.2. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante. Alors, f est ouverte. (Autrement dit l'image de tout ouvert est ouverte.)

Preuve de l'étude au point critique : détermination de racines n-èmes et de logarithmes complexes, puis preuve.

Preuve de l'application ouverte.

Application : deuxième preuve du principe du maximum : si $z_0 \in U$ et que f n'est pas localement constante au voisinage de z_0, alors $f(U)$ contient un voisinage de $f(z_0)$ et donc $|f|$ n'atteint pas son maximum en z_0.

Théorème 4.4.3 (Lemme de Schwarz)**.**

Attention à la preuve, il se produit quelque chose d'assez surprenant dans la majoration : en majorant sur un ensemble plus grand, on arrive à obtenir un majorant plus petit. Ceci est un effet du principe du maximum et n'est absolument pas intuitif.

Théorème 4.4.4 (Biholomorphismes du disque)**.**

Remarque de terminologie : comme dans toute discipline mathématique, si le contexte est clair, on utilise les mots « morphisme », « isomorphisme », « automorphisme » dans leur signification « locale ». Par exemple, on a des isomorphismes d'anneaux, de groupes, d'espaces vectoriels etc, avec le même mot qui recouvre à chaque fois un sens différent.

En analyse complexe, on voit donc souvent « automorphismes du disque » au lieu de « biholomorphismes du disque ».

Dans le cadre de ce cours, il est néanmoins conseillé d'utiliser « biholomorphisme ».

Intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre.

TD : fonction Gamma d'Euler

4.5 Primitives, théorème de Morera (non traité ?)

Théorème 4.5.1 (Morera)**.** Soit Ω un ouvert et $f \in C^0(\Omega)$. Si $f(z)dz$ a une intégrale nulle sur tout bord de triangle de Ω, alors f est holomorphe.

Preuve : on prend un point, un disque autour et on construit une ptimitive locale holomorphe sur ce disque, qui est étoilé en z_0.

Attention ne pas dériver en z_0 mais en z dans le disque.

Remarque : version un peu plus générale : si f est continue et d'intégrale curviligne nule sur tout triangle sur un ouvert étoilé, elle a une primitive sur cet ouvert étoilé et doc est holomorphe sur cet ouverte étoilé.

A rapprocher des énoncés : si sur un ouvert connexe l'intégrale ets nulle sur tout lacet, on a une primitive.

4.6 Topologie des espaces de fonctions holomorphes

Non, sauter entièrement, tant pis.

4.7 Séries de Laurent, singularités, résidus

Anneau des séries formelles

Séries de Laurent, couronne de convergence, convergence normale sur sous-couronne fermée de la couronne ouverte de convergence.

Dérivée d'une série de Laurent.

4.8 Discussion sur d'autres stratégies de preuve

Chapitre 5

Zéros, singularités, fonctions méromorphes et résidus