

## TD 5 : Intégration curviligne

**Exercice 1.** Soient  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t(1 + i)$ ,  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t + it^2$ ,  $\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto it$  et  $\gamma_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto i + t$ . Calculer  $\int_{\gamma} z dz$  et  $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ , où  $\gamma$  désigne successivement les chemins  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3 \vee \gamma_4$ .

**Exercice 2.** Montrer que l'arc de parabole  $y = x^2$  compris entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = 1$  a pour longueur  $L = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4} = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{argsh}(2)}{4}$ . (Faire une intégration par parties.)

*Remarque culturelle : si l'on cherche à calculer les longueurs d'arcs d'ellipses, d'hyperboles ou de sinusoides, les calculs font apparaître des primitives ne pouvant s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles : les « fonctions elliptiques de première et deuxième espèce »*

**Exercice 3.** Soit  $r > 0$  et  $\gamma_r$  le lacet  $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , calculer  $\int_{\gamma_r} z^n dz$ .

**Exercice 4.** Soit  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ . Calculer  $\int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$ . En déduire les valeurs des intégrales de Wallis  $W_{2n} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$ .

**Exercice 5.** Soit  $r > 0$  et  $\gamma_r$  le lacet  $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ .

1. Soit  $a \in \mathbb{C}$  de module  $\neq r$ . Calculer  $\int_{\gamma_r} (z - a)^n dz$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , puis  $n = -1$ , puis  $n \in \mathbb{Z}$  quelconque.
2. Si  $r$  est différent de 2 et 3, calculer  $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2 + z - 6}$ .
3. Plus généralement, si  $Q$  est une fraction rationnelle, calculer  $\int_{\gamma_r} Q(z) dz$  pour tout  $r > 0$  pour lequel cette intégrale est définie.

★ ★ ★ Limites d'intégrales curvilignes ★ ★ ★

**Exercice 6.** Soit  $r > 1$ ,  $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$  le paramétrage standard du demi-cercle supérieur de rayon  $r$ , et  $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2 + 1}$ . Montrer que  $I(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ . Généraliser à  $\int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$  où  $P, Q \in \mathbb{C}[z]$  et  $\deg Q \geq \deg P + 2$ .

**Exercice 7.** Étudier la limite lorsque  $r \rightarrow +\infty$  de  $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{e^z}{z^2} dz$ , où  $\gamma_r : [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ .

Même question si  $\gamma_r$  est cette fois le chemin  $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ .

**Exercice 8.** Soit  $f \in C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  avec  $f(0) \neq 0$ . Pour  $r > 0$ , on note  $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ . Calculer la limite, lorsque  $r > 0$  tend vers zéro, de  $I(r) := \int_{\gamma_r} f(z) dz$  et de  $J(r) := \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz$ . Pour  $0 < a < b < 2\pi$ , en notant  $\gamma_{r,a,b} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ , calculer la limite, lorsque  $r > 0$  tend vers zéro, de  $I(r, a, b) := \int_{\gamma_{r,a,b}} f(z) dz$  et de  $J(r, a, b) := \int_{\gamma_{r,a,b}} \frac{f(z)}{z} dz$ .

**Exercice 9.** Soit  $T > 0$  et  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t + i \sin(t)$  le paramétrage de l'arc de sinussoïde entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = T$ . Calculer  $\int_{\gamma} z^2 dz$ .

**Exercice 10.** Retrouver les résultats des exercices 3 et 5 à l'aide de primitives. Pour le cas  $n = -1$ , utiliser la détermination principale du logarithme  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  et trouver une manière de gérer la « coupure ».

**Exercice 11.** Soit  $\text{Log}$  la détermination principale du logarithme et  $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ . Calculer  $\int_{\gamma} \text{Log}(z) dz$ .

**Exercice 12.** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert. Soit  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  des fonctions holomorphes. Soit  $z_0, z_1 \in U$  et soit  $\gamma$  un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux dans  $U$  allant de  $z_0$  à  $z_1$ . Montrer que l'on a l'analogue suivant de la formule d'intégration par partie :

$$\int_{\gamma} f(z) g'(z) dz = f(z_1) g(z_1) - f(z_0) g(z_0) - \int_{\gamma} f'(z) g(z) dz.$$

**Exercice 13.** Soit  $\gamma$  un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux de  $\mathbb{C}$  allant de 0 à  $i$ . Calculer  $\int_{\gamma} f(z) dz$  avec :

1.  $f(z) = z^2 \sin z$

2.  $f(z) = ze^{iz}$ .

Soit  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  une 1-forme différentielle de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , et  $K$  un compact de  $U$  dont le bord  $\partial K$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et muni de son orientation canonique. La *formule de Green-Riemann* est l'énoncé suivant :

$$\int_{\partial K} \omega = \int \int_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

C'est une généralisation en dimension 2 du théorème fondamental de l'analyse  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ .

La version  $n$ -dimensionnelle s'appelle la *formule de Stokes* et s'écrit  $\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega$ .

**Exercice 14.** Démontrer la formule de Green lorsque  $K$  est un rectangle  $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ , puis lorsque  $K$  est un domaine de la forme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq h(x)\}$ , où  $h \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ .

Dans la suite, on admet la formule de Green-Riemann, qui peut être prouvée en recouvrant le compact par des rectangles et en adaptant (avec du travail!) l'exercice précédent.

**Exercice 15.** Soit  $\omega = (x^5 + 3y)dx + (2x - e^{y^3})dy$  et  $K$  le disque unité fermé. Calculer  $\int_{\partial K} \omega$ . (Remarque : on pourrait paramétrer, écrire l'intégrale curviligne et même la calculer, avec beaucoup de courage.)

**Exercice 16.** 1. Pour tout  $r > 0$ , montrer que  $\int_{\partial B(0, r)} \bar{z} dz = 2i \text{Aire}(B(0, r))$ .

2. Soit  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  des points non-alignés. On note  $\Delta$  le triangle de sommets  $z_1, z_2, z_3$ . Montrer que

$$\int_{\partial \Delta} \bar{z} dz = 2i \text{Aire}(\Delta).$$

3. Soit  $K$  un compact à bord  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer que

$$\int_{\partial K} \bar{z} dz = 2i \text{Aire}(K).$$

**Exercice 17.** [Le théorème de Cauchy avec l'hypothèse  $\mathcal{C}^1$ ] Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert,  $K \subset U$  un compact à bords  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$ . Écrire  $\int_{\partial K} f(z) dz$  à l'aide de la formule de Green-Riemann et des opérateurs de Wirtinger. Si  $f$  est de plus holomorphe, montrer le *théorème intégral de Cauchy* :

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0$$