L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre VI:
Séries de Laurent, singularités isolées, et fonctions méromorphes

---

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Développement en série de Laurent

Nous avons vu que si l'on a une fonction holomorphe f définie sur une boule $B(z_0, r)$ alors on peut l'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à r.

Dans cette section nous allons étudier comment donner une description similaire pour une fonction holomorphe sur une couronne, c'est à dire un ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |z - a| < r_2\}$. Par exemple la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ définie sur la couronne $\mathbb{C}^*$ (avec $r_1 = 0$ et $r_2 = +\infty$), s'écrit

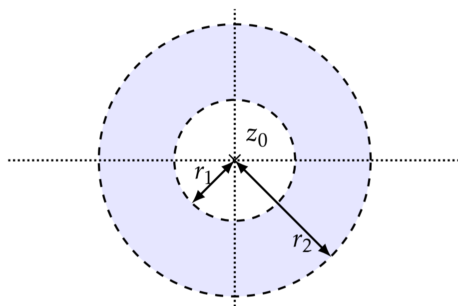
$$f(z) = \frac{1}{z} = z^{-1}.$$

C'est à dire que bien que la fonction f ne soit pas développable en série entière en 0 (simplement car elle n'est pas définie en 0), elle admet une expression particulièrement simple si l'on s'autorise à regarder des puissances *négatives* et pas seulement des puissances positives ou nulles.

Introduisons déjà une notation. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que $r_1 < r_2$, on note

$$A_{z_0}(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

la couronne centrée en z_0 comprise entre les cercles de rayons r_1 et r_2.



Pour étudier les fonctions holomorphes sur de telles couronnes nous introduisons la notion de série de Laurent.

Définition 1.1: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Une série de Laurent centrée en z_0 est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On dit que cette série converge en un point $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ et la série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ sont toutes deux convergentes. La série (entière) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est appelée *la partie régulière* et la série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ est appelée *partie principale* ou *partie polaire* .

Proposition 1.2: *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ une série de Laurent centrée en z_0. Notons r_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ et $\frac{1}{r_1}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$. Alors :*

1. *La série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolument en tout point de $B(z_0, r_2)$, et de plus cette série de fonctions converge normalement sur tout compact de $B(z_0, r_2)$.*
2. *La série de fonction $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ converge absolument en tout point de $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r_1)$, et de plus cette série de fonctions converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r_1)$.*

En particulier, la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge pour tout $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$. De plus, cette série de Laurent définie une fonction holomorphe sur $A_{z_0}(r_1, r_2)$.

Démonstration. Le premier point est juste une conséquence de la définition du rayon de convergence et du lemme d'Abel. Pour le second point on considère la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Cette fonction vérifie $g(\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r_1)) = B(0, r_1)$. Par définition de rayon de convergence, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$ converge absolument en tout point de $w \in B(0, r_1)$, en particulier, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r_1)$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} g(z)^n$ converge absolument. De plus, par le même argument, pour tout compact $K \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r_1)$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} g(z)^n$ converge normalement sur K, car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$ converge normalement sur le compact $g(K)$. Le reste de l'assertion s'en déduit en utilisant le théorème de convergence de Weierstrass.

□

Remarque 1.3: Observons que grace à la convergence normale, au résultat de passage à la limite sous l'intégrale et au théorème de convergence de Weirestrass, on peut dériver les série de Laurent terme à terme, et on peut échanger les signes $\sum$ et $\int$ lorsque l'on intègre le long d'un chemin de $A_{z_0}(r_1, r_2)$.

Réciproquement, une fonction holomorphe sur une couronne admet un développement en série de Laurent sur cette couronne.

Théorème 1.4: *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que $r_1 < r_2$. Soit $f : A_{z_0}(r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le nombre*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

est indépendant du choix de $r \in]r_1, r_2[$. De plus la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ a rayon de convergence plus grand que r_2, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$ a rayon de convergence plus grand que r_1^{-1} et pour tout $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Démonstration. Le fait que a_n soit indépendant du choix de r est une conséquence du théorème de Cauchy homologique (ou homotopique). Soit $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$. Soit $\rho_1, \rho_2 \in]r_1, r_2[$ telle que $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$. Notons γ_1, γ_2 les lacets définis par $\gamma_1(t) = z_0 + \rho_1 e^{it}$ et $\gamma_2(t) = z_0 + \rho_2 e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Le cycle $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ est homologiquement trivial dans $A_{z_0}(r_1, r_2)$, et $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 1$. Donc la formule de Cauchy homologique implique que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Notons

$$f_2(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{et} \quad f_1(z) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Étudions déjà $f_2(z)$. Observons que $|z - z_0| < |w - z_0|$ pour tout $w \in C(z_0, \rho_2)$, donc on obtient

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z_0 + z_0 - z} dw \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)(1 + \frac{z_0 - z}{w - z_0})} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n
\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$, la définition du rayon de convergence implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est plus grand que r_2.

Étudions maintenant $f_1(z)$. Comme $|z - z_0| > |w - z_0|$ pour tout $w \in C(z_0, \rho_1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z_0 + z_0 - z} dw \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z_0 - z)(\frac{w - z_0}{z_0 - z} + 1)} dw = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(z_0 - z)} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} dw \\
&= \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(z_0 - z)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} f(w)(w - z_0)^n dw \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n-1} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n
\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$, la définition du rayon de convergence implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{-n} w^n$ est plus grand que r_1^{-1}. De plus, nous avons bien

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

□

Exemple 1.5: Soit $f : \mathbb{C}^* = A_0(0, +\infty) \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$. Le développement en série de Laurent de f est

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots.$$

2 Singularités isolées

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que z_0 est une singularité isolée de f si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$.

Ceci veut dire que f est définie (et holomorphe) dans un voisinage épointé de z_0.

Exemple 2.2: Les fonctions $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto \frac{\cos z}{z}$ et $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$, ont toute une singularité isolée en 0 car elles sont holomorphes sur $\mathbb{C}^*$.

Exemple 2.3: La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ a un singularité isolée en i et une singularité isolée en $-i$.

Exemple 2.4: Le point -1 n'est pas une singularité isolée de la détermination principale du logarithme $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$.

Proposition 2.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Notons Z l'ensemble des singularités isolées de f. Alors $U' := U \cup Z$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et Z est un sous ensemble fermé et discret de U'.*

Démonstration. Montrons que l'ensemble U' est un ouvert. Si $z_0 \in U$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \subset U \subset U'$ puisque U est ouvert. Si $z_0 \in U' \setminus U = Z$, il existe par définition $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$ et donc que $B(z_0, \varepsilon) \subset U'$. L'ensemble Z est fermé car $U' \setminus Z = U$ est un ouvert. Le fait que Z est discret est une conséquence immédiate de la définition de singularité isolée. □

2.2 Classification

À l'aide du développement en série de Laurent on peut classifier les singularité isolées en trois types.

Définition 2.6: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$. On considère le développement en série de Laurent de f sur la couronne $A_{z_0}(0, \varepsilon) = B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n \leqslant -1} a_n z^n + \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n.$$

1. Si la partie polaire est nulle (i.e. $a_n = 0$ pour tout $n \leqslant -1$), on dit que z_0 *est une singularité éliminable de* f.
2. Si la partie polaire est non-nulle mais contient un nombre fini de termes (i.e. il existe $n_0 \leqslant -1$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ mais $a_n = 0$ pour tout $n < n_0$), on dit que z_0 *est un pôle de* f.
3. Si la partie polaire contient une infinité de termes non-nuls, on dit que z_0 *est une singularité essentielle de* f.

Exemple 2.7: Considérons la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Le point 0 est une singularité isolée de f. Néanmoins, nous savons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

En particulier, le développement en série de Laurent de f et 0 et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n},$$

et donc 0 est une singularité éliminable.

Exemple 2.8: La fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}$ a une singularité isolée en 0. C'est un pôle car, le développement en série de Laurent en 0 est

$$\frac{1}{z} = z^{-1}.$$

Exemple 2.9: Considérons la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\cos z}{z}$. Le point 0 est une singularité isolée de f. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

En particulier, le développement en série de Laurent de f et 0 et

$$\frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \cdots$$

et donc 0 est un pôle de f.

Exemple 2.10: Considérons la fonction $f : \mathbb{C}^* \to 0$ définie par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Le point 0 est une singularité isolée de f. De plus pour tout $w \in \mathbb{C}$ on a

$$e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Le point 0 est donc une singularité essentielle de f.

Les propriétés suivantes donnent des caractérisations équivalentes, de nature plus géométrique, pour caractériser les différents types de singularités.

Proposition 2.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *z_0 est une singularité éliminable de f.*
2. *f s'étend en une fonction holomorphe sur $U \cup \{z_0\}$.*
3. *f est bornée dans un voisinage de z_0.*

Démonstration. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$. Si z_0 est une singularité éliminable, alors le développement en série de Laurent de f en z_0 est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, c'est à dire une série entière de rayon de convergence > 0. Comme les séries entières sont holomorphes sur leur disque de convergence, on peut étendre f de façon holomorphe en z_0 en posant $f(z_0) := a_0$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$. Si f s'étend en une fonction holomorphe $\hat{f}$ en z_0, alors le développement série de Laurent de f en z_0 coincide avec le developpement en série de Taylor de $\hat{f}$ en z_0 et donc z_0 est une singularité éliminable.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ est évident et $\boxed{3 \Rightarrow 2}$ est une conséquence du théorème d'extension de Riemann. □

Proposition 2.12: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *z_0 est un pôle de f.*
2. *$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.*
3. *Il existe $m \in \mathbb{N}$ telle que la fonction $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ est bornée dans un voisinage de z_0 mais $f(z)$ n'est pas borné dans un voisinage de z_0.*

Démonstration. $\boxed{1 \Rightarrow 3}$. Si z_0 est un pôle de f, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que le développement en série de Laurent de f en z_0 est de la forme

$$\sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

C'est à dire qu'il existe un voisinage V de z_0 tel que pour tout $z \in V \setminus \{z_0\}$, on a

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

En particulier, la fonction $g : z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ vérifie

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\},$$

donc g s'étend en une fonction holomorphe en z_0, qui est donc en particulier bornée dans voisinage de z_0. D'autre part f n'est pas bornée dans un voisinage de z_0 car sinon z_0 serait une singularité éliminable.
$\boxed{3 \Rightarrow 1}$. Si la fonction $g : z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ est bornée dans un voisinage de z_0, alors elle s'étend en une fonction holomorphe $\hat{g}$ en z_0. En notant considérant le développement en série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$ de $\hat{g}$ en z_0, on trouve que pour tout z dans un voisinage V de z_0, on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{et donc} \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=-m}^{+\infty} b_{n+m} (z - z_0)^n,$$

et donc z_0 est soit une singularité éliminable de f (si $b_j = 0$ pour tout $j < m$) soit un pôle de f. Comme $f(z)$ n'est pas bornée dans un voisinage de z_0, on sait que z_0 n'est pas une singularité éliminable, c'est donc un pôle.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ est évident. Montrons que $\boxed{2 \Rightarrow 3}$. Par définition de singularité isolé et puisque $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset U$ et tel que f ne s'annule jamais sur $V := B(0, r) \setminus \{z_0\}$. En particulier, la fonction $g = \frac{1}{f}$ est holomorphe sur V. De plus $\lim\limits_{z\to z_0} |g(z)| = 0$, donc d'après le théorème d'extension de Riemann g s'étend en une fonction holomorphe sur $B(z_0, r)$. Le developpement en série de Taylor de (l'extension) de g en 0 est de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \text{où} \quad m = \min\{m \in \mathbb{N}\,;\, b_m \neq 0\}.$$

Donc $g(z) = (z - z_0)h(z)$ pour tout $z \in B(z_0, r)$ où $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+m}(z - z_0)^n$ définit une fonction holomorphe sur $B(z_0, r)$ qui ne s'annule pas sur $B(z_0, r)$. Donc la fonction

$$z \mapsto (z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{h(z)}$$

est bien bornée dans un voisinage de z_0. De plus, l'hypothèse implique directement que f n'est pas bornée dans un voisinage de z_0. □

Théorème 2.13 (Casorati-Weierstrass): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Alors z_0 est une singularité essentielle de f si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset U$, l'image*

$$f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big)$$

est dense dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Si pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, l'image $f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big)$ est dense dans $\mathbb{C}$, il est clair que f n'est pas bornée dans un voisinage de z_0 et que $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| \neq +\infty$, en particulier, z_0 n'est ni une singularité éliminable ni un pôle. Donc z_0 est une singularité essentielle.

Montrons maintenant la réciproque. Par contraposition, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big)$$

ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $w_0 \in \mathbb{C}$ et $\delta > 0$ tels que $f\Big(B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}\Big) \cap \overline{B}(w_0, \delta) = \varnothing$. Le fonction

$$g : z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$

est donc holomorphe sur $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ et g est majorée par ε^{-1}. Par extension de Riemann, la fonction g se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(z_0, \varepsilon)$, de plus pour tout $z \in B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \varepsilon + \frac{1}{g(z)}.$$

Donc z_0 est une singularité éliminable si $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0$ et z_0 est un pôle si $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. En particulier, z_0 n'est pas une singularité essentielle. □

3 Fonctions méromorphes

3.1 Fonctions méromorphes

Définition 3.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une *fonction méromorphe sur U* est une fonction holomorphe $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ telle que :

1. Z est un ensemble fermé et discret de U,
2. Chaque point $z \in Z$ est un pôle ou une singularité éliminable de f.

On note $\mathscr{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U.

Remarque 3.2:

1. En particulier, les fonctions holomorphes sont méromorphes (avec $Z = \varnothing$).
2. Par définition, une fonction méromorphe est une fonction holomorphe en dehors d'un certain ensemble. Mais cet ensemble dépend de la fonction méromorphe. C'est à dire que si f et g sont toutes deux méromorphes, les fonctions holomorphes associées n'ont pas nécessairement le même ensemble de définition.

Exemple 3.3:

1. La fonction
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$
est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Avec les notations de la définition, on a $Z = \{1, 2\}$.
2. La fonction
$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)(z^2-1)}$$
est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Avec les notations de la définition, on a $Z = \{1, -1, i, -i\}$.
3. La fonction
$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$
n'est pas méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f, g \in \mathscr{M}(U)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, $f + \lambda g$ et fg sont des fonctions méromorphes sur U.*

Démonstration. Le premier point est facile à voir, il suffit de faire la somme des développement de série de Laurent en chaque point. Pour voir le second point, on peut utiliser la caractérisation 3 de la proposition 2.12.

□

Proposition 3.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Alors la fonction f' est aussi une fonction méromorphe sur U.*

Ici, avec les notations de la définition par f', nous entendons la fonction holomorphe f' définie sur $U \setminus Z$.

Démonstration. Avec les notations de la définition. La fonction f' est holomorphe sur $U \setminus Z$. Il suffit donc de démontrer que tout point de $z_0 \in Z$ est un pôle de f'. En notant

$$\sum_{n \geqslant -m} a_n (z - z_0)^n$$

le développement en série de Laurent de la fonction f au point z_0, par dérivation sous le signe $\sum$ (autorisé par convergence normale de la série de Laurent sur les compacts de la couronne où la série converge), on en déduit que le développement en série de Laurent de f' en 0 est

$$\sum_{n \geqslant -m} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n \geqslant -m-1} (n+1) n a_{n+1} (z - z_0)^n.$$

Donc z_0 est un pôle de f'. □

3.2 Ordre de zéros et de pôles

Nous introduisons aussi un peu de terminologie concernant les zéros et les pôles.

Définition 3.6: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ tel que f est holomorphe en z_0. Soit $m \in \mathbb{N}$. On dit que z_0 est *un zéro d'ordre m*, ou *un zéro de multiplicité m* si il existe une fonction méromorphe $g \in \mathscr{M}(U)$, holomorphe en z_0, telle que $g(z_0) \neq 0$ et vérifiant

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in U.$$

On dit que m est *l'ordre* du zéro z_0 de f.

Remarque 3.7: Avec cette définition, si f n'est pas identiquement nulle, alors f s'annule en z_0 si et seulement si z_0 est un zéro d'ordre m pour un certain $m \geqslant 1$.

Remarque 3.8: De façon plus générale, avec les mêmes notations, si $f(z_0) = w \in \mathbb{C}$, on dira que f *prend la valeur w avec multiplicité m* si z_0 est un zéro de multiplicité m de la fonction $z \mapsto f(z) - w$.

On peut caractériser l'ordre d'un zéro de la façon suivante.

Proposition 3.9: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$. Soit $m \geqslant 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *z_0 est un zéro d'ordre m de f.*
2. *Le développement en série de Taylor de f en z_0 est de la forme $f(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n (z - z_0)^n$ où $a_m \neq 0$.*
3. *$f^{(k)}(z_0) = 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant m - 1$ et $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.*

De façon analogue on peut définir l'ordre d'un pôle.

Définition 3.10: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ un pôle de f. L'ordre du pôle z_0 est l'entier $m \geqslant 1$ défini comme étant le plus petit entier tel que la fonction

$$z \mapsto (z-z_0)^m f(z)$$

soit bornée dans un voisinage de z_0. On dit alors que z_0 est un pôle d'ordre m de f.

On a les caractérisations équivalentes suivantes pour l'ordre d'un pôle.

Proposition 3.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$ un pôle de f. Soit $m \geqslant 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *z_0 est un pôle d'ordre m de f.*
2. *Le développement de série de Laurent de f au point z_0 est de la forme $f(z) = \sum_{n \geqslant -m} a_n z^n$ où $a_{-m} \neq 0$.*
3. *Il existe une fonction holomorphe $h : U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ telle que $h(z_0) \neq 0$ et telle que*
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} \quad \forall z \in U.$$
4. *z_0 est un zéro d'ordre m de la fonction $\frac{1}{f}$.*

Pour traiter simultanément la notion de zéros et de pôles, on peut utiliser la notion d'ordre suivante.

Définition 3.12: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $z_0 \in U$. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U qui n'est pas identiquement nulle. L'ordre de f en z_0 est l'entier

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) := \min\{n \in \mathbb{Z} \, ; \, a_n \neq 0\},$$

où

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

est le développement en série de Laurent de f centré en z_0.

Observons que l'on a

- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = 0$ si et seulement si f est holomorphe en z_0 et que $f(z_0) \neq 0$.
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m > 0$ si et seulement si f est holomorphe en z_0 et que z_0 est un zéro d'ordre m de f.
- $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = -m < 0$ si et seulement si z_0 est un pôle d'ordre m en f.

En particulier, en vu des résultats précédents, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m$ si et seulement si il existe une fonction méromorphe $g \in \mathscr{M}(U)$ qui est holomorphe en z_0, ne s'annule pas en z_0 et qui vérifie

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z).$$

À partir de cette observation, la preuve de la proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.13: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f, g \in \mathscr{M}(U)$ des fonctions méromorphes sur U pas identiquement nulles. Alors pour tout $z_0 \in U$,*

$$\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(g).$$

Nous avons aussi la proposition suivante.

Proposition 3.14: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f, g \in \mathscr{M}(U)$ des fonctions méromorphes pas identiquement nulle. Alors $\frac{f}{g}$ est une fonction méromorphe sur U et de plus, pour tout $z_0 \in U$, on a*

$$\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) - \mathrm{ord}_{z_0}(g).$$

Remarque 3.15:

1. En particulier, si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe U, alors $\frac{1}{f}$ est une fonction méromorphe sur U

2. En vu de la proposition 3.4, on voit que si U est un ouvert connexe, alors $\mathscr{M}(U)$ est un corps.

Remarque 3.16: Les démonstrations des propositions 3.9, 3.11, 3.13 et 3.14 sont laissées en exercices.

Exemple 3.17: La fonction $z \mapsto \sin z$ a un zéro de multiplicité 1 en 0. La fonction $z \mapsto \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ a un pôle d'ordre 1 en i et un pôle d'ordre 1 en $-i$. La fonction $z \mapsto \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$ a un pôle d'ordre 2 en i et un pôle d'ordre 2 en $-i$. La fonction $z \mapsto (\cos z)^{-2}$ a un pôle d'ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$.

4 Sphère de Riemann

Comme souligné dans la remarque 3.2, il faut faire attention à l'ensemble de définition d'une fonction méromorphe. En effet, une fonction méromorphe f sur U n'est pas définie en tout point de U, car on ne peut pas définir $f(z_0)$ si z_0 est un pôle de f. Néanmoins, comme nous savons que $|f(z)| \to +\infty$ quand z tend vers un pôle de f, il est légitime de vouloir poser

$$f(z_0) = \infty$$

si z_0 est un pôle de f. On peut donner un sens à cela en introduisant la notion de *sphère de Riemann*.

Définition 4.1: La *sphère de Riemann* est l'ensemble

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Muni de la topologie suivante. Les ouverts de $\hat{\mathbb{C}}$ sont les sous-ensembles de $\hat{\mathbb{C}}$ de l'une des formes suivantes :

1. $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

2. $U \cup \{\infty\}$ où $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert tel que il existe un compact $K \subset \mathbb{C}$ vérifiant $\mathbb{C} \setminus K \subset U$.

On vérifie que les ouverts ainsi définis forment une topologie de $\hat{\mathbb{C}}$. Nous avons la propriété suivante.

Proposition 4.2: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U. Si l'on définie $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ par $\hat{f}(z) = f(z)$ si f est holomorphe en z et $\hat{f}(z) = \infty$ sinon, alors $\hat{f} : U \to \hat{\mathbb{C}}$ est une application continue.*

Démonstration. Pour montrer que $\hat{f}$ est continue, il faut montrer que pour tout $z_0 \in U$, et pour tout voisinage ouvert W de $w_0 := \hat{f}(z_0)$, il existe un voisinage ouvert de V de z_0 tel que $\hat{f}(V) \subset W$.

Si $w_0 \in \mathbb{C}$, alors f est holomorphe en z_0 et donc continue en z_0. En particulier si W et un voisinage ouvert de w_0 dans $\hat{\mathbb{C}}$, quitte à prendre un voisinage plus petit, on peut supposer que W est un ouvert de $\mathbb{C}$. Donc par continuité de f il existe un voisinage ouvert V de z_0 tel que $\hat{f}(V) = f(V) \subset W$.

Supposons maintenant que $w_0 = \infty$ (et donc que z_0 est un pôle de f) et soit W un voisinage ouvert de w. Par la définition de la topologie sur $\hat{\mathbb{C}}$, $W = W' \cup \{\infty\}$ où W' est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{C}$ vérifiant $\mathbb{C} \setminus K \subset W'$. La proposition 2.12 implique que $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to z_0$, en particulier, pour un $\delta > 0$ suffisamment petit $f(B(z_0, \delta)) \subset \mathbb{C} \setminus K \subset U$. D'où le résultat. □

La façon naturelle de comprendre $\hat{\mathbb{C}}$ est d'y penser comme une sphère. Cela est justifié par la projection stéréographique, qui est définie comme suit. On pose

$$S^2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}.$$

On note $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère. On considère la projection *stéréographique* de $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + i x_2).$$

Cette application est une bijection dont l'application réciproque est

$$\varphi^{-1}(x + iy) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1).$$

Cette application s'étend en une bijection $\varphi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ en posant $\varphi(N) := \infty$. On peut vérifier que φ est un homéomorphisme entre $\hat{\mathbb{C}}$ muni de la topologie introduite ci-dessus et S^2 muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^3$. En particulier, $\hat{\mathbb{C}}$ est compact.

5 Exercices

5.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition des séries de Laurent suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{|n|}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n+1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2+2}$.

Exercice 2. Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes sur la couronne $A_{z_0}(r_1, r_2)$ indiquée.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)}$ sur $A_0(0,1)$,
2. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$ sur $A_1(0,+\infty)$,
3. $f(z) = \dfrac{(z-z_0)^2}{(z-a)^2}$ sur $A_{z_0}(|z_0-a|,+\infty)$,
4. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$ sur $A_1(1,2)$,
5. $f(z) = \left(\dfrac{z}{z-1}\right)^k$ sur $A_0(1,+\infty)$ et $k \in \mathbb{N}$,
6. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ sur $A_1(2,+\infty)$.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que $|a| < |b|$. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(a-z)(b-z)}$$

1. Décomposer $f(z)$ en éléments simples.
2. Calculer le développement en série de Laurent de f centré en 0, dans les couronnes suivants :

   (a) $A_0(0,|a|)$, (b) $A_0(|a|,|b|)$, (c) $A_0(|b|,+\infty)$.

Exercice 4. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}.$$

1. Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^{\frac{1}{z}} = 1$ et en déduire l'ensemble de définition de f.
2. En déduire que 0 n'est pas une singularité isolée de f.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le type de singularité du point z_0 indiqué. Si c'est une singularité éliminable, déterminer comment prolonger la fonction holomorphiquement en ce point, si c'est un pôle, déterminer la partie principale du développement en série de Laurent de la fonction en ce point.

1. $f(z) = \dfrac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$ en $z_0 = -i$,
2. $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$ en $z_0 = 0$,
3. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^4}$ en $z_0 = 0$,
4. $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$ en $z_0 = 1$,
5. $f(z) = \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ en $z_0 = \frac{\pi}{2}$,
6. $f(z) = \sin\left(\dfrac{\pi}{z^2+1}\right)$ en $z_0 = i$,

5.2 Exercices plus avancés

Exercice 6. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Soit $z_0 \in U$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que z_0 est un zéro de multiplicité m de f et que z_0 est un zéro de multiplicité m de g. Montrer que z_0 est une singularité éliminable de la fonction $\frac{f}{g}$, puis montrer que

$$\frac{f(z)}{g(z)} \to \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)} \quad \text{quand} \quad z \to z_0.$$

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de f. Montrer que z_0 n'est pas un pôle de e^f.

Exercice 8. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle en z_0. Soit $g_0, \ldots, g_n : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes.

1. Montrer que le point z_0 est une singularité essentielle de la fonction $g_n f^n + g_{n-1} f^{n-1} + \cdots + g_1 f + a_0$.

2. Est-ce que ce résultat reste vrai si les fonctions $g_0, \ldots, g_n$ peuvent avoir un pôle en z_0 ?

Exercice 9. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle en z_0. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \subset U$. On considère la fonction $M :]0, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ définie par

$$M(r) = \sup_{z \in C(z_0, r)} |f(r)|.$$

Montrer que

$$\lim_{r \to 0} r^k M(r) = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 10. L'objectif de cet exercice est de démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont les fonctions affines non-constantes, c'est à dire les fonctions de la forme $z \mapsto az+b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. (Un automorphisme de $\mathbb{C}$ est par définition un biholomorphisme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.)

1. Soit f un automorphisme de $\mathbb{C}$ tel que $f(0) = 0$. Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right).$$

   (a) Montrer que qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que si $|z| < \varepsilon$ alors $|g(z)| > C$.

   (b) En déduire que 0 n'est pas une singularité essentielle de g.

   (c) En déduire que f est un polynôme et que de plus $\deg P = 1$.

2. Démontrer que les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont exactement les fonctions affines non-constantes.

Exercice 11. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de U. Montrer que f est méromorphe sur U si et seulement si elle s'écrit localement comme quotient de deux fonctions holomorphes (c'est à dire si pour tout $z_0 \in U$, il existe une voisinage V de z_0, et des fonctions holomorphes $g, h \in \mathscr{O}(U)$ tels que h ne s'annule pas sur un ouvert et tels que $f(z) = \frac{g}{h}$ pour tout $z \in V$ tel que $h(z) \neq 0$).