L3 Mathématiques
Semestre 6, 2021-2022

UE 601: Analyse complexe

Chapitre V:
Formules de Cauchy généralisées et déterminations du logarithme

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Damian Brotbek
- Groupe 2 : Sergey Lysenko (sergey.lysenko@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Homotopie et simple connexité

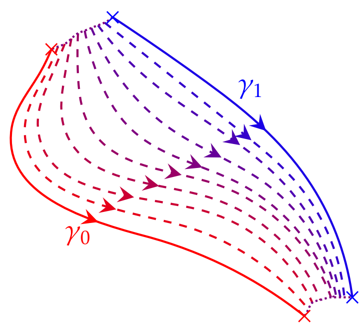
On commence par la définition suivante

Définition 1.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ deux chemins dans U. Une *homotopie* entre γ_0 et γ_1 est une fonction *continue* $H : [0,1] \times [a,b] \to U$ telle que $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [a,b]$. Si une telle homotopie existe, on dit alors que γ_1 et γ_2 sont *homotopes*.

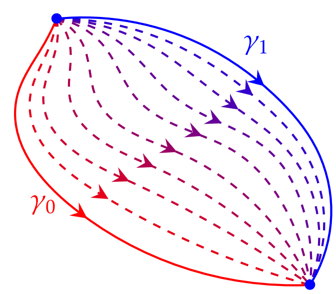
1. On dit que H est une *homotopie stricte* si il existe $z_0, z_1 \in U$ tels que $H(s,a) = z_0$ et $H(s,b) = z_1$ pour tout $s \in [0,1]$. Dans ce cas on dit que γ_1 et γ_2 sont *strictement homotopes*.

2. On dit que H est une *homotopie de lacets* si $H(s,a) = H(s,b)$ pour tout $s \in [0,1]$. Dans ce cas, on dit que γ_1 et γ_2 sont *homotopes au sens des lacets*.

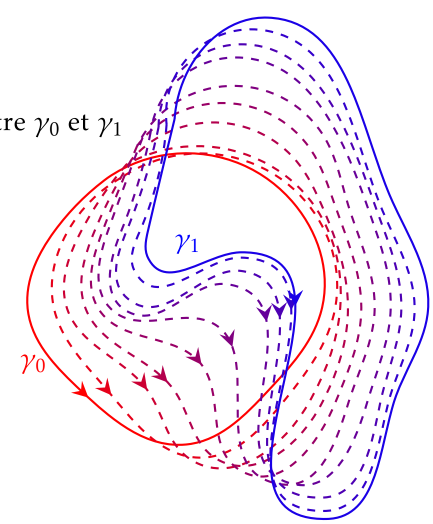
homotopie entre γ_0 et γ_1



homotopie stricte entre γ_0 et γ_1



Homotopie de lacets entre γ_0 et γ_1



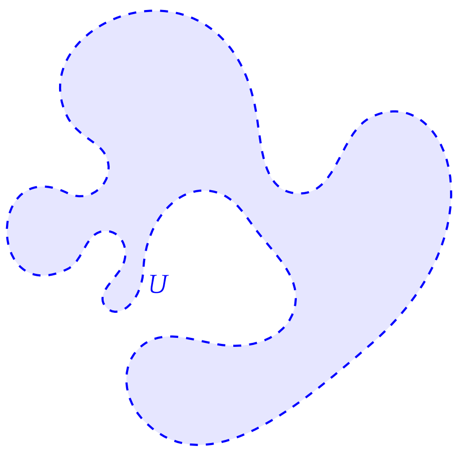
Définition 1.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet. On dit que γ est *homotopiquement trivial dans U* si il est homotope au sens des lacets à un chemin constant.

Définition 1.3: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que U est *simplement connexe* si U est connexe et si tout lacet dans U est homotopiquement trivial dans U.

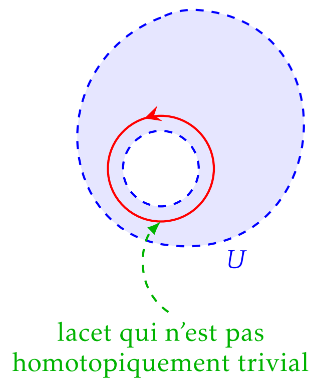
Remarque 1.4: Dans les situations concrètes, il est facile de «voir» si un ouvert est simplement connexe ou non. Géométriquement un ouvert est simplement connexe si et seulement si il n'a pas de «trou».

Exemple 1.5: Voici deux exemples :

Simplement connexe



Non-simplement connexe.



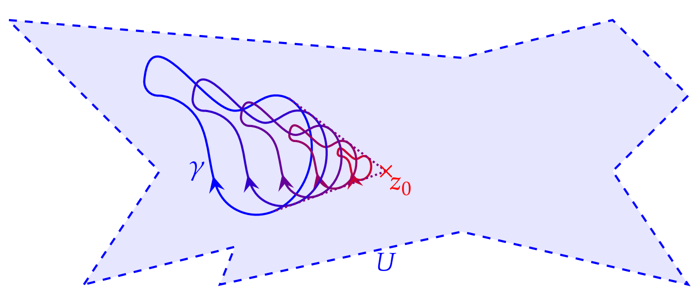
Nous énonçons ici deux résultats permettant de construire des ouverts simplement connexes.

Proposition 1.6: *Si $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert étoilé, alors U est simplement connexe.*

Démonstration. Par définition, il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $z \in U$, le segment $[z_0, z]$ est inclus dans U. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet dans U. On considère alors l'application

$$H : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] \times [a,b] & \to & U \\ (s,t) & \mapsto & (1-s)\gamma(t) + sz_0. \end{array} \right.$$

Il est immédiat de voir que H est une homotopie de lacets entre γ et le lacet trivial $t \mapsto z_0$. Donc γ est homotopiquement trivial. Comme ceci est vrai pour tout γ, on en déduit que U est simplement connexe.



□

La proposition suivante est un cas extrêmement particulier du théorème de Seifert-van Kampen.

Proposition 1.7: *Soit $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ des ouverts simplement connexes tels que $U_1 \cap U_2$ est non-vide et connexe. Alors $U_1 \cup U_2$ est simplement connexe.*

La démonstration de cette proposition n'est pas extrêmement difficile, mais elle est un peu laborieuse si on souhaite l'écrire précisément. Nous renvoyons les étudiant(e)s intéressé(e)s par les détails à faire l'exercice 13.

2 Théorème de Cauchy homotopique

Théorème 2.1 (Cauchy homotopique): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma_0; \gamma_1 : [a,b] \to U$ des lacets $\mathscr{C}^1$ par morceaux qui sont homotopes au sens des lacets dans U. Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

En particulier, si $\gamma : [a,b] \to U$ est un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux homotopiquement trivial, alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Avant de démontrer ce théorème important, soulignons les deux corollaires suivantes.

Corollaire 2.2 (Cauchy pour les ouverts simplement connexes): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Démonstration du corollaire 2.2. Par définition, n'importe quel lacet γ est homotopiquement trivial. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Cauchy. □

Corollaire 2.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux qui sont strictement homotopes dans U. Alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Démonstration du corollaire 2.3. Le lacet $\gamma_0 \vee \gamma_1^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial (voir exercice 13). Donc d'après le théorème de Cauchy homotopique, on a

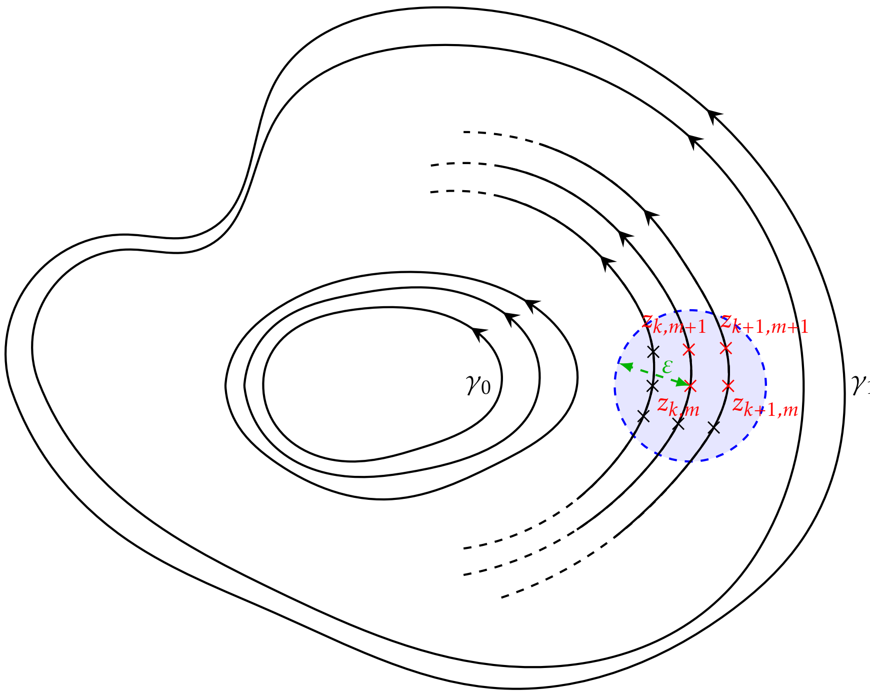
$$\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz \quad = \quad \int_{\gamma_0 \vee \gamma_1^{\mathrm{op}}} f(z)dz = 0.$$

D'où le résultat. □

Démonstration du théorème 2.1. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a = 0$ et que $b = 1$, ce que nous ferons dans la suite. Soit $H : [0,1]\times[0,1] \to U$ une homotopie de lacet entre γ_0 et γ_1. Comme H est continue et que $[0,1]\times[0,1]$ est compact, H est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que pour tout $(s,t) \in [0,1]\times[0,1]$, $\overline{B}(H(s,t),\varepsilon) \subset U$ (un tel ε existe par compacité de l'image de H). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand tel que, pour tout $(s_1,t_1),(s_2,t_2) \in [0,1]\times[0,1]$, si $|s_1 - s_2| \leqslant \frac{1}{n}$ et $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{n}$, alors

$$|H(s_1,t_1) - H(s_2,t_2)| < \varepsilon.$$

Un tel n existe par continuité uniforme. Pour tout $k,m \in \{0,\dots,n\}$ on pose $z_{k,m} := H(\frac{k}{n},\frac{m}{n})$. Observons que pout tout $k,m \in \{0,\dots,n-1\}$, les quatre points $z_{k,m}, z_{k,m+1}, z_{k+1,m}$ et $z_{k+1,m+1}$ appartiennent à la boule $B(z_{k,m},\varepsilon)$.



Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ et pour tout $m \in \{0,\dots,n-1\}$ on considère le chemin $\tilde{\gamma}_{k,m}$ parcourant le segment de $z_{k,m}$ à $z_{k,m+1}$. On pose aussi $\tilde{\gamma}_k := \tilde{\gamma}_{k,0} \vee \tilde{\gamma}_{k,1} \vee \cdots \vee \tilde{\gamma}_{k,n-1}$. Nous allons montrer les choses suivantes :

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)dz \tag{1}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_n} f(z)dz \tag{2}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_{k+1}} f(z)dz \text{ pour tout } k \in \{0,\dots,n-1\} \tag{3}$$

Le résultat en est alors une conséquence immédiate.

Commençons par démontrer (1). Notons pour tout $m \in \{0, n-1\}$, $\gamma_{0,m} := \gamma|_{[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}]}$. Observons que l'image de $\gamma_{0,m}$ est incluse dans $B(z_{0,m},\varepsilon)$. On a $\gamma_0 = \gamma_{0,0} \vee \cdots \vee \gamma_{0,n-1}$. De plus, pour tout $m \in \{0,\dots,n-1\}$, $\gamma_{0,m}$ et $\tilde{\gamma}_{k,m}$ ont pour point initial $z_{0,m}$ et pour point terminal $z_{0,m+1}$. En particulier, comme f admet une primitive sur $B(z_{0,m},\varepsilon)$ (car la boule est un ouvert étoilé et que f est holomorphe), ceci implique que

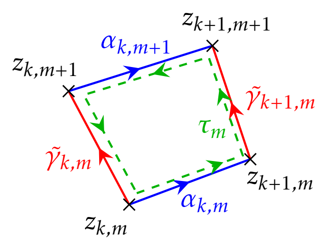
$$\int_{\gamma_{0,m}} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_{0,m}} f(z)dz.$$

On en déduit donc que

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\gamma_{0,m}} f(z)dz = \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\tilde{\gamma}_{0,m}} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}_0} f(z)dz.$$

Ce qui démontre (1). La relation (2) se démontre de façon identique.

Démontrons maintenant le point (3). Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour tout $m \in \{0, \dots, n\}$ on considère α_m, le chemin allant de $z_{k,m}$ à $z_{k+1,m}$ en parcourant le segment. Posons de plus $\tau_m := \alpha_{k,m} \vee \tilde{\gamma}_{k+1,m} \vee \alpha_{k,m+1}^{\mathrm{op}} \vee \tilde{\gamma}_{k,m}^{\mathrm{op}}$, comme sur le dessin ci-dessous.



Le chemin τ_m est un lacet contenu dans $B(z_{k,m}, \varepsilon)$. Comme f est holomorphe et que $B(z_{k,m}, \varepsilon)$ est un ouvert étoilé, le théorème de Cauchy sur les convexes implique que

$$\int_{\tau_m} f(z)dz = 0.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\tau_m} f(z)dz = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\int_{\alpha_{k,m}} f(z)dz + \int_{\tilde{\gamma}_{k+1,m}} f(z)dz - \int_{\alpha_{k,m+1}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_{k,m}} f(z)dz \right) \\ &= \int_{\alpha_{k,0}} f(z)dz - \int_{\alpha_{k,n}} f(z)dz + \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\tilde{\gamma}_{k+1,m}} f(z)dz - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\tilde{\gamma}_{k,m}} f(z)dz \\ &= \int_{\tilde{\gamma}_{k+1}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne, nous avons utilisé le fait que $\alpha_{k,0} = \alpha_{k,n}$ puisque H est une homotopie de lacet. Ceci démontre donc (3) et conclu la preuve. □

Notons que grace à ce théorème et au premier critère d'existence de primitive vu au chapitre III, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f admet une primitive sur U.*

Démonstration. Par définition, tout lacet γ dans U est homotopiquement trivial. Par le théorème de Cauchy homotopique, $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Ceci étant vrai pour tout lacet dans U, le premier critère d'existence de primitives implique que f admet une primitive. □

Comme autre corollaire de la formule de Cauchy homotopique, on a l'énoncé de topologie suivant.

Corollaire 2.5: *L'ouvert $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe.*

Démonstration. La fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais $\displaystyle\int_{C(0,1)} f(z)dz = 2i\pi \neq 0$. Le théorème de Cauchy homotopique implique donc que le lacet $C(0,1)$ n'est pas homotopiquement trivial dans $\mathbb{C}^*$. En particulier $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. □

3 Indice d'un lacet

Définition 3.1: Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point n'appartenant pas à l'image de γ. *L'indice de γ par rapport à z_0* est

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}.$$

Exemple 3.2: Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = z_0 + re^{int}$. Alors

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = n.$$

En effet, on a

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{rine^{int}}{z_0 + re^{int} - z_0}dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} indt = \frac{2i\pi n}{2i\pi} = n.$$

Remarque 3.3: À l'aide de l'exemple précédent, du théorème de Cauchy homotopique et de l'exemple précédent, on peut se convaincre géométriquement que $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$ est toujours un entier qui compte le nombre de fois où γ tourne autour de z_0 dans le sens direct.

Le théorème suivant contient une preuve rigoureuse du premier point de la remarque précédent. Le second point de cette remarque sera illustré dans la section 4.

Théorème 3.4: *Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un point n'appartenant pas à l'image de γ. Alors*

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. On peut supposer que l'ensemble de définition de γ est $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$g(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}ds.$$

De sorte que g est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, de dérivée $g'(t) = \frac{1}{2i\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$ et vérifie

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(1) = \mathrm{ind}_\gamma(z_0).$$

Nous allons montrer que

$$e^{2i\pi g(1)} = 1. \tag{4}$$

Ce qui démontrera le théorème. Posons de plus $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$h(t) = e^{-2i\pi g(t)}(\gamma(t) - z_0).$$

La fonction h est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et l'on a

$$\begin{aligned} h'(t) &= -2i\pi g'(t)e^{-2i\pi g(t)}(\gamma(t)-z_0)+e^{-2i\pi h(t)}\gamma'(t) \\ &= -2i\pi e^{-2i\pi g(t)}(\gamma(t)-z_0)\left(g'(t)-\frac{1}{2i\pi}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\right)=0. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $c\in\mathbb{C}$ telle que $h(t)=c$ pour tout $t\in[0,1]$ et donc

$$\gamma(t)-z_0=ce^{2i\pi g(t)} \quad \forall t\in[0,1].$$

Comme le membre de gauche ne s'annule jamais, on en déduit que $c\neq 0$. Et finalement

$$e^{2i\pi g(1)}=c^{-1}(\gamma(1)-z_0)=c^{-1}(\gamma(0)-z_0)=e^{2i\pi g(0)}=e^0=1.$$

Ce qui démontre (4) et conclut la preuve. □

Proposition 3.5: *Soit $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans $\mathbb{C}$. Alors la fonction $\mathrm{ind}_\gamma:\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])\to\mathbb{Z}$ qui à z associe $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. De plus, cette fonction s'annule sur l'unique composant connexe non-bornée.*

Démonstration. La fonction ind_γ prend bien ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ en vu du résultat précédent. Elle est continue par le théorème de continuité sous le signe $\int$, elle est donc constante sur chaque composante connexe de son ensemble de définition. Par soucis de complétude, donnons une preuve détaillée ind_γ est continue. Cela découle de l'énoncé de continuité sous le signe intégral vu dans le cours d'intégration de L2 sur les intégrales à paramètres :

Théorème (de continuité sous le signe intégral). *Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle et soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f:U\times I\to\mathbb{C}$ une fonction telle que :*

- *pour tout $t\in I$, la fonction $z\mapsto f(z,t)$ est continue sur U,*
- *pour tout $z\in J$, la fonction $t\mapsto f(z,t)$ est continue par morceaux sur I,*
- *il existe une fonction $\varphi:I\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable telle que pour tout $z\in U$ et pour tout $t\in I$ on a*

$$|f(x,t)|\leqslant\varphi(t).$$

Alors la fonction $F:U\to\mathbb{C}$ définie par $F(z)=\displaystyle\int_I f(z,t)dt$ est bien définie et continue sur U.

Appliquons maintenant ce théorème pour démontrer la continuité de ind_γ. Soit $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Comme $\gamma([a,b])$ est compact et ne contient pas z_0, il existe $\varepsilon>0$ tel que $\overline{B}(z_0,2\varepsilon)\subset\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Considérons la fonction $f:B(z_0,\varepsilon)\times[a,b]\to\mathbb{C}$ définie par

$$f(z,t)=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}.$$

Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégral. En effet, notons déjà que cette fonction est bien définie car le dénominateur ne s'annule jamais. Pour tout $z\in B(z_0,\varepsilon)$ la fonction $t\mapsto\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ est continue par morceaux. Pour tout $t\in[a,b]$ la fonction $z\mapsto f(z,t)$ est continue. Dernièrement la fonction $|f|$ est majorée par la fonction constante

$$\varphi:t\mapsto\frac{\max_{t\in[a,b]}|\gamma'(t)|}{\varepsilon}.$$

Le théorème de continuité sous le signe intégrale implique donc que la fonction

$$z \mapsto \int_a^b f(z,t)dt = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt = \int_\gamma \frac{dw}{w-z},$$

est continue sur $B(z_0,\varepsilon)$. Donc la fonction

$$\mathrm{ind}_\gamma : z \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z},$$

et continue sur $B(z_0,\varepsilon)$ et donc en particulier en z_0. Ceci montre que la fonction ind_γ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$.

Observons que $U := \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ admet une unique composante connexe non-bornée. En effet, l'ensemble $\gamma([a,b])$ étant compact, il est contenu dans la boule $\overline{B}(0,R)$ pour un certain $R>0$. Si U admettait deux composantes connexes non-bornées, alors cela impliquerait que $\mathbb{C}\setminus\overline{B}(0,R)$ n'est pas connexe, une contradiction.

Par passage à la limite sous le signe integral, on a

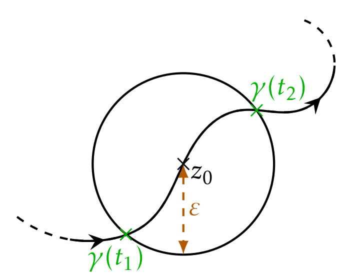
$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \underset{|z_0|\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donc $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)=0$ pour tout z_0 dans la composante connexe non-bornée de U. □

4 Calcul pratique de l'indice

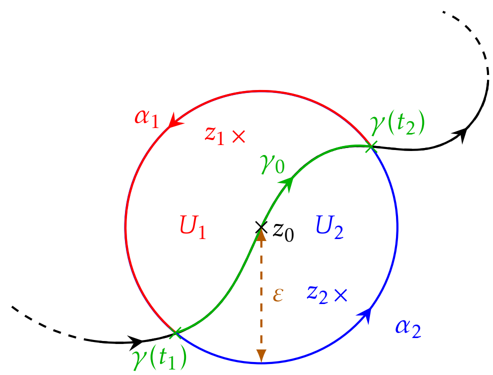
En pratique, l'indice d'un lacet se calcule très facilement. Le proposition 3.5 garantie que l'indice est constant sur chaque composante connexe du complémentaire de l'image du chemin γ et que l'indice s'annule sur l'unique composante connexe non-bornée. Il s'agit donc de savoir comment determiner géométriquement la valeur de l'indice sur chaque composante connexe en comprenant comment l'indice change quand on passe d'une composante connexe à l'autre en traversant le chemin. Considérons donc un chemin $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$. Prenons un point $t_0\in]a,b[$ vérifiant les hypothèses suivantes : en notant $z_0=\gamma(t_0)\in\mathbb{C}$, Il existe $\varepsilon>0$ et il existe $t_1,t_2\in]a,b[$ avec $t_1<t_0<t_2$ tels que

1. $\gamma(t_1)\in\partial B(z_0,\varepsilon)$ et $\gamma(t_2)\in\partial B(z_0,\varepsilon)$,
2. $\gamma(t)\in B(z_0,\varepsilon)$ pour tout $t\in]t_1,t_2[$,
3. $\gamma(t)\notin B(z_0,\varepsilon)$ pour tout $t\in[a,b]\setminus]t_1,t_2[$,
4. $B(z_0,\varepsilon)\setminus\gamma(]t_1,t_2[)$ a exactement deux composantes connexes.



C'est à dire que dans un voisinage de t_0, le chemin γ traverse la boule $B(z_0,\varepsilon)$ de part en part sans se croiser.

On pose $\gamma_0 := \gamma|_{[t_1,t_2]}$. On considère le chemin α_1 allant de $\gamma(t_2)$ à $\gamma(t_1)$ en parcourant le bord $\partial B(z_0,\varepsilon)$ dans le sens direct et on considère le chemin α_2 allant de $\gamma(t_1)$ à $\gamma(t_2)$ en parcourant le bord $\partial B(z_0,\varepsilon)$ dans le sens direct. On pose U_1 la composante connexe de $B(z_0,\varepsilon)\setminus\gamma(]t_1,t_2[)$ telle que α_1 parcours une partie du bord de U_1 et U_2 l'autre composante connexe. On est donc dans la situation du dessin ci-dessous.



Nous allons montrer que, pour tout $z_1 \in U_1$ et pour tout $z_2 \in U_2$

$$\boxed{\mathrm{ind}_\gamma(z_1) = \mathrm{ind}_\gamma(z_2) + 1.} \tag{5}$$

Posons $\gamma_1 = \gamma|_{[a,t_1]}$ et $\gamma_2 = \gamma|_{[t_2,b]}$ de sorte que

$$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_0 \vee \gamma_2.$$

Posons aussi

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2}\right).$$

De sorte que

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{ind}_\gamma(z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_1} - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_2} = \int_\gamma g(z)dz.$$

D'autre part, comme z_1 et z_2 sont dans la même composante connexe du complémentaire du chemin $\gamma_1 \vee \alpha_1^{\mathrm{op}} \vee \gamma_2$, la proposition 3.5 implique que

$$\int_{\gamma_1 \vee \alpha_1^{\mathrm{op}} \vee \gamma_2} g(z)dz = \mathrm{ind}_{\gamma_1 \vee \alpha_1^{\mathrm{op}} \vee \gamma_2}(z_1) - \mathrm{ind}_{\gamma_1 \vee \alpha_1^{\mathrm{op}} \vee \gamma_2}(z_2) = 0.$$

On en déduit que

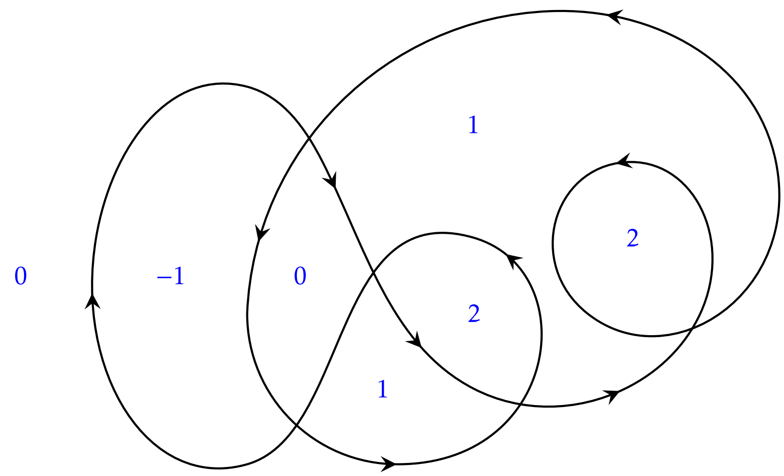
$$\mathrm{ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{ind}_\gamma(z_2) = \int_\gamma g(z)dz = \int_{\gamma_1 \vee \gamma_0 \vee \gamma_2} g(z)dz = \int_{\gamma_1 \vee \alpha_1^{\mathrm{op}} \vee \gamma_2} g(z)dz + \int_{\gamma_0 \vee \alpha_1} g(z)dz = \int_{\gamma_0 \vee \alpha_1} g(z)dz.$$

Observons maintenant que $\mathrm{ind}_{\gamma_0 \vee \alpha_1}(z_2) = 0$ car z_2 appartient à la composant connexe non-bornée du complémentaire du lacet $\gamma_0 \vee \alpha_1$ et que de même, $\mathrm{ind}_{\alpha_2 \vee \gamma_0^{\mathrm{op}}}(z_1) = 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{ind}_\gamma(z_2) = \int_{\gamma_0 \vee \alpha_1} g(z)dz &= \mathrm{ind}_{\gamma_0 \vee \alpha_1}(z_1) - \mathrm{ind}_{\gamma_0 \vee \alpha_1}(z_2) = \mathrm{ind}_{\gamma_0 \vee \alpha_1}(z_1) \\
&= \mathrm{ind}_{\gamma_0 \vee \alpha_1}(z_1) + \mathrm{ind}_{\alpha_2 \vee \gamma_0^{\mathrm{op}}}(z_1) = \mathrm{ind}_{\alpha_1 \vee \alpha_2}(z_1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière égalité, nous avons utilisé la formule de Cauchy sur un disque. Ceci démontre donc (5).

Ceci nous permet de déduire la valeur de l'indice sur chaque composante connexe du complémentaire de γ en procédant de proche en proche à partir de la composante connexe non-bornée. Par exemple, pour le chemin suivant, les indices de chaque composante connexe sont les suivants.



Une façon plus rapide pour calculer l'indice en un point donné (sans avoir à le calculer pour toutes les composantes connexes) est de procéder comme suit. On fixe un point z_0 dans le complémentaire de l'image de γ, puis on trace une demi-droite partant de z_0 dans une direction telle que la demi droite n'intersecte le chemin γ qu'en des points suffisamment régulier comme le point $\gamma(t_0)$ ci-dessus. Puis, on compte chaque intersection comme $+1$ si elle se fait dans le sens direct, et comme -1 si elle se fait dans le sens indirect. La somme ainsi obtenu est $\mathrm{ind}_\gamma(z_0)$.

5 Formules de Cauchy homotopiques

La notion d'indice permet d'énoncer la version suivante des formules de Cauchy.

Théorème 5.1 (Formules de Cauchy homotopique): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$ et soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U,* homotopiquement trivial *dans U et ne passant pas par z_0. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz.$$

Remarque 5.2: En particulier, si U est *simplement connexe*, alors cette formule est vérifiée pour n'importe quel lacet dans U, puisque tous les lacets sont homotopiquement triviaux.

Démonstration. On commence par démontrer le cas $k = 0$, c'est à dire la relation

$$\mathrm{ind}_\gamma(z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Par définition de l'indice, cette relation est équivalente à l'égalité suivante

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0. \tag{6}$$

Pour démontrer la formule (6), on introduit la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0. \end{cases}$$

Cette fonction est une fonction holomorphe. Cela peut par exemple se voir en utilisant le théorème d'extension de Riemann, ou alternativement, on peut procéder de la façon suivante. Clairement g est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$, il suffit donc de montrer que g est holomorphe dans un voisinage de z_0. Comme la fonction f est holomorphe, elle est analytique. Considérons son développement en série entière centré en z_0, c'est à dire pour tout z dans un voisinage suffisament petit de z_0, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. On a $a_0 = f(z_0)$ et $a_1 = f'(z_0)$. On a donc, pour tout z dans un voisinage de z_0, $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}$. Comme une série entière est holomorphe sur son disque de convergence, on en déduit que g est holomorphe sur un voisinage de z_0.
Comme g est holomorphe et que γ est homotopiquement trivial, le théorème de Cauchy homotopique implique que $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz = 0$, ce qui est exactement la relation (6).

Le formules de Cauchy d'ordre supérieur se déduisent par récurrence de la formule de Cauchy à l'ordre 0 par le théorème d'holomorphie sous le signe $\int$. Plus précisément, le chemin γ est défini sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Soit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que pour tout $j \in \{0,\dots,n-1\}$, la fonction $\gamma_{[t_j,t_{j+1}]}$ soit $\mathscr{C}^1$. Soit $z_0 \in U$ comme dans l'énoncé. Comme $\gamma([a,b])$ est compact et ne contient pas z_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(z_0,\varepsilon) \cap \gamma([a,b]) = \varnothing$. Procédons par récurrence sur k. Nous avons démontré la formule pour $k = 0$. Soit $k \geqslant 0$ et supposons que la formule soit vérifiée à l'ordre k, et montrons la formule à l'ordre $k+1$.

Fixons $j \in \{0,\dots,n-1\}$ et considérons la la fonction $F_j : B(z_0,\varepsilon) \times [t_j,t_{j+1}] \to \mathbb{C}$ définie par

$$F_j(z,t) = \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^{k+1}}.$$

Par construction de ε, le dénominateur ne s'annule jamais. Donc la fonction F est une fonction bien définie et continue. De plus pour $t \in [t_j,t_{j+1}]$ fixé, la fonction $F_{j,t} : B(z_0,\varepsilon) \to \mathbb{C}$ définie par $F_{j,t}(z) = F_j(z,t)$ et holomorphe comme quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas. Dernièrement, la fonction $|F|$ est borné. En effet, F s'étend à une fonction continue $\tilde{F}_j : \overline{B}(z_0,\varepsilon) \times [a,b] \to \mathbb{C}$ définie par

$$F_j(z,t) = \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^{k+1}}.$$

Comme $\overline{B}(z_0,\varepsilon) \times [a,b]$ est compact et que $\tilde{F}$ est continue, sont image est bornée, en particulier, l'image de F est bornée, et donc $|F|$ est bornée. En vu de cela, on peut appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale (théorème 7.17 du chapitre 4). Ce théorème implique que l'application $f_j : B(z_0,\varepsilon) \to \mathbb{C}$ définie par

$$f_j(z) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_j(z,t)dt$$

est holomorphe et vérifie de plus, pour tout $z \in B(z_0,\varepsilon)$,

$$f_j'(z) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_t'(z)dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{(k+1)f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^{k+2}}dt.$$

Maintenant, la formule de Cauchy à l'ordre k et la définition d'intégrale curviligne implique que pour tout $z \in B(z_0,\varepsilon)$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_\gamma(z) f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw = \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)}dt \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k!}{2i\pi}\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^{k+1}}dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k!}{2i\pi} f_j(z).
\end{aligned}$$

Et donc, en dérivant on obtient, pour tout $z \in B(z_0, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_\gamma(z_0) f'(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k!}{2i\pi} \pi f_j'(z) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k!}{2i\pi} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{(k+1) f(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{(\gamma(t)-z)^{k+2}} \\
&= \frac{(k+1)!}{2i\pi} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)dt}{(\gamma(t)-z)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}} dz.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien la formule de Cauchy à l'ordre $k+1$. Ce qui conclu la démonstration par récurrence, et donc la preuve des formules de Cauchy de tout ordre. □

6 Homologie

Le théorème et les formules de Cauchy homotopiques sont tout à fait satisfaisants dans le cas où l'ouvert U est simplement connexe. Si l'ouvert n'est pas simplement connexe, il peut être délicat de déterminer si un lacet est homotopiquement trivial ou non. Dans cette section, nous présentons une version encore plus fine du théorème et des formules de Cauchy en considérant la notion d'*homologie*.

Remarque 6.1: Attention ! La façon dont nous introduisons la notion d'homologie ici est non-standard. Notre approche est analytique alors que l'approche standard est topologique. Notre présentation est motivée par le fait qu'elle nécessite le moins de topologie possible et repose juste sur le fait de savoir calculer l'indice d'un lacet, ce que l'on sait faire grâce à la section 4.

On commence par définir la notion de cycles.

Définition 6.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Un *1-cycle* de U est une combinaison linéaire à coefficients entiers de lacets de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. C'est à dire, une somme formelle de la forme

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k,$$

où $n_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$ et γ_k est un lacet de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. Le support de Γ est la réunion des images des γ_k pour $k \in \{1, \ldots, m\}$ et est noté $\mathrm{Supp}(\Gamma)$.

Remarque 6.3:

1. Il est important de bien comprendre que la somme dans la définition de Γ est juste formelle, elle n'est par relié à la somme sur les nombres complexes.

2. Par contre, on peut définir une structure de groupe abélien sur l'ensemble des cycles en posant

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \gamma_k^1 + \sum_{k=1}^{m_2} n_k \gamma_k^2, \quad \text{pour tous cycles} \quad \Gamma_1 = \sum_{k=1}^{m_1} n_k \gamma_k^1,\ \Gamma_2 = \sum_{k=1}^{m_2} n_k \gamma_k^2,$$

$$-\Gamma = \sum_{i=1}^{m} (-n_k)\gamma_k, \quad \text{pour tout cycle} \quad \Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k.$$

On peut intégrer les fonctions continues sur les cycles.

Définition 6.4: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k$ un 1-cycle de U. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. L'intégrale de f le long de Γ est définie comme étant.

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} n_k \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

En particulier, on a la notion d'indice d'un cycle.

Définition 6.5: Soit $\Gamma = \sum_{k=1}^{m} n_k \gamma_k$ un 1-cycle de $\mathbb{C}$. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$, l'*indice de* Γ *au point* z_0 est

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{m} n_k \, \mathrm{ind}_{\gamma_k}(z_0).$$

On peut maintenant définir la notion d'homologie.

Définition 6.6: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

1. Un 1-cycle Γ de U est *homologiquement trivial* (dans U) si $\mathrm{ind}_\Gamma(z_0) = 0$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$.

2. Deux 1-cycles Γ_1 et Γ_2 de U sont *homologues* (dans U) si $\Gamma_1 - \Gamma_2$ est homologiquement trivial, c'est à dire, si $\mathrm{ind}_{\Gamma_1}(z_0) = \mathrm{ind}_{\Gamma_2}(z_0)$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$.

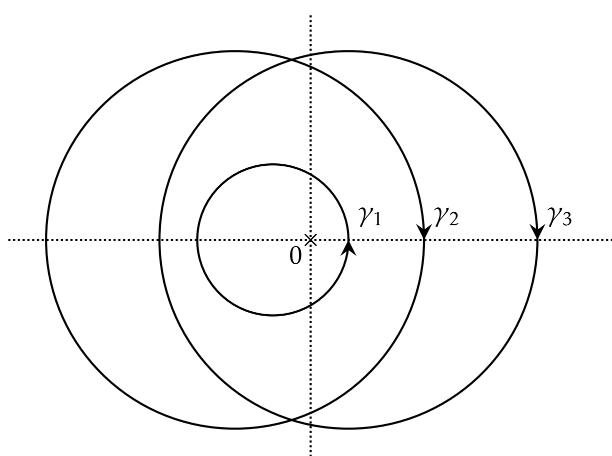
Remarque 6.7:

1. Si γ est un lacet dans U, on dira qu'il est homologiquement trivial si le 1-cycle associé $\Gamma = 1 \cdot \gamma$ est homologiquement trivial.

2. Déterminer si un cycle est homologiquement trivial ou non est un problème facile à résoudre en pratique. Illustrons cela sur quelques exemples:

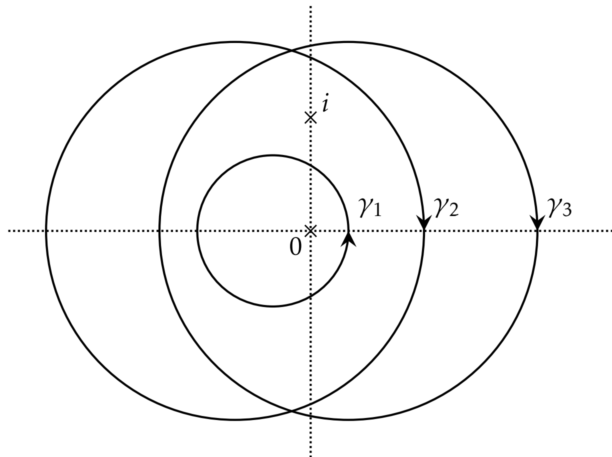
a. Dans $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ le cycle $\gamma = \gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3$, représentés ci dessous, est homologiquement trivial car

$$\mathrm{ind}_\gamma(0) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(0) + 2\,\mathrm{ind}_{\gamma_2}(0) - \mathrm{ind}_{\gamma_3}(0) = 1 + 2 \times (-1) - (-1) = 0.$$



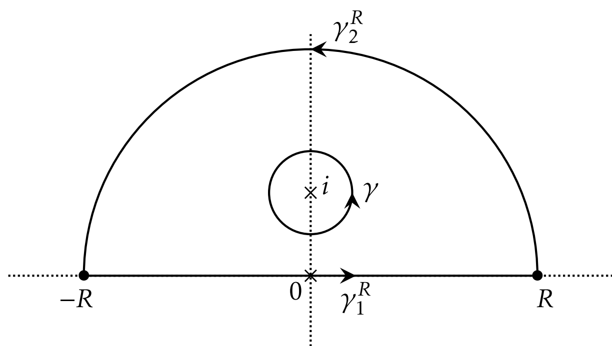
b. Dans $U = \mathbb{C} \setminus \{0, i\}$ le cycle $\gamma = \gamma_1 + 2\gamma_2 - \gamma_3$, représentés ci dessous, *n'*est *pas* homologiquement trivial car

$$\mathrm{ind}_\gamma(i) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(i) + 2\,\mathrm{ind}_{\gamma_2}(i) - \mathrm{ind}_{\gamma_3}(i) = 0 + 2 \times (-1) - (-1) = -1 \neq 0.$$

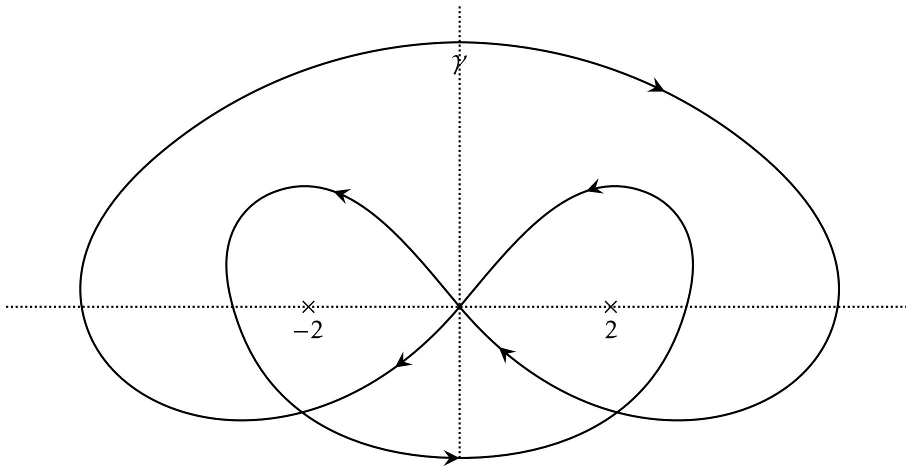


c. Pour tout $R > 1$, le cycle $\gamma_1^R \vee \gamma_2^R - \gamma$ représenté ci-dessous est homotopiquement trivial dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. En effet,

$$\mathrm{ind}_\gamma(i) = \mathrm{ind}_{\gamma_1^R \vee \gamma_2^R}(i) = 1.$$



d. Le lacet γ représenté ci dessous est homologiquement trivial dans $\mathbb{C}\setminus\{-2, 2\}$ puisque $\mathrm{ind}_\gamma(2) = \mathrm{ind}_\gamma(-2) = 0$. Mais par contre ce lacet n'est pas homotopiquement trivial dans $\mathbb{C}\setminus\{-2, 2\}$ (on s'en convainc facilement mais n'est pas si simple de le démontrer...)



Le théorème de Cauchy homotopique implique immédiatement le résultat suivant.

Proposition 6.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U. Si γ est homotopiquement trivial, alors γ est homologiquement trivial. En particulier, si U est simplement connexe, alors tous les 1-cycles de U sont homologiquement triviaux.*

Démonstration. Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux homotopiquement trivial. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$, la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z - z_0}$ est une fonction holomorphe sur U. Le théorème de Cauchy homotopique implique donc que $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ et donc, par définition de l'indice, $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = 0$. La 1-cycle γ est donc homologiquement trivial. □

Remarque 6.9:

1. Il est vrai qu'un ouvert U est simplement connexe si et seulement si tous les 1-cycles de U sont homologiquement triviaux. C'est un résultat que nous ne démontrerons pas ici.
2. Par contraste avec la remarque précédente, et comme nous l'avons vu dans l'exemple ci-dessus, il existe des ouverts U contenant des lacets homologiquement triviaux mais pas homotopiquement triviaux.

7 Théorème et formules de Cauchy homologiques

On peut maintenant énoncer et démontrer la version suivante des formules de Cauchy.

Théorème 7.1: *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit Γ un 1-cycle* homologiquement trivial *dans U. Alors :*

1. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$. *(Théorème de Cauchy homologique).*
2. *Pour tout $z \in U \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw \quad \textit{(formules de Cauchy homologiques).}$$

Remarque 7.2: Ce théorème est une généralisation du théorème de Cauchy homotopique et des formules de Cauchy homotopiques au vu de la proposition 6.8.

Démonstration. Observons déjà que si l'on connait la formule de Cauchy à l'ordre 0, alors on peut en déduire la formule de Cauchy à l'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}$ par dérivation sous le signe intégral.

Observons aussi que la formule de Cauchy homologique à l'ordre 0 implique le théorème de Cauchy homologique. En effet, soit Γ un cycle homologiquement trivial de U, et soit $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. Soit $z \in U \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$. La fonction $F : w \mapsto (w-z)f(w)$ est une fonction holomorphe telle que $F(z) = 0$. En appliquant la formule de Cauchy on obtient donc

$$0 = 2i\pi\,\mathrm{ind}_\Gamma(z)F(z) = \int_\Gamma \frac{F(w)}{w-z}dw = \int_\Gamma f(w)dw.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que, avec les notations de l'énoncé,

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z)f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Par définition, de l'indice, c'est équivalent à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = 0 \tag{7}$$

Pour cela introduisons la fonction $g : U \times U \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(w,z) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si} \quad z \neq w \\ f'(z) & \text{si} \quad z = w. \end{cases}$$

La fonction g est continue sur $U \times U$. Pour voir cela, fixons $(z_0, w_0) \in U \times U$ et montrons que g est continue au point (z_0, w_0). Si $z_0 \neq w_0$, alors il existe un voisinage de (z_0, w_0) dans lequel $z \neq 0$, et la fonction g y est alors continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il reste donc à traiter le cas $z_0 = w_0$. Dans ce cas, $g(z_0, w_0) = f'(z_0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(z,w) \in B(z_0,\delta) \times B(z_0,\delta)$ pour un $\delta > 0$ suffisamment petit à déterminer.

- Si $z = w$, alors $g(z,w) = f'(z)$ et l'on a donc $g(z_0,w_0) - g(z,w) = f'(z_0) - f'(z)$. Comme par ailleurs f' est continue, cette différence est de module plus petit que ε pour un certain $\delta > 0$.

- Si $z \neq w$, alors, en notant τ le segment reliant w à z (ce segment est inclus dans U car $z, w \in B(z_0, \delta)$ est que les boules sont convexes),

$$\begin{aligned}
|g(z_0, w_0) - g(z, w)| &= \left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right| = \left| f'(z_0) - \frac{1}{z - w} \int_\tau f'(\xi) d\xi \right| \\
&= \left| \frac{1}{z - w} \int_\tau f'(z_0) d\xi - \frac{1}{z - w} \int_\tau f'(\xi) d\xi \right| = \left| \frac{1}{z - w} \int_\tau (f'(z_0) - f'(\xi)) d\xi \right| \\
&\leqslant \frac{\ell(\tau)}{|z - w|} \sup_{\xi \in \mathrm{Supp}(\tau)} |f'(z_0) - f'(\xi)| = \sup_{\xi \in \mathrm{Supp}(\tau)} |f'(z_0) - f'(\xi)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

  si δ est suffisamment petit. Ceci démontre la continuité de g en (z_0, w_0).

Observons de plus que g est holomorphe par rapport à la première variable. C'est à dire que pour tout $w \in U$, la fonction $g_w : z \mapsto g(z, w)$ est holomorphe. Cela se démontre comme dans la preuve du théorème de Cauchy homotopique (par exemple en utilisant le théorème d'extension de Riemann).

Le théorème d'holomorphie sous le signe intégral implique alors que la fonction $h : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \int_\Gamma g(z, w) dw$$

est holomorphe sur U.

Nous allons maintenant étendre h en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour voir cela, on considère l'ensemble

$$U_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \ ; \ \mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0\}.$$

C'est un ouvert car c'est une union de composantes connexes du complémentaire de $\mathrm{Supp}(\Gamma)$. De plus, comme Γ est homologiquement trivial par hypothèse, on sait que $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus U$ et en particulier $\mathbb{C} \setminus U \subset U_0$. Donc $U \cup U_0 = \mathbb{C}$.

De plus, pour tout $z \in (U \cap U_0) \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ on a

$$h(z) = \int_\Gamma g(z, w) dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_\Gamma \frac{f(z)}{w - z} dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - 2i\pi \, \mathrm{ind}_\Gamma(z) f(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, ou par un calcul de taux d'accroissement, on voit que la fonction $z \mapsto \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ et donc en particulier sur U_0. On définit la fonction $\hat{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\hat{h} = \begin{cases} h(z) & \text{si} \quad z \in U \\ \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw & \text{si} \quad z \in U_0. \end{cases}$$

Comme ces deux expressions coincident sur $U \cap U_0$, la fonction $\hat{h}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Pour conclure, nous allons utiliser le théorème de Liouville afin de montrer que $\hat{h} \equiv 0$. Pour cela il suffit de montrer que $|\hat{h}| \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Soit $R' > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\Gamma) \subset B(0, R')$. Observons que $\mathbb{C} \setminus B(0, R')$ est donc inclus dans U_0. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R'$ on a

$$|\hat{h}(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \right| \leqslant m\ell(\Gamma) \sup_{w \in \mathrm{Supp}(\Gamma)} \left| \frac{f(w)}{w - z} \right| \leqslant m\ell(\Gamma) \sup_{w \in \mathrm{Supp}(\Gamma)} \frac{|f(w)|}{|z| - R'} = \frac{m\ell(\Gamma)}{|z| - R'} \sup_{w \in \mathrm{Supp}(\Gamma)} |f(w)| \underset{|z| \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ici m est le max des multiplicité de Γ. C'est à dire que si $\gamma = \sum_{k=1}^p n_k \gamma_k$ alors $m = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |n_k|$. On en déduit (par la continuité de $\hat{h}$), que $\hat{h}$ est bornée sur $\mathbb{C}$. Le théorème de Liouville implique donc que $\hat{h}$ est constante. Comme de plus $\hat{h}(z)$ tend vers 0 quand z tend vers l'infini, on en déduit que $\hat{h}$ est identiquement nulle. Elle est donc en particulier nulle sur U, ce qui est exactement ce que l'on cherchait à démontrer. $\square$

8 Déterminations du logarithme

8.1 Définition et premières propriétés

Commençons par observer que pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ fixé, les solutions w de l'équation

$$e^w = z$$

sont les nombres complexes de la forme

$$z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comme il n'y a pas de façon canonique de choisir un argument, on ne peut pas définir le logarithme sur $\mathbb{C}^*$. On introduit donc la définition suivante.

Définition 8.1: Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ une ouvert connexe. Une *détermination du logarithme sur* U est une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{f(z)} = z \quad \forall z \in U.$$

Exemple 8.2: Soit $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^*$. Alors la *détermination principale du logarithme* introduite dans le chapitre I et définie par

$$\mathrm{Log}(z) = \ln r + i\theta, \ \ \forall z = re^{i\theta} \ \text{ où } \ \theta \in]-\pi, \pi[$$

est une détermination du logarithme sur U.

Remarque 8.3: Si f est une détermination du logarithme sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^*$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction f_k définie par

$$f_k(z) = f(z) + 2i\pi k$$

est aussi une détermination du logarithme. En particulier, si une détermination du logarithme existe, alors il en existe une infinité.

On peut généraliser la définition de la détermination principale du logarithme de la façon suivante.

Exemple 8.4: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\Delta_\alpha := \mathbb{R}_+ \cdot e^{i\alpha}$ la demi-droite d'angle α, et $U_\alpha := \mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha$. On définit alors la fonction $\mathrm{Log}_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$, par

$$\mathrm{Log}_\alpha z := \ln r + i\theta \ \ \forall z = re^{i\theta} \in U_\alpha \ \text{ où } \ \theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[.$$

La fonction Log_α est une détermination du logarithme sur U_α. Avec cette notation, la détermination principale du logarithme est $\mathrm{Log} = \mathrm{Log}_{-\pi}$.

Proposition 8.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe. Supposons qu'il existe une détermination du logarithme f sur U. Alors la fonction f est injective, holomorphe et vérifie*

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in U.$$

Démonstration. La fonction f est injective car pour tout $z_1, z_2 \in U$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$ on a $z_1 = e^{f(z_1)} = e^{f(z_2)} = z_2$.

Pour montrer que f est holomorphe, et montrer la formule annoncée pour la dérivée, il suffit de calculer le taux d'accroissement. Soit $z_0 \in U$. Posons $w_0 = f(z_0)$. On a

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{e^{f(z)}-e^{f(z_0)}} = \lim_{w\to w_0} \frac{w-w_0}{e^{w}-e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

□

On a la caractérisation suivante de l'existence de détermination du logarithme.

Proposition 8.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe une détermination du logarithme sur U.*
2. *La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive sur U.*

Démonstration. L'assertion $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ est immédiate d'après la proposition précédente. En effet, si une détermination principale du logarithme existe sur U, alors c'est une primitive sur de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Montrons $\boxed{2 \Rightarrow 1}$. Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une primitive de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$. Alors la fonction $g : z \mapsto ze^{-F(z)}$ est holomorphe de dérivée

$$g'(z) = e^{-F(z)} - \frac{z}{z}e^{-F(z)} = 0.$$

Comme U est connexe, la fonction g est constante. De plus, elle est non-nulle car l'exponentielle ne s'annule pas. Notons cette constante sous la forme e^a avec $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f := F + a$ est alors une détermination du logarithme sur U. En effet,

$$e^{f(z)} = e^{F(z)+a} = e^{F(z)}e^a = z \quad \forall z \in U.$$

□

Exemple 8.7: Il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. Supposons par l'absurde qu'une telle décomposition existe. Alors d'après la proposition, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive. Ceci impliquerait que $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 0$. Or nous savons que $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$, d'où une contradiction.

En vu du corollaire 2.4, on obtient le critère suivant.

Corollaire 8.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert simplement connexe. Alors il existe une détermination du logarithme sur U.*

8.2 Détermination du logarithme d'une fonction holomorphe

On peut généraliser la notion de détermination du logarithme de la façon suivante.

Définition 8.9: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais. Une *détermination du logarithme de g* est une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que

$$e^{f(z)} = g(z) \quad \forall z \in U.$$

Nous avons la proposition suivante, qui généralise la proposition 8.6

Proposition 8.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une détermination du logarithme de g sur U.*
2. *La fonction $z \mapsto \frac{g'(z)}{g(z)}$ admet une primitive sur U.*

Démonstration. L'assertion $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ est immédiate. En effet, si une détermination principale du logarithme de g existe sur U. Alors on a alors c'est une primitive de $\frac{g'}{g}$. En effet, comme $g(z) = e^{f(z)}$ pour tout $z \in U$, on a

$$g'(z) = f'(z)e^{f(z)} = f'(z)g(z) \quad \text{et donc} \quad f'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} \ \ \forall z \in U.$$

Montrons $\boxed{2 \Rightarrow 1}$. Soit $F : U \to \mathbb{C}$ une primitive de la fonction $z \mapsto \frac{g'(z)}{g(z)}$. Alors la fonction $h : z \mapsto g(z)e^{-F(z)}$ est holomorphe de dérivée

$$h'(z) = g'(z)e^{-F(z)} - g(z)F'(z)e^{-F(z)} = g'(z)e^{-F(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}e^{-F(z)} = 0$$

Comme U est connexe, la fonction h est constante. De plus, elle est non-nulle car g et l'exponentielle ne s'annulent pas. Notons cette constante sous la forme e^a avec $a \in \mathbb{C}$. La fonction $f := F + a$ est alors une détermination du logarithme de g sur U. En effet,

$$e^{f(z)} = e^{F(z)+a} = e^{F(z)}e^a = g(z) \ \ \forall z \in U.$$

□

Cette proposition, implique le critère suivant.

Corollaire 8.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais. Alors il existe une détermination du logarithme de g sur U.*

Si l'on sait qu'il existe une détermination du logarithme log sur $g(U)$, alors on pourrait juste prendre $\log g$ comme détermination du logarithme de g. Mais soulignons que dans ce résultat, on ne demande pas qu'il existe une détermination du logarithme sur $g(U)$. Par exemple, si $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ est la fonction $g(z) = z^2$. Le corollaire implique qu'il existe une détermination du logarithme de $z \mapsto z^2$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ mais $g(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \mathbb{C}^*$, et nous savons qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

8.3 Fonctions puissances

L'existence d'une détermination du logarithme permet de construire d'autres fonctions, comme par exemple les fonctions *puissances*. En effet, si $z \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, il n'y a pas de façon canonique de définir z^a (sauf bien entendu si $a \in \mathbb{Z}$). Il raisonnable de vouloir poser

$$z^a = e^{a \log z}.$$

Mais comme nous avons vu dans la section précédente il n'existe pas de fonction log définie naturellement sur $\mathbb{C}^*$, et le logarithme n'est défini qu'à $2i\pi$ près.

Exemple 8.12: Essayons de définir i^i. Le logarithme de i peut-être choisi dans l'ensemble suivant

$$\left\{\dots,-\frac{7\pi}{2}i,-\frac{3\pi}{2}i,\frac{\pi}{2}i,\frac{5\pi}{2}i,\frac{9\pi}{2}i,\dots\right\}=\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Donc pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a un candidat naturel pour i^i donné par

$$i^i=e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

Nous introduisons tout de même la définition suivante.

Définition 8.13: Soit $U\subset\mathbb{C}^*$ un ouvert connexe sur lequel il existe une determination du logarithme $\log : U\to\mathbb{C}$. Soit $a\in\mathbb{C}$. Alors la fonction

$$z\mapsto e^{a\log z}$$

est appelée une *détermination de la puissance a-ième*. On note, abusivement,

$$z^a:=e^{a\log z}.$$

Puisque toute détermination du logarithme est holomorphe, on en déduit que toutes les déterminations de la puissance a-ième sont aussi holomorphes. De plus on a

$$\frac{\partial z^a}{\partial z}=az^{a-1}.$$

Exemple 8.14: Soit $a=i$ et prenons la détermination principal du logarithme $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-\to\mathbb{C}$. Alors la détermination de la puissance i-ième associée est définie par

$$z^i=e^{i\,\mathrm{Log}\,z}=e^{i(\ln r+i\theta)}=e^{i\ln r}e^{-\theta}=e^{-\theta}(\cos(\ln r)+i\sin(\ln r))\quad\forall z=re^{i\theta},\ \text{ où }\ \theta\in]-\pi,\pi[\ \text{ et }\ r\in\mathbb{R}_+^*.$$

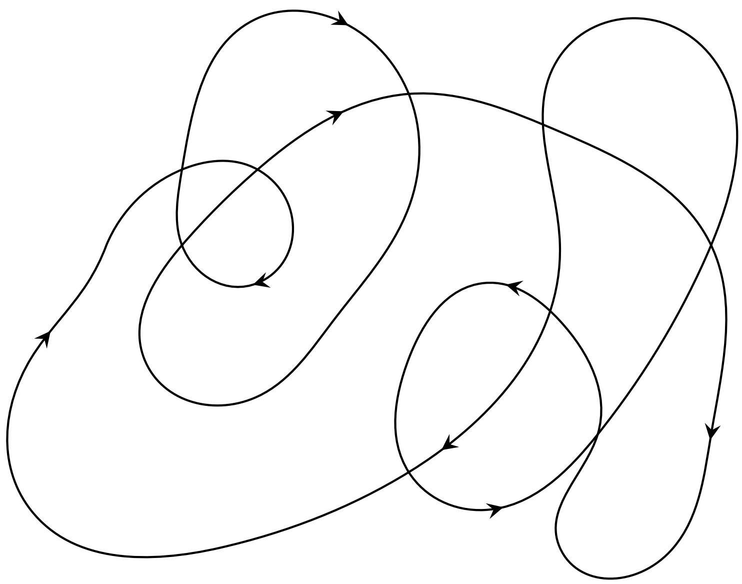
9 Exercices

9.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. Pour chacun des ouverts suivants de $\mathbb{C}$, le dessiner et dire si il est simplement connexe ou non.

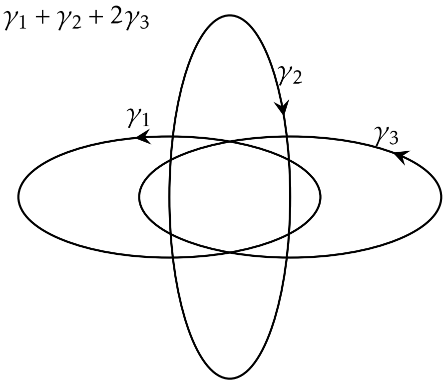
1. $U_1 := \mathbb{C} \setminus B(0,1)$
2. $U_2 := U_1 \setminus \mathbb{R}^+$.
3. $U_3 := \left\{ z = re^{i\theta} \; ; \; 0 < r < 1 \text{ et } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11\pi}{6} \right\}$
4. $U_4 := U_3 \setminus B\left(\frac{i}{2}, \frac{1}{10}\right)$
5. $U_5 := \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{R}_+ \cup (1+i+\mathbb{R}_-) \cup (1-i+\mathbb{R}_-) \right)$
6. $U_6 := \left\{ z = re^{i\theta} \; ; \; \theta \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta < r < \theta + 1 \right\}$.

Exercice 2. Pour le lacet suivant, déterminer l'indice de tout point en dehors de son image.

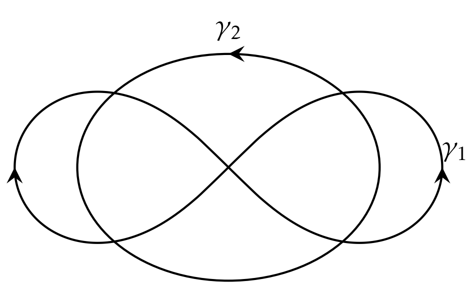


Exercice 3. Pour chacun des cycles suivants, déterminer l'indice de tout point en dehors de son support.

1. $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3$

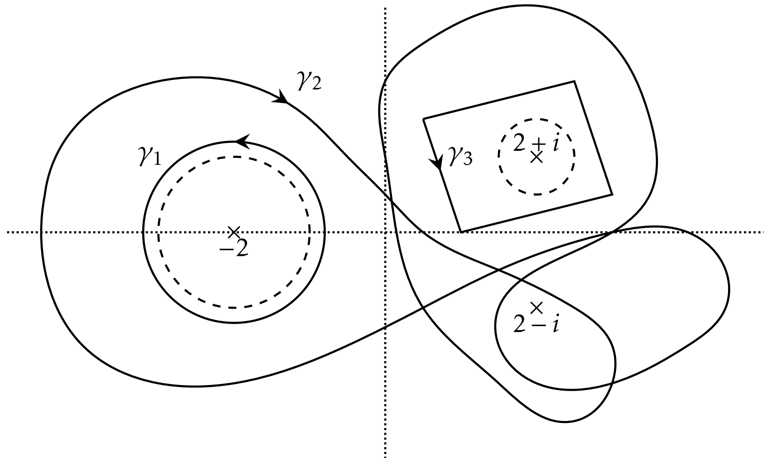


2. $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$



Exercice 4. Dessinez un cycle ou un lacet ainsi qu'un point dans le complémentaire de son support, et demandez à votre voisine ou votre voisin de trouver l'indice de ce cycle par rapport au point donné.

Exercice 5. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \left(B(-2,1) \cup B(2+i, \frac{1}{2} \cup \{2-i\} \right)$. Le cycle $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ suivant est-il homologiquement trivial dans U ?



Exercice 6. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Montrer que $U \setminus \{z_0\}$ n'est pas simplement connexe.

9.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit γ_1 et γ_2 des lacets dans U de point initial (et terminal) z_0. Montrer que si γ_1 et γ_2 sont homotopiquement triviaux, alors $\gamma_1 \vee \gamma_2$ est homotopiquement trivial.

Exercice 8 (Détermination de la racine n-ième)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z, w \in \mathbb{C}$. On dit que w est une *racine n-ième de z*, si $w^n = z$. Si $z = 1$, on dit que w est une *racine n-ième de l'unité*.

1. (a) Montrer que l'ensemble des racines n-ième de l'unité est l'ensemble

$$\left\{1, \omega_n, \ldots, \omega_n^{n-1}\right\} \quad \text{où} \quad \omega_n := e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

   (b) Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et notons $\mu = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$. Montrer que l'ensemble des racines n-ième de z, est l'ensemble

$$\left\{\mu, \mu\omega_n, \ldots, \mu\omega_n^{n-1}\right\} = \left\{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\right\}_{0 \leqslant k \leqslant n-1}.$$

2. Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert connexe sur lequel il existe une détermination du logarithme, $\log : U \to \mathbb{C}$.

   (a) Montrer que les determinations de la racine n-ième sur U sont les fonctions de la forme

$$z \mapsto \omega_n^k e^{\frac{1}{n}\log z}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

   (Ici on utilise le terme *détermination de la racine n-ième* au lieu de *détermination de la puissance $\frac{1}{n}$-ième*.)

   (b) Soit $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue vérifiant $(f(z))^n = z$ pour tout $z \in U$. Montrer que f est une détermination de la racine n-ième.

Exercice 9. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On cherche à définir une fonction $z \mapsto \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$. C'est à dire une fonction holomorphe f (dont l'ensemble de définition est à determiner) vérifiant $f(z)^2 = \frac{z-a}{z-b}$. On note g la fonction définie par $g(z) = \frac{z-a}{z-b}$. Notons $U := \mathbb{C} \setminus [a, b]$, le plan complex privé du segment reliant a à b.

1. Déterminer l'ensemble $g(U)$, et montrer qu'il existe une détermination du logarithme sur $g(U)$.

2. En déduire toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(z)^2 = g(z)$ pour tout $z \in U$.

Exercice 10. On cherche à définir la fonction $z \mapsto \sqrt{z(z+1)}$.

1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f_1 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ telle que $f_1(1) = 1$ et telle que $f_1(z)^2 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

2. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f_2 : \mathbb{C} \setminus (-1 + \mathbb{R}_-) \to \mathbb{C}$ telle que $f_2(1) = \sqrt{2}$ et telle que $f_2(z)^2 = z + 1$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (1 + \mathbb{R}_-)$.

3. Montrer que la fonction $f = f_1 f_2$ définie sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_-)$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$.

4. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g : \mathbb{C} \setminus [-1, 0] \to \mathbb{C}$ vérifiant $g(z)^2 = z(z+1)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ et telle que $h(1) = \sqrt{2}$.

Exercice 11. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Montrer que la relation «être homotopes au sens des lacets» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacet de U.

Exercice 12.

1. On note $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ les chemins définies par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(t) = 2e^{it}$. Donner explicitement une homotopie entre γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C}^*$.

2. Soit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ et soit $r, \varepsilon > 0$ tels que $\overline{B}(z_1, \varepsilon) \subset B(z_0, r)$. On note $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ les chemins définie par $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$ et $\gamma_2(t) = z_1 + \varepsilon e^{it}$. Donner explicitement une homotopie de lacet entre γ_1 et γ_2 dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$.

Exercice 13. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

1. Soit $\gamma : [0, 1] \to U$ un chemin. Montrer que le lacet $\gamma \vee \gamma^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial.

2. Soit γ_1 et γ_2 des chemins dans U. Supposons que γ_1 et γ_2 sont strictement homotopes. Montrer que $\gamma_1 \vee \gamma_2^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial.

3. Soit γ_1 et γ_2 des chemins dans U qui ont même point initial et même point terminal. Montrer que si le lacet $\gamma_1 \vee \gamma_2^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial alors γ_1 et γ_2 sont strictement homotopes.

4. Nous allons maintenant démontrer la Proposition 1.7. Soit U_1, U_2 des ouverts simplement connexes tels que l'intersection $U_1 \cap U_2$ est non-vide et connexe. Soit $U = U_1 \cup U_2$. Soit $\gamma : [0, 1] \to U$ un lacet. Nous allons montrer que γ est homotopiquement trivial. (On suppose ici que γ est défini sur l'intervalle $[0, 1]$, ce n'est pas une perte de généralité car on peut toujours se ramener à cette situation par reparamétrisation).

   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, on a soit $B(\gamma(t), \varepsilon) \subset U_1$ soit $B(\gamma(t), \varepsilon) \subset U_2$. On fixe maintenant un tel ε. (Indication : utiliser la compacité de l'image de γ).

   (b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, si on note $t_k := \frac{k}{n}$ et $z_k := \gamma(t_k)$ pour tout $k \in \{0, \ldots n\}$ (de sorte que $z_0 = z_n$), pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $\gamma([t_k, t_k + 1]) \subset B(z_k, \varepsilon) \cap B(z_{k+1}, \varepsilon)$.

   (c) Soit $a \in U_1 \cap U_2$ un point fixé. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe une chemin τ_k allant de a à z_k tel que l'image de τ_k est incluse dans U_1 si $z_k \in U_1$ et tel que l'image de τ_k est incluse dans U_2 si $z_k \in U_2$ (en particulier, l'image de τ_k est incluse dans $U_1 \cap U_2$) si $z_k \in U_1 \cap U_2$.

   (d) Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on note $\gamma_k := \gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$. Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le lacet $\tau_k \vee \gamma_k \vee \tau_{k+1}^{\mathrm{op}}$ est homotopiquement trivial. (Ici on pose $\tau_n := \tau_0$).

   (e) Montrer que le lacet γ est homotope au sens des lacets au lacet $\tau_0^{\mathrm{op}} \vee \tau_1 \vee \tau_1^{\mathrm{op}} \vee \cdots \vee \tau_{n-1}^{\mathrm{op}} \vee \tau_0$.

(f) En déduire que γ est homotopiquement trivial.

Exercice 14. L'objectif de cette exercice est de montrer qu'il n'existe pas de de fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$f \circ f = \exp.$$

On suppose par l'absurde qu'il existe une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$f \circ f(z) = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

1. Montrer que $\mathbb{C}^* \subset f(\mathbb{C})$ et en déduire que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ou que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
2. Montrer que l'on ne peut pas avoir $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
3. Supposons que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
   (a) Montrer que il existe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   (b) Montrer que il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g \circ \exp \circ g(z) = z + 2ik\pi$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   (c) En déduire que $g \circ \exp \circ g$ et bijective puis que g est bijective.
   (d) Conclure.