TD 3 : Exercices d'approfondissement

Exercice 1. Soit $a, c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $ac - |b|^2 < 0$.

1. Montrer que l'ensemble $E := \left\{ z \in \mathbb{C} \,;\, az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0 \right\}$ est une droite si $a = 0$ et un cercle si $a \neq 0$.
2. Montrer que toute droite et tout cercle peut s'écrire sous cette forme.
3. Que ce passe-t-il si $ac - |b|^2 \geqslant 0$?

Exercice 2 (Géométrie de l'inversion)**.** L'objectif de cet exercice est de comprendre géométriquement l'application $\iota : z \mapsto \frac{1}{z}$. On considère l'application

$$\overline{\iota} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{\overline{z}} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\overline{\iota} = \iota \circ c = c \circ \iota$ où c est la conjugaison complexe.
2. (Rappel de géométrie élémentaire). Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Soit C l'unique cercle de diamètre $|a - b|$ passant par a est b, c'est à dire que C est le cercle de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $\left|\frac{a-b}{2}\right|$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, montrer que $z \in C$ si est seulement si l'angle non-orienté $\widehat{azb}$ vaut $\frac{\pi}{2}$.
3. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que les triangles $z_1 z_2 0$ et $\overline{\iota}(z_1)\overline{\iota}(z_2)0$ sont semblables. Faire un dessin.
4. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $|\overline{\iota}(z_1) - \overline{\iota}(z_2)| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1||z_2|}$.
5. (a) Soit S^1 le cercle de centre 0 et de rayon 1. Montrer que $\overline{\iota}(S^1) = S^1$.
   (b) Soit D une droite passant par 0. Montrer que $\overline{\iota}(D) = D$.
   (c) Soit D une droite ne passant pas par 0. Montrer que $\overline{\iota}(D)$ est un cercle passant par 0. Faire un dessin dans les cas suivant : $S^1 \cap D = \varnothing$, $\#(S^1 \cap D) = 1$ et $\#(S^1 \cap D) = 2$.
   (Indication : considérer z_0, la projection orthogonale de 0 sur D puis utiliser les questions 2 et 3)
   (d) Soit C un cercle qui passe par 0. Montrer que $\overline{\iota}(C)$ est une droite ne passant pas par 0.
   (e) Soit C un cercle ne passant pas par 0. Montrer que $\overline{\iota}(C)$ est un cercle ne passant pas par 0. Faire un dessin.
   (f) Déduire des questions précédentes que ι envoie les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.
6. Redémontrer le résultat de la question 5f en utilisant le résultat de l'exercice 1.
7. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, déduire des questions précédentes une façon de construire $\overline{\iota}(z)$ à la règle et au compas. Puis en déduire une construction de $\iota(z)$ à la régle et au compas.

Exercice 3 (Quelques propriétés des transformations de Möbius)**.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. La transformation de Möbius associée à ces nombres est l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Si $c = 0$ on utilise la notation $\frac{-d}{c} = \infty$ de sorte que $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} = \mathbb{C}$.

1. Soit f une transformation de Möbius. Déterminer l'image de f. Montrer que f est une bijection sur son image et montrer que l'application réciproque est une transformation de Mobius que l'on déterminera.

2. Montrer que l'ensemble des transformations de Möbius muni de la composition est un groupe.
3. Soit f une transformation de Möbius. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $f = t_\alpha \circ m_\gamma \circ \iota \circ t_\beta$, où t_α et t_β sont les translations de vecteur α et β, où m_γ est la multiplication par γ et ι est l'application d'inversion.
4. À l'aide de l'exercice 2 et de la question 3, montrer que les transformations de Möbius envoient les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.
5. Notons $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le *demi-plan de Poincaré*. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$, alors la transformation de Möbius f associée à a, b, c, d vérifie $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.
6. Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}$ le *disque unité* aussi appelé *disque de Poincaré*. Soit $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la transformation de Möbius
$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}$$
vérifie $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
7. Montrer que la transformation de Möbius $\varphi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ induit un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$. (Un *biholomorphisme* est une application holomorphe bijective dont l'application réciproque est holomorphe).