L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre VII : Théorème des résidus et applications

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Théorème des résidus

Définition 1.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. Alors le *résidu de f en z_0* est le nombre complex

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,\varepsilon)} f(z)dz,$$

où $\varepsilon > 0$ vérifie $\overline{B}(z_0,\varepsilon) \subset U$.

Remarque 1.2:

1. Le théorème de Cauchy homologique (ou homotopique), montre que le résidu est indépendant du choix de ε dans cette définition.
2. Il nous arrivera, pour alleger les notations dans les calculs, d'écrire $\operatorname{res}_{z_0}(f(z))$ au lieu d'écrire $\operatorname{res}_{z_0}(f)$. Par exemple il nous arrivera d'écrire $\operatorname{res}_0\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$, au lieu d'écrire $\operatorname{res}_0(f)$ où $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est la fonction définie par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
3. On peut utiliser la même définition pour définir le résidu d'une fonction en un point z_0 où f est holomorphe, dans ce cas, par le théorème de Cauchy, on a toujours $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$. Ce même argument montre que si z_0 est une singularité éliminable, alors $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

Le théorème de Cauchy homologique permet d'obtenir facilement le résultat important suivant.

Théorème 1.3 (Théorème des résidus): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $Z \subset U$ un sous-ensemble fermé et discret de U. Soit $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit Γ un cycle de U,* homologiquement trivial dans *U et vérifiant* $\operatorname{Supp}(\Gamma) \subset U \setminus Z$. *Alors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z\in Z} \operatorname{ind}_\Gamma(z)\operatorname{res}_z(f).$$

Remarque 1.4:

1. Comme nous le verrons dans la preuve, la somme de droite est en fait un somme finie, même si Z peut-être infini.
2. De plus, comme $\operatorname{res}_z(f) = 0$ pour tout $z \in U \setminus Z$, on pourrait aussi écrire le résultat de ce théorème sous la forme
$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{z\in U\setminus \operatorname{Supp}(\Gamma)} \operatorname{ind}_\Gamma(z)\operatorname{res}_z(f).$$
3. Soulignons, que si U est *simplement connexe*, ce résultat s'applique à n'importe quel lacet de U. C'est sous cette forme que nous utiliserons le résultat le plus souvent.

Démonstration. Montrons déjà que la somme $\sum_{z\in Z} \operatorname{ind}_\Gamma(z)\operatorname{res}_z(f)$ est une somme finie. Pour cela, nous allons montrer que $\operatorname{ind}_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \in Z$ sauf éventuellement un nombre fini. Notons U_0 la réunion des composant connexe de $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ sur lesquelles l'indice par rapport à Γ est nul. Notons V la réunion des autres composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$. Par définition de «homologiquement trivial» on sait que $\mathbb{C}\setminus U \subset U_0$ et donc que $\overline{V} = V \cup \mathrm{Supp}(\Gamma) \subset U$. De plus, on sait aussi que l'unique composante connexe non-bornée de $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Supp}(\Gamma)$ est incluse dans U_0. En particulier, on en déduit que $\overline{V}$ est borné, c'est donc un compact inclus dans U. Comme $\overline{V}$ est compact est que Z est fermé et discret, on en déduit que $V\cap Z = \overline{V}\cap Z$ est un ensemble fini. Par construction, nous savons que $V\cap Z$ est l'ensemble des points z de Z vérifiant $\mathrm{ind}_\Gamma(z) \neq 0$ et donc cet ensemble est fini.

Notons $Z\cap V = \{z_1,\dots,z_m\}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k\in\{1,\dots,m\}$, on a $\overline{B}(z_k,\varepsilon)\subset U$ et tel que $\overline{B}(z_k,\varepsilon)\cap Z = z_0$, ceci est possible car U est ouvert et que Z est discret. Pour tout $k\in\{1,\dots,m\}$ on pose $\gamma_k : [0,2\pi] \to U$ le chemin défini par $\gamma_k(t) = z_k + \varepsilon e^{it}$, c'est à dire le lacet parcourant le cercle de rayon ε et de centre z_k une fois dans le sens direct. Nous allons montrer que le cycle

$$\Gamma' = \Gamma - \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_\Gamma(z_k)\gamma_k.$$

Nous allons montrer que Γ' est homologiquement trivial dans $U\setminus Z$. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus(U\setminus Z)$. Si $z\in\mathbb{C}\setminus U$, alors $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$ par hypothèse et $\mathrm{ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ pour tout $k\in\{1,\dots,m\}$ puisque $z\notin\overline{B}(z_0,\varepsilon)$. On en déduit que $\mathrm{ind}_{\Gamma'}(z) = 0$.

Si $z\in Z\setminus V$, alors $z\in U_0$ et on en déduit que $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0$. De plus, puisque $z\notin\{z_1,\dots,z_m\}$, on a par choix de ε que $\varepsilon\notin\overline{B}(z_k,\varepsilon)$ et donc que $\mathrm{ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ pour tout $k\in\{1,\dots,m\}$. En particulier, on en déduit que $\mathrm{ind}_{\Gamma'}(z) = 0$.

Il reste à traiter le cas $z\in\{z_1,\dots,z_m\}$. Soit $k\in\{1,\dots,m\}$ tel que $z_k = z$. On a alors $\mathrm{ind}_{\gamma_k}(z) = 1$ et $\mathrm{ind}_{\gamma_j}(z) = 0$ pour tout $j\in\{1,\dots,m\}\setminus\{k\}$. On en déduit que

$$\mathrm{ind}_{\Gamma'}(z) = \mathrm{ind}_\Gamma(z) - \sum_{j=1}^{m}\mathrm{ind}_\Gamma(z_j)\,\mathrm{ind}_{\gamma_j}(z) = \mathrm{ind}_\Gamma(z) - \mathrm{ind}_\Gamma(z_k) = 0.$$

Par définition, cela veut dire que Γ' est homologiquement trivial dans $U\setminus Z$. Puisque de plus f est holomorphe sur $U\setminus Z$, le théorème de Cauchy homologique implique que $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0$ et donc que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^{m}\mathrm{ind}_\Gamma(z_k)\int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m}\mathrm{ind}_\Gamma(z_k)\Big(2i\pi\,\mathrm{res}_{z_k}(f)\Big)\\ &= 2i\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{ind}_\Gamma(z_k)\,\mathrm{res}_{z_k}(f) = 2i\pi\sum_{z\in Z}\mathrm{ind}_\Gamma(z)\,\mathrm{res}_z(f).\end{aligned}$$

□

Pour reformuler ce résultat dans le cas particulier le plus souvent utilisé en pratique, nous énonçons deux théorèmes que nous ne démontrerons pas ici mais qui, dans tous les cas rencontrés en pratique sont triviaux à vérifier.

Théorème 1.5 (Jordan): *Soit $\gamma : [a,b]\to\mathbb{C}$ un lacet continue et* simple *(aussi appelé* lacet de Jordan*). Alors $\mathbb{C}\setminus\gamma\big([a,b]\big)$ a exactement deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non-bornée. La composante connexe bornée est appelée* l'intérieur du lacet *et la composante connexe non-bornée appelée* l'exterieur du lacet.

Remarque 1.6:

1. Il est clair que si γ est un lacet de Jordan, alors $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$ pour tout z dans l'extérieur de γ. En particulier, si γ est un lacet de Jordan dans un ouvert U tel que l'intérieur de γ est contenue dans U, alors γ est homologiquement trivial dans U. On peut même montrer que γ est homotopiquement trivial, mais c'est plus difficile.
2. On dira qu'un lacet de Jordan $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ est orienté dans le sens direct si $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ pour tout z dans l'intérieur de γ.

Remarque 1.7: Pour les résultats que nous allons énoncer dans la suite, l'étudiant pointilleux, qui ne souhaite pas utiliser des théorèmes non démontrés dans le cours, pourra remplacer l'hypothèse «*Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U.*» par l'hypothèse «*Soit γ un lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U tel que $\mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma)$ a deux composantes connexes, l'une non-bornée et une autre noté U_1 qui est bornée, incluse dans U et vérifie* $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ *pour tout $z \in U_1$.*». Puis, remplacer «*l'intérieur de γ*» par «*la composante U_1*». Ces deux hypothèses sont en fait équivalentes, immédiatement vérifiable en pratique, et c'est vraiment la seconde version que l'on utilise dans les preuves.

La version du théorème des résidus la plus souvent utilisée est la suivante.

Théorème 1.8 (Théorème des résidus): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U. Soit γ un lacet de Jordan $\mathscr{C}^1$ par morceaux de U, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Supposons que f n'a ni zéro ni pôle sur l'image de γ, et notons $z_1, \ldots, z_m$ l'ensemble des pôles de f situés dans l'intérieur de γ. Alors*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k}(f).$$

2 Méthodes de calcul de résidus

Pour pouvoir utiliser le théorème des résidu, il est important de savoir calculer des résidus en pratique. Observons déjà que par la définition et la linéarité de l'intégrale, le résidu est linéaire de la façon suivante.

Proposition 2.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$. Soit $f, g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a*

$$\mathrm{res}_{z_0}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{res}_{z_0}(f) + \mu \mathrm{res}_{z_0}(g).$$

Ensuite observons que le résidu peut se lire directement sur le développement en série de Laurent.

Proposition 2.2: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. On considère le développement en série de Laurent de la fonction f centré en z_0*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n,$$

alors

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = a_{-1}.$$

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$2i\pi\,\mathrm{res}_{z_0}(f) = \int_{C(z_0,\varepsilon)} f(z)dz = \int_{C(z_0,\varepsilon)} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n\right)dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_{C(z_0,\varepsilon)} a_n(z-z_0)^n dz\right) = 2i\pi a_{-1}.$$

Ici nous avons utilisé la convergence normale de la série de Laurent sur les compacts pour pouvoir intervertir le signe $\int$ et le signe $\sum$. $\square$

Exemple 2.3: On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Le développement en série de Laurent de f au point 0 est

$$\sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}$$

Donc

$$\mathrm{res}_0\left(e^{\frac{1}{z}}\right) = \mathrm{res}_0(f) = 1.$$

Comme mentionné précédemment, d'après le théorème de Cauchy, le résidu de f est nul en un point où la fonction f est holomorphe, c'est donc le cas pour les singularités éliminables. Pour calculer le résidu en un pôle, on peut utiliser la propriété suivante.

Proposition 2.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors, en notant g la fonction définie par $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$, on a*

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0).$$

En particulier, on a le corollaire suivant très utile en pratique.

Corollaire 2.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit z_0 une singularité isolée de f. Si z_0 est un pôle simple de f, alors, en notant g la fonction définie par $g(z) = (z-z_0)f(z)$, on a*

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = g(z_0).$$

Démonstration de la proposition 2.4. On considère le développement en série de Laurent de f au point z_0 :

$$f(z) = \sum_{n\geqslant -m} a_n(z-z_0)^n.$$

Le developpement en série de Taylor en z_0 de la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ est alors

$$g(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n.$$

En dérivant $m - 1$ fois, on trouve que le developpement en série de Taylor en z_0 de g^{m-1} est

$$g^{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-m} n(n-1)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m+1} = \sum_{n=m}^{+\infty} a_{n-m} n(n-1)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m+1}.$$

En évaluant cette relation en z_0, on trouve

$$g^{m-1}(z_0) = (m-1)! a_{-1}.$$

En. vu de la proposition 2.2, on trouve que $\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$. □

Exemple 2.6: Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ la fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ a un pôle d'ordre 1 en i et un pôle d'ordre 1 en $-i$. D'après le formule précédente, on a

$$\mathrm{res}_i(f) = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i} \quad \text{et} \quad \mathrm{res}_i(f) = \frac{1}{-i-i} = \frac{-1}{2i}.$$

Exemple 2.7: Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ la fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2} = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ a un pôle d'ordre 2 en i et un pôle d'ordre 2 en $-i$. D'après le formule précédente, en notant $g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$, on a

$$\mathrm{res}_i(f) = g'(i) = \frac{-2}{(i+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

3 Principe de l'argument et théorème de Rouché

Le théorème des résidus peut être utilisé pour compter le nombre de zéros et de pôles de fonctions méromorphes. Pour cela commençons par l'observation suivante.

Lemme 3.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit $z_0 \in U$. Alors*

$$\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = \mathrm{ord}_{z_0}(f).$$

Démonstration. Notons $m := \mathrm{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$. D'après ce que nous avons vu dans le chapitre VI, il existe une fonction holomorphe $g \in \mathscr{M}(U)$, holomorphe au voisinage de z_0, telle que $g(z_0) \neq 0$ et telle que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in U.$$

On a alors

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z),$$

et donc
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{(z-z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$
Comme le fonction $\frac{g'}{g}$ est holomorphe sur $U \cup \{z_0\}$, on en déduit que
$$\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m\,\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{g'}{g}\right) = m = \mathrm{ord}_{z_0}(f).$$
□

Remarque 3.2: Cet énoncé implique donc que $\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m$ si z_0 est un zéro d'ordre m de f et que $\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = -m$ si z_0 est un pôle d'ordre m de f.

En vu de ce lemme, une application directe du théorème des résidus implique alors le résultat suivant.

Théorème 3.3 (Principe de l'argument): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe. Soit Γ un 1-cycle homologiquement trivial de U tel que f n'a pas de zéro ni de pôle sur* $\mathrm{Supp}(\Gamma)$*, alors on a*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\in U} \mathrm{ind}_\Gamma(z)\,\mathrm{ord}_z(f).$$

Comme cas particulier, on obtient la formulation plus classique suivante.

Corollaire 3.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U telle que f n'a ni zéro ni pôle sur l'image de γ. Notons, $z_1, \dots, z_k$ les zéros de f dans l'intérieur de γ et notons $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités. De même, notons $w_1, \dots, w_\ell$ les pôles de f dans l'intérieur de γ et notons $p_1, \dots, p_\ell$ leurs ordres (en tant que pôles). Alors on a*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^k m_j - \sum_{j=1}^\ell p_j.$$

Démonstration. Nous utilisons juste le théorème 3.3, en remarquant (comme ci-dessus) que $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ pour tout z dans l'intérieur de γ et que γ est homologiquement trivial dans U. □

Si f est holomorphe, alors l'intégrale ci-dessus calcul directement le nombre de zéros (compté avec multiplicité) de f dans l'intérieur de γ. De façon plus générale, si l'on ceut calculer le nombre de fois où f prend une valeur $w \in \mathbb{C}$, on peut utiliser la version suivante du principe de l'argument.

Corollaire 3.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Soit $w \in \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{O}(U)$ une fonction holomorphe sur U telle que f ne prend jamais la valeur w sur l'image de γ. Notons, $z_1, \dots, z_k$ les points de l'intérieur de γ sur lesquels f prend la valeur w avec multiplicités $m_1, \dots, m_k$. Alors on a*
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \sum_{j=1}^k m_j.$$

On parle de *principe de l'argument* car l'intégrale apparaissant dans ce corollaire vérifie, par changement de variable,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{f\circ\gamma}\frac{d\xi}{\xi - w} = \mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(w),$$

et compte donc le nombre de fois où l'image de γ par f tourne autour de w. Or à un facteur 2π près, ce nombre est la variation de *l'argument* de $f\circ\gamma(t)-w$ lorsque t varie dans l'ensemble de définition de γ.

En pratique, pour calculer le nombre de zéros de certaines fonctions holomorphes dans certaines régions du plan, on pourra essayer d'utiliser le théorème de Rouché.

Théorème 3.6 (Rouché): *Soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f,g:U\to\mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Soit γ un lacet de Jordan simple, $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orienté dans le sens directe dans U et tel que l'intérieur de γ soit inclus dans U. Supposons que*

$$|g(z)-f(z)| < |f(z)| \quad \forall z\in \mathrm{im}(\gamma),$$

alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans l'intérieur de γ.

Démonstration. Pour tout $\lambda\in[0,1]$ on note $h_\lambda := (1-\lambda)f+\lambda g = f+\lambda(g-f)$. Par hypothèse on a

$$\lambda|g(z)-f(z)| \leqslant |g(z)-f(z)| < |f(z)| \quad \forall z\in\mathrm{im}(\gamma)$$

et en particulier, on en déduit que pour tout $\lambda\in[0,1]$, h_λ ne s'annule pas sur $\mathrm{im}(\gamma)$. La fonction $Z:[0,1]\to\mathbb{C}$ définie par

$$Z(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}dz$$

est donc bien définie, et ne prend que des valeurs entières d'après le principe de l'argument. De plus, par continuité sous le signe intégral, la fonction Z est continue. Comme $[0,1]$ est connexe, on en déduit que Z est constante. De plus, comme $h_0 = f$, le principe de l'argument implique que $Z(0)$ est le nombre de zéros de f dans l'intérieur de γ comptés avec multiplicités, et comme $h_1 = g$ le principe de l'argument implique que $Z(0)$ est le nombre de zéros de g dans l'intérieur de γ comptés avec multiplicités. D'où le résultat. □

Exemple 3.7: Nous cherchons à compter le nombre de zéros dans $B(0,1)$ (comptés avec multiplicité) de la fonction $z\mapsto z^5-3z+1$. On pose $g(z) = z^5-3z+1$ et $f(z) = 3z-1$. La fonction f a un unique zéro dans $B(0,1)$, le point $\frac{1}{3}$ avec multiplicité 1. De plus, pour tout $z\in C(0,1)$ on a

$$|g(z)-f(z)| = |z^5| = 1 < 2 \leqslant |3z-1| = |f(z)|.$$

Le théorème de Rouché implique donc que g a exactement un zéro dans $B(0,1)$.

Exemple 3.8: Nous cherchons à compter le nombre de zéros dans $B(0,2)$ (comptés avec multiplicité) de la fonction $z\mapsto z^5-3z+1$. On pose $g(z) = z^5-3z+1$ et $f(z) = z^5$. La fonction f a un unique zéro dans $B(0,0)$, le point 0 avec multiplicité 5. De plus, pour tout $z\in C(0,2)$ on a

$$|g(z)-f(z)| = |-3z+1| \leqslant 7 < 32 = 2^5 = \leqslant |z^5| = |f(z)|.$$

Le théorème de Rouché implique donc que g a 5 zéros (comptés avec multiplicité) dans $B(0,2)$.

4 Applications au calcul d'intégrales réelles

Dans cette section, nous allons illustrer comment le théorème des résidus peut-être utilisé pour calculer différents types d'intégrales réelles.

Remarque 4.1: **ATTENTION !** Nous donnons ici des résultats généraux avec un certains nombre de formules, néanmoins nous soulignons fortement que **ces formules ne sont pas à connaitre par cœur, mais il faut savoir les retrouver dans chaque cas particulier**. Il est cependant bien de connaitre les différents lemmes permettant d'estimer les différents termes d'erreur, ainsi que leur démonstration.

4.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

Dans cette partie on cherche à calculer une intégrale de la forme

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

où $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité. Cette hypothèse garantie que la fonction $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ définie par

$$R(\cos\theta, \sin\theta), \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

est bien définie et continue (donc intégrable).

Remarque 4.2 (Idée à retenir): L'idée pour calculer cette intégrale est de se ramener à une intégrale curviligne sur le cercle unité en utilisant le "changement de variable"

$$z = e^{i\theta},$$

qui implique

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} \quad \text{et} \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

De façon plus formelle, on introduit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{z}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right).$$

C'est bien une fonction méromorphe car R est une fraction rationnelle, de plus f n'a pas de pôles sur $C(0,1)$ par notre hypothèse sur R. On note $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\int_\gamma f(z)dz &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)d\theta = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta.\end{aligned}$$

D'autre part, le théorème des résidus implique que

$$\frac{1}{i}\int_\gamma f(z)dz = 2\pi \sum_{z\in B(0,1)} \mathrm{res}_z(f).$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 4.3: *Soit $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur le cercle unité. Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ la fonction méromorphe définie par*

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right).$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi \sum_{z \in B(0,1)} \operatorname{res}_z(f).$$

Exemple 4.4: Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel vérifiant $a > 1$. On cherche à calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}.$$

En appliquant l'approche ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} &= \int_{C(0,1)} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1} \\ &= \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}, \end{aligned}$$

où

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2-1} \in B(0,1) \quad \text{et} \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2-1} \notin B(0,1).$$

Le résidu en z_1 de la fonction $z \in\mapsto \frac{1}{z^2+2az+1}$ est donc

$$\operatorname{res}_{z_1}\left(\frac{1}{z^2+2az+1}\right) = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}},$$

et le théorème des résidus implique alors que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2}{i} \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2+2az+1} = 4\pi \operatorname{res}_{z_1}\left(\frac{1}{z^2+2az+1}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exemple 4.5: Notons que dans certains cas, on peut en déduire encore d'autres intégrales. Par exemple, ici, par périodicité et parité de la fonction sous l'intégrale, on trouve

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

4.2 Intégrales sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationelle

Dans cette section, nous étudions les intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$

où f est une fraction rationnelle (à coefficients complexes) qui n'a pas de pôle sur l'axe réel. Si l'on écrit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ sont premiers entre eux, comme par hypothèse Q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, une condition nécéssaire et suffisante pour que f soir intégrable sur $\mathbb{R}$ est que

$$\deg Q \geqslant \deg P + 2.$$

Ce que nous supposerons à partir de maintenant.

Remarque 4.6 (Idée à retenir): L'idée pour calculer cette intégrale est de calculer $\int_{\gamma^R} f(z)dz$ le long du lacet $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$ ci-dessous. De faire tendre $R \to +\infty$ et de montrer que l'intégrale de f le long de γ_2^R tend vers 0 et que l'intégrale de f le long de γ_1^R tend vers l'intégrale que l'on recherche.

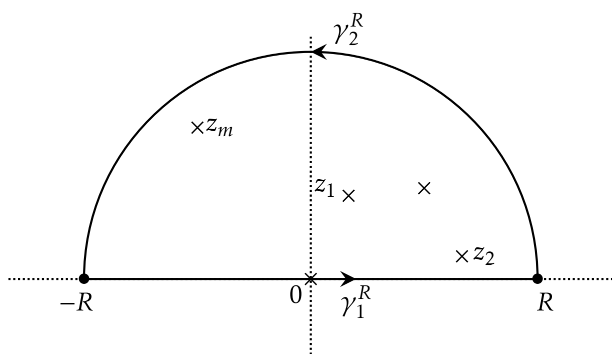


figure 1.

De façon plus précise, on note

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Im}(z) > 0\} \quad \text{le demi-plan de Poincaré.}$$

On note $z_1, \dots, z_m$, les pôles de la fonction f qui appartiennent à $\mathbb{H}$. Notons que f est une fonction méromorphe car c'est une fraction rationnelle. On note $R_0 = \max_{k \in \{1,\dots,m\}} |z_k|$. Pour tout $R > R_0$ on introduit le chemin $\gamma_1^R : [-R, R] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_1^R(t) = t$ pour tout $t \in [-R, R]$ et le chemin $\gamma_2^R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma_2^R(t) = Re^{it}$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant \pi$. C'est à dire les chemins représentés ci-dessus. D'une part, nous avons

$$\int_{\gamma_R^1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(t)dt,$$

et donc, puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_1^R} f(z)dz.$$

D'autre part, pour tout $R > R_0$, le théorème des résidus implique que, en notant $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k}(f) = 2i\pi \sum_{z \in \mathbb{H}} \mathrm{res}_z(f).$$

Comme

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)dz,$$

il nous reste juste à calculer la limite quand $R \to +\infty$ de l'intégrale $\int_{\gamma_2^R} f(z)dz$. Pour cela, il suffit de voir que

$$\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)dz\right| = \ell(\gamma_2^R) \sup_{z\in\gamma_2^R([0,\pi])} |f(z)| = \pi R \sup_{|z|=R} |f(z)| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour obtenir cela, nous avons utilisé le fait que $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ est le quotient de deux polynôme tels que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. En effet, cette condition implique qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(z)| \leqslant \frac{\alpha}{|z|^2}$ pour $|z|$ suffisamment grand en particulier, pour R suffisamment grand

$$\pi R \sup_{|z|=R} |f(z)| \leqslant \pi R \sup_{|z|=R} \frac{\alpha}{|z|^2} = \frac{\alpha\pi}{R} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous avons donc démontré le résultat suivant:

Proposition 4.7: *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et telle que f n'a pas de pôle sur l'axe réel. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2i\pi \sum_{z\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_z(f).$$

Illustrons cela sur l'exemple suivant (que nous avions déjà traité de cette façon dans l'exercice 5 du chapitre 4).

Exemple 4.8: Calculons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ici $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$. La fonction f vérifie bien les hypothèse de la propriété puisque le dénominateur est de degré 2, que le numérateur est de degré 0 et que de plus f a deux pôles simples, l'un en $i \in \mathbb{H}$ et l'autre en $-i \notin \mathbb{H}$. La proposition implique donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2i\pi\,\mathrm{res}_i(f) = \frac{2i\pi}{i+i} = \pi.$$

Voici un exemple un autre exemple.

Exemple 4.9: Calculons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$$

Ici

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{(z^2-i)(z^2+i)} = \frac{1}{(z-\xi_1)(z-\xi_2)(z-\xi_3)(z-\xi_4)},$$

où

$$\xi_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \xi_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \xi_3 = e^{3i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \xi_4 = e^{-3i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

La fonction f vérifie bien les hypothèse de la propriété puisque le dénominateur est de degré 4, que le numérateur est de degré 0 et que de plus f n'a pas de pôle réel, puisque l'ensemble de ses pôles est $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Les pôles du demi-plan de Poincaré sont donc ξ_1 et ξ_3. La proposition implique donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2i\pi\Big(\mathrm{res}_{\xi_1}(f) + \mathrm{res}_{\xi_3}(f)\Big).$$

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{\xi_1}(f) &= \frac{1}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)(\xi_1-\xi_4)} = \frac{2\sqrt{2}}{((1+i)-(1-i))((1+i)-(-1+i))((1+i)-(-1-i))} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2i\times 2\times(2+2i)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{-1+i} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(-1-i)}{2} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

De même on trouve

$$\mathrm{res}_{\xi_3}(f) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^4} = 2i\pi\Big(\mathrm{res}_{\xi_1}(f)+\mathrm{res}_{\xi_3}(f)\Big) = 2i\pi\left(-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Notons que cette approche peut aussi permettre de calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de fonctions un peu plus générale que des fractions rationnelle. En effet, les hypothèses que l'on a utilisé étaient que f était méromorphe avec un nombre fini de pôle dans $\mathbb{H}$, pas de pôle sur $\mathbb{R}$ et une décroissance suffisamment rapide à l'infini. Pour détailler ce dernier point, notons le lemme suivant.

Lemme 4.10: *Soit $R_0 > 0$. On note $S := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0 \text{ et } |z| \geqslant R_0\}$. Soit $f = S \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que*

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in S}} zf(z) = 0.$$

Alors si on pose $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$ et pour tout $R \geqslant R_0$ on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. L'hypothèse implique qu'il existe $M > R_0$ tel que pour tout $z \in S$ vérifiant $|z| \geqslant M$ on a $|zf(z)| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $R \geqslant M$, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \leqslant \pi(\theta_2-\theta_1)R\sup_{\substack{z\in S \\ |z|=R}}|f(z)| \leqslant \pi(\theta_2-\theta_1)\varepsilon.$$

Ce qui implique bien le résultat annoncé. □

La même preuve que celle de la proposition 4.7 implique le résultat plus général suivant.

Proposition 4.11: *Soit f une fonction méromorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$ qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$, qui n'a qu'un nombre fini de pôle sur $\mathbb{H}$ et qui vérifie de plus que $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{\mathbb{H}}}} |zf(z)| = 0$. Alors l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2i\pi\sum_{z\in\mathbb{H}}\mathrm{res}_z(f).$$

Plutôt que de faire les détails de la preuve, nous la faisons dans un exemple.

Exemple 4.12: Considérons la détermination de la racine carré de la fonction $z \mapsto z+i$, définie sur $\mathbb{C} \setminus (-i+\mathbb{R}_-)$, donné par

$$\sqrt{z+i} := e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z+i)}$$

où Log est la détermination principale du logarithme. On peut alors chercher à calculer, sous réserve qu'elle existe, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+i}}{1+x^2}dx.$$

Notons $f : \mathbb{C} \setminus (-i+\mathbb{R}_-)$ la fonction définie par

$$f(z) = \frac{\sqrt{z+i}}{1+z^2}.$$

La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-i+\mathbb{R}_-)$ avec un pôle simple en i. De plus, on a pour tout z suffisamment grand dans $\overline{\mathbb{H}}$, on a

$$\begin{aligned} |z||f(z)| &= \frac{|z|}{|1+z^2|}\left|e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z+i)}\right| = \frac{|z|}{|1+z^2|}e^{\frac{1}{2}\ln|z+i|} \leqslant \frac{|z|}{|1+z^2|}e^{\frac{1}{2}\ln(|z|+1)} = \frac{|z|\sqrt{|z|+1}}{|1+z^2|} \\ &\leqslant \frac{|z|\sqrt{|z|+1}}{|z|^2-1} \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Avec les notations de la figure 1, le lemme implique alors

$$\int_{\gamma_2^R} f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, la majoration ci dessus implique que $f(x) \leqslant \frac{\sqrt{|x|+1}}{x^2-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc, d'après le critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, le théorème des résidus implique que pour tout $R > 1$, on a

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = 2i\pi \operatorname{res}_i(f) = 2i\pi\frac{\sqrt{2i}}{2i} = \pi\sqrt{2i} = \pi(1+i).$$

En vu de ceci, l'égalité

$$\int_{\gamma^R} f(z)dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)dz,$$

implique que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \pi(1+i).$$

4.3 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$

Dans cette section nous étudions des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt.$$

Ce genre d'intégrale apparait en particulier pour calculer des transformées de Fourier, mais notons aussi qu'en utilisant la relation $e^{it} = \cos t + i\sin t$, comprendre ces intégrales nous permettra aussi de calculer les intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos t\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin t\,dt.$$

Nous allons pour l'instant supposer que $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle telle que, $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ et que f n'a pas de pôles sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4.13 (Idée à retenir): L'idée est de faire le même raisonnement que celui de la section précédente, en utilisant le chemin d'intégration décrit dans la figure 1, mais en faisant une estimation plus fine pour contrôler le terme d'erreur. Pour cela, il faut se souvenir que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{2}{\pi}\theta \leqslant \sin\theta \leqslant \theta.$$

Notons $z_1, \ldots, z_m$ les pôles de f qui appartiennent à $\mathbb{H}$ et posons $R_0 := \max_{1\leqslant k\leqslant m} |z_k|$. Pour tout $R \geqslant R_0$ on considère les chemins γ_1^R, γ_2^R et $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$ décrits dans la figure 1. Tout d'abord, le théorème des résidus implique que pour tout $R \geqslant R_0$, on a

$$\int_{\gamma^R} f(z)e^{iz}dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k}(f(z)e^{iz}) = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

Nous allons maintenant étudier l'intégrale le long de γ_2^R. On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2^R} f(z)e^{iz}dz\right| &= \left|\int_0^\pi f\left(Re^{i\theta}\right)e^{iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^\pi \left|f\left(Re^{i\theta}\right)e^{iRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}\right|d\theta \\
&\leqslant R\Big(\max_{\theta\in[0,\pi]} |f(Re^{i\theta})|\Big)\int_0^\pi \left|e^{iR(\cos\theta+i\sin\theta)}\right|d\theta = R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\theta \\
&= 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}d\theta \leqslant 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}d\theta \\
&= 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\left[\frac{-\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leqslant 2R\Big(\max_{|z|=R}|f(z)|\Big)\frac{\pi}{2R} \\
&= \pi \max_{|z|=R}|f(z)| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Dans la dernière ligne nous avons utilisé le fait que $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ de sorte que $|f(z)| \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. En vu de cela, et du fait que

$$\int_{\gamma_1^R} f(z)e^{iz}dz = \int_{-R}^{+R} f(t)e^{it}dt,$$

la relation

$$\int_{\gamma^R} f(z)e^{iz}dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)e^{iz}dz$$

implique que que

$$\boxed{\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(t)e^{it}dt = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).}$$

À priori, cela n'est pas suffisant pour dire que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge. Mais une integration par partie donne, pour tout

$$\int_0^R f(t)e^{it} = [-if(t)e^{it}]_0^R + \int_0^{+\infty} f'(t)ie^{it}dt = -if(R)e^{iR} + if(0)\int_0^{+\infty} f'(t)ie^{it}dt.$$

Mais f' est une fraction rationnelle telle que le degré du dénominateur et plus grand que le degré du numérateur plus 2, donc la fonction $f'(t)ie^{it}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Comme par ailleurs $-if(R)e^{iR} \to 0$

quand $R \to +\infty$, nous voyons que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge, et l'on montre de même que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 f(t)e^{it}dt$ converge.

Nous avons donc démontré la proposition suivante

Proposition 4.14: *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que* $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ *et telle que f n'a pas de pôle sur l'axe réel. Alors l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge et l'on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.15: Pour tout réel $a > 0$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi e^{-a}}{a},$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi e^{-a}}{a} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{a^2+t^2}dt = 0.$$

En effet, ici la fonction f est la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{a^2+z^2} = \dfrac{1}{(z-ia)(z+ia)}$. La fonction $z \mapsto f(z)e^{iz}$ a donc un pôle simple en $ia \in \mathbb{H}$ et un pôle simple en $-ia \notin \mathbb{H}$, et l'on a

$$\mathrm{res}_{ia}\left(f(z)e^{iz}\right) = \frac{e^{i(ia)}}{(ia+ia)} = \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{-ie^{-a}}{2a}$$

La proposition précédente implique alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{a^2+t^2}dt = 2i\pi\,\mathrm{res}_{ia}(f(z)e^{iz}) = 2i\pi\left(\frac{-ie^{-a}}{2a}\right) = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

En lisant attentivement la démonstration de la proposition 4.14, on remarque que les hypothèses essentielles que nous avons utilisé sur f sont, la finitude des pôles dans $\mathbb{H}$, l'absence de pôles sur $\mathbb{R}$ et le fait que $\lim\limits_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in S}} |f(z)| = 0$. En effet, les arguments ci-dessus impliquent facilement le lemme suivant

Lemme 4.16: *Soit $R_0 > 0$. On note $S := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ et $|z| \geqslant R_0\}$. Soit $f : S \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que*

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in S}} |f(z)| = 0.$$

Alors si on pose $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$ et pour tout $R \geqslant R_0$, on a

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{iz}dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Grace à ce lemme, la proposition 4.14 se généralise de la façon suivante.

Proposition 4.17: *Soit f une fonction méromorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$ qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$, qui n'a qu'un nombre fini de pôle sur $\mathbb{H}$ et qui vérifie de plus que* $\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{\mathbb{H}}}} |f(z)| = 0$. *Alors*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(t)e^{it}dt = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

Remarque 4.18: À priori, cette la preuve que nous donnons de cette proposition n'implique pas que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it}dt$ converge. C'est en fait le cas, comme nous le démontrerons dans l'exercice 27.

Nous continuons dans la situation de cette proposition, mais nous allons supposer que la fonction f a un pôle simple en $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, nous considérons le chemin d'intégration suivant:

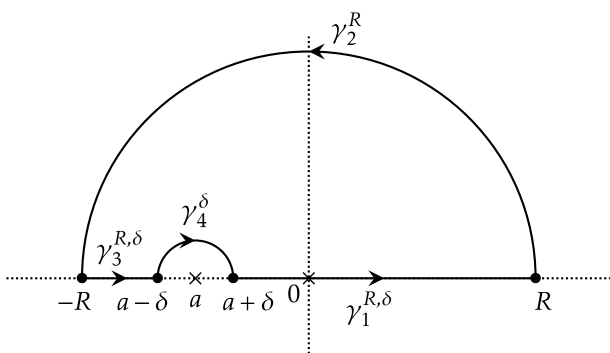


figure 2.

En vu du lemme 4.10, il nous reste à comprendre $\int_{\gamma_4^\delta} f(z)e^{iz}dz$. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant

Lemme 4.19: *Soit $a \in \mathbb{R}$ soit f une fonction méromorphe définie au voisinage de a et ayant un pôle simple en a. Pour tout $\delta > 0$, on considère le chemin $\gamma_\delta : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma_\delta(\theta) = a + \delta e^{i\theta}$ pour tout $\theta \in [0,\pi]$. Alors on a*

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\gamma_\delta} f(z)dz = i\pi\, \mathrm{res}_a(f).$$

Démonstration. Notons $\alpha = \mathrm{res}_a(f)$. Comme a est un pôle simple de f, il existe une fonction g, holomorphe dans un voisinage de a telle que pour tout z suffisamment proche de a, on a

$$f(z) = \frac{\alpha}{z-a} + g(z).$$

En intégrant cette relation le long de γ_δ pour $\delta > 0$ suffisamment petit, on obtient

$$\int_{\gamma_\delta} f(z)dz = \alpha \int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_\delta} g(z)dz.$$

Un calcul direct montre que $\int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z} = i\pi$ et puisque g est holomorphe, on a aussi que $\int_{\gamma_\delta} g(z)dz \to 0$ quand $\delta \to 0$. D'où le résultat. □

De la on déduit la proposition suivante

Proposition 4.20: *Soit f une fonction méromorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$ qui n'a qu'un nombre fini de pôle sur $\mathbb{H}$ et qui a pour unique pôle réel un pôle simple en $a \in \mathbb{R}$. Supposons de plus que $\lim\limits_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\overline{\mathbb{H}}}} |f(z)| = 0$.*

Alors

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(\int_{-R}^{a-\varepsilon} f(t)e^{it}dt + \int_{a+\varepsilon}^{R} f(t)e^{it}dt \right) = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}) + i\pi\,\mathrm{res}_a(f(z)e^{iz}).$$

Remarque 4.21: Ici, encore une fois nous ne disons pas que les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(t)e^{it}$ et $\int_{-\infty}^a f(t)e^{it}$ convergent, c'est d'ailleurs faux en général.

Démonstration. En notant $\gamma^{R,\delta} = \gamma_3^{R,\delta} \vee \gamma_4^{\delta} \vee \gamma_1^{R,\delta} \vee \gamma_2^R$, on a d'après le théorème de résidus, pour tout R suffisamment grand et pour tout δ suffisamment petit

$$\int_{\gamma^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}).$$

D'autre part, on a

$$\int_{\gamma^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz = \int_{\gamma_1^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_3^{R,\delta}} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_4^{\delta}} f(z)e^{iz}dz.$$

Donc

$$\int_{-R}^{a-\delta} f(t)e^{it}dt + \int_{a+\delta}^{R} f(t)e^{it}dt = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{H}} \mathrm{res}_w(f(z)e^{iz}) - \int_{\gamma_4^{\delta}} f(z)e^{iz}dz - \int_{\gamma_2^R} f(z)e^{iz}dz,$$

en faisant tendre $\delta \to 0$ et $R \to +\infty$, les lemmes 4.16 et 4.19 impliquent le résultat. □

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.22: On cherche à calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Observons déjà que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. En effet, en $t = 0$ la fonction $\frac{\sin t}{t}$ est intégrable car elle se prolonge continûment en 0. En $+\infty$, on voit que la fonction est intégrable un faisant une intégration par partie. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \int_\delta^R \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \left(\int_\delta^R \frac{\sin t}{t} dt + \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt \right).$$

En appliquant la proposition précédente à la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$, on obtient

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \left(\int_\delta^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt \right) = i\pi\,\mathrm{res}_0\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) = i\pi$$

En prenant la partie imaginaire, on en déduit que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \delta\to 0}} \left(\int_\delta^R \frac{\sin t}{t} dt + \int_{-R}^{\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt \right) = \pi$$

et donc que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4.4 Quelques intégrales sur $\mathbb{R}_+$

Nous illustrons maintenant une méthode permettant de calculer certaines intégrales sur $\mathbb{R}_+$ inaccessibles par les méthodes précédentes. On se concentrera sur des intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx, \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Où f est une fonction rationnelle. Commençons par le première type. On suppose que $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle qui n'a pas de pôles sur $\mathbb{R}_+$ sauf éventuellement en 0 où l'on suppose que f a au plus un pôle d'ordre 1. On suppose aussi que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. On fixe $0 < \alpha < 1$. D'après le critère de Riemann, la fonction $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons maintenant calculer

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t)dt$$

en utilisant le théorème des résidus.

Remarque 4.23 (Idée à retenir): L'idée pour faire ce calcul est de prendre une détermination de la puissance α-ième sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ et d'intégrer la fonction $z \mapsto z^\alpha f(z)$ sur le chemin suivant

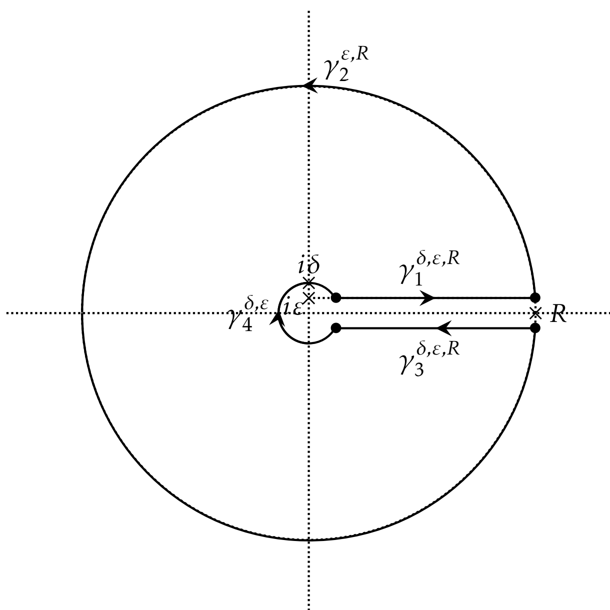


figure 3.

On pose $\gamma^{\delta,\varepsilon,R} := \gamma_1^{\delta,\varepsilon,R} \vee \gamma_2^{\varepsilon,R} \vee \gamma_3^{\delta,\varepsilon,E} \vee \gamma_4^{\delta,\varepsilon}$. De façon détaillée, on considère Log_0 la détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ donnée par

$$\mathrm{Log}_0(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \quad \forall \theta \in]0, 2\pi[.$$

La puissance α-ième associée à ce choix de logarithme est la fonction $z \mapsto z^\alpha$ où

$$z^\alpha := e^{\alpha \mathrm{Log}_0 z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

La fonction $z \mapsto z^\alpha f(z)$ est alors une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Le théorème des résidus implique que pour $\delta > 0$ suffisamment petit et pour R suffisamment grand, on a

$$\int_{\gamma^{R,\delta}} z^\alpha f(z)dz = 2i\pi \sum_{w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+} \mathrm{res}_w(z^\alpha f(z)).$$

Par ailleurs, comme dans la preuve du lemme 4.10, on montre que

$$\int_{\gamma_2^{\varepsilon,R}} z^\alpha f(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, on a

$$\left|\int_{\gamma_4^{\delta,\varepsilon}} z^\alpha f(z)dz\right| \leqslant 2\delta\pi \max_{|z|=\delta} |z^\alpha f(z)| = 2\delta^{1+\alpha}\pi \max_{|z|=\delta} |f(z)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, comme f a au plus un pôle d'ordre 1 en 0, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(z)| \leqslant \frac{c}{|z|}$ dans un voisinage de 0, ce qui permet immédiatement de conclure de l'intégrale le long de γ_4^δ tend vers 0. Il reste donc à comprendre les intégrale le long de $\gamma_1^{R,\delta}$ et de $\gamma_3^{R,\delta}$. Pour cela observons que l'on a, pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $x > 0$ et $y > 0$,

$$(x+iy)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}_0(x+iy)} = e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2+y^2})+i\arg(x+iy)\right)} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2})\right)} = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha.$$

Ici on a utilisé le fait que $\arg(x+iy) \in]0,2\pi[$ et tend donc vers 0 quand y tend vers 0^+. En particulier, par passage à la limite sous le signe intégral, on obtient

$$\int_{\gamma_1^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_\delta^R x^\alpha f(x)dx.$$

Faisant tendre $\delta \to 0$ et $R \to \infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \delta\to 0}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_1^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz = \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx.$$

De façon similaire, pour $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $x > 0$ et $y < 0$,

$$(x+iy)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}_0(x+iy)} = e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2+y^2})+i\arg(x+iy)\right)} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} e^{\alpha\left(\operatorname{Log}_0(\sqrt{x^2})+2i\pi\right)} = e^{\alpha \ln x} e^{2i\alpha\pi} = x^\alpha e^{2i\alpha\pi}.$$

Ici on a utilisé le fait que $\arg(x+iy) \in [0,2\pi]$ et tend donc vers 2π quand y tend vers 0^-. En particulier, par passage à la limite sous le signe intégral, on obtient

$$\int_{\gamma_3^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -e^{2i\alpha\pi} \int_\delta^R x^\alpha f(x)dx.$$

Faisant tendre $\delta \to 0$ et $R \to \infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \delta\to 0}} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_3^{\varepsilon,\delta,R}} z^\alpha f(z)dz = -e^{2i\alpha\pi} \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx.$$

En sommant tout cela et en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$ et $R \to +\infty$, on trouve

$$(1-e^{2i\alpha\pi}) \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{res}_w(z^\alpha f(z)).$$

Nous avons donc montré la proposition suivante.

Proposition 4.24: *Soit $0 < \alpha < 1$. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. On suppose que f n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+^*$ et au plus un pôle d'ordre 1 en 0. Alors*

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx = \frac{2i\pi}{1-e^{2i\alpha\pi}} \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \operatorname{res}_w(z^\alpha f(z)).$$

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.25: Soit $0 < \alpha < 1$ alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(1+x)}dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

En effet, on applique la propriété précédente à la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$. Cette fonction a un pôle simple en 0 et un pôle simple en -1. De plus, on a

$$\mathrm{res}_{-1}\left(\frac{z^\alpha}{z(z+1)}\right) = \frac{(-1)^\alpha}{-1} = -e^{\alpha\,\mathrm{Log}_0(-1)} = -e^{i\alpha\pi}.$$

Donc la propriété précédente implique que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(x+1)}dx = \frac{-2i\pi e^{i\alpha\pi}}{1-e^{2i\alpha\pi}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\alpha\pi}-e^{i\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Passons maintenant aux intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ où $f = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle telle que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+$. Nous cherchons à calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Remarque 4.26 (Idée à retenir): L'idée est ici d'intégrer la fonction $f(z)\mathrm{Log}_0(z)$ sur le chemin représenté dans la figure 3.

Faisons les détails. Soit $\mathrm{Log}_0 : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ la détermination du logarithme utilisé ci-dessus. Le théorème des résidus appliqué au chemin $\gamma^{\varepsilon,\delta,R}$ ci-dessus implique que, pour tout R suffisamment grand, et pour $\varepsilon,\delta > 0$ suffisamment petits, on a

$$\int_{\gamma^{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\mathrm{Log}_0(z)dz = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \mathrm{res}_w(f(z)\mathrm{Log}_0 z).$$

Comme précédemment, on montre que

$$\int_{\gamma_2^{\varepsilon,R}} f(z)\mathrm{Log}_0(z)dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_4^{\varepsilon,\delta}} f(z)\mathrm{Log}_0(z)dz \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, pour tout $x > 0$ on a

$$\mathrm{Log}_0(x+iy) \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} \ln x \quad \text{et} \quad \mathrm{Log}_0(x+iy) \underset{y\to 0^-}{\longrightarrow} \ln x + 2i\pi.$$

On en déduit donc par passage à la limite sous l'intégrale, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1^{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\mathrm{Log}_0(z)dz = \int_\delta^R f(x)\ln x dx \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_3^{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\mathrm{Log}_0(z)dz = -\int_\delta^R f(x)\ln x dx - 2i\pi\int_\delta^R f(x)dx.$$

Faisant tendre $\varepsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$ et $R \to +\infty$, nous obtenons donc

$$-2i\pi\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2i\pi \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \mathrm{res}_w(f(z)\mathrm{Log}_0 z).$$

Nous avons donc démontré la proposition suivante.

Proposition 4.27: *Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que* $\deg Q = \deg P + 2$. *Supposons que f n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+$. Alors*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+} \mathrm{res}_w(f(z)\mathrm{Log}_0(z)).$$

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 4.28: On cherche à calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Ici, la fonction f est définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$. La fonction $z \mapsto \frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ et a trois pôles simples,

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \xi_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}).$$

Un calcul immédiat montre que

$$\mathrm{res}_{\xi_1}\left(\frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}\right) = \frac{i\pi}{3}, \quad \mathrm{res}_{\xi_2}\left(\frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}\right) = \frac{(\sqrt{3}-i)\pi}{18} \quad \text{et} \quad \mathrm{res}_{\xi_3}\left(\frac{\mathrm{Log}_0 z}{1+z^3}\right) = \frac{-5(\sqrt{3}-i)\pi}{18}.$$

En appliquant la proposition précédente, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5 Exercices

5.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. On considère la fonction
$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

1. Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus.
2. En déduire un développement en série de Laurent sur $\mathbb{C}^*$ de la fonction f.
3. En déduire $\mathrm{res}_0(f)$.

Exercice 2. On considère la fonction
$$f(z) = \frac{e^{z-1}}{e^z - 1}.$$

1. Montrer que 0 est un pôle d'ordre 1 de f.
2. Calculer $\mathrm{res}_0(f)$.

Exercice 3. Calculer les résidus des fonctions suivantes aux points indiqués :

1. $f(z) = \dfrac{z}{(2-3z)(4z+3)}$ en $z_0 = \frac{2}{3}$ et $z_0 = \frac{-3}{4}$.
2. $f(z) = \dfrac{2z^2+1}{z^2+9}$ en $z_0 = 3i$.
3. $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{16-z^4}$ en $z_0 = 2$.
4. $f(z) = \dfrac{\cos^2(z)}{(2\pi - z)^3}$ en $z_0 = 2\pi$.
5. $f(z) = \dfrac{z+1}{(z^2+4)^2}$ en $z_0 = 2i$.
6. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$ en $z_0 = 0$.
7. $f(z) = \dfrac{(z^3-1)(z+2)}{(z^4-1)^2}$ en $z_0 = 1$.
8. $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{16-z^4}$ en $z_0 = 2$.
9. $f(z) = \dfrac{\sinh(z) - z}{z^8}$ en $z_0 = 0$.
10. $f(z) = \dfrac{\sin z}{1 - 2\cos(z)}$ en $z_0 = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 4. Calculer les résidus des fonctions suivantes au point 0 :

1. $f(z) = \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$,
2. $f(z) = \dfrac{\sin 2z - 2\sin z}{(\sin z)(\sin z - z)}$,
3. $f(z) = \dfrac{\tan z - z}{(1-\cos z)^2}$,
4. $f(z) = \dfrac{z-1}{\mathrm{Log}(z+1)}$.

Exercice 5. En utilisant le théorème des résidus, calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{C(0,8)} \frac{1+z}{1-e^z} dz$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_{C(i,5)} \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} dz$,
3. $I_3 = \displaystyle\int_{C(0,2)} z^9 e^{\frac{1}{z}} dz$.
4. $I_4 = \displaystyle\int_{C(0,4)} \frac{dz}{z^2 - 5z + 6}$.
5. $I_5 = \displaystyle\int_{C(0,\frac{5}{2})} \frac{dz}{z^2 - 5z + 6}$.
6. $I_6 = \displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{e^{az} dz}{z^2+1}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $0 < a < b < c$ des nombres réels. À l'aide du théorème des résidus, calculer, pour tout $r \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$, la valeur de l'intégrale
$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Exercice 7. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit f et g des fonctions holomorphes sur un ouvert U telles que z_0 est une singularité isolée de f et de g.

1. Est-il vrai que $\operatorname{res}_{z_0}(f+g) = \operatorname{res}_{z_0}(f) + \operatorname{res}_{z_0}(g)$? Justifier.
2. Est-il vrai que $\operatorname{res}_{z_0}(fg) = \operatorname{res}_{z_0}(f)\operatorname{res}_{z_0}(g)$? Justifier.

Exercice 8. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $z_0 \in U$. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ et $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes.

1. Montrer que z_0 est un pôle simple de f alors $\operatorname{res}_{z_0}(fg) = g(z_0)\operatorname{res}_{z_0}(f)$.
2. Montrer que si z_0 est un zéro d'ordre 1 de f, alors $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{g}{f}\right) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}$.
3. Montrer que si z_0 est un zéro d'ordre m, alors $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'g}{f}\right) = g(z_0)m$.
4. Montrer que si z_0 est un pôle d'ordre m, alors $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f'g}{f}\right) = -g(z_0)m$.

Exercice 9. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant 0 tel que U est symétrique par rapport au point 0. Soit f une fonction holomorphe sur U en dehors d'un nombre fini de singularités isolées telle que f soit symétrique par rapport à 0. C'est à dire que $f(-z) = f(z)$ pour tout $z \in U$ où f est définie.

1. Montrer que
$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = -\operatorname{res}_{-z_0}(f) \quad \forall z_0 \in U.$$
2. En déduire $\operatorname{res}_0(f)$.

Exercice 10.
1. Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto 2z^4 - 5z + 2$ dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,1)$.
2. Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ dans la boule $B(0,1)$.
3. Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z \mapsto z^5 + iz^3 - 4z + i$ dans la couronne $A_0(1,2)$.

Exercice 11. On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 6z + 3$.

1. Démontrer que P admet ses 4 racines dans la boule $B(0,2)$.
2. Démontrer que P admet une unique racine dans la boule $B(0,1)$.
3. Démontrer que P n'admet aucune racine dans la boule $B\left(0, \frac{1}{3}\right)$.
4. Notons $a \in B(0,1)$ l'unique racine de P dans le disque $B(0,1)$. Montrer que
$$2i\pi a = \int_{C(0,1)} \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z\,dz.$$

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{5+3\sin\theta}\,d\theta$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(3+2\cos\theta)^2}$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$,

Exercice 13. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta}$, où $a > 1$,

2. $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2(2t)}{1-2a\cos t + a^2}$, où $-1 < a < 1$.

Exercice 14. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$,
2. $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$,
3. $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$,
4. $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+6x^2+8}$.
5. $I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x^2+4)}$,
6. $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4+6x+13}$,
7. $I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{16+x^2}$,
8. $I_8 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx)^n}$ où $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2+a}$ où $a > 0$,
2. $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$,
3. $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{\frac{-i\pi}{2}x}}{x^2-2x+5} dx$,
4. $I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2} dx$, où $a > 0$, $b \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(b) > 0$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x}dx}{1+x^2} = \pi e^{-|\xi|}.$$

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(x+t)(x+2t)}$ où $t > 0$ et $0 < \alpha < 1$,
2. $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{1+\sqrt[3]{x}} dx$, où $-1 < \alpha < -\frac{2}{3}$.

5.2 Exercices plus avancés

Exercice 18. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $Z \subset U$ un sous-ensemble fermé et discret. Soit $f : U \backslash Z \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f admet une primitive si et seulement si $\mathrm{res}_z(f) = 0$ pour tout $z \in U$.

Exercice 19. Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soit $f : U \to V$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$ un point tel que $f'(z_0) \neq 0$. Notons $w_0 = f(z_0)$. Soit $g : V \setminus \{z_0\}$ une fonction holomorphe avec un pôle d'ordre 1 en w_0. Calculer $\mathrm{res}_{z_0}(g \circ f)$ en fonction de $\mathrm{res}_{w_0} g$.

Exercice 20. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble de U. Montrer que f est méromorphe sur U si et seulement si elle s'écrit localement comme quotient de deux fonctions holomorphes (c'est à dire si pour tout $z_0 \in U$, il existe une voisinage V de z_0, et des fonctions holomorphes $g, h \in \mathscr{O}(U)$ tels que h ne s'annule pas sur un ouvert et tels que $f(z) = \frac{g}{h}$ pour tout $z \in V$ tel que $h(z) \neq 0$).

Exercice 21. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|^{1+\varepsilon}} \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-z} dx$$

Exercice 22. Soit $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe qui n'a qu'un nombre fini de pôles $z_1, \dots, z_m$. Soit

$$R_0 := \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |z_k|.$$

et pour tout $R > R_0$, on pose

$$\operatorname{res}_\infty(f) := \frac{-1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} f(z)dz.$$

C'est le *résidu à l'infini de f*.

1. Montrer que $\operatorname{res}_\infty(f)$ est indépendant du choix de $R > R_0$.
2. Montrer que l'on a

$$\sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} \operatorname{res}_z(f) = 0.$$

Où l'on note $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann.

Exercice 23. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{M}(U)$ une fonction méromorphe sur U. Soit γ un lacet de Jordan $\mathscr{C}^2$ par morceaux dans U, orienté dans le sens direct tel que f n'a pas de pôle sur l'image de γ. Notons

$$M := \sup_{z \in \operatorname{im}(\gamma)} |f(z)|.$$

Notons N le nombre de pôle de f dans l'intérieur de γ (comptés avec multiplicités). Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| > M$, la fonction f prend la valeur w exactement N fois (comptés avec multiplicité) dans l'intérieur de γ.

Exercice 24. Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss à l'aide du théorème de Rouché.

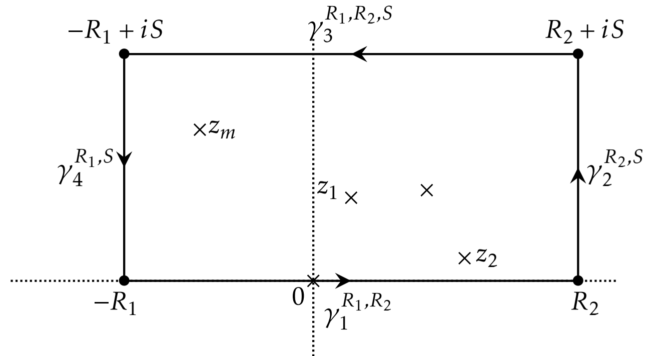
Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer qu'il existe un point $z_0 \in C(0,1)$ tel que $P(z_0) \geqslant 1$.

Exercice 26. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 1$. Montrer que l'équation $e^{-z} + z = \lambda$ a une unique racine sur le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \,; \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Exercice 27. Nous allons donner ici une preuve un peu plus fine de la proposition 4.17. Soit f une fonction méromorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$. Supposons que f n'a un nombre fini de pôles sur $\mathbb{H}$ (que nous noterons $z_1, \dots, z_m$) et n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$. Supposons de plus que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0.$$

Pour tout $R_1, R_2, S \in \mathbb{R}_+$, on considère le chemin $\gamma^{R_1,R_2,S} = \gamma_1^{R_1,R_2} \vee \gamma_2^{R_2,S} \vee \gamma_3^{R_1,R_2,S} \vee \gamma_4^{R_1,S}$



On suppose à partir de maintenant que R_1, R_2, S sont suffisamment grands pour que tous les pôles de f situés dans $\mathbb{H}$ sont dans le rectangle délimité par le chemin $\gamma^{R_1,R_2,S}$.

1. Montrer que il existe $M, C \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|} \quad \forall z \in \operatorname{im}(\gamma^{R_1,R_2,S}).$$
2. Montrer que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$\left| \int_{\gamma_2^{R_2,S}} f(z) e^{iz} dz \right| \leqslant \frac{C}{R_1}.$$
3. Montrer que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$\left| \int_{\gamma_4^{R_1,S}} f(z) e^{iz} dz \right| \leqslant \frac{C}{R_2}.$$
4. Montrer que pour tout $R_1, R_2, S \geqslant M$ on a
$$\left| \int_{\gamma_3^{R_1,R2,S}} f(z) e^{iz} dz \right| \leqslant \frac{C(R_1 + R_2)e^{-S}}{S}.$$
5. En déduire que l'intégrale impropre
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$$
converge et exprimer cette intégrale en fonction des résidus de f aux points $z_1, \ldots, z_m$.

Exercice 28. Soit f une fonction méromorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{H}}$. Supposons que f n'a un nombre fini de pôles sur $\mathbb{H}$ et que sur $\mathbb{R}$, f a au plus un pôle d'ordre 1 en un point a. Supposons de plus qu'il existe $R_0 > 0$, $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que
$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|^{1+\varepsilon}}$$
pour tout $z \in \overline{\mathbb{H}}$ tel que $|z| \geqslant R$. Exprimer
$$\lim_{\delta \to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} f(x) dx + \int_{a+\delta}^{+\infty} f(x) dx \right)$$
en fonction des résidus de f.

Exercice 29. On utilisera ici le résultat de l'exercice 28.

1. Pour tout $\xi > 0$ calculer
$$\lim_{\delta \to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} \frac{1 - e^{i\xi x}}{x^2} dx + \int_{a+\delta}^{+\infty} \frac{1 - e^{i\xi x}}{x^2} dx \right).$$
2. En déduire, pour tout $\xi > 0$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \xi x}{x^2} dx.$$
3. En déduire aussi
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Exercice 30. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+$ et qui vérifie $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. En intégrant la fonction

$$z \mapsto f(z)(\mathrm{Log}_0 z)^2$$

le long du chemin présenté dans la figure 3, déterminer une formule en terme de résidus pour l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln x dx.$$

Utiliser cette formule pour calculer, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx.$$

Exercice 31. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle qui vérifie $\deg Q \geqslant \deg P + 2$. Supposons en plus que f n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}_+$, sauf éventuellement en 0 où f a au plus un pôle d'ordre 1. Soit $0 < \alpha < 1$. Déterminer une formule de type résidus pour l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x) \ln x dx.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2 + 1)} dx.$$