L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre IV:
Théorème de Cauchy, formules de Cauchy et applications

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Lemme de Goursat

Le résultat suivant est à la base de l'approche que nous suivons dans ce cours.

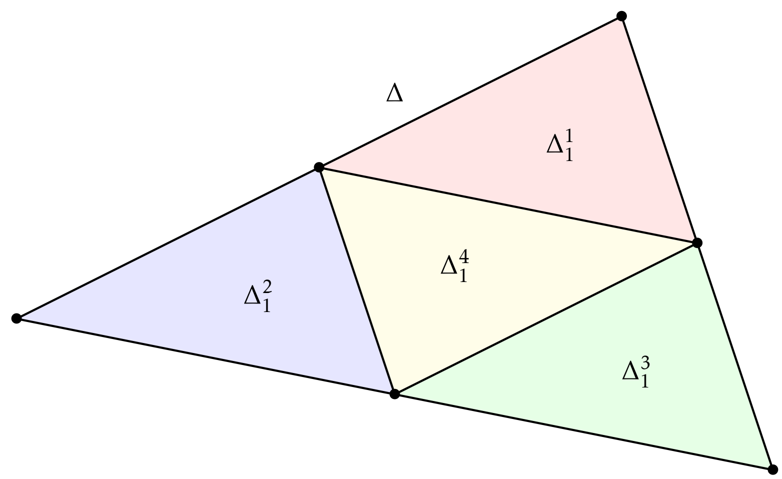
Lemme 1.1 (Goursat): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors, pour tout triangle Δ dans U, on a*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. Observons déjà que l'hypothèse d'holomorphie implique que f est continue sur U.

Pour tout triangle Δ, nous notons $\delta(\Delta)$, le *diamètre* de $\partial\Delta$, c'est le maximum des longueurs des côtés de Δ.

Soit $\Delta \subset U$ un triangle. En considérant le milieu de chaque côté de $\partial\Delta$, ce triangle peut être subdivisé en 4 triangles semblables $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \Delta_1^4$ comme sur le dessin ci-dessous :



Pour tout $i \in \{1, \dots, 4\}$, nous avons

$$\ell(\partial\Delta_1^i) = \frac{1}{2}\ell(\partial\Delta) \quad \text{et} \quad \delta(\Delta_1^i) = \frac{1}{2}\delta(\Delta).$$

D'autre part, nous avons

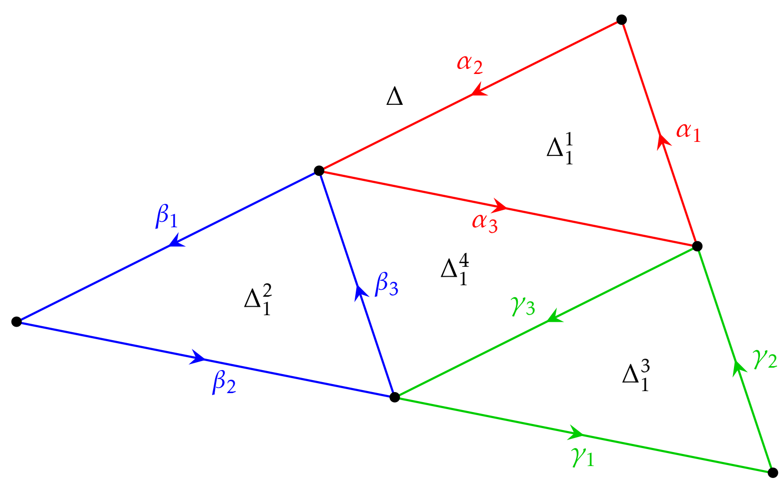
$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^i} f(z)dz. \tag{1}$$

En effet en introduisant les chemins $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ comme sur le dessin ci-dessous, l'on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_1^1} f(z)dz &= \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz + \int_{\alpha_3} f(z)dz \\
\int_{\Delta_1^2} f(z)dz &= \int_{\beta_1} f(z)dz + \int_{\beta_2} f(z)dz + \int_{\beta_3} f(z)dz \\
\int_{\Delta_1^3} f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\Delta_1^4} f(z)dz = \int_{\alpha_3^{\mathrm{op}}} f(z)dz + \int_{\beta_3^{\mathrm{op}}} f(z)dz + \int_{\gamma_3^{\mathrm{op}}} f(z)dz = -\int_{\alpha_3} f(z)dz - \int_{\beta_3} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz$$



On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} f(z)dz &= \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\alpha_2} f(z)dz + \int_{\beta_1} f(z)dz + \int_{\beta_2} f(z)dz \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_{\Delta_1^1} f(z)dz - \int_{\alpha_3} f(z)dz + \int_{\Delta_1^2} f(z)dz - \int_{\beta_3} f(z)dz + \int_{\Delta_1^3} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz \\
&= \int_{\Delta_1^1} f(z)dz + \int_{\Delta_1^2} f(z)dz \int_{\Delta_1^3} f(z)dz + \int_{\Delta_1^4} f(z)dz,
\end{aligned}$$

ce qui démontre (1).

Par définition de maximum, il existe $i_1 \in \{1, \dots, 4\}$ tel que

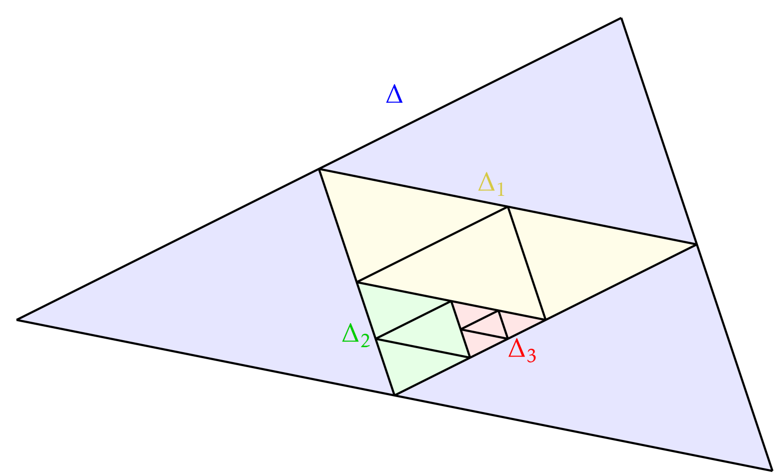
$$\left| \int_{\partial \Delta_1^{i_1}} f(z)dz \right| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \left\{ \left| \int_{\partial \Delta_1^{i}} f(z)dz \right| \right\}.$$

Notons $\Delta_1 := \Delta_1^{i_1}$. On a

$$\left| \int_{\partial \Delta} f(z)dz \right| \leqslant 4 \left| \int_{\partial \Delta_1} f(z)dz \right|.$$

En réitérant ce processus de subdivision, on trouve une suite de triangles

$$\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \supseteq \cdots$$



tels que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\ell(\partial\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\ell(\partial\Delta_n), \quad \delta(\Delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\delta(\Delta_n) \quad \text{et} \quad \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \leqslant 4\left|\int_{\partial\Delta_{n+1}} f(z)dz\right|.$$

Par récurrence, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\ell(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\ell(\partial\Delta), \quad \delta(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\delta(\Delta) \quad \text{et} \quad \left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on choisit un point $z_n \in \Delta_n$ (par exemple, le barycentre de Δ_n). La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy, en effet : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^N}\delta(\Delta) < \varepsilon$. Alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \geqslant N$ et $q \geqslant \mathbb{N}$, on a $z_p \in \Delta_p \subset \Delta_N$ et $z_q \in \Delta_p \subset \Delta_N$ et donc

$$|z_p - z_q| \leqslant \delta(\Delta_N) = \frac{1}{2^N}\delta(\Delta) < \varepsilon.$$

Comme $\mathbb{C}$ est complet (par rapport à la topologie euclidienne), la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $z_\infty \in U$ (en fait, on peut facilement vérifier que $\{z_\infty\} = \bigcap_{n\geqslant 1}\Delta_n$). Par hypothèse, f est holomorphe sur U, il existe donc une fonction continue $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(z_\infty) = 0$ et telle que

$$f(z) = f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty) + (z - z_\infty)\varepsilon(z).$$

Par intégration sur $\partial\Delta_n^{i_n}$, on obtient

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n}\Big(f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty)\Big)dz + \int_{\partial\Delta_n}(z - z_\infty)\varepsilon(z)dz.$$

Or la fonction $z \mapsto f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty)$ est affine, donc admet une primitive, et donc

$$\int_{\partial\Delta_n}\Big(f(z_\infty) + (z - z_\infty)f'(z_\infty)\Big)dz = 0.$$

D'autre part, on a

$$\left|\int_{\partial\Delta_n}(z - z_\infty)\varepsilon(z)dz\right| \leqslant \ell(\partial\Delta_n)\sup_{z\in\partial\Delta_n}\Big|(z - z_\infty)\varepsilon(z)\Big| \leqslant \ell(\partial\Delta_n)\delta(\Delta_n)\sup_{z\in\partial\Delta_n}|\varepsilon(z)| \leqslant \frac{1}{4^n}\ell(\partial\Delta)\delta(\Delta)\varepsilon_n,$$

où nous avons noté $\varepsilon_n = \sup_{z\in\partial\Delta_n}|\varepsilon(z)|$. Donc on obtient

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = 4^n\left|\int_{\partial\Delta_n}(z - z_\infty)\varepsilon(z)dz\right| \leqslant \frac{4^n}{4^n}\ell(\partial\Delta)\delta(\Delta)\varepsilon_n = \ell(\partial\Delta)\delta(\Delta)\varepsilon_n.$$

Or $\varepsilon_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ car ε est continue et $\varepsilon(z_\infty) = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons donc

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| = 0.$$

□

2 Théorème de Cauchy sur un ouvert étoilé

Comme conséquence du lemme de Goursat, et du critère d'existence de primitive démontré dans le chapitre III, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.1: *Soit U un ouvert **étoilé**. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors f admet une primitive sur U.*

Démonstration. Le lemme de Goursat nous garantit que $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ pour tout triangle Δ de U. Donc d'après le second critère d'existence de primitive, f admet une primitive sur U. □

Remarque 2.2: Nous verrons au chapitre V, que la « bonne » hypothèse pour cet énoncé est en fait l'hypothèse *ouvert simplement connexe*, plus générale et bien plus utile que la notion d'ouvert étoilé.

On en déduit le théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés.

Théorème 2.3 (Cauchy sur un ouvert étoilé): *Soit U un ouvert étoilé. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans U, on a*

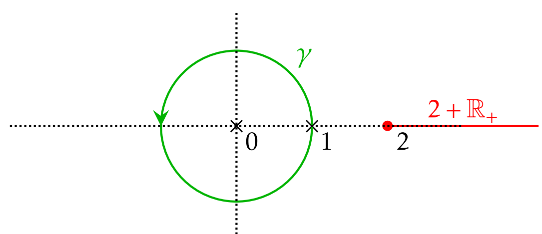
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration. D'après le corollaire 2.1, f étant holomorphe sur U, elle admet une primitive. Donc d'après le chapitre III, l'intégrale le long de tout lacet est nulle. □

Exemple 2.4: Soit γ le lacet défini par $\gamma(t) = e^{it}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\int_\gamma \frac{e^{\sin z}\cosh\left(z^4 - \sin(z^2)\right)}{z-2} dz = 0.$$

En effet, la fonction $z \mapsto \dfrac{e^{\sin z}\cosh\left(z^4 - \sin(z^2)\right)}{z-2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ et en particulier, elle est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (2 + \mathbb{R}_+)$ qui est un ouvert étoilé. Comme par ailleurs le chemin γ est contenu dans $\mathbb{C} \setminus (2 + \mathbb{R}_+)$, on en déduit que l'intégrale ci-dessus est nulle par une application du théorème de Cauchy.



3 Formules de Cauchy pour un cercle

3.1 Formule de Cauchy à l'ordre 0

Le théorème de Cauchy nous permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.1 (Formule de Cauchy sur un disque): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Soit $z_0 \in U$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Alors, pour tout $z \in B(z_0, r)$, on a*

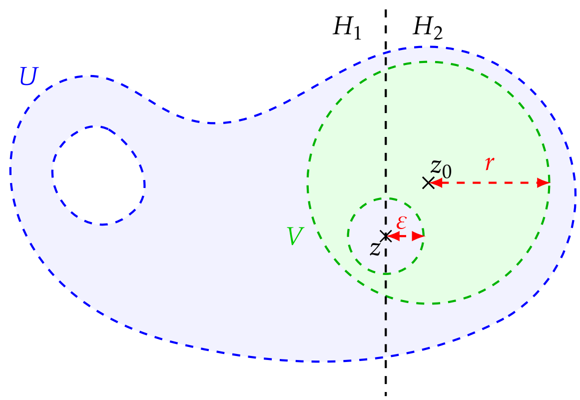
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

où $\int_{C(z_0,r)}$ désigne l'intégrale le long du chemin $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Remarque 3.2: Ce théorème montre en particulier que pour tout $z \in B(z_0, r)$ la valeur de $f(z)$ est complètement déterminée par la valeur de f sur le bord de $B(z_0, r)$.

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Soit $z \in B(z_0, r)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(z, \varepsilon) \subset B(z_0, r)$. On note $V = B(z_0, r) \setminus \overline{B}(z, \varepsilon)$ On découpe V en 2 parties, en l'intersectant avec les demi-plans

$$H_1 = \{w \in \mathbb{C}\ ;\ \ \mathrm{Re}(w) \leqslant \mathrm{Re}(z)\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{w \in \mathbb{C}\ ;\ \ \mathrm{Re}(w) \geqslant \mathrm{Re}(z)\}$$



Notons $V_1 = V \cap H_1$ et $V_2 = V \cap H_2$. On paramètre le bord ∂V_1 de V_1 et ∂V_2 de V_2 par des chemins $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4$ et $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3 \vee \beta_4$ comme sur les dessins suivants :

On a

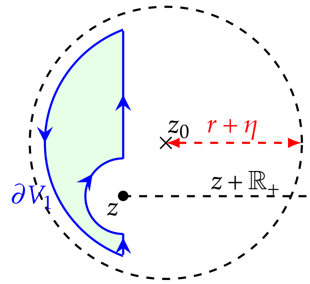
$$\begin{aligned}
\int_{\partial V_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\partial V_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\alpha_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_3} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_4} \frac{f(w)}{w-z} dw \\
&\quad + \int_{\beta_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\beta_2} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\beta_3} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\beta_4} \frac{f(w)}{w-z} dw \\
&= \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw.
\end{aligned}$$

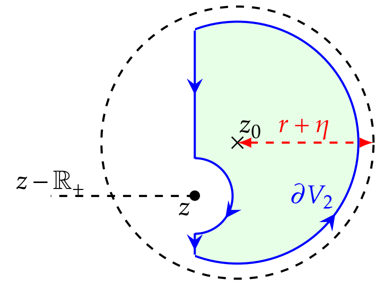
Ici, nous avons utilisé

$$\int_{\beta_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\alpha_4^{\mathrm{op}}} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\int_{\alpha_4} \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad \int_{\beta_4} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\alpha_2^{\mathrm{op}}} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\int_{\alpha_2} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\beta_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\alpha_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{et} \quad \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\int_{\beta_3} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\alpha_3} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Par ailleurs, en prenant $\eta > 0$ tel que $B(z_0, r+\eta) \subset U$, on a $\partial V_1 \subset B(z_0, r+\eta) \setminus (z + \mathbb{R}_+)$ et $\partial V_2 \subset B(z_0, r+\eta) \setminus (z - \mathbb{R}_+)$.





Comme $B(z_0, r+\eta) \setminus (z+\mathbb{R}_+)$ et $B(z_0, r+\eta) \setminus (z-\mathbb{R}_+)$ sont des ouverts étoilés sur lesquels la fonction $w \mapsto \dfrac{f(w)}{w-z}$ est holomorphe, le théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés implique alors que

$$\int_{\partial V_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0 \quad \text{et que} \quad \int_{\partial V_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Par ce qui précède, on en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ (et que le terme de gauche est indépendant de ε), il suffit de démontrer que

$$2i\pi f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{2}$$

Comme f est holomorphe il existe une fonction continue $\delta : U \to \mathbb{C}$ telle que $\delta(z) = 0$ et telle que, pour tout $w \in U$, on a

$$f(w) = f(z) + (w-z)f'(z) + (w-z)\delta(w).$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{w-z} dw + \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{(w-z)f'(z)}{w-z} dw + \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{(w-z)\delta(w)}{w-z} dw \\ &= f(z) \int_{C(z,\varepsilon)} \frac{1}{w-z} dw + f'(z) \int_{C(z,\varepsilon)} dw + \int_{C(z,\varepsilon)} \delta(w) dw. \end{aligned}$$

Nous avons $\displaystyle\int_{C(z,\varepsilon)} \frac{1}{w-z} dw = 2i\pi$, en effet

$$\int_{C(z,\varepsilon)} \frac{1}{w-z} dw = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{z+\varepsilon e^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi.$$

On a aussi $\int_{C(z,\varepsilon)} dw = 0$ car la fonction $z \mapsto 1$ admet une primitive.
Il reste donc à observer que

$$\left| \int_{C(z,\varepsilon)} \delta(w) dw \right| = \ell(C(z,\varepsilon)) \max_{w \in C(z,\varepsilon)} |\delta(w)| = 2\pi\varepsilon \max_{w \in C(z,\varepsilon)} |\delta(w)| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc que $\int_{C(z,\varepsilon)} \delta(w) dw \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui démontre (2) et conclu la preuve.

□

Exemple 3.3: On a par exemple

$$\int_{C(1,2)} \frac{dz}{z+i} = 2i\pi, \quad \int_{C(0,2)} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} z)}{z-1} dz = \sqrt{2} i\pi \quad \text{et} \quad \int_{C(2,4)} \frac{e^{iz}}{z-i} dz = \frac{2i\pi}{e}.$$

3.2 Formules de Cauchy à l'ordre n

Comme conséquence de la formule de Cauchy, nous obtenons le résultat remarquable suivant.

Théorème 3.4 (Formule de Cauchy à l'ordre 1): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors $f' : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe. De plus, pour tout $z_0 \in U$ et pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ on a,*

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Montrons déjà que $f'(z)$ est bien donné par la formule annoncée en calculant le taux d'accroissement. Soit $z \in B(z_0, r)$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(z, \varepsilon) \subset B(z_0, r)$. Alors pour tout $h \in B(0, \varepsilon)$, le théorème 3.1 implique alors que

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2i\pi h}\left(\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z-h} dw - \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw\right) = \frac{1}{2i\pi h} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)\big((w-z)-(w-z-h)\big)}{(w-z-h)(w-z)} dw \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)} dw \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.
\end{aligned}$$

Ici pour faire le passage à la limite sous l'intégrale, nous utilisons le critère séquentiel de limite et le théorème de passage à la limite sous le signe intégral. Nous écrivons ici proprement les détails.

D'après la proposition 2.10 du chapitre I, pour montrer que

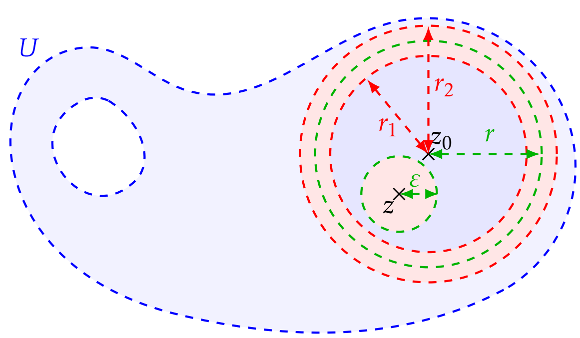
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h)(w-z)} dw \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

il suffit de montrer que pour toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B(0, \varepsilon)$ qui converge vers 0, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)} dw \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

On fixe donc une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B(0, \varepsilon)$ qui converge vers 0. On fixe aussi $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $r_1 < r < r_2$ et tels que

$$\overline{B}(z, \varepsilon) \subset B(z_0, r_1) \quad \text{et tels que} \quad \overline{B}(z_0, r_2) \subset U.$$



On note $A(r_1, r_2) := \{w \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |w| < r_2\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $g_n : A(r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ par

$$g_n(w) = \frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)}.$$

En notant par ailleurs $g(w) = \dfrac{f(w)}{(w-z)^2}$, on a que g_n converge uniformement vers g sur $A(r_1, r_2)$. En effet, pour tout $w \in A(r_1, r_2)$,

$$\begin{aligned}
|g_n(w) - g(w)| &= \left|\frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)} - \frac{f(w)}{(w-z)^2}\right| = \left|\frac{f(w)}{(w-z)}\right| \cdot \left|\frac{1}{w-z-h_n} - \frac{1}{w-z}\right| = \left|\frac{f(w)}{(w-z)}\right| \cdot \left|\frac{h_n}{(w-z-h_n)(w-z)}\right| \\
&= \left|\frac{f(w)}{(w-z)^2}\right| \cdot \left|\frac{h_n}{w-z-h_n}\right| \leqslant \frac{|f(w)|}{(r_1 - |z-z_0|)^2} \cdot \frac{|h_n|}{r_1 - |z-z_0|} \leqslant \frac{M}{(r_1 - |z-z_0|)^2} \cdot \frac{|h_n|}{r_1 - \varepsilon - |z-z_0|}.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé que $|w-z| > r_1 - |z-z_0|$ et que $|w-z-h_n| > r_1 - \varepsilon - |z-z_0|$ pour tout $w \in A(r_1, r_2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici, $M \in \mathbb{R}_+$ désigne un nombre réel tel que $|f(w)| \leqslant M$ pour tout $w \in A(r_1, r_2)$. Un tel M existe car f est continue sur $\overline{A}(r_1, r_2)$ qui est un compact.

Comme le majorant $\dfrac{M}{(r_1 - |z-z_0|)^2} \cdot \dfrac{|h_n|}{r_1 - \varepsilon - |z-z_0|}$ est indépendant de $w \in A(r_1, r_2)$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que g_n converge uniformément vers g sur $A(r_1, r_2)$ et en particulier uniformément sur les compacts. On peut donc appliquer la proposition 5.3 du Chapitre III pour en déduire que

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h_n)(w-z)} dw = \int_{C(z_0,r)} g_n(w) dw \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{C(z_0,r)} g(w) dw = \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw,$$

comme annoncé plus haut.

Pour montrer que f' est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $B(z_0, r)$, on fait de même en calculant le taux d'accroissement. Soit $z \in B(z_0, r)$ et soit $h \neq 0$ tel que $z + h \in B(z_0, r)$. La formule démontrée précédemment implique alors que

$$\begin{aligned}
\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} &= \frac{1}{2i\pi h}\left(\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z-h)^2} dw - \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw\right) = \frac{1}{2i\pi h} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)\Big((w-z)^2 - (w-z-h)^2\Big)}{(w-z-h)^2(w-z)^2} dw \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)\Big(2(w-z) - h\Big)}{(w-z-h)^2(w-z)^2} dw \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw.
\end{aligned}$$

Ici pour faire le passage à la limite sous l'intégrale, nous utilisons le critère séquentiel de limite et le théorème de passage à la limite sous le signe intégral comme précédement. Ceci montre donc que f' est $\mathbb{C}$-dérivable et que $f''(z) = \dfrac{2}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$.

□

Exemple 3.5: On a par exemple

$$\int_{C(1,2)} \frac{dz}{(z+i)^2} = 0, \quad \int_{C(0,2)} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{(z-1)^2} dz = \frac{\sqrt{2} i \pi^2}{4} \quad \text{et} \quad \int_{C(2,4)} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2} dz = -\frac{2\pi}{e}.$$

Un argument tout à fait similaire implique le résultat suivant (nous en laissons la démonstration en exercice).

Théorème 3.6 (Formule de Cauchy à l'ordre n): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z_0 \in U$ et pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ on a,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Exemple 3.7: On a par exemple $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}z)}{(z-1)^3}dz = \frac{-i\pi^3}{16\sqrt{2}}$.

4 Théorème de Morera

Théorème 4.1 (Morera): *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U. Si pour tout triangle Δ inclus dans U,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

alors f est holomorphe.

Démonstration. L'holomorphie est une propriété qui peut se vérifier localement. Soit B un disque ouvert inclus dans U. Comme l'intégrale de f le long de tout triangle dans U est nulle, en particulier, l'intégrale le long de tout triangle dans B est nulle. Comme B est un ouvert étoilé, d'après le second critère d'existence de primitive, $f|_B$ admet une primitive F_B sur B. Par définition, F_B est holomorphe, donc d'après le théorème 3.4, $f|_B = F_B'$ est holomorphe. Ceci étant vraie pour tout disque inclus dans U, on en déduit que f est holomorphe sur U. $\square$

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Voici un diagramme récapitulatif :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f \text{ admet une primitive}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Chap III cor 4.6 + thm 4.8}"'] & \boxed{f \text{ est holomorphe}} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Chap IV lem 1.1 + thm 4.1}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\text{Si U est étoilé !}"', "\text{Chap IV thm 2.3}"] \\
\boxed{\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ pour tout lacet}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{trivial}"'] & \boxed{\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \text{ pour tout triangle } \Delta \subset U}
\end{tikzcd}.$$

De plus, si U est un ouvert étoilé, alors toutes les flèches sont des équivalences d'après le théorème de Cauchy.

5 Analycité des fonctions holomorphes

Nous avons vu précédemment que les fonctions holomorphes sont en fait infiniment $\mathbb{C}$-dérivables, nous avons même mieux.

Théorème 5.1: *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors f est analytique sur U.*

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème plus précis suivant.

Théorème 5.2: *Soit U un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$. Alors la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} w^n$ a un rayon de convergence R vérifiant $R \geqslant r$. De plus, pour tout $z \in B(z_0, r)$, on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$. Soit $0 < r' < r$. D'après la formule de Cauchy, pour tout $z \in B(z_0, r')$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \quad \text{car} \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1.$$

De plus pour tout r_1, r_2 tels que $|z-z_0| < r_1 < r' < r_2 < r$ la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ converge normalement sur la couronne $A(r_1, r_2) := \{w \in \mathbb{C}\ ;\ r_1 < |w| < r_2\}$. En effet, $|f|$ est bornée sur cette couronne par $M = \sup_{w \in A(r_1,r_2)} |f(w)|$ et on a donc, pour tout $w \in A(r_1, r_2)$ on a $\left|\frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{M}{r_1}\left(\frac{|z-z_0|}{r_1}\right)^n$. Comme $|z-z_0| < r_1$ on en déduit la convergence normale.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion de $\int$ et $\sum$ (corollaire 5.4 du chapitre III) afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r')} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r')} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right) dw \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r')} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r')} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw\right)(z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé les formules de Cauchy d'ordre n dans la dernière ligne. Cette relation étant vrai pour tout $z \in B(z_0, r')$ et pour tout $r' < r$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $z \in B(z_0, r)$. Par définition du rayon de convergence, il en découle que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} w^n$ est plus grand que r. □

Remarque 5.3: En plus de montrer que la série de Taylor de f en tout point converge, ce résultat donne une information importante sur le rayon de convergence de la cette série entière.

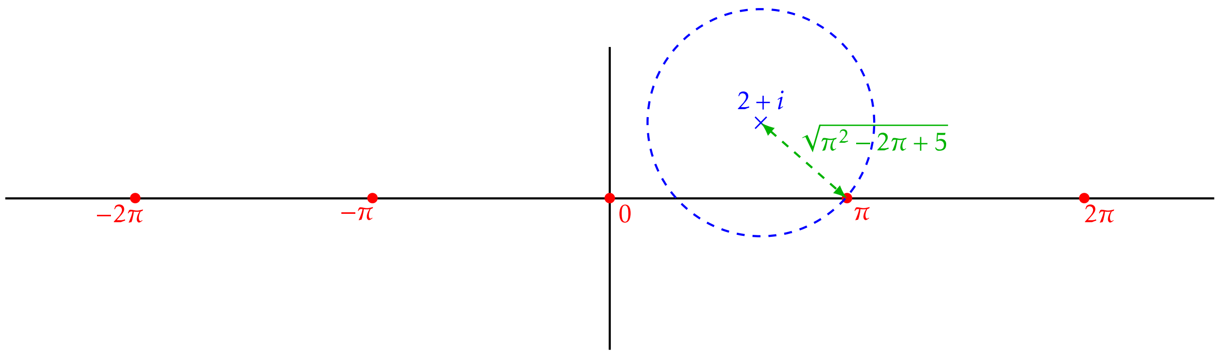
Remarque 5.4: Ce théorème implique que tous les résultats connus pour les fonctions analytiques restent vrais pour les fonctions holomorphes et réciproquement. Par exemple,

1. ***Le principe des zéros isolés et le principe de prolongement analytique sont vérifiés par les fonctions holomorphes***.
2. Si f est une fonction analytique qui ne s'annule jamais, alors $\frac{1}{f}$ est analytique.
3. Les séries entières sont analytiques sur leur disque de convergence.

Exemple 5.5: La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ est analytique. De plus le rayon de convergence du développement en série entière de f au point $2+i$ est

$$R = \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}.$$

La fonction sin s'annule précisément sur $\pi\mathbb{Z}$, donc f est holomorphe sur $U = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$. La distance entre $2+i$ et $\pi\mathbb{Z}$ est $|2+i-\pi| = \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}$. Clairement $R \leqslant \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}$ puisque sinon, la fonction f s'étendrait de façon holomorphe en π, mais ça n'est pas le cas puisque $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to \pi$. D'autre part, puisque $B(2+i, \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}) \subset U$, le théorème 5.2 implique que $R \geqslant \sqrt{\pi^2 - 2\pi + 5}$. On obtient donc bien le résultat annoncé.



6 Un petit résumé

Théorème 6.1: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est holomorphe sur U.*
2. *f est analytique sur U.*
3. *f est $\mathscr{C}^1$ sur U et vérifie les équations de Cauchy-Riemann.*
4. *$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ pour tout triangle Δ inclus dans U.*

Les références des résultats nécessaires pour les différentes implications peuvent être résumées dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{f \text{ est analytique}} \arrow[r, Rightarrow, bend left, "\text{Chap II thm 4.1}"] & \boxed{f \text{ est holomorphe}} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "\text{Chap IV thm 5.1}"] \arrow[r, Rightarrow, bend left, "\text{Chap I thm 4.2+Chap IV thm 3.5}"] \arrow[d, Rightarrow, bend left, "\text{Goursat}"] & \boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ et vérifie CR}} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "\text{Chap I thm 4.2}"] \\
& \boxed{\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \text{ pour tout triangle } \Delta \subset U} \arrow[u, Rightarrow, bend left, "\text{Morera}"] &
\end{tikzcd}$$

7 Applications

7.1 Formule de la moyenne

Un conséquence immédiate de la formule de Cauchy est la suivante.

Théorème 7.1 (Formule de la moyenne): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. La formule de cauchy à l'ordre 0 implique

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

□

7.2 Inégalités de Cauchy

En considérant le module dans les formules de Cauchy, nous obtenons le résultat important suivant :

Théorème 7.2 (Inégalités de Cauchy): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leqslant \frac{n!}{r^n} \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)|$$

Démonstration. La formule de Cauchy à l'ordre n implique

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

En utilisant la majoration démontrée au chapitre III, on obtient

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \ell(C(z_0,r)) \max_{z \in C(z_0,r)} \left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \right|.$$

Par ailleurs, on a $\ell(C(z_0,r)) = 2\pi r$ et pour tout $w \in C(z_0,r)$ on a $\left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|f(w)|}{r^{n+1}}$. D'où le résultat. □

Remarque 7.3: Avec les notations du théorème, les cas $n = 0$ et $n = 1$ s'écrivent :

$$\left| f(z_0) \right| \leqslant \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)| \quad \text{et} \quad \left| f'(z_0) \right| \leqslant \frac{1}{r} \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)|.$$

7.3 Théorème de Liouville

Commençons par une définition.

Définition 7.4: Une *fonction entière* est une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Une fonction entière est donc juste une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. C'est de la terminologie classique. Il ne faut bien entendu pas confondre fonction entière et série entière. On peut néanmoins remarquer que le théorème 5.2 implique qu'une fonction entière peut s'écrire comme une série entière (centrée en 0) de rayon de convergence $R = +\infty$, et réciproquement, une telle série entière (de rayon de convergence $= +\infty$) est une fonction entière.

Théorème 7.5 (Liouville): *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Si f est bornée, alors f est constante.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(z)| \leqslant C$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. En appliquant l'inégalité de Cauchy pour f', on obtient

$$\left|f'(z_0)\right| \leqslant \frac{1}{r} \max_{z \in C(z_0,r)} |f(z)| \leqslant \frac{C}{r}.$$

En faisant tendre $r \to +\infty$, on en déduit $\left|f'(z_0)\right| = 0$. Donc $f' \equiv 0$. D'après le corollaire 4.4 du Chapitre I, on en déduit que f est constante. □

Nous renvoyons aux exercice 8 et 9 pour des versions plus fortes de ce théorème. La version la plus forte de ce résultat est le théorème de Picard, que nous mentionnons ici sans démonstration car celle-ci est bien plus élaborée. (Cet énoncé est donné à titre culturel et ne saurait être utilisé pour résoudre des exercices ou durant les contrôles !)

Théorème 7.6 (petit théorème de Picard): *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Si f omet au moins deux points distincts de $\mathbb{C}$, alors f est constante.*

7.4 Théorème de d'Alembert-Gauss

On peut maintenant démontrer que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.

Théorème 7.7 (d'Alembert Gauss): *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme non-constant. Alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que P ne s'annule jamais. Alors le fonction $f : z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, c'est à dire une fonction entière. De plus f est bornée car $|f(z)| \to 0$ quand $|z| \to +\infty$. D'après le théorème de Liouville, on en déduit que f est constante et que donc P est constant, une contradiction. □

7.5 Théorème de l'image ouverte

Théorème 7.8 (Théorème de l'image ouverte): *Soit U un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non-constante. Alors $f(U)$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.*

Nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 7.9: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0,r) \subset U$. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si*

$$|g(z_0)| < |g(z)| \quad \forall z \in C(z_0,r),$$

alors il existe $z \in B(z_0,r)$ tel que $g(z) = 0$.

Démonstration du lemme. Supposons par l'absurde que g ne s'annule jamais sur $B(z_0,r)$. Comme g ne s'annule pas non plus sur $C(z_0,r)$, on en déduit que la fonction $h = \frac{1}{g}$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{B}(z_0,r)$. Par hypothèse, $|g(z_0)| < |g(z)|$ pour tout $z \in C(z_0,r)$, donc

$$|h(z_0)| > |h(z)| \ \ \forall z \in C(z_0,r).$$

Mais par ailleurs, en appliquant l'inégalité de Cauchy à l'ordre 1 à la fonction h, on obtient

$$|h(z_0)| \leqslant \max_{z \in C(z_0,r)} |h(z)|.$$

Ce qui est une contradiction. □

Démonstration du théorème de l'image ouverte. Puisque f est holomorphe, elle est continue. En particulier $f(U)$ est connexe. Il faut donc montrer que $f(U)$ est ouvert. Soit $w_0 \in f(U)$ et soit $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = w_0$. Par le principe des zéros isolés, il existe $r > 0$ tel que $B(z_0,r) \subset U$ et tel que z_0 soit l'unique point de $\overline{B}(z_0,r)$ tel que $f(z) = w_0$. En effet, si il n'existait pas de tel $r > 0$ alors il existerait une suite de zéros de $f - w_0$ convergent vers z_0, ce qui impliquerait que f est constante. Notons maintenant

$$\varepsilon := \min_{z \in C(z_0,r)} |f(z) - w_0|.$$

Nous allons montrer que $B(w_0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset f(U)$. Soit $w \in B(w_0, \frac{\varepsilon}{2})$. Par inégalité triangulaire inversée, on a, pour tout $z \in C(z_0,r)$,

$$|f(z) - w| \geqslant |f(z) - w_0| - |w - w_0| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, on a

$$|f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le lemme à la fonction $g : z \mapsto f(z) - w$ implique qu'il existe $z \in B(z_0,r)$ tel que $g(z) = 0$ et donc $f(z) = w$. En particulier, $w \in f(U)$. □

Exemple 7.10: On peut appliquer ce théorème pour montrer que si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe non-constante, alors son image n'est pas contenu dans une droite, ou plus généralement, son image n'est pas contenu dans le graphe d'une fonction réelle.

7.6 Principe du maximum

Théorème 7.11 (Principe du maximum): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit $z_0 \in U$. Si z_0 est un maximum local de la fonction $|f|$, alors f est constante.*

Démonstration. Par définition, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0,r) \subset U$ et tel que

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)| \quad \text{pour tout} \quad z \in B(z_0,r). \tag{3}$$

Notons $w_0 := f(z_0)$. Supposons par l'absurde que f n'est pas constante. Par le théorème de l'image ouverte, $\Omega := f(B(z_0,r))$ est ouvert. Comme de plus $w_0 \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(w_0,\varepsilon) \subset \Omega$. Soit $w_1 \in B(w_0,\varepsilon)$ un point tel que $|w_1| > |w_0|$. Comme $B(w_0,\varepsilon) \subset \Omega$, il existe $z_1 \in B(z_0,r)$ tel que $f(z_1) = w_1$. On en déduit donc que

$$|f(z_1)| > |f(z_0)|$$

contredisant (3) □

Corollaire 7.12: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui s'étend de façon continue sur $\overline{U}$. Alors $|f|$ atteint son maximum sur ∂U. De plus, si f est non-constante, alors $|f|$ atteint son maximum uniquement sur ∂U.*

Démonstration. Comme U est borné, $\overline{U}$ est borné aussi. En particulier, $\overline{U}$ est compact. Comme f est continue sur $\overline{U}$, $|f|$ atteint son maximum en un point $z_0 \in \overline{U}$. Notons que $\overline{U} = U \cup \partial U$. D'après le principe du maximum, si $z_0 \in U$, alors f est constante, et donc $|f|$ atteint aussi son maximum en tout point de ∂U. Si f est non-constante, alors le principe du maximum implique que $z_0 \in \partial U$. □

7.7 Convergence de suites de fonctions holomorphes

Théorème 7.13 (Weierstrass): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes $f_n : U \to \mathbb{C}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers une fonctions $f : U \to \mathbb{C}$, alors :*

1. *f est holomorphe,*
2. *pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément sur les compacts.*

Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons la généralisation suivante des inégalités de Cauchy.

Lemme 7.14: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ et soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$. Soit $0 < r' < r$. Soit $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in B(z_0, r')$ on a*

$$\left|g^{(k)}(z)\right| \leqslant \frac{k!r}{(r-r')^{k+1}} \max_{z\in C(z_0,r)} |g(z)|.$$

Démonstration du lemme. Soit $z \in B(z_0, r')$. La formule de Cauchy à l'ordre k implique

$$g^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{g(w)}{(w-z)^{k+1}} dw.$$

En utilisant la majoration démontrée au chapitre III, on obtient

$$\left|g^{(k)}(z_0)\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \ell(C(z_0,r)) \max_{z\in C(z_0,r)} \left|\frac{g(w)}{(w-z)^{k+1}}\right|.$$

Par ailleurs, on a $\ell(C(z_0,r)) = 2\pi r$. De plus, pour tout $w \in C(z_0, r)$ on a $|w-z| \geqslant r - r'$, et donc

$$\left|\frac{g(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\right| = \frac{|g(w)|}{(r-r')^{k+1}}.$$

D'où le résultat. □

Démonstration du théorème de Weierstrass. En vu du théorème de Morera, pour montrer que f est holomorphe, il suffit de démontrer que pour tout triangle $\Delta \subset U$, on a

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0. \tag{4}$$

Soit $\Delta \subset U$. D'après le lemme de Goursat, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)dz = 0.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts vers f, on peut appliquer le théorème de convergence sous le signe intégral pour obtenir

$$0 = \int_{\partial\Delta} f_n(z)dz \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\partial\Delta} f(z)dz,$$

ce qui implique (4).

Montrons maintenant la seconde assertion. On peut déjà voir que $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f^{(k)}$ en utilisant les formule de Cauchy. On effet, pour tout $z_0 \in U$ si $r > 0$ est tel que $\overline{B}(z_0, r) \subset U$ on a

$$f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f_n(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{k!}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}dw = f^{(k)}(z_0).$$

Pour montrer que l'on a convergence uniforme sur les compacts, nous allons raffiner cet argument. Soit $K \subset U$ un compact. Il existe un nombre fini de points $z_1, \ldots, z_m \in K$ et des réels $0 < r' < r$ tels que :

$$\overline{B}(z_j, r) \subset U \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{et} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(z_j, r').$$

En effet, il suffit de prendre $0 < r < \inf\limits_{\substack{z\in K\\ w\in\mathbb{C}\setminus U}} |z-w|$ et $r' = \frac{r}{2}$ puis d'appliquer Borel-Lebesgue.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, $C(z_j, r)$ est compact et donc, comme f_n converge vers f uniformément sur les compacts, à ε fixé, il existe $N_{\varepsilon,j}$ tel que pour tout $n \geqslant N_{\varepsilon,j}$ on a

$$\max_{w\in C(z_j,r)} |f_n(w) - f(w)| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N_\varepsilon := \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} N_{\varepsilon,j}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $z \in K$ on a

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

On fixe donc $\varepsilon > 0$. Notons $C := \frac{k!r}{(r-r')^{k+1}}$ et posons $N := N_{\frac{\varepsilon}{C}}$. Pour tout $z \in K$, comme $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(z_j, r')$, il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $z \in B(z_j, r')$. Pour tout $n \geqslant N$, appliquons le lemme à la fonction $g_n = f_n - f$ et à la boule $\overline{B}(z_j, r)$. On obtient,

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \leqslant C \max_{z\in C(z_j,r)} |f_n(z) - f| \leqslant C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

d'où le résultat. □

Exemple 7.15 (Fonction ζ de Riemann): La fonction ζ (dite *fonction zeta de Riemann*) définie par

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

est une fonction holomorphe sur le demi plan $U_{\mathrm{Re}>1} := \{s \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Ici, on utilise la notation $\frac{1}{n^s} := e^{-s\ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : U_{\mathrm{Re}>1} \to \mathbb{C}$ la fonction $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$. Clairement f_n est holomorphe (sur $\mathbb{C}$) comme somme de fonctions holomorphe. Il s'agit de montrer que f_n converge uniformément sur les compacts de $U_{\mathrm{Re}>1}$. Soit $K \subset U_{\mathrm{Re}>1}$ un compact. Soit $\alpha := \min_{s \in K} \mathrm{Re}(s)$. Le réel α est bien défini car K est compact et de plus $\alpha > 1$. Donc pout tout $s \in K$, on a

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| := \left|e^{-s \ln n}\right| = \left|e^{-\mathrm{Re}(s)\ln n - i\,\mathrm{Im}(s)\ln n}\right| = e^{-\mathrm{Re}(s)\ln n} \leqslant e^{-\alpha \ln n} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Par le critère de convergence de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc la série de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur le compact K, et donc la suite des sommes partielles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K. Ceci étant vrai pour tout compact $K \subset U_{\mathrm{Re}>1}$, le résultat annoncé découle du théorème de Weierstrass. □

Remarque 7.16: Il est vrai, bien que la démonstration soit non-triviale, que la fonction ζ s'étende en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Cette fonction est d'une importance fondamentale en théorie des nombres.

7.8 Intégrales à paramètres

De façon analogue aux résultats de dérivation sous l'intégrale dans le cadre réel, on a

Théorème 7.17: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Soit $f : U \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que :*

1. *Pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur U.*
2. *Pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction $\varphi_K : I \to \mathbb{R}_+$ integrable telle que*

$$|f(z,t)| \leqslant \varphi_K(t) \quad \forall (z,t) \in K \times I.$$

Alors, la fonction $F : U \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) := \int_I f(z,t)dt$ est bien définie et holomorphe. De plus, en notant $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) := f_t'(z)$ pour tout $(z,t) \in U \times I$, on a

$$F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt \quad \forall z \in U.$$

Remarque 7.18: Notons que si I est un segment, l'hypothèse de domination est toujours vérifiée.

Remarque 7.19: Ce théorème reste vrai pour des hypothèses plus générales sur f, nous l'énonçons ici sous cette forme pour des raisons de simplicité.

La façon la plus naturelle de démontrer ce résultat est sans doute d'utiliser les théorèmes de dérivation partielle sous le signe intégrale et les équations de Cauchy-Riemman. Mais ici nous faisons le choix de le démontrer à l'aide des formules de Cauchy et du théorème de Fubini.

Démonstration. Remarquons déjà que la fonction F est bien définie. En effet, pour tout $z \in U$, l'ensemble $\{z\}$ est un compact. Donc l'hypothèse de domination implique que

$$|f(z,t)| \leqslant \varphi_{\{z\}}(t) \quad \forall t \in I.$$

Puisque $\varphi_{\{z\}}$ est intégrable, on en déduit que $t \mapsto |f(z,t)|$ l'est aussi, et donc $F(z)$ est bien définie.

Montrons maintenant que F est holomorphe. Pour cela nous allons utiliser le théorème de Morera. Il suffit donc de montrer que $\int_{\partial\Delta} F(z)dz = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset U$. Soit Δ un triangle contenu dans U. Notons $\gamma : [a,b] \to U$ une paramétrisation de $\partial\Delta$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} F(z)dz &= \int_\gamma F(z)dz = \int_a^b F(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_a^b \left(\int_I f(\gamma(s),t)dt\right)\gamma'(s)ds \\ &= \int_a^b \left(\int_I f(\gamma(s),t)\gamma'(s)dt\right)ds = \int_I \left(\int_a^b f(\gamma(s),t)\gamma'(s)ds\right)dt = \int_I \left(\int_{\partial\Delta} f_t(z)dz\right)dt = 0.\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le théorème de Fubini pour obtenir

$$\int_a^b \left(\int_I f(\gamma(s),t)\gamma'(s)dt\right)ds = \int_I \left(\int_a^b f(\gamma(s),t)\gamma'(s)ds\right)dt.$$

On paut faire cela car en notant $M = \max_{s\in[a,b]} \left|\gamma'(s)\right|$, on a

$$|f(\gamma(s),t)\gamma'(s)| = |\gamma'(s)| \cdot |f(\gamma(s),t)| \leqslant M\varphi_{\partial\Delta}(t) \quad \forall s \in [a,b], \ \forall t \in I,$$

et donc la fonction $(s,t) \mapsto f(\gamma(s),t)\gamma'(s)$ est intégrable, et on peut donc appliquer le théorème de Fubini.

Pour montrer $\int_I \left(\int_{\partial\Delta} f_t(z)dz\right)dt = 0$, nous avons juste utiliser le lemme de Goursat et notre hypothèse sur f_t pour avoir directement $\int_{\partial\Delta} f_t(z)dz = 0$.

Démontrons maintenant l'expression de F'. Soit $z \in U$, soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(z,r) \subset U$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}F'(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{F(w)}{(w-z)^2}dw = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \left(\int_I \frac{f(w,t)}{(w-z)^2}dt\right)dw \\ &= \int_I \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z,r)} \frac{f_t(w)}{(w-z)^2}dw\right)dt = \int_I f_t'(z)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé le théorème de Cauchy à l'ordre 1 pour la fonction f_t. Nous avons aussi utiliser le théorème de Fubini, dont l'utilisation est justifiée par l'hypothèse de domination sur le compact $C(z,r)$. □

Exemple 7.20 (La fonction Γ d'Euler): La fonction Γ définie par

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

est bien définie et holomorphe sur $U_{\mathrm{Re}>0} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Ici, pour tout $t > 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $t^z := e^{z\ln t}$.

Démonstration. Notons $I :=]0,+\infty[$. Soit $K \subset U_{\mathrm{Re}>0}$ un compact. Soit $\alpha = \min_{z\in K} \mathrm{Re}(z)$ et $\beta = \max_{z\in K} \mathrm{Re}(z)$. Les deux réels α et β sont bien défini et l'on a $0 < \alpha < \beta$. Pour tout $(z,t) \in K \times I$ on a, en notant $z = x + iy$,

$$\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = \left|e^{-t}e^{(x-1+iy)\ln t}\right| = \left|e^{-t}e^{(x-1)\ln t}e^{iy\ln t}\right| = e^{-t}t^{x-1} \leqslant \varphi_K(t)$$

où $\varphi_K(t) = t^{\alpha-1}$ si $t \in]0,1]$ et $\varphi_K(t) = t^{\beta-1}e^{-t}$ si $t > 1$. La fonction φ_K est integrable : en 0 d'après le critère de Riemann car $\alpha > 0$, en $+\infty$ par comparaison exponentielle/polynôme. On peut donc appliquer le théorème 7.17 pour conclure que Γ est bien définie et holomorphe sur $U_{\mathrm{Re}>0}$. □

8 Exercices

8.1 Exercices d'entrainement

Exercice 1. 1. Calculer les intégrales suivantes:

(a) $I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i} dz,$

(b) $I_2 = \int_{C(2,2)} \frac{z^3 - iz + 1}{z - i} dz,$

(c) $I_3 = \int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)\cos(z)}{3z - \pi} dz,$

(d) $I_4 = \int_{C(2i,1)} \frac{e^{z^2}}{z^3(z - 2i)} dz.$

2. Calculer $\int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz$ et $\int_{C(-1,\frac{1}{2})} \frac{e^z}{(z-1)(z+1)} dz$. En déduire $\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz$.

3. Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^2 + (1-i)z - i$. Puis calculer $\int_{C(0,2)} \frac{z-1}{z^2 + (1-i)z - i} dz$.

Exercice 2. Pour $r > 0$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{C(0,r)} (|z| - e^{\cos(z)} \sin(z) + \bar{z}) dz.$$

Exercice 3. 1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{z^3 - i}{(z-1)^2} dz,$

(b) $I_2 = \int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^3} dz,$

(c) $I_3 = \int_{C(i,5)} \frac{z e^{iz}}{(1+z)^3} dz,$

(d) $I_4 = \int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z^3(z-2)} dz.$

2. Calculer les intégrales $\int_{C(i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$ et $\int_{C(-i,\frac{1}{2})} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$. En déduire $\int_{C(0,2)} \frac{iz^3 - 3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$.

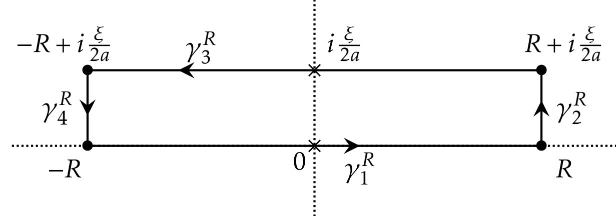
Exercice 4 (Transformé de Fourier d'une Gaussienne)**.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $G_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $G_a(t) = e^{-at^2}$. La transformé de Fourier de G_a est l'application $\widehat{G_a} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{G_a}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-i\xi t} dt.$$

Nous admettrons que $\widehat{G_a}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

1. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{G_a}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} I_a(\xi)$ où $I_a(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t + i\frac{\xi}{2a})^2} dt$.

2. Nous allons maintenant montrer que $I_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par
$$f(z) = e^{-az^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, on considère le chemin $\gamma^R = \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$ représenté graphiquement ci-dessous.



(a) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et en déduire que $\displaystyle\int_{\gamma^R} f(z)dz = 0$ pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$.

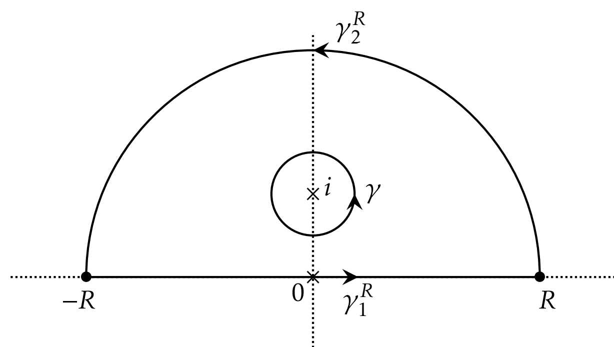
(b) Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)dz \to \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ quand $R \to +\infty$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_3^R} f(z)dz \to -I_a(\xi)$ quand $R \to +\infty$.

(d) Montrer que pour $j \in \{2,4\}$, $\displaystyle\int_{\gamma_j^R} f(z)dz \to 0$ quand $R \to +\infty$.

(e) Conclure.

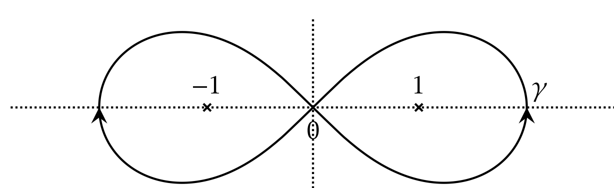
Exercice 5. On considère le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, défini par $\gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$. De plus, pour tout $R \geqslant 2$, on considère le chemin $\gamma^R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R$ représenté ci-dessous.



Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

1. Montrer que f est holomorphe sur son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout $R \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma^R} f(z)dz$.
3. À l'aide des formules de Cauchy, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_2^R} f(z)dz \to 0$ quand $R \to +\infty$.
5. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1^R} f(z)dz \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.
7. Par la même méthode, calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 6. Calculer l'integrale de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$ le long du chemin γ représenté ci-dessous.



Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $B(0,1)$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Calculer $\displaystyle\int_{C(0,1)} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}dz$.

2. En déduire que $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 2f(0) + f'(0)$.

3. Utiliser une stratégie similaire pour calculer $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $\mathrm{Re}(f)$ est bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 9 (Généralisation de Liouville)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non-constante. Montrer que l'image $f(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.

(Indication : Par l'absurde supposer qu'il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$ et étudier la fonction $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.)

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, montrer qu'elle y est analytique et déterminer le rayon de convergence de son développement en série entière au point z_0 indiqué.

1. $f_1(z) = \frac{1}{(1+z^2)(4-z^2)}$, en $z_0 = 1$.
2. $f_2(z) = \frac{e^{z^3-5z}}{\cosh(z^2)\cos z}$, en $z_0 = i$.
3. $f_3(z) = \frac{\sin z}{z}$, en $z_0 = 1$.

8.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 11. L'objectif de cette exercice est de donner une preuve alternative du théorème 7.11 qui ne repose pas sur le théorème de l'image ouverte. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f|$ admette un maximum local en un point $z_0 \in U$.

1. À l'aide de la formule de la moyenne, montrer que la fonction $|f|$ est constante dans un voisinage de z_0.

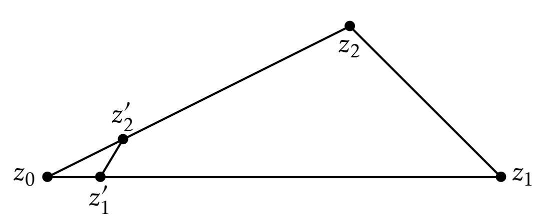
2. À l'aide des équations de Cauchy-Riemann, en déduire que f est constante dans un voisinage de z_0.

3. En déduire que f est constante sur U.

Exercice 12 (Raffinement de Goursat)**.** L'objectif de cet exercice est de démontrer la version suivante du lemme de Goursat :

> **Lemme 8.1 (Goursat):** *Soit U un ouvert. Soit Δ un triangle dans U. Soit $z_0 \in \Delta$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur U holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Alors,*
>
> $$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

1. On traite d'abord le cas où z_0 est un sommet du triangle. On dénote les deux autres sommets par z_1 et z_2.



(a) Montrer que pour tout z_1' sur le segment $[z_0, z_1]$ et pour tout z_2' sur le segment $[z_0, z_2]$, comme ci dessus, on a

$$\int_{\partial\Delta_{z_0z_1z_2}} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_{z_0z_1'z_2'}} f(z)dz.$$

(b) Montrer que quand $z_1' \to z_0$ et $z_2' \to z_0$, alors $\displaystyle\int_{\partial\Delta_{z_0z_1'z_2'}} f(z)dz \to 0$.

(c) Démontrer le lemme 8.1 dans ce cas.

2. On suppose dans cette question que $z_0 \in \partial\Delta$. À l'aide de la question précédente, démontrer le lemme 8.1 dans ce cas.

3. On suppose maintenant que $z_0 \in \mathring{\Delta}$. Démontrer le lemme 8.1 dans ce cas. Conclure.

4. Déduire de ce résultat que si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, et holomorphe sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est holomorphe sur U.

Exercice 13 (Théorème d'extension de Riemann)**.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème d'extension de Riemann à l'aide du lemme de Goursat raffiné.

> **Théorème 8.2 (Extension de Riemann):** *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in U$ soit $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée dans un voisinage de z_0. Alors f s'étend en une fonction holomorphe sur U.*

Ici, «f bornée dans un voisinage de z_0» signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \subset U$ et tel que f est bornée sur $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. L'expression «$f$ s'étend en une fonction holomorphe sur U» signifie qu'il existe une fonction holomorphe $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$ telle que $\hat{f}|_{U\setminus\{z_0\}} = f$.

On considère la fonction $F : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z = z_0 \\ (z - z_0)f(z) & \text{si} \quad z \neq z_0. \end{cases}$$

1. À l'aide de la question 4 de l'exercice 12, démontrer que F est holomorphe sur U.

2. À l'aide de la $\mathbb{C}$-dérivabilité de F en z_0, montrer que f s'étend en une fonction continue sur U.

3. Conclure.

Exercice 14. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $L \subset \mathbb{C}$ une droite. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f|_{U\setminus L}$ est holomorphe. Montrer que f est holomorphe. Indication : utiliser le théorème de Morera et faire une disjonction de cas selon la position du triangle par rapport à L.

Exercice 15 (Principe de reflexion de Schwarz)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On suppose que U est symétrique par rapport à l'axe réel. Notons $U_+ := U \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $U_- := U \cap \{\mathrm{Im}(z) < 0\}$. Soit $f : \overline{U_+} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f|_{U_+}$ est holomorphe et telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \overline{U_+} \cap \mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $g : \overline{U_-} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ est continue sur $\overline{U_-}$ et holomorphe sur U_-.

2. Montrer que l'on peut étendre la fonction f en une fonction continue $h : \overline{U} \to \mathbb{C}$ en posant $h(z) = f(z)$ si $z \in \overline{U_+}$ et $h(z) = g(z)$ si $z \in \overline{U_-}$.

3. Montrer que $h|_U$ est holomorphe. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 14.)

Exercice 16 (Extension de Γ)**.** Notons $U_{\mathrm{Re}>0} := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

1. Montrer que pour tout $z \in U_{\mathrm{Re}>0}$, on a
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{6}$$
2. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Utiliser l'équation (6) afin de montrer que la fonction Γ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$.

Exercice 17 (Égalité de la moyenne et principe du maximum)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f *vérifie la propriété de la moyenne* si pout tout $z_0 \in U$ et pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(z_0, r)$ on a
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$
L'objectif de cet exercice est de montrer que le principe du maximum est vérifié pour les fonctions vérifiant la propriété de la moyenne.

1. Montrer que les fonctions holomorphes vérifie la propriété de la moyenne.
2. Montrer que si f et g vérifient la propriété de la moyenne, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, les fonctions $f + \lambda g$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\overline{f}$ vérifient aussi la propriété de la moyenne.
3. Nous allons maintenant montrer l'énoncé suivant :

   Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction continue vérifiant la propriété de la moyenne. Soit $z_0 \in U$. Si f admet un maximum local en z_0, alors f est constante dans un voisinage de z_0.

   (a) Montrer que l'on peut supposer que $f(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$, ce que l'on fera par la suite.
   (b) On considère la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \mathrm{Re}(f(z)) - f(z_0)$. Montrer que g vérifie la propriété de la moyenne.
   (c) Montrer que $g(z_0) = 0$ et que g est à valeurs réelles.
   (d) Montrer qu'il existe un voisinage V de z_0 tel que $g(z) \leqslant 0$ pour tout $z \in V$.
   (e) En déduire que $g \equiv 0$ sur V.
   (f) Conclure.
4. Démontrer l'analogue suivant du théorème 7.11.

   Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue vérifiant la propriété de la moyenne. Soit $z_0 \in U$. Si z_0 est un maximum global de la fonction $|f|$, alors f est constante.

Exercice 18 (Lemme de Schwarz)**.** L'objectif de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 8.3 (Lemme de Schwarz): *Notons $\mathbb{D} := B(0,1)$. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors :*

1. *$|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| \leqslant 1$.*
2. *S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}^*$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$ et que $f(z) = az$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Pour montrer ce résultat, on considère la fonction $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ définie par
$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$.

2. Pour tout $0 < r < 1$, en appliquant le principe du maximum sur $B(0,r)$, montrer $|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$ pour tout $z \in B(0,r)$. En déduire la première assertion de l'énoncé.

3. Supposons que $z_0 \in d$ vérifie $|f(z_0)| = |z_0|$. À l'aide du principe du maximum, montrer que g est constante et en déduire la seconde assertion dans ce cas.

4. Supposons que $|f'(0)| = 1$. Montrer que g est constant et en déduire la seconde assertion dans ce cas.

Exercice 19 (Automorphismes du disque unité)**.** L'objectif de cet exercice est d'utiliser le lemme de Schwarz (exercice 18) afin de décrire les automorphismes (c'est à dire les biholomorphismes) de $\mathbb{D} := B(0,1)$. L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{D}$ est noté $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Pour tout $a \in \mathbb{D}$, on considère la fonction

$$f_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

1. Montrer que f_a définie un automorphisme de $\mathbb{D}$ et déterminer f_a^{-1}.

2. Montre à l'aide du lemme de Schwarz que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est un automorphisme tel que $f(0) = 0$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

3. Montrer que si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{D}$ tel que

$$f(z) = e^{i\theta} f_a(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Exercice 20 (Schwarz-Pick)**.** Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Montrer que pour tout $z_1, z_2, z \in \mathbb{D}$ on a

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)} \right| \leqslant \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2} \right| \quad \text{et} \quad \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Exercice 21. Cet exercice a pour but de donner une introduction à la géométrie du disque. Cela donnera aussi une interpretation géométrique du lemme de Schwarz. On note $\mathbb{D}$ le disque unité. Étant donné un vecteur tangent ξ en un point $z \in \mathbb{D}$, on note sa norme euclidienne par $\|\xi\|_2$ et on défini sa norme *hyperbolique* ou sa norme de *Poincaré* par

$$\|\xi\|_{\mathrm{hyp}} := \frac{\|\xi\|_2}{1-|z|^2}.$$

La *longueur hyperbolique* d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ est définie par

$$\ell_{\mathrm{hyp}}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathrm{hyp}} dt = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|_2}{1-|\gamma(t)|^2} dt.$$

La *distance hyperbolique* ou *distance de Poincaré* entre deux points $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ est définie par

$$d_{\mathrm{hyp}}(z_0, z_1) := \inf_{\gamma} \ell_{\mathrm{hyp}}(\gamma)$$

où le inf est pris sur tous les chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{D}$ allant de z_0 à z_1. L'espace métrique $(\mathbb{D}, d_{\mathrm{hyp}})$ est appelé *disque de Poincaré*. Les courbes de longueur minimale sont appelées *géodésiques* ou *droites hyperboliques*.

A. (a) À l'aide du lemme de Schwarz-Pick, montrer que toute application holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est décroissante par rapport à la distance de Poincaré, c'est à dire que pour tout $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$,

$$d_{\mathrm{hyp}}(f(z_1), f(z_1)) \leqslant d_{\mathrm{hyp}}(z_0, z_1).$$

(b) En déduire que pour tout automorpohisme du disque $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est une isométrie de $(\mathbb{D}, d_{\mathrm{hyp}})$.

B. On veut maintenant obtenir une expression explicite pour d_{hyp}.

(a) Soit $w \in]0,1[$. Montrer que la géodésique allant de 0 à w est le segment $[0,w]$ et montrer

$$d_{\mathrm{hyp}}(0,w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$

(b) Soit $w \in \mathbb{D}^*$. À l'aide d'un automorphisme judicieusement choisi, montrer que la géodésique de allant de 0 à w est le segment $[0,w]$ et montrer que

$$d_{\mathrm{hyp}}(0,w) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+|w|}{1-|w|}\right).$$

(c) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^*$. À l'aide d'un automorphisme judicieusement choisi, montrer que la géodésique de allant de z_1 à z_2 est une partie du cercle orthogonal à $\partial\mathbb{D}$ passant par z_1 et z_2 et que

$$d_{\mathrm{hyp}}(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|1-z_1\overline{z}_2| + |z_1-z_2|}{|1-z_1\overline{z}_2| - |z_1-z_2|}\right) = 2\mathrm{argtanh}\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z}_2}\right|.$$

(d) Montrer que d_{hyp} est bien une distance sur $\mathbb{D}$. Montrer aussi que les *boules hyperboliques* sont des boules euclidiennes (pas nécessairement avec le même centre ou le même rayon).

C. La géometrie du disque hyperbolique définie ci-dessus est appelée *géométrie hyperbolique*. Vérifier qu'en géométrie hyperbolique, les axiomes d'Euclide sont vérifiés, à l'exception du cinquième postulat.

D. Rappelons (voir l'exercice 25 du chapitre I), que $\mathbb{D}$ est biholomorphe au demi-plan $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (dit *demi-plan de Poincaré*), via l'application $\varphi : z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. Décrire les géodésiques de $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ où $d_{\mathbb{H}}$ est la métrique induite par d_{hyp} via φ.

E. Nous concluons maintenant par une preuve plus «géométrique» du théorème de Liouville. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe bornée.

(a) Montrer que l'on peut supposer que $f(z) \in \mathbb{D}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ce que l'on supposera dans la suite).

(b) Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ on considère l'application $f_R : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ définie par $f_R(z) = f(Rz)\ \forall z \in \mathbb{D}$. À l'aide la propriété de décroissance de la distance de Poincaré, montrer que pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $z_1, z_2 \in B(0,R)$,

$$d_{\mathrm{hyp}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\mathrm{hyp}}\Big(f_R\Big(\frac{z_1}{R}\Big), \Big(\frac{z_2}{R}\Big)\Big) \leqslant d_{\mathrm{hyp}}\Big(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}\Big)$$

(c) En déduire que f est constante.