Examen du 31 Mai 2022
9h-12h

Instructions :

- Tous les documents, téléphones portables, calculatrices... sont interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (Questions de cours : 5 points).

1. Énoncer les formules de Cauchy sur un cercle et le théorème de Cauchy sur un ouvert étoilé.
2. Énoncer les inégalités de Cauchy, puis les démontrer.
3. Énoncer la formule de la moyenne, puis la démontrer.

Exercice 2 (2 points). Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{e^{z+3}}{(z-i)^4}$$

sur $A_i(0,+\infty) = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et en déduire $\operatorname{res}_i f$.

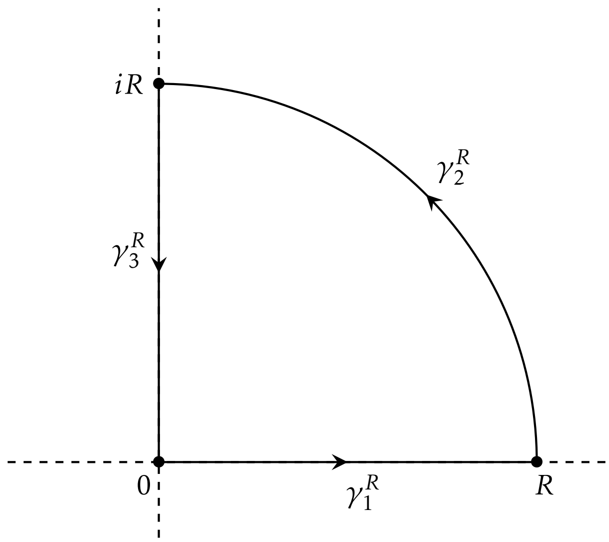
Exercice 3 (4 points). Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non-constante.

1. On suppose (uniquement dans cette question) qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $C \in \mathbb{R}^*$ et $R_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant R_0$ on ait
$$|f(z)| \leqslant C|z|^m.$$
   (a) Montrer que f est un polynôme de degré au plus m.
   (b) Que peut-on dire de plus si l'on a $R_0 = 0$?
2. On considère la fonction $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$.
   (a) Montrer que $\operatorname{res}_0 g = f'(0)$.
   (b) Montrer que 0 est un pôle de g si et seulement si f est un polynôme.

Exercice 4 (5 points)**.** L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale suivante :

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t^2) - \sin(t^2)}{t^4 + 4} dt.$$

On considère aussi la fonction f donnée par $f(z) = \dfrac{e^{iz^2}}{z^4 + 4}$. Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les chemins γ_1^R, γ_2^R et γ_3^R représentés ci-dessous et on définit $\gamma^R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R$.



1. Justifier que l'intégrale I est bien définie.

2. Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier pourquoi f est holomorphe sur son ensemble de définition.

3. Déterminer toutes les singularités isolées de f dans le premier quadrant
$$Q := \{z \in \mathbb{C} \; ; \; \mathrm{Re}(z) > 0 \;\text{ et }\; \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

4. Déterminer le résidu de f en chacune des singularités isolées de f dans Q (on *ne* demande *pas* de calculer le résidu de f pour les singularités isolées qui ne sont pas dans Q).

5. Donner une paramétrisation pour chacun des chemins γ_1^R, γ_2^R et γ_3^R.

6. Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $R > 2$, déterminer $\displaystyle\int_{\gamma^R} f(z)dz$.

7. Montrer que
$$\lim_{R \to +\infty} \left(\int_{\gamma_1^R} f(z)dz + \int_{\gamma_3^R} f(z)dz \right) = (1 - i)I.$$

8. Montrer que
$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2^R} f(z)dz = 0.$$

9. Conclure.

Exercice 5 (4 points)**.** Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < 1\}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant :

Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ une application continue telle que $f|_{\mathbb{D}}$ est holomorphe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ des points deux à deux distincts et soit $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction f a un zéro d'ordre m_j en a_j. Alors on a

$$|f(0)| \leqslant |a_1|^{m_1} \cdots |a_n|^{m_n}. \tag{$*$}$$

1. Soit $a \in \mathbb{D}$. On note $\varphi_a : z \mapsto \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$.
   (a) Determiner l'ensemble de définition de φ_a et montrer que cet ensemble de définition contient $\overline{\mathbb{D}}$. En déduire que φ_a est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$.
   (b) Montrer que $\varphi_a(0) = a$, que $\varphi_a(a) = 0$ et que $|\varphi_a(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$.

2. Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ une application continue telle que $f|_{\mathbb{D}}$ est holomorphe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{D}$ des points deux à deux distincts soit $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction f a un zéro d'ordre m_j en a_j. Pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ on pose
$$g(z) = \frac{f(z)}{\varphi_{a_1}(z)^{m_1} \cdots \varphi_{a_n}(z)^{m_n}}.$$
   (a) Montrer que g s'étend en une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe sur $\mathbb{D}$.
   (b) Montrer que $|g(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$, puis que $|g(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
   (c) Conclure.

3. (Questions hors barème) Avec les mêmes notations que dans les questions précédentes.
   (a) Supposons que les $a_1, \ldots, a_n$ sont tous non-nuls. Que dire si il y a égalité dans $(*)$?
   (b) Supposons que $a_1 = 0$ et que $a_2, \ldots, a_n \neq 0$. Montrer que
$$|f^{(m_1)}(0)| \leqslant m_1! |a_2|^{m_2} \cdots |a_n|^{m_n}.$$