Analyse complexe 2023-2024
trame de cours

Damien Mégy

19 avril 2024

Table des matières

Chapitre 1

Holomorphie (VIDE)

Chapitre 2

Fonctions analytiques

Définition 2.0.1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathbb{C}^U$. On dit que f est analytique sur U si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de U.

Proposition : une série entière de rayon R est analytique sur $\mathbb{D}(0, R)$. Preuve : DSE en $z_0 \neq 0$ avec le binôme de Newton.

Définition : un zéro d'une fonction f est un élément α tq $f(\alpha) = 0$.

Une série entière identiquement nulle sur un voisinage de l'origine est identiquement nulle sur son disque ouvert de convergence. Ceci est une conséquence du fait que les coefficients a_n se récupèrent avec les dérivées successives en l'origine.

Le théorème des zéros isolés est une version un peu plus puissante de ce résultat.

Théorème 2.0.2 (Zéros isolés pour les séries entières)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon strictement positif et f sa somme. S'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers zéro et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = 0$, alors tous les a_n sont nuls.

Définitions : point accumulation d'une partie, point isolé. Partie discrète.

Reformulation du théorème des zéros isolés : si 0 est un zéro non isolé de f, alors f est identiquement nulle.

Théorème 2.0.3. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ analytique et $Z := f^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des zéros de f. Si Z admet un point d'accumulation dans U, alors f est constante.

Preuve 1 : on utilise l'ensemble A des points au voisinage desquels f est identiquement nulle.

Preuve 2 : on utilise l'ensemble B des points où toutes les dérivées de f s'annulent.

Chapitre 3

Intégration curviligne

3.1 Chemins

Définitions : chemins, lacets, chemin opposé, concaténation de chemins. Chemins $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

3.2 Formes différentielles

Formes différentielles réelles et complexes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.
Cas particulier : formes holomorphes.
Opérateur $d : \mathscr{C}^\infty(U,\mathbb{C}) \to \Omega^1(U,\mathbb{C})$. Image et noyau de cet opérateur. Formes exactes.

3.3 Intégrales curvilignes

Définition pour une forme différentielle.
Invariance par reparamétrage, classe d'équivalence, arcs orientés.
Majoration du module par la norme infinie et la longueur d'arc.

3.4 Intégration sur le bord d'un compact régulier

Rappel : bord d'une partie.

Définition 3.4.1. Compact à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Orientation canonique du bord bien définie.
Exemples à faire soi-même : nombre fini de trous. L'angle à un point anguleux ne peut être nul.
Remarque : il n'y a qu'un nombre fini de points anguleux sur le bord. Le bord est paramétrable par un nombre fini d'arcs $\mathscr{C}^1$.

Définition 3.4.2. Intégration d'une 1-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur le bord d'un compact à bord C^1 par morceaux.

3.5 Primitives

Attention aux différentes significations du mot « primitive ».

Définition 3.5.1 (Primitive (holomorphe, d'une fonction))**.** On dit que $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admet une primitive (holomorphe,) ou simplement une primitive, s'il existe $F \in \mathscr{O}(U)$ telle que $F' = f$.

Attention, certaines fonctions holomorphes n'ont pas de primitive, contrairement à ce qui se passe en analyse réelle où toute fonction continue admet une primitive. Par exemple la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Le fait d'avoir une primitive dépend de façon cruciale de l'ouvert de définition. Par exemple la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/z$ possède une primitive, à savoir la détermination principale du log, notée Log dans ce cours (ou Log_0, aussi).

Proposition 3.5.2. Si f admet une primitive holomorphe, l'intégrale curviligne $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités du chemin.

Dans ce qui suit, le mot « primitive » a encore un nouveau sens, il s'applique cette fois à des formes différentielles et plus à des fonctions.

Vocabulaire : si ω est une 1-forme exacte, c'est-à-dire qu'il existe f telle que $\omega = df$, alors on dit aussi qu'elle admet une primitive. (La primitive est la fonction f.)

Attention dans ce nouveau contexte, la primitive de la forme différentielle n'est pas forcément une fonction holomorphe, c'est juste une fonction C^1.

Ce sens généralise le sens précédent comme suit : la fonction f possède une primitive holomorphe si la forme différentielle $f(z)dz$ possède une primitive au sens des formes différentielles. (Exercice : il s'agit de montrer que dans ce cas la primitive est automatiquement holomorphe.)

Proposition 3.5.3. Soit ω une 1-forme différentielle. Si ω admet une primitive, l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ ne dépend que des extrémités du chemin γ.

3.5.1 Convergence

Laissé en exercice :

intégration sur un chemin fixé d'une suite de fonctions qui CVU (ou CVUTC).

Cas plus général : que faire si on n'a pas CVUTC ? dans certaines conditions, écrire explicitement le paramétrage et convergence dominée.

intégration d'une forme donnée sur une suite de chemins qui converge en topologie C^1 vers un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Chapitre 4

Théorème et formule(s) de Cauchy

4.1 Théorème intégral de Cauchy

Théorème 4.1.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$, et $K \subseteq U$ un compact à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux, dont le bord est muni de son orientation canonique. Alors, $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$.

Mise en garde 4.1.2.

1. Le bord n'est pas forcément connexe. Par exemple, le bord d'une couronne fermée est l'union de deux cercles.
2. Attention à l'orientation du bord, en particulier lorsqu'il n'est pas connexe comme dans l'exemple précédent.

Historique : Cauchy, Riemann, Goursat.
Plan de la preuve :

1. Lemme de Goursat.
2. Approximation polygonale du compact. Ceci n'a pas été démontré en détail et ne fera pas l'objet de questions de cours.
3. Fin de la preuve : approximation de l'intégrale curviligne par les intégrales sur les triangulations de plus en plus fines. Ceci n'a pas été démontré en détail et ne fera pas l'objet de questions de cours.

4.2 Formule de Cauchy

Formule de Cauchy
Cas particulier avec des cercles.
Conséquence :

Théorème 4.2.1. Les fonctions holomorphes sont analytiques. De plus, si $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$, le rayon de convergence du DSE de f en z_0 a un rayon supérieur ou égal à $\mathrm{dist}(z_0, U^c)$.

Conséquence :

1. Les fonctions holomorphes sont $\mathbb{C}^\infty$.
2. Tous les théorèmes vrais pour les fonctions analytiques sont vrais pour les fonctions holomorphes : zéros isolés, prolongement analytique etc.

Dans le cas particulier de cercles centrés, la formule de Cauchy se spécialise en la formule suivante, appelée formule de la moyenne :

Théorème 4.2.2 (Formule de la moyenne)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$. Pour tout $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}(z_0, r} \subseteq U$, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

(Interprétation : la valeur de f en z_0 est la moyenne de ses valeurs sur un cercle centré en z_0. Preuve : c'est juste la formule de Cauchy. Erreur de compréhension possible : la formule ne dit PAS que $f(z_0) = \int_{\mathscr{C}(z_0,r} f(z)dz$.)

4.3 Formules de Cauchy d'ordre supérieur

Théorème 4.3.1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{O}(U)$. Soit $K \subseteq U$ un compact à bords C^1 par morceaux et $z \in K^\circ$. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Remarque : pour $n = 0$, c'est la formule de Cauchy classique.

Cas particulier des cercles centrés : on récupère les formules intégrales pour les coefficients des séries entières.

En prenant les formules de Cauchy et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient ce qu'on appelle les inégalités de Cauchy. Dans le cas particulier de cercles centrés, on obtient les formules suivantes très souvent utiles :

Corollaire 4.3.2 (Inégalités de Cauchy pour cercles centrés)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\overline{\mathbb{D}(z,r)}$ un disque fermé inclus dans U. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{\left|f^{(n)}(z)\right|}{n!} \leq \frac{1}{r^n} \max_{w \in \mathscr{C}(z,r)} |f(w)|$$

On étudie maintenant les propriétés locales des fonctions holomorphes. On commence par une conséquence directe de la formule de la moyenne : une fonction holomorphe admettant un maximum local (en module) en un point est localement constante au voisinage de ce point.

Théorème 4.3.3 (Principe du maximum)**.** Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{O}(U)$. Si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0, alors f est constante sur la composante connexe de de U contenant z_0.

Variations, voir feuilles de TD :

1. Sur un compact $K \subset U$, le module atteint son max au bord de K.
2. Principe dit « du minimum ».

Théorème 4.3.4 (de Liouville)**.** Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Si f est bornée, alors f est constante.

Avertissement : il est important que la fonction soit holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Si vous voulez appliquer Liouville, vous l'appliquez à une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et bornée), rien d'autre. Si vous avez une fonction définie sur un ouvert plus petit que $\mathbb{C}$ et que vous souhaitez montrer qu'elle est constante, alors soit vous montrez préalablement qu'elle peut s'étendre en fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (ça n'est pas forcément le cas) et vous appliquez Liouville classique, soit vous faites autrement.

Corollaire 4.3.5 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** Tout polynôme complexe non constant admet une racine sur $\mathbb{C}$.

Preuve : supposons par l'absurde qu'un polynôme P non constant ne s'annule pas. Alors la fonction $f = 1/P$ est entière et bornée, donc constante, contradiction.

4.4 Étude locale

Théorème 4.4.1 (Inversion locale)**.** Soit $u \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $z_0 \in U$ un point tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert V contenant z_0 tel que $W := f(V)$ soit ouvert et que $f|_V$ soit un biholomorphisme de V sur W.

Multiplicité d'un zéro, Point critique, multiplicité d'un point critique

Étude aux points critiques : énoncé, pas démontré.

[Rappel de terminologie : une fonction continue est dite ouverte si l'image de tout ouvert est ouverte.]

Théorème 4.4.2. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante. Alors, f est ouverte.

Preuve de l'étude au point critique : détermination de racines n-èmes et de logarithmes complexes, puis preuve.

Preuve de l'application ouverte.

Application 4.4.3. Tous les exos du type « une fonction holomorphe sur un connexe à valeurs dans $\mathbb{R}$ est constante » sont maintenant faisables avec l'application ouverte, sans devoir calculer avec Cauchy-Riemann.

Application 4.4.4. Deuxième preuve du principe du maximum : si $z_0 \in U$ et que f n'est pas localement constante au voisinage de z_0, alors $f(U)$ contient un voisinage de $f(z_0)$ et donc $|f|$ n'atteint pas son maximum en z_0.

Théorème 4.4.5 (Lemme de Schwarz : vu en TD)**.**

Attention à la preuve, il se produit quelque chose d'assez surprenant dans la majoration : en majorant sur un ensemble plus grand, on arrive à obtenir un majorant plus petit. Ceci est un effet du principe du maximum et n'est absolument pas intuitif.

Théorème 4.4.6 (Biholomorphismes du disque : compléter la preuve)**.**

4.5 Non traité en CM : intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre

Intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre.

TD : fonction Gamma d'Euler

4.6 Non traité en CM : primitives, théorème de Morera

Théorème 4.6.1 (Morera)**.** Soit Ω un ouvert et $f \in C^0(\Omega)$. Si $f(z)dz$ a une intégrale nulle sur tout bord de triangle de Ω, alors f est holomorphe.

Preuve : on prend un point, un disque autour et on construit une primitive locale holomorphe sur ce disque, qui est étoilé en z_0.

Attention ne pas dériver en z_0 mais en z dans le disque.

Remarque : version un peu plus générale : si f est continue et d'intégrale curviligne nulle sur tout triangle sur un ouvert étoilé, elle a une primitive sur cet ouvert étoilé et doc est holomorphe sur cet ouverte étoilé.

A rapprocher des énoncés : si sur un ouvert connexe l'intégrale ets nulle sur tout lacet, on a une primitive.

Chapitre 5

Séries de Laurent, singularités isolées, Résidus

5.1 Séries de Laurent

Séries de Laurent, exemples. Partie régulière, partie principale/polaire.

Couronnes, notations, couronne ouverte de convergence d'une série de Laurent, convergence normale sur sous-couronne fermée de la couronne ouverte de convergence.

Dérivée d'une série de Laurent.

Théorème 5.1.1 (Développement en série de Laurent des fonctions holomorphes sur une couronne)**.** Une fonction holomorphe sur une couronne est développable en série de Laurent sur cette couronne et $a_n = \cdots$.

Exercice : Développer $\dfrac{1}{z-1}$ en série de Laurent sur la couronne $C(0,2,3)$. (Revoir le TD.)

5.2 Singularités isolées

Définition : singularité isolée.

Exemples et contre-exemples. L'origine n'est pas une singularité de Log_0, ni de $\sin(1/z)^{-1}$.

5.2.1 Singularités effaçables

Définition 5.2.1. Une singularités isolée z_0 d'une fonction holomorphe f est dite *effaçable* si f se prolonge holomorphiquement en z_0.

Rq : on lit aussi « éliminable » au lieu d'effaçable dans certains ouvrages. Dans ce cours, on adopte néanmoins la terminologie « singularité effaçable », qui est assez standard.

Proposition 5.2.2. Soit z_0 une singularités isolée d'une fonction holomorphe f. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ le développement en série de Laurent de f sur un disque épointé $\mathbb{D}(z_0,\epsilon)^*$. Alors, z_0 est une singularité effaçable ssi $\forall n<0, a_n = 0$.

Idée de preuve : pour le sens difficile, si f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$, alors on développe $\tilde{f}$ en série entière, et on invoque l'unicité des coefficients d'un développement en série de Laurent sur le disque épointé.

Théorème 5.2.3 (Théorème d'extension de Riemann)**.** Soit z_0 une singularité isolée d'une fonction holomorphe f. Si $|f|$ est bornée au voisinage de z_0, alors la singularité est effaçable, autrement dit f se prolonge holomorphiquement en z_0 !

Remarque 5.2.4. *Encore un résultat spectaculaire (évoqué lors du tout premier cours), à l'opposé de ce qu'il se passe en analyse réelle classique. Une fonction de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ (et même analytique réelle sur $\mathbb{R}^*$), bornée au voisinage de l'origine, n'a en effet aucune raison de se prolonger ne serait-ce que continûment en l'origine. Dans le cadre holomorphe, être localement bornée autour d'une singularité isolée garantit un prolongement holomorphe (en particulier $\mathscr{C}^\infty$ mais bien plus) !*

(fin du cours du 10 avril)

5.2.2 Cas non effaçable : pôles et singularités essentielles

Définition 5.2.5. Soit z_0 une singularité isolée non effaçable d'une fonction holomorphe f. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ le développement en série de Laurent de f sur un disque épointé centré sur z_0. On dit que z_0 est :

— un *pôle* si $\{n<0 \mid a_n \neq 0\}$ est fini. (Nombre fini de termes dans la partie principale.) Dans ce cas, $m := \min\{n\in\mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$ est l'ordre du pôle.

— une singularité essentielle sinon. (Infinité de termes dans la partie principale.)

Exemples 5.2.6. L'origine 0 est un pôle de $1/z^3$, d'ordre 3. L'origine 0 est une singularité essentielle de $z \mapsto \exp(1/z) = \sum_{p\geq 0} \frac{(1/z)^p}{p!} = \sum_{n\leq 0} \frac{z^n}{(-n)!}$.

Proposition 5.2.7 (Comportement au voisinage d'un pôle)**.**

Théorème 5.2.8 (Casoratti-Weiestrass)**.** Soit $z_0 \in U$ une singularité essentielle d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$. Alors, pour tout voisinage W de z_0 contenu dans U, l'image par f de $W \setminus \{z_0\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Moralité : le comportement au voisinage d'une singularité essentielle est extrêmement pathologique, bien pire que simplement tendre vers $+\infty$ en module. Un bon exemple est $\exp 1/z$ qui fait des choses fondamentalement différentes suivant comment on s'approche de l'origine.

5.3 Fonctions méromorphes

Proposition 5.3.1. Soit U un ouvert, $Z \subset U$ un fermé constitué de points isolés et f fonction holomorphe sur $U \setminus Z$. Alors il y a équivalence entre :

— Pour tout $z_0 \in Z$, z_0 n'est pas une singularité essentielle de f.

— Au voisinage de tout $z_0 \in Z$, f s'écrit comme le quotient g/h de deux fonctions holomorphes (définies sur un voisinage de z_0).

Définition 5.3.2. Soit U un ouvert. Une fonction méromorphe sur U est la donnée d'un fermé $Z \subset U$ constitué de points isolés, et d'une fonction holomorphe sur $U \setminus Z$ vérifiant, pour tout $z_0 \in Z$, les conditions équivalentes de la proposition précédente.

Rq : la seconde définition se réinterprète en disant que f s'étend en une application de U vers la droite projective complexe.

Attention, une « fonction méromorphe sur U » n'est donc PAS une fonction de U dans $\mathbb{C}$. Par exemple, on dit que $z \mapsto \frac{1}{z}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Ca ne veut pas dire que c'est une fonction définie sur $\mathbb{C}$, ça veut juste dire ce qu'il y a dans la définition.

5.4 Théorème des résidus

Définition 5.4.1. Résidus.

Remarque : le résidu est défini même pour une singularité essentielle.

Techniques de calcul de calcul de résidus.

Attention : si vous travaillez sur d'autres ouvrages, vous croiserez *beaucoup* d'énoncés tous un peu différents sur les résidus. Formules homotopiques, homologiques, avec l'intervention d'indices, des conditions de simple connexité etc... Nous n'avons pas vu ces notions.

La forme donnée ici est la plus basique et efficace, elle ne nécessite pas de connaissances en topologie algébrique et s'applique dans un très grand nombre de cas en pratique. (Son désavantage est bien sûr qu'elle n'aborde pas les thématiques topologiques évoquées plus haut, parce qu'elle les évite. C'est dommage, mais cette année nous n'aurons pas le temps de traiter ces thématiques.)

Théorème 5.4.2 (des résidus)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}*$ un ouvert, $Z \subset U$ une partie discrète, $K \subset U$ un compact à bords $\mathscr{C}^1$ par morceaux avec $Z \cap \partial K = \emptyset$, et f une fonction holomorphe sur $U \setminus Z$. Alors :

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i\pi \sum_{\alpha \in K \cap Z} \text{Rés}_{\alpha}(f).$$

Applications : calculs d'intégrales réelles, en particulier dans des cas où l'on ne dispose pas de primitive, voire feuille de TD dédiée.