TD 9 : Résidus et Rouché

Exercice 1. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{4\pi}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{\mathscr{C}(0,N)} \tan(\pi z)dz$.

Exercice 3. [Résidu à l'infini] Soit $P \in \mathbb{C}$ un ensemble fini et f une fonction holomorphe sur $U = \mathbb{C} \setminus P$ et ayant des pôles aux points de P. On appelle résidu à l'infini de f et on note $\text{rés}_\infty(f) := -\text{rés}_0\left(f(1/w)w^{-2}\right)$. Montrer que le résidu à l'infini est bien défini, qu'il est égal à $\displaystyle -\int_{\mathscr{C}(0,R)} f(z)dz$ pour R assez grand, et que l'on a la formule :

$$\sum_{a\in P} \text{rés}_a(f) + \text{rés}_\infty(f) = 0.$$

Exercice 4. Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle I := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}dx$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Pour tous $0 < \varepsilon < R$ on définit $K_{R,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, \mathbb{R}_+) \geq \varepsilon \text{ et } |z| \leq R\}$. Montrer que $K_{R,\varepsilon}$ est compact et que son bord est paramétré par les chemins $\gamma_k^{R,\varepsilon}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, avec

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{R,\varepsilon} &: [0, \sqrt{R^2-\varepsilon^2}] \to \mathbb{C}, t \mapsto i\varepsilon + t \\
\gamma_2^{R,\varepsilon} &: [\arcsin(\varepsilon/R), 2\pi - \arcsin(\varepsilon/R)] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it} \\
\gamma_3^{R,\varepsilon,op} &: [0, \sqrt{R^2-\varepsilon^2}] \to \mathbb{C}, t \mapsto -i\varepsilon + t \\
\gamma_4^{R,\varepsilon} &: [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto \varepsilon e^{-it}.
\end{aligned}$$

2. Dessiner $K_{2,1/2}$.
3. Soit $f : z \mapsto \dfrac{R(z)}{z^2+1}$, où $R(z)$ désigne la détermination de la racine carrée sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $R(z) := \exp\left(\dfrac{1}{2}\text{Log}_\pi(z)\right)$. Donner le domaine d'holomorphie de f, déterminer ses singularités isolées et les résidus en ces singularités.
4. Quelle est la limite de $R(z)$ lorsque z tend vers $x \in \mathbb{R}_+^*$ par valeurs imaginaires supérieures ? Inférieures ? Que vaut $R(-1)$? Que vaut la dérivée $R'(z)$?
5. On note $\displaystyle I(R,\varepsilon) := \int_{\partial K_{R,\varepsilon}} f(z)dz$. Pour quels paramètres R et ε est-ce bien défini ? Calculer $I(R,\varepsilon)$ pour ces valeurs des paramètres.
6. Calculer les limites lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ des quatre intégrales $\displaystyle I_k(R,\varepsilon) := \int_{\gamma_k} f(z)dz$.
7. Montrer que $I_2(R,\varepsilon)$ et $I_4(\varepsilon)$ tendent vers zéro lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ et conclure.

Exercice 5. Montrer avec la même technique qu'à l'exercice précédent que :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,; \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,; \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Exercice 6. Le but de l'exercice est de montrer que $I := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln x}{x^2+4} dx$ est égal à $\frac{\pi \ln 2}{4}$.

1. Pour tous $0 < \delta < \varepsilon < R$ on définit $K_{R,\varepsilon,\delta} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(z, \mathbb{R}_+) \geq \delta \text{ et } \varepsilon \leq |z| \leq R\}$. Montrer que $K_{R,\varepsilon,\delta}$ est compact et que son bord est paramétré par les chemins γ_k, $k \in \{1,2,3,4\}$ définis par

$$\gamma_1 : [\sqrt{\varepsilon^2-\delta^2}, \sqrt{R^2-\delta^2}] \to \mathbb{C}, t \mapsto i\delta + t$$
$$\gamma_2 : [\arcsin(\delta/R), 2\pi - \arcsin(\delta/R)] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$$
$$\gamma_3^{op} : [\sqrt{\varepsilon^2-\delta^2}, \sqrt{R^2-\delta^2}] \to \mathbb{C}, t \mapsto -i\delta + t$$
$$\gamma_4^{op} : [\arcsin(\delta/\varepsilon), 2\pi - \arcsin(\delta/\varepsilon)] \to \mathbb{C}, t \mapsto \varepsilon e^{it}$$

   (Ces chemins dépendent des paramètres mais on n'a pas fait appraître les paramètres dans la notations pour alléger l'écriture.)
2. Dessiner le compact pour $\varepsilon = 1$, $\delta = 1/2$ et $R = 2$.
3. Soit $f : z \mapsto \frac{(\mathrm{Log}_\pi z - i\pi)^2}{z^2+4}$, où Log_π désigne la détermination du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ vérifiant $\mathrm{Log}_\pi(-1) = -i\pi$. Quelle est la limite de $f(z)$ lorsque z tend vers $x \in \mathbb{R}_+^*$ par valeurs imaginaires supérieures ? Inférieures ?
4. Calculer la somme des résidus de f en $\pm 2i$.
5. On note $I(R,\varepsilon,\delta) := \int_{\partial K_{R,\varepsilon}} f(z)dz$. Pour quels paramètres R et ε est-ce bien défini ? Calculer $I(R,\varepsilon,\delta)$ pour ces valeurs des paramètres.
6. Calculer la limite lorsque $\delta \to 0$ de $I(R,\varepsilon,\delta)$, puis la limite de cette limite lorsque $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$.
7. Conclure.

⋆ ⋆ ⋆ Théorème de Rouché ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 7. Soit $P(z) = z^4 + 6z + 3$. Montrer que P n'a aucune racine dans $\mathbb{D}(0,1/3)$, qu'il a une seule racine dans $\mathbb{D}(0,1)$ et que toutes ses racines sont de module ≤ 2.

Exercice 8. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Ré}(b) > 1$. Montrer que l'équation $e^{-z} + z = b$ a une solution unique dans le demi-plan $\mathrm{Ré}(z) > 0$. Indication : [1]

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{D}$. Montrer que l'équation $z^2 \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^3 = b$ possède cinq solutions dans $\mathbb{D}$. Indication : [2]

Exercice 10. Soit U un ouvert connexe et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathscr{O}(U)$.

1. Soit $K \subset U$ un compact. On suppose que f ne s'annule pas sur ∂K. Montrer pour n grand, f_n ne s'annule pas non plus sur ∂K et f et f_n ont même nombre de zéros dans K, comptés avec multiplicités.
2. Montrer que si à partir d'un certain rang les fonctions f_n ne s'annulent pas, alors soit f ne s'annule pas, soit f est identiquement nulle.
3. Montrer que si à partir d'un certain rang les fonctions f_n sont injectives, alors soit f est injective, soit f est constante.

Exercice 11. Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme complexe de degré ≥ 1. Montrer qu'il existe $c \in \mathscr{C}(0,1)$ tel que $P(c) \geq 1$.

Exercice 12. Soit $f \in \mathscr{C}^0\left(\overline{\mathbb{D}}(0,1), \mathbb{C}\right)$, non constante et envoyant le cercle $\mathscr{C}(0,1)$ dans lui-même. Montrer que si de plus f est holomorphe dans $\mathbb{D}$, alors f s'annule dans $\mathbb{D}$ puis que $\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$. (Montrer que ces deux conclusions sont fausses sans l'hypothèse d'holomorphie.)

---

1. Utiliser les compact $K_R = \{re^{i\theta}, 0 \leq r \leq R \text{ et } -\pi/2 \leq \theta \leq \theta\}$.
2. Appliquer Rouché à $f(z) = z^2(z-a)^3 - b(1-\overline{a}z)^3$ et $g(z) = z^2(z-a)^3$.

Solutions ou indications

Les solutions ne sont pas toutes détaillées. Elles sont là pour faciliter l'autocorrection.

Correction de l'exercice 1. La quantité $x^4+x^3+x^2+x+1$ est une somme de suite géométrique. Ensuite, on procède comme pour $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^4}$.

Si $f(z) = \frac{1}{z^4+z^3+z^2+z+1} = \frac{z-1}{z^5-1}$, le résidu en un pôle simple α est $\frac{\alpha-1}{5\alpha^4}$.
La somme des deux résidus est donc

$$\frac{1}{5}\left(e^{2i\pi/5}-1)e^{-8i\pi/5}+(e^{4i\pi/5}-1)e^{-16i\pi/5}\right) = \frac{1}{5}\left(e^{-6i\pi/5}+e^{-3i\pi/5}+e^{-12i\pi/5}+e^{-11i\pi/5}\right)$$

Avec un dessin on voit que la parenthèse vaut $-2i\sin(2\pi/5)$ et donc la somme des deux résidus, multipliée par $2i\pi$, vaut $\frac{4\pi}{5}\sin(2\pi/5)$.

Correction de l'exercice 2. Pôles simples en $\frac{1}{2}+k$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Les résidus valent tous $-1/\pi$.

Correction de l'exercice 3. La fonction $w \mapsto f(1/w)$ est holomorphe sur un voisinage de l'origine, disons sur un disque épointé. On peut considérer $\phi : z \mapsto 1/z$ qui réalise un biholomorphisme de de la couronne $\mathscr{C}(0,0,1/r)$ sur la couronne $\mathscr{C}(0,r,+\infty)$.

Si r est strictement supérieur au plus grand module des pôles de f, en prenant $R > r$ on a

$$\begin{aligned}
\text{rés}_\infty(f) &= -\text{rés}_0\left(f(1/w)w^{-2}\right) \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(0,1/R)} f(1/w)w^{-2}dw \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(0,1/R)} f(\phi(w))\phi'(w)dw \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi(\gamma(t)))\phi'(\gamma(t))\gamma'(t)dt && \text{en posant } \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}/R \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta(t))\delta'(t)dt && \text{en posant } \delta := \phi\circ\gamma \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_\delta f(z)dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(0,R)} f(z)dz && \text{changement d'orientation, puisque } \delta(t) = Re^{-it} \\
&= -\sum_{a\in P}\text{rés}_a(f) && \text{Théorème des résidus sur } \mathbb{D}(0,R)
\end{aligned}$$

Pour $\phi'(\gamma(t))\gamma'(t) = \delta'(t)$, si besoin, redémontrer ceci avec les formules de calcul sur les opérateurs de Wirtinger : c'est l'exercice 7 du TD2.

Correction de l'exercice 4.

— Comme pour la racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $R'(z) = \frac{1}{2R(z)}$ en dérivant la relation $R(z)^2 = z$.

— La limite de $R(z)$ lorsque z tend vers $x \in \mathbb{R}_+^*$ par valeurs imaginaires positives est $\sqrt{x}$, et $-\sqrt{x}$ par valeurs imaginaires négatives.

— Le résidu de f au pôle double -1 vaut $R'(-1) = \frac{1}{2R(-1)} = \frac{1}{2i}$. Si $\varepsilon < 1$ et $R > 1$, l'intégrale de contour vaut donc π.

— On a $I_1 \to I$, $I_3 \to I$ également et I_2 et I_4 tendent vers zéro. On en déduit finalement que $I = \pi/2$

Correction de l'exercice 5.

1. Le résidu vaut $\frac{1}{3}e^{-2i\pi/3}$. Si $\varepsilon < 1$ et $R > 1$, l'intégrale sur $\partial K_{R,\varepsilon}$ vaut $\frac{2\pi}{3}e^{-i\pi/6}$.
2. Pôles simples. Les résidus valent $\frac{e^{-\pi/4}}{2i}$ et $\frac{e^{3i\pi/4}}{-2i} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2i}$. Si $\varepsilon < 1$ et $R > 1$, l'intégrale sur $\partial K_{R,\varepsilon}$ vaut $\pi\sqrt{2}$.

3. Pôles simples. Les résidus valent $\frac{e^{i\pi/6}}{2i}$ et $\frac{i}{-2i}=-\frac{1}{2}$. L'intégrale de contour vaut $\pi e^{-i\pi/6}$.

Correction de l'exercice 6. On trouve $\text{rés}_{2i}(f)=\frac{(\ln 2-i\pi/2)^2}{4i}$ et $\text{rés}_{-2i}(f)=-\frac{(\ln 2+i\pi/2)^2}{4i}$. La somme des deux résidus vaut $\frac{(-\pi)\ln 2}{2}$ et 'intégrale de contour vaut $-i\pi^2\ln 2$. Par ailleurs, en calculant les limites demandées on trouve une limite de $-4i\pi I$.

Correction de l'exercice 7. À chaque fois, on compare P à une fonction qui a le nombre voulu de zéros, comptés avec multiplicités. Par exemple, si $|z|=2$, alors, en posant $g(z)=z^4$, on a

$$|P(z)-g(z)|=|6z+3|\leq 6|z|+3=15<16=|z|^4.$$

Ceci montre que P a quatre racines dans $\mathbb{D}(0,2)$.

Correction de l'exercice 9. [Correction avec commentaires] Rouché se formule en termes de zéros donc on reformule en termes de zéros. On veut montrer que $f(z):=z^2(z-a)^3-b(1-\overline{a}z)^3$ a cinq zéros dans le disque, et pour cela on va la comparer sur le bord du disque à une fonction dont on sait qu'elle a cinq zéros dans le disque, par exemple $g(z):=z^2(z-a)^3$. L'objectif est alors de montrer que sur le cercle unité, on a $|f-g|<|g|$.

Si z est de module un, on a

$$\left|f(z)-g(z)\right|=\left|b(1-\overline{a}z)^3\right|\leq|b|\left|1-\overline{a}z\right|^3$$

Notre objectif est de majorer strictement cette quantité par $|g(z)|=|z-a|^3$. On commence par majorer $|b|\left|1-\overline{a}z\right|^3<\left|1-\overline{a}z\right|^3$, puis on fait un dessin et on voit que c'est bon (on voit une rotation, la multiplication par z, et la symétrie $z\mapsto\bar{z}$). Le calcul traduisant ceci est :

$$\left|1-\overline{a}z\right|=\left|1-a\overline{z}\right|=|z-a|,$$

puisque z est de module un.

Finalement, on a bien, pour tout $z\in\mathscr{C}(0,1)$, l'inégalité stricte $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$ et d'après le théorème de Rouché, f et g ont même nombre de zéros dans le disque unité.