TD 2 : Notations de Wirtinger

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Écrire l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sous la forme

$$z = x + iy \mapsto \alpha z + \beta \overline{z},$$

où α et β sont des nombres complexes à déterminer en fonction de a, b, c et d.

Exercice 2. Démontrer les relations de Leibniz pour les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions différentiables de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(f(z_0)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0)$$

et

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(f(z_0)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions f ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de f et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

1. $f(z) = \text{Ré}(z)$
2. $f(z) = |z|$
3. $f(z) = z^2 \overline{z}$
4. $f(z) = e^{\overline{z}}$
5. $f(z) = \dfrac{\overline{z} - i}{z^2 + iz - 2}$
6. $f(z) = \dfrac{\text{Ré}(z)}{\text{Im}(z)}$

Exercice 6. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application différentiable et soit $\varphi : I \to U$ une application différentiable. Montrer que $f \circ \varphi$ est différentiable et que

$$\frac{d f \circ \varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{d\overline{\varphi}}{dt}.$$

Préciser le sens de cette notation, lorsqu'il faut évaluer en un point t_0.

Exercice 7. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $\mathscr{C}^2$. Démontrer les formules suivantes :

1. $\dfrac{\partial}{\partial z}(\text{Ré}(f(z)) = \dfrac{1}{2} f'(z)$
2. $\dfrac{\partial}{\partial z}(\text{Im}(f(z)) = \dfrac{1}{2i} f'(z)$
3. $\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\left(|f(z)|^{2k}\right) = k^2 |f(z)|^{2k-2} |f'(z)|^2$
4. $\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln\left(1 + |f(z)|^2\right) = \dfrac{|f'(z)|^2}{\left(1 + |f(z)|^2\right)^2}$
5. $\dfrac{\partial}{\partial z}(|f(z)|) = \dfrac{1}{2} |f(z)| \dfrac{f'(z)}{f(z)}$

1 Quelques corrections

Correction de l'exercice 5.

1. Par Leibniz, on a
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial z^2\overline{z}}{\partial z} = z^2\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial z^2}{\partial z} = z^2 \times 0 + \overline{z} \times 2z = 2z\overline{z} = 2|z|^2.$$
De même, on trouve
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial z^2\overline{z}}{\partial \overline{z}} = z^2\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} + \overline{z}\frac{\partial z^2}{\partial \overline{z}} = z^2 \times 1 + \overline{z} \times 0 = z^2.$$
2. En utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, et en notant $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application de conjugaison et $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application exponentielle, on trouve
$$\frac{\partial \exp \circ c}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial \exp}{\partial z}(c(z))\frac{\partial c}{\partial z}(z) + \frac{\partial \exp}{\partial \overline{z}}(c(z))\frac{\partial \overline{c}}{\partial z}(z) = 0 + 0 = 0.$$
Ici nous avons utilisé le fait que exp est holomorphe, et donc que $\frac{\partial \exp}{\partial \overline{w}} = 0$, et aussi que $\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$. De manière semblable, on a
$$\frac{\partial \exp \circ c}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial \exp}{\partial z}(c(z))\frac{\partial c}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial \exp}{\partial \overline{z}}(c(z))\frac{\partial \overline{c}}{\partial \overline{z}}(z) = \exp(c(z)) + 0 = e^{\overline{z}}.$$
Ici, nous avons utilisé que exp est holomorphe et que $\frac{\partial \exp}{\partial w} = \exp' = \exp$. Nous avons aussi utilisé le fait que $\frac{\partial c}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$ et que $\frac{\partial \overline{c}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$. Pour résumer, on a
$$\frac{\partial e^{\overline{z}}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial e^{\overline{z}}}{\partial \overline{z}} = e^{\overline{z}}.$$
3. On a
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{(z^2+iz-2)\frac{\partial(\overline{z}-i)}{\partial z} - (\overline{z}-i)\frac{\partial(z^2+iz-2)}{\partial z}}{(z^2+iz-2)^2} = \frac{-(\overline{z}-i)(2z+i)}{(z^2+iz-2)^2} = \frac{-2|z|^2+2iz-i\overline{z}-1}{(z^2+iz-2)^2}$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{(z^2+iz-2)\frac{\partial(\overline{z}-i)}{\partial \overline{z}} - (\overline{z}-i)\frac{\partial(z^2+iz-2)}{\partial \overline{z}}}{(z^2+iz-2)^2} = \frac{(z^2+iz-2)}{(z^2+iz-2)^2} = \frac{1}{z^2+iz-2}.$$
4. On a $f(z) = \frac{\text{Ré}(z)}{\text{Im}(z)} = \frac{\frac{z+\overline{z}}{2}}{\frac{z-\overline{z}}{2i}} = \frac{i(z+\overline{z})}{z-\overline{z}}$. On en déduit que
$$\frac{\partial f}{\partial z} = i\frac{(z-\overline{z})\frac{\partial(z+\overline{z})}{\partial z} - (z+\overline{z})\frac{\partial(z-\overline{z})}{\partial z}}{(z-\overline{z})^2} = i\frac{(z-\overline{z})\times 1 - (z+\overline{z})\times 1}{(z-\overline{z})^2} = \frac{-2i\overline{z}}{(z-\overline{z})^2}.$$
De plus
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = i\frac{(z-\overline{z})\frac{\partial(z+\overline{z})}{\partial \overline{z}} - (z+\overline{z})\frac{\partial(z-\overline{z})}{\partial \overline{z}}}{(z-\overline{z})^2} = i\frac{(z-\overline{z})\times 1 - (z+\overline{z})\times(-1)}{(z-\overline{z})^2} = \frac{2iz}{(z-\overline{z})^2}.$$

Correction de l'exercice 6. La fonction $f \circ \varphi$ est différentiable comme composée de fonctions différentiables. Notons $f = u + iv$ comme précédemment. Notons $\varphi_1 = \text{Ré}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \text{Im}(\varphi)$ de sorte que $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ que l'on peut identifier avec la fonction $(\varphi_1, \varphi_2) : I \to \mathbb{R}^2$. par définition, on a
$$(f \circ \varphi)' = (u \circ (\varphi_1, \varphi_2))' + i(v \circ (\varphi_1, \varphi_2))'.$$
D'après la formule de dérivation de composée pour les opérateurs de Wirtinger, on a
$$(u \circ (\varphi_1, \varphi_2))' = \varphi_1'\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2'\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad (v \circ (\varphi_1, \varphi_2))' = \varphi_1'\frac{\partial v}{\partial x} + \varphi_2'\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Donc

$$(f\circ\varphi)' = \varphi_1'\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\varphi_2'\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \varphi_1'\frac{\partial f}{\partial x}+i\varphi_2'\frac{\partial f}{\partial y}$$

Et l'on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{d\overline{\varphi}}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\varphi_1'+i\varphi_2'\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\varphi_1'-i\varphi_2'\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_1'+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi_2'+i\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_2'-i\frac{\partial f}{\partial y}\varphi_1'+\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_1'+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi_2'-i\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_2'+i\frac{\partial f}{\partial y}\varphi_1'\right)\\
&= \varphi_1'\frac{\partial f}{\partial x}+i\varphi_2'\frac{\partial f}{\partial y} = (f\circ\varphi)'.
\end{aligned}$$