TD 0 : Calcul différentiel pour fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Dans toute cette feuille d'exercices, on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, en identifiant le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ à $z := x + iy \in \mathbb{C}$. L'objectif de la feuille est de faire quelques rappels d'analyse réelle et de calcul différentiel en deux variables réelles dans un contexte de « nombres complexes » et de préparer au premier cours.

Exercice 1. Quelques rappels d'analyse réelle :

1. Montrer à la main que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en l'origine.
2. Montrer que la fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ se prolonge en une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Construire une fonction deux fois dérivable mais pas $\mathscr{C}^2$.

Exercice 2. Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to \begin{cases} \dfrac{2x^2 y + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, possède des dérivées partielles en l'origine, possède même des dérivées directionnelles dans toute direction en l'origine, mais n'est pas différentiable en l'origine.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable. On note u et v ses coordonnées : $f = (u, v)$.

1. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, -y)$. Écrire la matrice jacobienne de $f \circ \Phi$ et de $\Phi \circ f$ en fonction de celle de f.
2. Soit $||\cdot||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $||f||^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ||f(x, y)||^2$ est-elle différentiable et si oui quelle est sa matrice jacobienne ?

Exercice 4. Écrire les applications suivantes d'une variable $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ou sous-ensemble) à valeurs dans $\mathbb{C}$ comme des applications de la variable $z := x + iy$.

a) $(x, y) \mapsto -x + iy$

b) $(x, y) \mapsto y - ix$

c) $(x, y) \mapsto x^2 + 2ixy - y^2$

d) $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

e) $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

f) $(x, y) \mapsto xy$

g) $(x, y) \mapsto e^x$

h) $(x, y) \mapsto \cos(y) + i \sin(y)$

i) $(x, y) \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

Exercice 5. Soient a, b et θ des nombres réels. Les applications suivantes sont des applications $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

— Les écrire comme des applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. (Si elles sont $\mathbb{R}$-linéaires, écrire leur matrice.) En tant qu'applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, déterminer si elles sont continues, si elles admettent des dérivées partielles, si elles sont différentiables. Lorsque c'est le cas, déterminer si la différentielle est inversible.

— Lorsque ce sont des isométries ou similitudes, déterminer leurs éléments caractéristiques (rapports, axes, centre etc)

a) $z \mapsto z + 1 + 3i$

b) $z \mapsto iz$

c) $z \mapsto \bar{z}$

d) $z \mapsto -\bar{z}$

e) $z \mapsto i\bar{z}$

f) $z \mapsto (a + ib)z$

g) $z \mapsto e^{i\theta} z$

h) $z \mapsto |z|^2$

i) $z \mapsto |z|$

j) $z \mapsto z^2$

k) $z \mapsto z^3$

l) $z \mapsto (2 + 3i)Re(z^2)$