TD 4 : Intégration curviligne

Exercice 1. Soient $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t(1+i)$, $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t + it^2$, $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto it$ et $\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto i + t$. Calculer $\int_\gamma z dz$, où γ désigne successivement γ_1, γ_2 et $\gamma_3 \vee \gamma_4$.
(Autocorrection : on trouve i à chaque fois. Essayer ensuite avec $\int_\gamma \overline{z} dz$.)

Exercice 2. Soit $\gamma : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto (1+i)\sin(t)$. Calculer $\int_\gamma z^2 dz$.

Exercice 3. Soit $r > 0$ et γ_r le lacet $[0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_{\gamma_r} z^n dz$.
(Autocorrection : on trouve $2i\pi$ si $n = -1$ et zéro sinon.)

Exercice 4. Soit $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$. Calculer $\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$. En déduire les valeurs des intégrales de Wallis $W_{2n} := \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$.

⋆ ⋆ ⋆ *Longueur d'un arc* ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 5. Montrer que l'arc de parabole $y = x^2$ compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$ a pour longueur $L = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})}{4} = \frac{2\sqrt{5} + \operatorname{argsh}(2)}{4}$. (Faire une intégration par parties.)

Remarque culturelle : si l'on cherche à calculer les longueurs d'arcs d'ellipses, d'hyperboles ou de sinusoïdes, les calculs font apparaître des primitives ne pouvant s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles : les « fonctions elliptiques de première et deuxième espèce »

⋆ ⋆ ⋆ *Limites d'intégrales curvilignes* ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 6. Soit $r > 1$, $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$ le paramétrage standard du demi-cercle supérieur de rayon r, et $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2+1}$. Montrer que $I(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$. Généraliser à $\int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$ où $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ et $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Exercice 7. Étudier la limite lorsque $r \to +\infty$ de $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{e^z}{z^2} dz$, où $\gamma_r : [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$.

Que peut-on dire si γ_r est cette fois le chemin $[-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$?

Exercice 8. Soit $f \in C^0(\mathbb{C},\mathbb{C})$ avec $f(0) \neq 0$. Pour $r > 0$, on note $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Calculer la limite, lorsque $r > 0$ tend vers zéro, de $I(r) := \int_{\gamma_r} f(z) dz$ et de $J(r) := \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z} dz$ Pour $0 < a < b < 2\pi$, en notant $\gamma_{r,a,b} : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$, calculer la limite, lorsque $r > 0$ tend vers zéro, de $I(r,a,b) := \int_{\gamma_{r,a,b}} f(z) dz$ et de $J(r,a,b) := \int_{\gamma_{r,a,b}} \frac{f(z)}{z} dz$.

⋆ ⋆ ⋆ *Utilisation de primitives holomorphes* ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 9. Soit $T > 0$ et $\gamma : [0, T] \to \mathbb{C}, t \mapsto t + i\sin(t)$ le paramétrage de l'arc de sinusoïde entre les abscisses $x = 0$ et $x = T$. Calculer $\int_\gamma z^2 dz$.

Exercice 10. Soit $r > 0$ et γ_r le lacet $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$ de module $\neq r$. Calculer $\int_{\gamma_r} (z-a)^n dz$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$, puis $n = -1$.
2. Si r est différent de 2 et 3, calculer $I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2+z-6}$.
3. Plus généralement, si Q est une fraction rationnelle, calculer $\int_{\gamma_r} Q(z)dz$ pour tout $r > 0$ pour lequel cette intégrale est définie.

Exercice 11. Soit Log_0 la détermination principale du logarithme et $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$.
Calculer $\int_\gamma \mathrm{Log}_0(z)dz$.

Exercice 12. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Soit $z_0, z_0 \in U$ et soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans U allant de z_0 à z_1. Montrer que l'on a l'analogue suivant de la formule d'intégration par partie :

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_\gamma f'(z)g(z)dz.$$

Exercice 13. Soit γ un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{C}$ allant de 0 à i. Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ avec :

1. $f(z) = z^2 \sin z$
2. $f(z) = ze^{iz}$.

Solutions des exercices

Correction de l'exercice 1. Faire le calcul en revenant à la définition, sans utiliser de primitive holomorphe, pour commencer.

Correction de l'exercice 2. On peut :

1. Appliquer la définition. On se retrouve à intégrer du $\sin^2(t)\cos(t)$, de la forme $u'u^2$ qui se primitive en $u^3/3$.
2. On dessine le chemin et on voit qu'on peut reparamétrer le chemin à vitesse constante par $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t(1+i)$. Le calcul est plus simple, on intègre du t^2 en $t^3/3$, même résultat.
3. On utilise la primitive holomorphe $z^3/3$. Attention, toutes les fonctions n'ont pas de primitive holomorphe. Mêmes les fonctions holomorphes.

Correction de l'exercice 4. On développe $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^{2n}$ avec le binôme de Newton et on obtient une somme finie de termes en z^k, avec $-2n \le k \le 2n$. Le monôme de degré nul est $\dbinom{2n}{n}$. C'est le seul qui, une fois divisé par z, va avoir une intégrale sur le cercle non nulle, d'après l'exercice précédent.

On en déduit que la première intégrale vaut $\dbinom{2n}{n}\displaystyle\int_\gamma z^{-1}dz = 2i\pi\dbinom{2n}{n}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi}(e^{it}+e^{-it})^{2n}\frac{ie^{it}dt}{e^{it}}\\
&= i2^{2n}\int_0^{2\pi}\cos(t)^{2n}dt\\
&= 4i2^{2n}\int_0^{\pi/2}\cos(t)^{2n}dt\\
&= i2^{2n+2}W_{2n}.
\end{aligned}$$

D'où $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}\dbinom{2n}{n}$.

Correction de l'exercice 5. On commence par écrire que $L = \displaystyle\int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}du$. Ensuite, on cherche une primitive de $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$. On fait une IPP et on trouve :

$$\int \sqrt{1+u^2}du = u\sqrt{1+u^2} - \int\sqrt{1+u^2}du + \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}, \text{ donc :}$$

$$\int \sqrt{1+u^2}du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2}+\operatorname{argsh}(u)\right)$$

Correction de l'exercice 9. On utilise la primitive $z \mapsto z^3/3$ et le résultat est donc $\dfrac{(T+i\sin(T))^3}{3}$.

Correction de l'exercice 10. Pour $n \neq -1$ on a des primitives.

Pour $n = -1$, on introduit, pour $\epsilon \ge 0$, le chemin $\gamma_\epsilon : [-\pi+\epsilon, \pi-\epsilon], t \mapsto re^{it}$. Son support est entièrement dans l'ouvert $U = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ et donc on peut calculer I_ϵ en primitivant avec la détermination principale du logarithme (en ouvrant légèrement le chemin d'intégration, on évite la coupure).

Ensuite, on montre que $I_\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} I$, par exemple en majorant la différence par la longueur de la différence d'arc, qui tend vers zéro, grâce à la formule du cours $\left|\displaystyle\int_\gamma f(z)dz\right| \le long(\gamma)||f||_\infty$.

Correction de l'exercice 11. Primitive classique $z\operatorname{Log}_0(z) - z$. Dériver et vérifier... On peut la retrouver en faisant une IPP (au sens complexe, voir exo suivant).

De toute façon on peut calculer l'intégrale à la main car le $\operatorname{Log}_0(e^{it})$ se simplifie, après on peut faire une IPP réelle, à l'ancienne. La primitive complexe permet bien sûr de calculer sur n'importe quel chemin.