Université de Lorraine,
Année 2017-18

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 6 : Séries de Laurent et théorème des résidus.

Séries de Laurent.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit z_0 un point de U. Si f est holomorphe sur $U \setminus z_0$, elle possède un développement de Laurent en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

Le coefficient a_{-1} de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement en série de Laurent de f en z_0 s'appelle le *résidu de f en z_0*. On le note $res(f, z_0)$.

Exercice 1 Déterminer les séries de Laurent et le résidu à l'origine des fonctions suivantes :

(a) $f(z) = \frac{1}{z}$;
(b) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$;
(c) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$.

Exercice 2 Déterminer la série de Laurent à l'origine de la fonction analytique $exp(1/z)$, et son résidu à l'origine. En $z_0 \neq 0$ quel est le résidu de cette fonction ?

Exercice 3 Déterminer le résidu, et le terme constant des séries de Laurent à l'origine pour les fonctions :

(a) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$;
(b) $f(z) = \frac{1}{\sin z - \sinh z}$;
(c) $f(z) = \frac{1}{z \sin z \sinh z}$.

Exercice 4 Déterminer les séries de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans chacune des trois couronnes ouvertes $0 < |z| < 1,\ 1 < |z| < 2,\ 2 < |z| < \infty$, ainsi que les séries de Laurent de f aux points $0,\ 1,\ 2$ et 3. Quels sont les résidus en $z = 0,\ z = 1,\ z = 2$ et $z = 3$?

Théorème des résidus.

Exercice 5 Soit $0 < a < b < c$ trois nombres réels et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} dz$$

selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

Exercice 6 Calculer le résidu aux singularités isolées des fonctions suivantes :

$$f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2},\ g(z) = \frac{z^a}{1-z},\ h(z) = \log(z)$$

(on prendra la détermination principale des fonctions z^a et $\log(z)$).

Exercice 7 Examiner la nature des singularités des fonctions suivantes et déterminer le résidu en chacune de ces singularités :

$$(i)\ \frac{1}{z(1-z^2)},\ (ii)\ \tan z,\ (iii)\ \frac{\sin z}{z^2},\ (iv)\ \frac{z}{1+z^4},\ (v)\ (\frac{z+1}{z^2+1})^2.$$

Exercice 8 Soit C_r le cercle de centre 0 et rayon r. Utiliser le théorème des résidus pour calculer les intégrales suivantes :

$$(i) \int_{C_4} \frac{1}{z^2-5z+6}dz,\ (ii) \int_{C_{5/2}} \frac{1}{z^2-5z+6}dz,\ (iii) \int_{C_2} \frac{e^{az}}{1+z^2}dz\ (a \in \mathbb{R}).$$

Exercice 9 Que vaut $\int_{|z|=N} \tan(\pi z)dz$, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$?

Exercice 10 Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ (on pourra intégrer sur le bord du compact $K = \{re^{it}; 0 \leq r \leq R\ et\ 0 \leq t \leq 2\pi/n\}$).

Exercice 11 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X] \setminus 0$, tels que $deg(P) \leq deg(Q) - 2$ et P et Q sont premiers entre eux. On suppose que Q n'a pas de zéros réels, et on note $a_1, \ldots, a_r$ ses zéros de partie imaginaire strictement positive. Prouver que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{r} Res(\frac{P}{Q}, a_k).$$

En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2}dx.$$