Examen Partiel du 18/03/2025 — Durée : 2h

Dans toute cette épreuve, une écriture $z = x + iy$ sous-entend toujours que x et y sont réels. Une fonction entière est la somme d'une série entière de rayon infini.

Un point pour le soin. Souligner les résultats intermédiaires, encadrer les résultats finaux des questions.

Exercice 1.

1. Définir la $\mathbb{C}$-dérivabilité et l'holomorphie.
2. Définir l'analyticité. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{1}{z+2}$ est analytique.
3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{O}(U)$ de classe $\mathscr{C}^1$, jamais nulle. Calculer $\dfrac{\partial}{\partial z}|f(z)|$. Exprimer le résultat en fonction de $f(z)$ et $f'(z)$.
4. Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathscr{O}(U)$. On suppose que l'image de f est incluse dans $\{3 + t(2+i) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \pi(n) z^n$, où $\pi(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{3n}$ puis de $\sum_{n\geq 0} 3^{n\sin(n)} z^n$.
3. Démontrer qu'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $a_n = O\left(C^n\right)$.
4. Énoncer et démontrer le théorème des zéros isolés pour les séries entières, à l'origine. (Les deux énoncés équivalents sont acceptés.)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f\left(e^{it}\right) = e^{3it}$. Que vaut $f(1+i)$?

Exercice 4.

1. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Montrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0, R[$, on a $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$.
2. Démontrer le théorème de Liouville : toute fonction entière bornée est constante.
3. Soit f une fonction entière. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq e^{\mathrm{Ré}\, z}$. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module ≤ 1 tel que $f = \lambda \exp$.
4. Énoncer et démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss (aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre, ou bien théorème de d'Alembert), en admettant le fait suivant : si f est une fonction entière ne s'annulant jamais, alors $1/f$ est une fonction entière.

Exercice 5.

1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, f une fonction continue sur U et $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1], U)$. Définir $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Paramétrer le bord d'un disque de centre z_0 et de rayon R par un chemin γ (en suivant l'orientation canonique du bord) et calculer $I = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_\gamma \overline{z} dz$.
3. Soient $a < b$ des réels, $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{R}_+^*)$ et $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$.
   - (a) Dessiner K et montrer qu'il est compact. Dans la suite, on identifie K à un compact de $\mathbb{C}$.
   - (b) Paramétrer le bord de K (orienté canoniquement) par quatre chemins $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$, le premier étant le chemin horizontal. Attention aux orientations.
   - (c) Calculer chacune des intégrales $I_k := \displaystyle\int_{\gamma_k} \overline{z} dz$, pour $1 \leq k \leq 4$.
   - (d) Que vaut $\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_{\partial K} \overline{z} dz$? Commenter.
4. Hors-barème : Si K est un compact à bord $\mathscr{C}^1_{pm}$, conjecturer la valeur de $\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_{\partial K} \overline{z} dz$ et proposer une esquisse de démonstration. (En utilisant ou non les idées précédentes.)

Correction ou remarques sur les exercices

Correction de l'exercice 1.

1. Cours
2. Cours et, si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, alors f est développable en série entière au voisinage de z_0 puisque pour tout z vérifiant $|z - z_0| < |2 + z_0|$, on peut écrire :
$$f(z) = \frac{1}{z - z_0 + z_0 + 2} = \frac{1}{z_0 + 2} \frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0+2} + 1} = \frac{1}{z_0 + 2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0 + 2}\right)^n.$$
3. On a
$$\frac{\partial}{\partial z}|f(z)| = \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{f(z)\overline{f(z)}} = \frac{1}{2\sqrt{f(z)\overline{f(z)}}} \frac{\partial}{\partial z}(f(z)\overline{f(z)}) = \boxed{\frac{1}{2|f(z)|} f'(z)\overline{f(z)}.}$$
4. (On identifie comme d'habitude $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.) D'après l'énoncé, l'image de f est incluse dans la droite d'équation $x - 2y = 3$. En notant $u = \text{Ré}\, f$ et $v = \text{Im}\, f$, on a donc $u - 2v = 3$, donc, en dérivant :
$$\partial_x u = 2\partial_x v \quad \text{et} \quad \partial_x u = 2\partial_x v$$
La matrice jacobienne de f a donc une première ligne qui est le double de la seconde. Cette matrice est donc de rang au plus 1. D'autre part, comme f est holomorphe, la matrice jacobienne est $\mathbb{C}$-linéaire, donc soit inversible soit nulle. Elle est donc nulle, autrement dit la différentielle de f est nulle. Donc f est <u>localement constante</u>. $\boxed{\text{Comme } U \text{ est connexe, } f \text{ est constante.}}$

Correction de l'exercice 2.

1. Comme $1 \leq \pi(n) \leq n$, et que $\sum z^n$ et $\sum nz^n$ sont de rayon 1, on en déduit par encadrement que $\sum \pi(n)z^n$ est de $\boxed{\text{rayon un.}}$
2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $2^n z^{3n} = (2z^3)^n$. Si $|2z^3| < 1$, autrement dit si $|z| < 1/\sqrt[3]{2}$, alors la série géométrique $\sum 2^n z^{3n}$ est absolument convergente. Si par contre $|2z^3| > 1$ c'est-à-dire $|z| > 1/\sqrt[3]{2}$, alors la série est grossièrement divergente. Ceci montre que le rayon de convergence de $\sum 2^n z^{3n}$ est $\boxed{1/\sqrt[3]{2}.}$
   (b) On a $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup 3^{\sin(n)} = 3$, car $\limsup \sin(n) = 1$. Par Hadamard, le rayon vaut donc $\boxed{1/3.}$
3. Comme signalé dans le cours, ceci découle de Hadamard, mais on peut le faire à la main :
   — S'il existe $C > 0$ tel que $a_n = O(C^n)$, alors pour tout $r > 0$, on a $a_n r^n = O(C^n r^n) = O((Cr)^n)$. Donc si $r < 1/C$, $a_n r^n$ tend vers zéro. On en déduit que le rayon vérifie $R \geq 1/C > 0$.
   — Réciproquement, si le rayon R est > 0, alors pour $0 < r < R$, la suite $|a_n|r^n$ est bornée. Autrement dit $a_n r^n = O(1)$, donc $a_n = O(1/r^n)$ et donc $C = 1/r$ convient.
4. Cours.

Correction de l'exercice 3. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^3$. C'est une fonction analytique car polynomiale sur $\mathbb{C}$.

D'après l'énoncé, f et g sont analytiques sur $\mathbb{C}$ qui est connexe, et égales sur le cercle unité de $\mathbb{C}$, qui a des points d'accumulation dans $\mathbb{C}$ (par exemple les points $e^{i/n}$ s'accumulent sur 1).

D'après le théorème de prolongement analytique, f et g sont donc égales sur $\mathbb{C}$ tout entier. Par conséquent, $\boxed{f(1+i) = g(1+i) = (1+i)^3 = -2+2i.}$

Correction de l'exercice 4.

1. Cours. On demandait de justifier soigneusement, donc de préciser pour quelle série de fonctions on invoque la convergence normale pour intervertir série et intégrale. Il s'agit des fonctions $g_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \theta \mapsto a_n \left(re^{i\theta}\right)^n e^{-in\theta} = a_n r^n$. On a $|g_n(\theta)| = |a_n|r^n$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. La série de fonctions $\sum g_n$ est donc normalement convergente, ce qui justifie l'interversion.
2. Cours.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a donc $|f(z)| \leq |e^z|$, c'est-à-dire $|f(z)e^{-z}| \leq 1$. La fonction $z \mapsto f(z)e^{-z}$ est une fonction entière (produit de deux fonctions entières) et elle est bornée. D'après le théorème de Liouville, elle est donc constante. Notons λ cette constante; c'est un nombre complexe de module ≤ 1 et on a donc $\boxed{f = \lambda \exp.}$
4. Cours.

Correction de l'exercice 5.

1. Cours.
2. On peut choisir $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \theta \mapsto z_0 + Re^{i\theta}$. On en déduit que

$$I = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \overline{(z_0 + Re^{i\theta})}iRe^{i\theta}d\theta = \frac{R}{2}\int_0^{2\pi}(\overline{z_0}e^{i\theta} + R)d\theta \boxed{= \pi R^2.}$$

3. (a) (Dessin de la partie sous la courbe de f.) La partie K est compacte. En effet c'est l'image du compact $[a,b] \times [0,1]$ par l'application continue $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,t) \mapsto (x, tf(x))$. Alternativement, on peut montrer que K est bornée et fermée.

   (b) On choisit $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$, $\gamma_2 : [0, f(b)] \to \mathbb{C}, t \mapsto b + it$, γ_3 tel que $\gamma_3^{op} : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto t + if(t)$, et enfin γ_4 tel que $\gamma_4^{op} : [0, f(a)] \to \mathbb{C}, t \mapsto a + it$.

   (c) On a

$$I_1 = \int_a^b t\,dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$
$$I_2 = \int_0^{f(b)} (b - it)i\,dt = ibf(b) + \frac{f(b)^2}{2},$$
$$I_4 = -\int_0^{f(a)} (a - it)i\,dt = -iaf(a) - \frac{f(a)^2}{2}.$$

   Calculons maintenant I_3 ou plutôt $-I_3$ pour intégrer le long de γ_3^{op}.

   (d) En sommant les quatre intégrales, on trouve que $\frac{1}{2i}\int_{\partial K} \overline{z}dz$ est égale à $\int_a^b f(t)dt$, c'est-à-dire à l'aire du compact K.

4. L'intégrale $\frac{1}{2i}\int_{\partial K} \overline{z}dz$ est égale à l'aire du compact. Ceci généralise les résultats des deux questions précédentes. Pour une preuve, on peut envisager plusieurs pistes : on peut utiliser la question précédente et procéder par partition de l'unité. On peut aussi établir le résultat pour des triangles, puis approximer le compact par des polygones et trianguler ces polygones. (Et d'autres méthodes existent. Si on connaît la formule de Green-Riemann, on peut l'appliquer directement.)