Partiel du 23 Mars 2022
14h00-16h

Instructions :

- Tous les documents, téléphones portables, calculatrices... sont interdits.
- Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (Questions de cours : 8 points)**.**

1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $z_0 \in U$. Donner les définitions des phrases suivantes :
   - *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.*
   - *f est holomorphe sur U.*
2. Énoncer les équations de Cauchy-Riemann pour f.
3. Donner la définition de $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.
4. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et que dans ce cas, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = f'$.
5. Montrer que l'on a
$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}.$$

Exercice 2 (3 points)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour tout $z = x + iy \in U$ on pose $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ et $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$ de sorte que
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

1. Supposons (uniquement dans cette question), que $u = v$. Montrer que f est constante.
2. Plus généralement, supposons qu'il existe une fonction $\mathscr{C}^1$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$v(x, y) = h(u(x, y)) \quad \forall x + iy \in U,$$
   Montrer que f est constante

Exercice 3 (7 points)**.** On considère la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1+iz}{1-iz} \end{cases}$$

1. Justifier pourquoi φ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
2. Calculer le développement en série entière de φ centré au point 1. Quel est son rayon de convergence ?
3. Montrer que φ induit une bijection entre $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et un ouvert de $\mathbb{C}$ que l'on déterminera. Donner la formule pour φ^{-1} puis justifier que φ^{-1} est holomorphe.
4. On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < 1\}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
   (a) Montrer que $\varphi(S^1 \setminus \{-i\}) = i\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$.
   (c) Montrer que $\varphi(]-1,1[) = S^1 \cap \mathbb{H}$.
   (d) Faire un dessin.
   (e) Sans démonstration, quel est l'ensemble $\varphi(]-i,i[)$? (où $]-i,i[= \{ti \,;\, t \in]-1,1[\}$).

Exercice 4 (2 points)**.** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique telle que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(e^{it}) = e^{2it}.$$

Que vaut $f(3+i)$?