

TD 9 : Résidus et Rouché

Exercice 1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{4\pi}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,N)} \tan(\pi z) dz$.

Exercice 3. [Résidu à l'infini] Soit $P \in \mathbb{C}$ un ensemble fini et f une fonction holomorphe sur $U = \mathbb{C} \setminus P$ et ayant des pôles aux points de P . On appelle résidu à l'infini de f et on note $\text{rés}_{\infty}(f) := -\text{rés}_0\left(f(1/w)w^{-2}\right)$.

Montrer que le résidu à l'infini est bien défini, qu'il est égal à $-\int_{\mathcal{C}(0,R)} f(z) dz$ pour R assez grand, et que l'on a la formule :

$$\sum_{a \in P} \text{rés}_a(f) + \text{rés}_{\infty}(f) = 0.$$

Exercice 4. Le but de l'exercice est de montrer que $I := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$ est égal à $\frac{\pi}{2}$.

1. Pour tous $0 < \varepsilon < R$ on définit $K_{R,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, \mathbb{R}_+) \geq \varepsilon \text{ et } |z| \leq R\}$. Montrer que $K_{R,\varepsilon}$ est compact. On admet que son bord est paramétré par les chemins $\gamma_k^{R,\varepsilon}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, avec

$$\begin{aligned} \gamma_1^{R,\varepsilon} &: [0, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto i\varepsilon + t \\ \gamma_2^{R,\varepsilon} &: [\arcsin(\varepsilon/R), 2\pi - \arcsin(\varepsilon/R)] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it} \\ \gamma_3^{R,\varepsilon,op} &: [0, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto -i\varepsilon + t \\ \gamma_4^{R,\varepsilon} &: [\pi/2, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \varepsilon e^{-it}. \end{aligned}$$

2. Dessiner $K_{2,1/2}$.

3. Soit $f : z \mapsto \frac{R(z)}{z^2 + 1}$, où $R(z)$ désigne la détermination de la racine carrée sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $R(z) := \exp\left(\frac{1}{2} \text{Log}_{\pi}(z)\right)$. Que vaut $R(-1)$? Que vaut la dérivée $R'(z)$? Donner le domaine d'holomorphie de f , déterminer ses singularités isolées et les résidus en ces singularités.

4. Quelle est la limite de $R(z)$ lorsque z tend vers $x \in \mathbb{R}_+^*$ par valeurs imaginaires supérieures? Inférieures?

5. On note $I(R, \varepsilon) := \int_{\partial K_{R,\varepsilon}} f(z) dz$. Pour quels paramètres R et ε est-ce bien défini? Calculer $I(R, \varepsilon)$ pour ces valeurs des paramètres.

6. On note $I_k(R, \varepsilon) := \int_{\gamma_k} f(z) dz$, pour les valeurs de R et ε pour lesquelles ces intégrales sont bien définies. Calculer les limites lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de $I_1(R, \varepsilon)$ et $I_3(R, \varepsilon)$.

7. Montrer que $I_2(R, \varepsilon)$ et $I_4(\varepsilon)$ tendent vers zéro lorsque $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ et conclure.

Exercice 5. Montrer avec la même technique qu'à l'exercice précédent que :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}; \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 6. Le but de l'exercice est de montrer que $I := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\ln x}{x^2 + 4} dx$ est égal à $\frac{\pi \ln 2}{4}$.

1. Pour tous $0 < \delta < \varepsilon < R$ on définit $K_{R,\varepsilon,\delta} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(z, \mathbb{R}_+) \geq \delta \text{ et } \varepsilon \leq |z| \leq R\}$. Montrer que $K_{R,\varepsilon,\delta}$ est compact et que son bord est paramétré par les chemins γ_k , $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ définis par

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: [\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}, \sqrt{R^2 - \delta^2}] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto i\delta + t \\ \gamma_2 &: [\arcsin(\delta/R), 2\pi - \arcsin(\delta/R)] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it} \\ \gamma_3^{op} &: [\sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2}, \sqrt{R^2 - \delta^2}] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto -i\delta + t \\ \gamma_4^{op} &: [\arcsin(\delta/\varepsilon), 2\pi - \arcsin(\delta/\varepsilon)] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \varepsilon e^{it}\end{aligned}$$

(Ces chemins dépendent des paramètres mais on n'a pas fait apparaître les paramètres dans la notation pour alléger l'écriture.)

2. Dessiner le compact pour $\varepsilon = 1$, $\delta = 1/2$ et $R = 2$.
3. Soit $f : z \mapsto \frac{(\text{Log}_\pi z - i\pi)^2}{z^2 + 4}$, où Log_π désigne la détermination du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ vérifiant $\text{Log}_\pi(-1) = i\pi$. Quelle est la limite de $f(z)$ lorsque z tend vers $x \in \mathbb{R}_+^*$ par valeurs imaginaires supérieures? Inférieures?
4. Calculer la somme des résidus de f en $\pm 2i$.
5. On note $I(R, \varepsilon, \delta) := \int_{\partial K_{R,\varepsilon,\delta}} f(z) dz$. Pour quels paramètres R et ε est-ce bien défini? Calculer $I(R, \varepsilon, \delta)$ pour ces valeurs des paramètres.
6. Calculer la limite lorsque $\delta \rightarrow 0$ de $I(R, \varepsilon, \delta)$, puis la limite de cette limite lorsque $R \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$.
7. Conclure.

★ ★ ★ Théorème de Rouché ★ ★ ★

Exercice 7. Soit $P(z) = z^4 + 6z + 3$. Montrer que P n'a aucune racine dans $\mathbb{D}(0, 1/3)$, qu'il a une seule racine dans $\mathbb{D}(0, 1)$ et que toutes ses racines sont de module ≤ 2 .

Exercice 8. Soit $b \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Ré}(b) > 1$. Montrer que l'équation $e^{-z} + z = b$ a une solution unique dans le demi-plan $\text{Ré}(z) > 0$. Indication : ¹

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{D}$. Montrer que l'équation $z^2 \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^3 = b$ possède cinq solutions dans \mathbb{D} . Indication : ²

Exercice 10. Soit U un ouvert connexe et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$.

1. Soit $K \subset U$ un compact. On suppose que f ne s'annule pas sur ∂K . Montrer pour n grand, f_n ne s'annule pas non plus sur ∂K et f et f_n ont même nombre de zéros dans K , comptés avec multiplicités.
2. Montrer que si à partir d'un certain rang les fonctions f_n ne s'annulent pas, alors soit f ne s'annule pas, soit f est identiquement nulle.
3. Montrer que si à partir d'un certain rang les fonctions f_n sont injectives, alors soit f est injective, soit f est constante.

Exercice 11. Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ un polynôme complexe de degré ≥ 1 . Montrer qu'il existe $c \in \mathcal{C}(0, 1)$ tel que $P(c) \geq 1$.

Exercice 12. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}}(0, 1), \mathbb{C})$, non constante et envoyant le cercle $\mathcal{C}(0, 1)$ dans lui-même. Montrer que si de plus f est holomorphe dans \mathbb{D} , alors f s'annule dans \mathbb{D} puis que $\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$. (Montrer que ces deux conclusions sont fausses sans l'hypothèse d'holomorphie.)

1. Utiliser les compact $K_R = \{re^{i\theta}, 0 \leq r \leq R \text{ et } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$.

2. Appliquer Rouché à $f(z) = z^2(z-a)^3 - b(1-\bar{a}z)^3$ et $g(z) = z^2(z-a)^3$.

Solutions ou indications

Les solutions ne sont pas toutes détaillées. Elles sont là pour faciliter l'autocorrection.

Correction de l'exercice 1. La quantité $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est une somme de suite géométrique. Ensuite, on procède comme pour $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^4}$.

Si $f(z) = \frac{1}{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1} = \frac{z-1}{z^5-1}$, le résidu en un pôle simple α est $\frac{\alpha-1}{5\alpha^4}$.

La somme des deux résidus est donc

$$\frac{1}{5} \left((e^{2i\pi/5} - 1)e^{-8i\pi/5} + (e^{4i\pi/5} - 1)e^{-16i\pi/5} \right) = \frac{1}{5} \left(e^{-6i\pi/5} + e^{-3i\pi/5} + e^{-12i\pi/5} + e^{-11i\pi/5} \right)$$

Avec un dessin on voit que la parenthèse vaut $-2i \sin(2\pi/5)$ et donc la somme des deux résidus, multipliée par $2i\pi$, vaut $\frac{4\pi}{5} \sin(2\pi/5)$.

Correction de l'exercice 2. Pôles simples en $\frac{1}{2} + k$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Les résidus valent tous $-1/\pi$.

Correction de l'exercice 3. La fonction $w \mapsto f(1/w)$ est holomorphe sur un voisinage de l'origine, disons sur un disque épointé. On peut considérer $\phi : z \mapsto 1/z$ qui réalise un biholomorphisme de la couronne $\mathcal{C}(0, 0, 1/r)$ sur la couronne $\mathcal{C}(0, r, +\infty)$.

Si r est strictement supérieur au plus grand module des pôles de f , en prenant $R > r$ on a

$$\begin{aligned} \text{rés}_{\infty}(f) &= -\text{rés}_0 \left(f(1/w) w^{-2} \right) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0, 1/R)} f(1/w) w^{-2} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0, 1/R)} f(\phi(w)) \phi'(w) dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi(\gamma(t))) \phi'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt && \text{en posant } \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}/R \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(\delta(t)) \delta'(t) dt && \text{en posant } \delta := \phi \circ \gamma \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta} f(z) dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0, R)} f(z) dz && \text{changement d'orientation, puisque } \delta(t) = Re^{-it} \\ &= -\sum_{a \in P} \text{rés}_a(f) && \text{Théorème des résidus sur } \mathbb{D}(0, R) \end{aligned}$$

Pour $\phi'(\gamma(t))\gamma'(t) = \delta'(t)$, si besoin, redémontrer ceci avec les formules de calcul sur les opérateurs de Wirtinger : c'est l'exercice 7 du TD2.

Correction de l'exercice 4.

- Comme pour la racine carrée sur \mathbb{R}_+^* , on obtient $R'(z) = \frac{1}{2R(z)}$ en dérivant la relation $R(z)^2 = z$.
- La limite de $R(z)$ lorsque z tend vers $x \in \mathbb{R}_+^*$ par valeurs imaginaires positives est \sqrt{x} , et $-\sqrt{x}$ par valeurs imaginaires négatives.
- Le résidu de f au pôle double -1 vaut $R'(-1) = \frac{1}{2R(-1)} = \frac{1}{2i}$. Si $\varepsilon < 1$ et $R > 1$, l'intégrale de contour vaut donc π .
- On a $I_1 \rightarrow I$, $I_3 \rightarrow I$ également et I_2 et I_4 tendent vers zéro. On en déduit finalement que $I = \pi/2$.

Correction de l'exercice 5.

1. Le résidu vaut $\frac{1}{3} e^{-2i\pi/3}$. Si $\varepsilon < 1$ et $R > 1$, l'intégrale sur $\partial K_{R,\varepsilon}$ vaut $\frac{2\pi}{3} e^{-i\pi/6}$.
2. Pôles simples. Les résidus valent $\frac{e^{-\pi/4}}{2i}$ et $\frac{e^{3i\pi/4}}{-2i} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2i}$. Si $\varepsilon < 1$ et $R > 1$, l'intégrale sur $\partial K_{R,\varepsilon}$ vaut $\pi\sqrt{2}$.

3. Pôles simples. Les résidus valent $\frac{e^{i\pi/6}}{2i}$ et $\frac{i}{-2i} = -\frac{1}{2}$. L'intégrale de contour vaut $\pi e^{-i\pi/6}$.

Correction de l'exercice 6. On trouve $\text{rés}_{2i}(f) = \frac{(\ln 2 - i\pi/2)^2}{4i}$ et $\text{rés}_{-2i}(f) = -\frac{(\ln 2 + i\pi/2)^2}{4i}$. La somme des deux résidus vaut $\frac{(-\pi)\ln 2}{2}$ et l'intégrale de contour vaut $-i\pi^2 \ln 2$. Par ailleurs, en calculant les limites demandées on trouve une limite de $-4i\pi I$.

Correction de l'exercice 7. À chaque fois, on compare P à une fonction qui a le nombre voulu de zéros, comptés avec multiplicités. Par exemple, si $|z| = 2$, alors, en posant $g(z) = z^4$, on a

$$|P(z) - g(z)| = |6z + 3| \leq 6|z| + 3 = 15 < 16 = |z|^4.$$

Ceci montre que P a quatre racines dans $\mathbb{D}(0, 2)$.

Correction de l'exercice 9. [Correction avec commentaires] Rouché se formule en termes de zéros donc on reformule en termes de zéros. On veut montrer que $f(z) := z^2(z - a)^3 - b(1 - \bar{a}z)^3$ a cinq zéros dans le disque, et pour cela on va la comparer sur le bord du disque à une fonction dont on sait qu'elle a cinq zéros dans le disque, par exemple $g(z) := z^2(z - a)^3$. L'objectif est alors de montrer que sur le cercle unité, on a $|f - g| < |g|$.

Si z est de module un, on a

$$|f(z) - g(z)| = |b(1 - \bar{a}z)^3| \leq |b| |1 - \bar{a}z|^3$$

Notre objectif est de majorer strictement cette quantité par $|g(z)| = |z - a|^3$. On commence par majorer $|b| |1 - \bar{a}z|^3 < |1 - \bar{a}z|^3$, puis on fait un dessin et on voit que c'est bon (on voit une rotation, la multiplication par z , et la symétrie $z \mapsto \bar{z}$). Le calcul traduisant ceci est :

$$|1 - \bar{a}z| = |1 - a\bar{z}| = |z - a|,$$

puisque z est de module un.

Finalement, on a bien, pour tout $z \in \mathcal{C}(0, 1)$, l'inégalité stricte $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ et d'après le théorème de Rouché, f et g ont même nombre de zéros dans le disque unité.

Correction de l'exercice 10.

1. Soit $\varepsilon = \inf_{z \in \partial K} |f(z)|$. Cet inf est atteint sur le compact ∂K et donc il est strictement positif. Par convergence uniforme sur le compact ∂K , il existe N tel que pour $n > N$, on a $\|f_n - f\|_{\infty, \partial K} \leq \varepsilon/2$.

Soit $n > N$ et $z \in \partial K$. On a :

$$|f(z)| - |f_n(z) - f(z)| \geq \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2 > 0$$

(Comme vu en cours, ceci montre également que $|f_n(z)| \geq |f(z)| - |f(z) - f_n(z)| > 0$ donc f_n ne s'annule pas sur ∂K .)

D'après le théorème de Rouché, appliqué à f_n et f sur le compact K , on en déduit que f_n et f ont même nombre de zéros dans K , comptés avec multiplicités.

2. Supposons par l'absurde que f soit non identiquement nulle et s'annule en un point $a \in U$.

Par le théorème des zéros isolés, f ne s'annule pas dans un certain voisinage épointé de a et donc il existe un cercle $\mathcal{C}(a, r)$ inclus dans U et sur lequel f ne s'annule pas.

Mais alors d'après la question précédente, pour n grand, f_n a le même nombre de zéros que f sur $\mathbb{D}(a, r)$, c'est-à-dire un zéro, contradiction.

3. Supposons par l'absurde que f soit non constante et non injective. Il existe donc a et b dans U ayant même image par f . Notons $w := f(a) - f(b)$. La fonction $f - w$ possède donc deux zéros sur U et n'est pas identiquement nulle.

Par le théorème des zéros isolés, il existe $r > 0$ tel que les disques $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ et $\overline{\mathbb{D}}(b, r)$ soient disjoints et tels que $f - w$ ne s'annule pas sur leur bord. Notons K l'union de ces deux disques.

D'après la question 1, on en déduit que pour n grand, $f_n - w$ a autant de zéros dans K que f , c'est-à-dire deux.

Autrement dit, w a deux préimages par f_n dans K et f_n n'est donc pas injective.

Correction de l'exercice 11. Procéder par l'absurde et transformer l'assertion obtenue en une assertion du type $|f - g| < |f|$ avec f et g bien choisies.

Correction de l'exercice 12. La première question peut être faite avec l'application ouverte. Pour la seconde question, on fixe $w \in \mathbb{D}$, on cherche à montrer que w possède une préimage dans \mathbb{D} , c'est-à-dire que $g := f - w$ s'annule dans \mathbb{D} . Pour cela on applique Rouché à g et à la fonction f , dont on a montré qu'elle s'annulait à la question précédente.

Sans holomorphie, on peut considérer par exemple la fonction $x + iy \mapsto |x| + iy$. (« pliage »)