L3 Mathématiques
Semestre 6, 2020-2021

UE 601: Analyse complexe

Chapitre I : Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

---

Responsable du cours : Damian Brotbek (damian.brotbek@univ-lorraine.fr)
Chargés de TD:
- Groupe 1 : Alain Genestier (alain.genestier@univ-lorraine.fr)
- Groupe 2 : Damian Brotbek
- Groupe 3 : Damien Mégy (damien.megy@univ-lorraine.fr)

Sommaire

1 Rappels sur les nombres complexes

Nous commençons par quelques rappels sur les nombres complexes et sur la géométrie du plan complexe.

Définition 1.1: Le *corps des nombres complexes* est le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des points de la forme

$$x + iy \quad \text{avec} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

et ou la somme et le produit de deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Remarque 1.2: Vérifier que ces opérations induisent une structure de corps sur $\mathbb{C}$ n'est pas difficile. Observons que l'inverse d'un nombre complexe non-nul $z = x + iy$ est donné par

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y2} = \frac{x}{x^2+y2} + \frac{-y}{x^2+y2} i.$$

Les notations suivantes sont standards.

Définition 1.3: Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On note

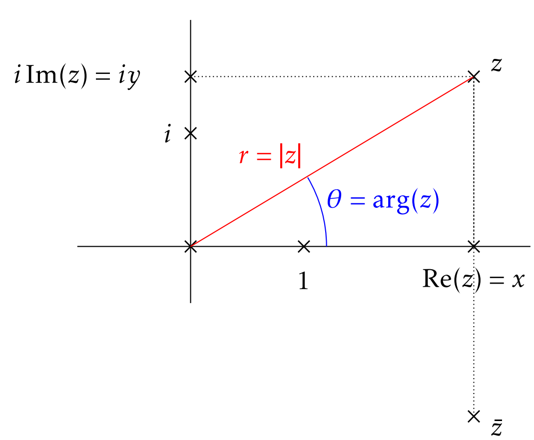
1. $\mathrm{Re}(z) := x$ la *partie réelle* de z,
2. $\mathrm{Im}(z) := y$ la *partie imaginaire* de z,
3. $\bar{z} := x - iy$ le *conjugué* de z,
4. $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ le *module* de z.

De plus, z peut s'écrire sous la forme (dite *notation exponentielle* ou *polaire*)

$$z = re^{i\theta} := r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = |z|$ est où $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que θ est un *argument* de z.

Géométriquement, on peut représenter les points de $\mathbb{C}$ dans un plan que l'on appelle le *plan complexe* (aussi appelé *plan d'Argand*), de la façon suivante :



Remarque 1.4: Observons que l'argument n'est défini qu'à 2π près. C'est à dire que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z, alors un réel $\phi \in \mathbb{R}$ est un argument de z si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\phi = \theta + 2k\pi$.

Voici quelques propriétés à connaitre (et à savoir démontrer).

Proposition 1.5: *Soit $z, w \in \mathbb{C}$. On a*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
3. $\overline{(\overline{z})} = z$,
4. $|z|^2 = z\overline{z}$,
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
6. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,
7. $-|z| \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$,
8. $-|z| \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$.

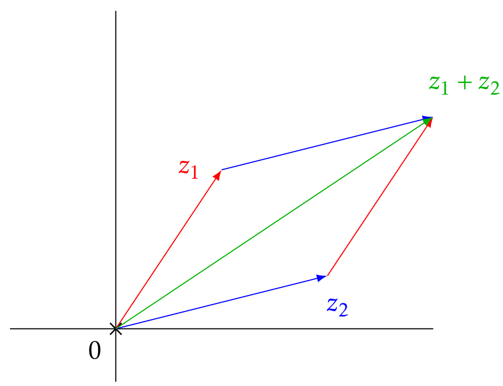
De plus, si $z = re^{i\theta}$ et $w = \rho e^{i\phi}$, alors,

$$zw = r\rho e^{i(\theta+\phi)}.$$

En particulier,

$$|zw| = |z||w| \quad \text{et} \quad \theta + \phi \quad \text{est un argument de } zw.$$

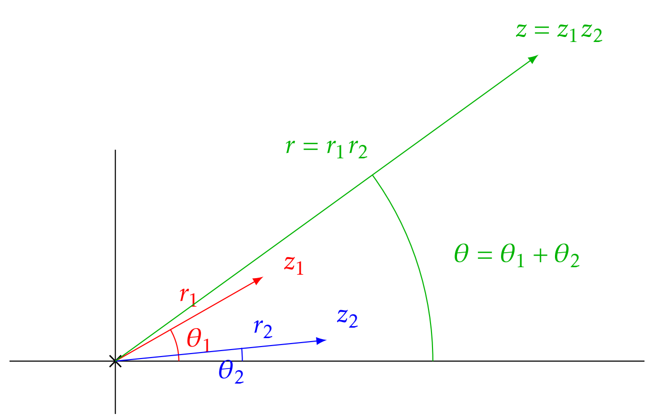
Il est important de comprendre l'interpretation géométrique des opérations algébriques : L'addition se comprend simplement comme l'addition dans un espace vectoriel, c'est la relation Chalses.



La géométrie de la multiplication se comprend en utilisant la forme exponentielle. Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ alors,

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} =: re^{i\theta},$$

c'est à dire que l'on multiplie les modules et que l'on additionne les arguments (modulo 2π).



L'application module

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

définie une norme sur $\mathbb{C}$ (c'est en fait la norme euclidienne standard si on identifie le plan complexe à $\mathbb{R}^2$). On peut donc munir $\mathbb{C}$ de la topologie induit par la topologie standard sur $\mathbb{R}^2$. Dans ce cours, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la *boule ouverte de centre z et de rayon r* sera noté

$$B(z,r) := \{w \in \mathbb{C} \,;\, |z-w| < r\}.$$

2 Fonctions complexes

2.1 Exemples

Dans ce cours on s'intéressera principalement à l'étude de fonctions

$$f : U \to \mathbb{C}$$

où $U \subset \mathbb{C}$ est un ouvert. On dira que f est une fonction d'une variable complexe, ou plus simplement une fonction complexe. Toute fonction de ce type peut s'écrire sous la forme $f = u + iv$ où $u = \mathrm{Re}(f) : U \to \mathbb{R}$ et $v = \mathrm{Im}(f) : U \to \mathbb{R}$. C'est à dire

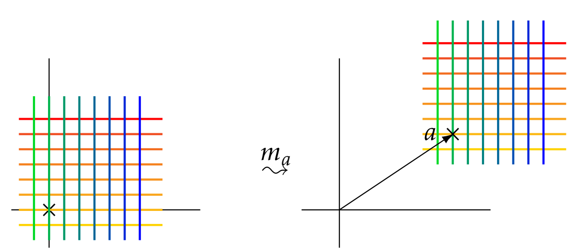
$$u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) \quad \text{et} \quad v(z) = \mathrm{Im}(f(z)), \ \ \forall z \in U.$$

Donc sous l'identification $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, les fonctions d'une variable complexe correspondent juste à des fonctions en deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Néanmoins, ce point de vu a ses limites car il ne prend pas en compte la structure multiplicative sur les nombres complexes qui sera pourtant fondamentale ici.

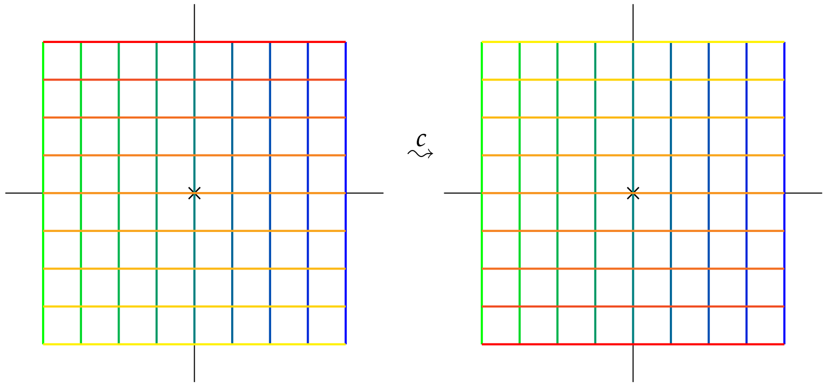
Il est difficile de se representer graphiquement une fonction complexe en se représentant le graphe de cette fonction car ce graphe se situe naturellement dans un espace de dimension réelle 4. On peut néanmoins se représenter une fonction complexe en regardant l'image sous cette fonction de différents sous-ensembles de U, par exemple un quadrillage, comme nous le verrons ci-dessous dans les exemples. Commençons par introduire certaines fonctions complexes que nous utiliserons souvent.

Exemple 2.1: Voici les exemples les plus simples

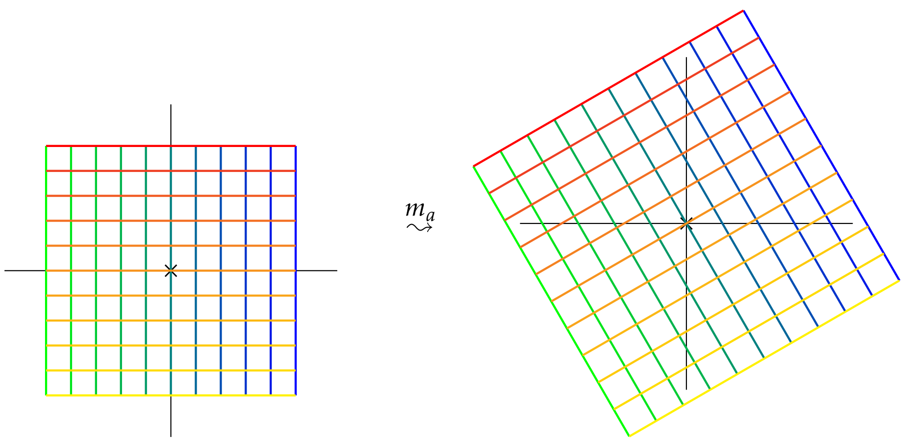
1. Si $a \in \mathbb{C}$ la fonction constante $z \mapsto a$ définie sur $\mathbb{C}$
2. La fonction identité $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z) = z$.
3. Les fonctions Re, Im et $|\cdot|$.
4. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ la fonction $t_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $t_a(z) = z + a$. Géométriquement, c'est une translation de vecteur a.



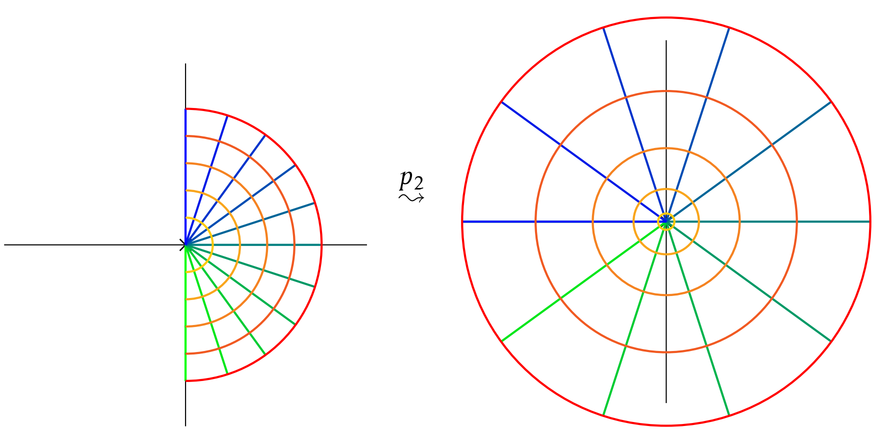
Exemple 2.2: La fonction conjugaison complexe, $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $c(z) = \overline{z}$. Géométriquement c'est une symétrie par rapport à l'axe $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



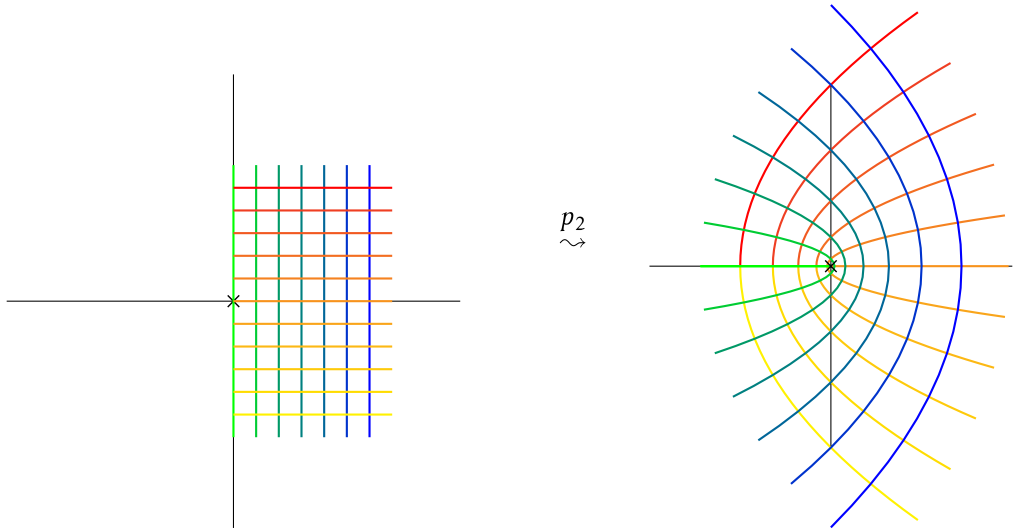
Exemple 2.3: Pour tout $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ l'application $m_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $m_a(z) = az$. Géométriquement, c'est une rotation d'angle θ composée avec une homothétie de rapport r



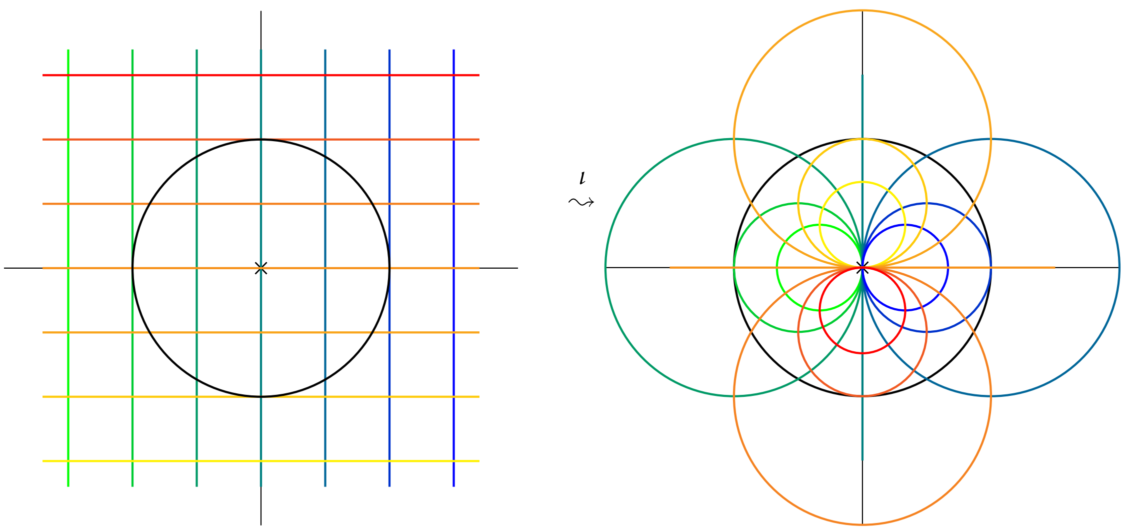
Exemple 2.4: La fonction "puissance n": $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$. Géométriquement, par exemple dans le cas $n = 2$, on peut la représenter de la façon suivante:



On peut aussi représenter les fonctions puissances en coordonnées cartésiennes, mais c'est en général moins lisible...



Exemple 2.5: La fonction inverse, $\iota : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} : z \mapsto z^{-1}$. La géométrie de cette fonction est étudiée dans l'exercice 23.



Exemple 2.6: Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C}$ définie par

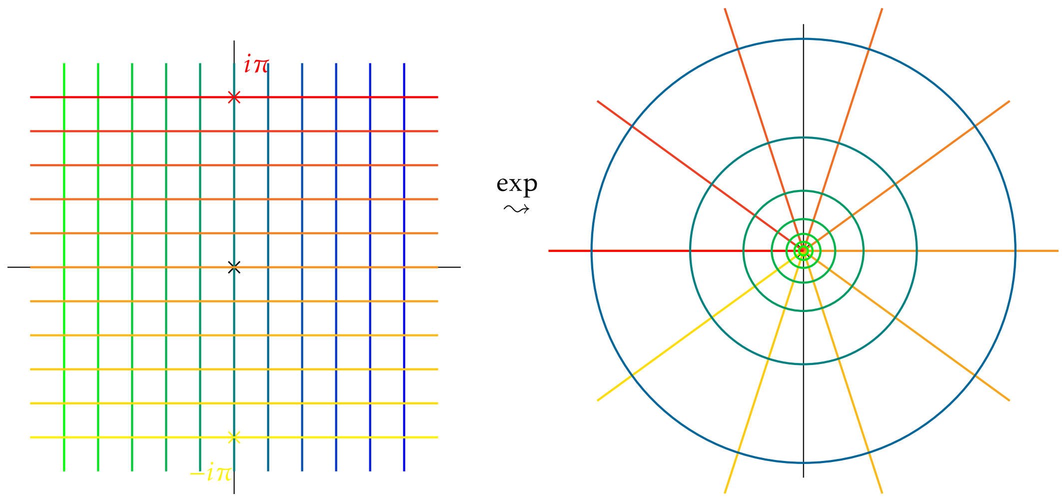
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Pour le cas $c = 0$ on utilise ici la convention $\frac{-d}{0} = \infty$ de sorte que $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} = \mathbb{C}$. Cette fonction est appelée *homographie* ou *transformation de Mobius*. Ces transformations ont la propriété remarquable d'envoyer les cercles et les droites sur des cercles ou des droites (voir l'exercice 24). Pour des illustrations, nous renvoyons à la très belle vidéo "Mobius transformations revealed" accessible sur Youtube (qui dure moins de 3 minutes).

Exemple 2.7: La fonction exponentielle: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie de la façon suivante :

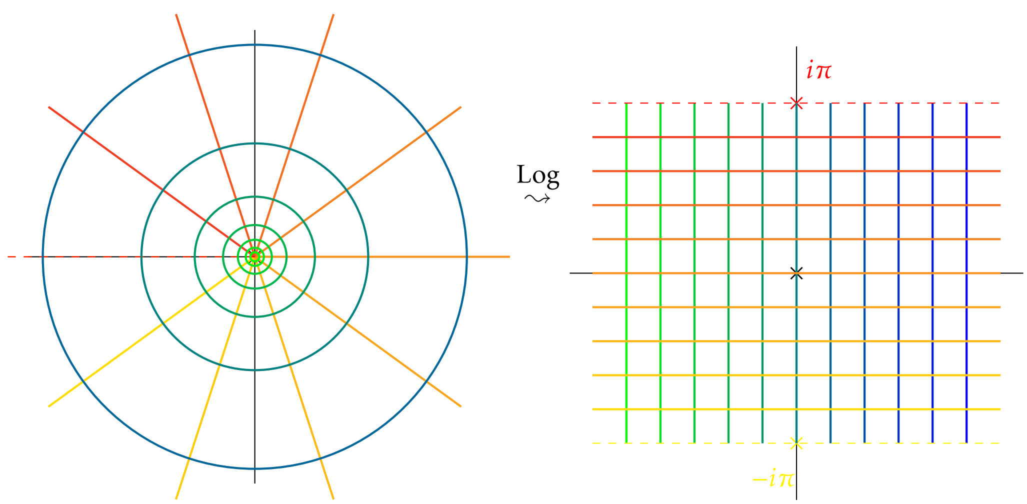
$$\exp(z) := e^z := e^x(\cos y + i \sin y) \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Cette définition et cohérente avec la formule de Moivre et les propriétés usuelles de l'exponentielle réelle. Nous étudierons cette fonction de façon plus précise par la suite. Pour l'instant, contentons-nous d'en donner une representation géométrique.



Exemple 2.8: La définition du logarithme complexe est plus délicate, et nous verrons plus tard qu'il existe une infinité de choix possibles pour définir le logarithme complexe. Pour l'instant, nous ne définissons que l'une de ces possibilités, la *détermination principale du logarithme*, $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ définie par

$$\mathrm{Log}(z) = \log r + i\theta \quad \forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \text{ où } \theta \in]-\pi, \pi[.$$



Attention, cette fonction ne vérifie pas toutes les propriétés que l'on souhaiterait. par exemple, on n'a pas toujours

$$\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w,$$

comme on le verra dans l'exercice 21.

2.2 Limite et continuité

Comme pour les fonctions réelles, on a des notions de limite et de continuité. La définition réelle se transpose verbatim dans le cadre complexe. Cela correspond exactement aux notions de limites et de continuité pour les fonctions en plusieurs variables (identifiant $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ et les fonctions d'une variable complexe à des fonctions en deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$). Pour cette raison, nous ne donnons pas las preuves des énoncés de cette section.

Définition 2.9: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in \overline{U}$ et soit $w \in \mathbb{C}$. On dit que $f(z)$ *tend vers w quand z tend vers z_0* (que l'on note $f(z) \to w$ quand $z \to z_0$) si, pour tout voisinage ouvert Ω de w il existe un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $f(V \cap (U \setminus \{z_0\})) \subset \Omega$. On dit alors que w est *la limite de $f(z)$ quand z tend vers z_0* et on note :

$$w = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

On a les caractérisations suivantes de limites.

Proposition 2.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in \overline{U}$ et soit $w \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f(z) \to w$ quand $z \to z_0$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in U \setminus \{z_0\}$,*
$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - w| < \varepsilon.$$
3. *Pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de U convergent vers z_0, la suite $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers w.*

Le calcul de limite avec les fonctions complexes est formellement identique au calcul de limite dans le cadre des fonctions réelles.

Proposition 2.11: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $z_0 \in \overline{U}$. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions et soit $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que $f(z)$ tend vers a et $g(z)$ tend vers b quand z tend vers z_0 alors :*

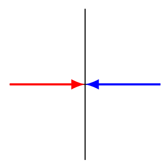
1. *$(f + g)(z) \to a + b$ quand $z \to z_0$,*
2. *$(fg)(z) \to ab$ quand $z \to z_0$.*
3. *De plus, si $b \neq 0$ alors $\frac{f}{g}(z) \to \frac{a}{b}$ quand $z \to z_0$. Ici $\frac{f}{g}$ est définie sur $U \setminus \{z \in U ; g(z) = 0\}$.*

Proposition 2.12: *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts soit $f : U \to \mathbb{C}$ et soit $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions telles que $f(U) \subset V$. Soit $z_0 \in \overline{U}, w_0 \in \overline{V}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Supposons que $f(z) \to w_0$ quand $z \to z_0$ et que $g(w) \to \ell$ quand $w \to w_0$, alors $(g \circ f)(z) \to \ell$ quand $z \to z_0$.*

Exemple 2.13: La fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ n'admet pas de limite quand $z \to 0$. En effet :

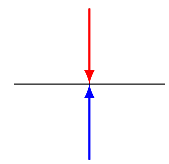
Si on approche 0 de façon “horizontale”.C’est à dire $z = x \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x) = \frac{\bar{x}}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$



Si on approche 0 de façon “verticale”. C’est à dire $z = iy \in \mathbb{R}$, alors

$$f(s) = \frac{\overline{iy}}{iy} = \frac{-iy}{iy} = -1 \neq 1.$$



La fonction f *n’admet donc pas de limite* en 0.

Définition 2.14: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.

1. Soit $z \in U$. On dit que f est *continue en* z si pour tout voisinage Ω de $f(z)$, il existe un voisinage de $V \subset U$ de z tel que
$$f(V) \subset \Omega.$$
2. On dit que f est *continue sur* U si f est continue en tout point de U.

Proposition 2.15: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $z \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en z.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $w \in U$, $|z - w| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.*
3. *Pour toute suite de nombre complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de U, si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z, alors $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z)$.*
4. $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont continues.*

La propriété suivante est souvent utilisée comme définition.

Proposition 2.16: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. La fonction f est continue si et seulement si pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, l’ensemble $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de U.*

Observons que la continuité est stable par les opérations usuelles sur les fonctions:

Proposition 2.17: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions continues.*

1. *Les fonctions $f + g$ et fg sont continues.*
2. *La fonction $\frac{f}{g}$ définie sur $V := U \setminus \{z \in U\ ;\ g(z) = 0\}$ est une fonction continue.*

Proposition 2.18: *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soient $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions continues. Supposons que $f(U) \subset V$. Alors la fonction $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ est continue.*

3 Fonctions holomorphes

3.1 Définition et exemples

Comme $\mathbb{C}$ est un corps muni d'une topologie, on peut recopier la définition de fonction dérivable connue dans le cadre réel.

Définition 3.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $z_0 \in U$. On dit que f est *$\mathbb{C}$-dérivable en z_0* si la limite suivante existe :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Si cette limite existe, on la note $f'(z_0)$ et on l'appelle *dérivée de f en z_0*.

Remarque 3.2:

1. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z_0 \in U$ alors f est continue en z_0.
2. Comme dans le cas réel, on peut observer que la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0, si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(z) \to 0$ quand $z \to z_0$, telles que pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$ on a

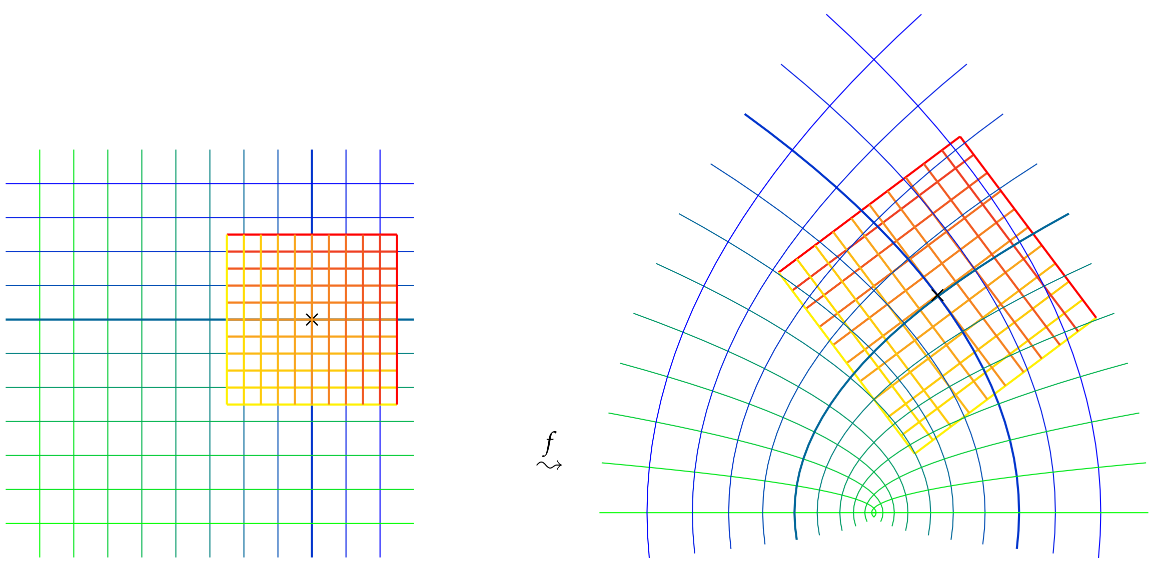
$$f(z_0+h) = f(z_0) + \lambda h + \varepsilon(z_0+h)h.$$

Dans ce cas, on a $\lambda = f'(z_0)$. En effet, si on a une telle relation, on obtient que f est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 en divisant cette relation par h et en faisant tendre $h \to 0$. Réciproquement, si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, il suffit de poser $\lambda = f'(z_0)$ et

$$\varepsilon(z_0+h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f'(z_0) & \text{si } h \neq 0. \end{cases}$$

Géométriquement cela veut dire que l'approximation d'ordre 1 de f en z_0 est la fonction

$$z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0).$$



Définition 3.3: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *holomorphe* (ou *holomorphe sur* U), si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. Si tel est le cas, la fonction $f' : U \to \mathbb{C}$ est appelée *dérivée de* f.

Remarque 3.4:

1. L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est noté $\mathscr{O}(U)$.
2. Même si la définition est formellement la même que celle de la dérivée dans le cas réel, on verra que la théorie des fonctions holomorphes est très différente de la théorie des fonctions dérivables réelles.
3. Une fonction holomorphe sur U est continue sur U
4. D'après la remarque précédente, une fonction f est holomorphe sur U si et seulement si pour tout $z_0 \in U$ il existe $\varepsilon_{z_0} : U \to \mathbb{C}$ continue et $\lambda_{z_0} \in \mathbb{C}$ tels que $\varepsilon_{z_0}(z_0) = 0$ et que
$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\lambda_{z_0} + (z - z_0)\varepsilon_{z_0}(z).$$
Dans ce cas, on a $\lambda_{z_0} = f'(z_0)$.

Exemple 3.5: Les fonctions t_a, m_a sont holomorphes pour tout $a \in \mathbb{C}$. En effet pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$
$$\lim_{h\to 0} \frac{m_a(z_0+h) - m_a(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z_0 + h + a - (z_0 + a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$
Donc m_a est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $m_a'(z_0) = 1$. Et par ailleurs
$$\lim_{h\to 0} \frac{t_a(z_0+h) - t_a(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(z_0+h) - az_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$
Donc t_a est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et $t_a'(z_0) = a$.

Exemple 3.6: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions p_n sont holomorphes. En effet, on a
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k h^{n-k} - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(nz^{n-1} + h \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} z^k h^{n-k-2} \right) = nz^{n-1}.\end{aligned}$$

Il est important de noter que beaucoup de fonctions naturelles ne sont pas holomorphes.

Exemple 3.7: La fonction $c : z \mapsto \overline{z}$ *n'est pas holomorphe*. Plus précisément, cette fonction n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ on a
$$\frac{c(z_0+h) - c(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h},$$
mais nous avons vu que ceci n'admet pas de limite quand $h \to 0$.

3.2 Quelques propriétés

Proposition 3.8: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Alors :*

1. *la fonction $f + g$ est holomorphe et $(f+g)' = f' + g'$,*
2. *la fonction fg est holomorphe et*
$$(fg)' = f'g + g'f \quad \text{(formule de Leibniz)}.$$
3. *Si de plus g ne s'annule jamais, alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle dans le cadre réel.

1. Montrons que $f + g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U. Soit $z_0 \in U$. On a
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(z+h) - (f+g)(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) + g(z+h) - f(z) - g(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = f'(z_0) + g'(z_0).\end{aligned}$$
On a donc montré que $f + g$ est holomorphe sur U et que $(f+g)' = f' + g'$.

2. Montrons que fg est $\mathbb{C}$-dérivable sur U. Soit $z_0 \in U$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$ on a
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(z_0+h) - (fg)(z_0)}{h} &= \frac{f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0+h)g(z) + f(z_0+h)g(z) - f(z)g(z)}{h} \\ &= f(z_0+h)\left(\frac{g(z_0+h) - g(z)}{h}\right) + g(z)\left(\frac{f(z_0+h) - f(z)}{h}\right)\end{aligned}$$
Donc quand h tend vers 0, cette expression tend vers $(f'g + g'f)(z_0)$. Ceci montre que fg est holomorphe sur U de dérivé $f'g + g'f$.

3. Au vu du point précédent, il suffit de montrer que la fonction $\frac{1}{g}$ est holomorphe et que $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$. Soit $z_0 \in U$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$ on a
$$\frac{\frac{1}{g}(z_0+h) - \frac{1}{g}(z_0)}{h} = \frac{g(z_0) - g(z_0+h)}{hg(z_0)g(z_0+h)} = -\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h} \frac{1}{g(z_0)g(z_0+h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$
Ceci montre l'holomorphie sur U et l'expression souhaitée de la dérivée.

□

Cette propriété nous permet déjà de construire des exemples de fonctions holomorphes

Exemple 3.9: Les fonctions polynomiales de la formes $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ sont holomorphes et
$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + 2a_2 z + a_1.$$

Exemple 3.10: Les fractions rationelles (quotients de deux polynômes) sont holomorphes sur leur ensemble de définition. Par exemple, la fonction $f : z \mapsto \frac{z-1}{z+i}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et l'on a

$$f'(z) = \frac{1 \times (z+i) - 1 \times (z-1)}{(z+i)^2} = \frac{1+i}{(z+i)^2}.$$

Théorème 3.11 ("Chain rule"): *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes telles que $f(U) \subset V$. Alors la fonction $g \circ f$ est holomorphe et pour tout $z \in U$ on a*

$$(g \circ f)'(z) = f'(z) \cdot (g' \circ f)(z)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et notons $w_0 = f(z_0) \in V$. Il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ telle que $\varepsilon(z) \to 0$ quand $z \to z_0$ et telle que pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$ on a

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h.$$

De même, il existe une fonction $\delta : V \to \mathbb{C}$ telle que $\delta(w) \to 0$ quand $w \to w_0$ et telle que pour tout $t \in \mathbb{C}$ tel que $w_0 + t \in U$ on a

$$g(w_0 + t) = g(w_0) + g'(z_0)t + \delta(w_0 + t)t.$$

On a donc, pour tout h tel que $z_0 + h \in U$

$$\begin{aligned} g \circ f(z_0+h) &= g\big(f(z_0+h)\big) = g\big(f(z_0) + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0+h)h\big) = g\big(w_0 + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0+h)h\big) \\ &= g(w_0) + g'(w_0)\big(f'(z_0)h + \varepsilon(z_0+h)h\big) + \delta\big(f(z_0+h)\big)\big(f'(z_0)h + \varepsilon(z_0+h)h\big) \\ &= g(w_0) + hg'(w_0)\Big(f'(z_0) + \varepsilon(z_0+h) + \delta\big(f(z_0+h)\big)\big(f'(z_0) + \varepsilon(z_0+h)\big)\Big). \end{aligned}$$

En divisant cette relation par h et en faisant tendre $h \to 0$, on obtient bien que $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et que

$$(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0)g'(w_0) = f'(z_0) \cdot g' \circ f(z_0).$$

□

4 Les équations de Cauchy-Riemann

Nous allons maintenant voir ce qui distingue, du point de vu du calcul différentiel, les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables des fonctions différentiables au sens réel. Afin de fixer les notations, on introduit la définition suivante.

Définition 4.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, on voit U comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on note $f_{\mathbb{R}} = (u, v) : U \to \mathbb{R}^2$ où $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ pour tout $(x, y) \in U$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ et posons $a = (x_0, y_0)$. On dit que f est *différentiable en z_0* (ou *différentiable au sens réel en z_0*) si $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en a. Si tel est le cas, on pose

$$df_a := df_{\mathbb{R},a}.$$

On dit que f est *différentiable sur U* si $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable sur U.

Considérons un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Par définition, cela veut dire que pour tout l'on a

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \varepsilon(z_0 + h)h \tag{1}$$

pour une fonction ε qui tend vers 0 quand $h \to 0$ et pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $z_0 + h \in U$.

On prend les notations de la définition 4.1. On note $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Pour tout $h = s + it$, la relation (1) s'écrit alors

$$f_{\mathbb{R}}(x_0 + s, y_0 + t) \quad = \quad f_{\mathbb{R}}(x_0, y_0) + \Big(\alpha s - \beta t, \alpha t + \beta s\Big) + |h|\varepsilon_2(x_0 + s, y_0 + t)$$

où, pour $h = s + it$, on note

$$\varepsilon_2(x_0 + s, y_0 + t) = \left(\mathrm{Re}\left(\frac{h}{|h|}\varepsilon(z_0 + h)\right), \mathrm{Im}\left(\frac{h}{|h|}\varepsilon(z_0 + h)\right)\right).$$

Comme $\varepsilon_2(s,t) \to 0$ quand $(s,t) \to 0$, cela implique que la fonction $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable au sens réel en (x_0, y_0), donc par définition, f est différentiable en z_0 et que de plus, la différentielle de f en z_0 est l'application

$$df_a : (s,t) \mapsto \Big(\alpha s - \beta t, \beta s + \alpha t\Big).$$

En particulier, les dérivées partielles de u et v existent au point a, et la matrice jacobienne de f (ou pour être précis de $f_{\mathbb{R}}$) est

$$J_a(f_{\mathbb{R}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

En particulier, nous obtenons les relations suivantes, dites équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(a) = \alpha \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a) & = & -\dfrac{\partial u}{\partial y}(a) = \beta. \end{cases}$$

Avant de continuer, nous allons décrire une autre façon, un peu plus naive, de déduire les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions holomorphes. Avec les notations ci-dessus. Par définition, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \alpha + i\beta.$$

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe quand on fait tendre h vers 0 horizontalement ou verticalement. Quand $h = s \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta &= \lim_{s \to 0} \frac{f(z_0 + s) - f(z_0)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{u(x_0 + s, y_0) + iv(x_0 + s, y_0) - u(z_0) - iv(z_0)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \left(\frac{u(x_0 + s, y_0) - u(z_0)}{s} + i\frac{v(x_0 + s, y_0) - v(z_0)}{s} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

On a donc $f'(z_0) = \alpha + i\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$. Quand $h = it \in i\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta &= \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t) - u(z_0) - iv(z_0)}{it} \\ &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + t) - u(z_0)}{it} + \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(z_0)}{t} \right) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

On a donc $f'(z_0) = \alpha + i\beta = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$. Et on retrouve les équations de Cauchy-Riemann.

Le résultat suivant montre que ces conditions caractérisent la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

Théorème 4.2 (Cauchy-Riemann): *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On note $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ pour tout $x+iy \in U$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ et posons $a = (x_0, y_0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.*
2. *$f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en a et vérifie les équations de Cauchy-Riemann*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a) & = & -\dfrac{\partial u}{\partial y}(a). \end{array}\right.$$

Si ces assertions sont vérifiées alors on a de plus

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Démonstration. L'implication $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ a déjà été démontrée, il s'agit donc de montrer que $\boxed{2. \Rightarrow 1.}$. Comme $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en a, il existe une fonction $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) : U \to \mathbb{R}^2$ qui tend vers 0 quand (x,y) tend vers x_0, y_0 telle que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(x_0+s, y_0+t) \in U$ on a

$$\Big(u(x_0+s,y_0+t), v(x_0+s,y_0+t)\Big) = \Big(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)\Big) + df_{\mathbb{R},a}(s,t) + \|(s,t)\|\varepsilon(x_0+s,y_0+s). \qquad (2)$$

Les résultats de la section 6 et les équations de Cauchy-Riemann impliquent que le point $df_a(s,t)$ de $\mathbb{R}^2$ correspond au point du plan complexe donné par

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)(s+it).$$

On peut donc réécrire la relation (2) sous la forme

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)h + |h|\Big(\varepsilon_1(s,t) + i\varepsilon_2(s,t)\Big)$$

où l'on a noté $h = s+it$. Donc en réordonnant les termes et en divisant par h on trouve

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right) = \frac{|h|}{h}\Big(\varepsilon_1(s,t) + i\varepsilon_2(s,t)\Big) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

On en déduit donc que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et que de plus $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(a)$. □

Il est essentiel de bien retenir le corollaire suivant :

Corollaire 4.3: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. On note $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ pour tout $x+iy \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

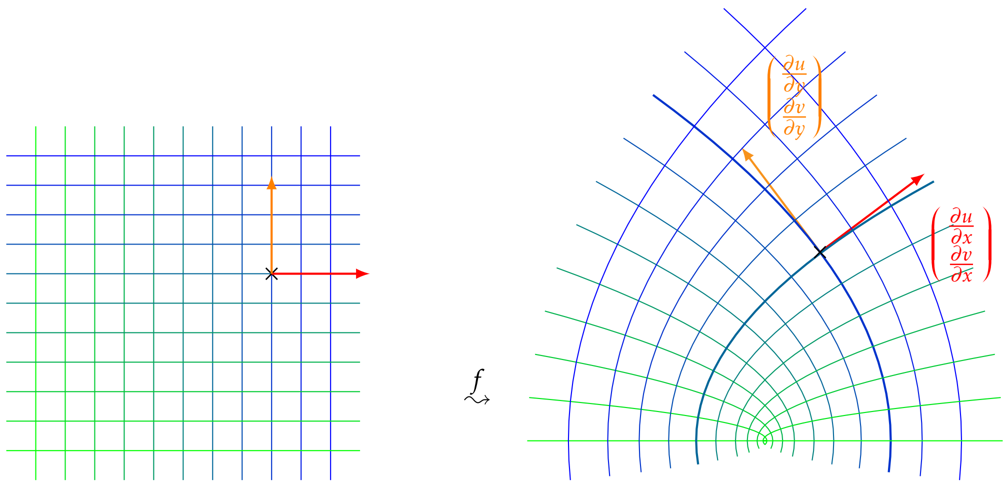
1. *f est holomorphe sur U.*
2. *f est différentiable sur U et vérifie les équations de Cauchy-Riemann*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{array}\right.$$

Géométriquement, les équations de Cauchy-Riemann traduisent le fait que $df_{(x_0,y_0)}(0,1)$ est l'image de $df_{(x_0,y_0)}(1,0)$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. En effet, elles peuvent se réécrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Cela veut exactement dire que les images des "vecteurs tangents" $(1,0)$ et $(0,1)$ en z_0 forment un angle droit (préservant l'orientation), et sont de même norme.



Remarque 4.4: On peut en fait montrer que les applications holomorphes sont *conformes* en dehors du lieu d'annulation de la dérivée. C'est à dire que les applications holomorphes préservent les angles orientés (tout du moins en tout point où la dérivée est non-nulle).

Une autre façon d'interpreter les équations de Cauchy-Riemann, est la suivante. Si une fonction $f = u + iv$ est holomorphe, alors les courbes de niveau de u et de v sont orthogonales. C'est à dire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, les courbes

$$u^{-1}(\{a\}) \quad \text{et} \quad v^{-1}(\{b\})$$

sont orthogonales là où elles s'intersectent, en dehors des points critiques (rappelons que les points critiques sont les points où la différentielle s'annule). Comme cette interpretation n'est pas crucial dans ce cours et que nous la donnons surtout à titre culturel, nous ne la démontrerons pas ici et nous la laissons comme un petit exercice de calcul différentiel.

Néanmoins, mous allons l'illustrer cela dans le cas de la fonction $f : z \mapsto z^2$. On a $f(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$ on a donc

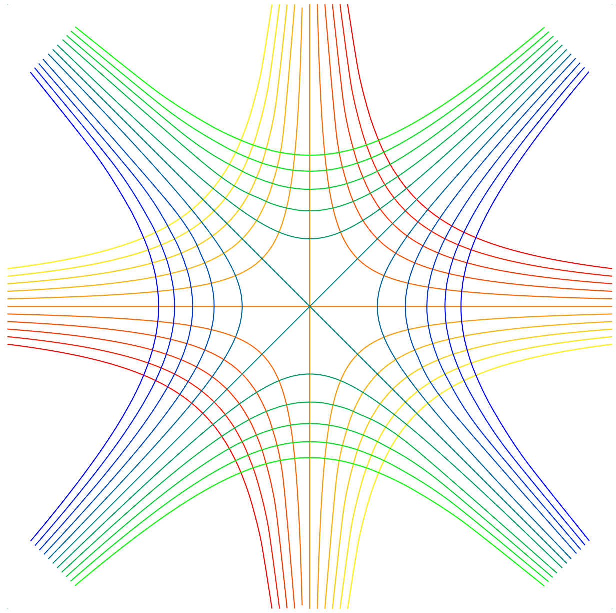
$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v(x,y) = 2xy.$$

Nous représentons ci-dessous les courbes de niveau de u suivantes :

$u^{-1}(\{0.8\})$, $u^{-1}(\{0.6\})$, $u^{-1}(\{0.4\})$, $u^{-1}(\{0.2\})$, $u^{-1}(\{0\})$, $u^{-1}(\{-0.2\})$, $u^{-1}(\{-0.4\})$, $u^{-1}(\{-0.6\})$, $u^{-1}(\{-0.8\})$, $u^{-1}(\{-1\})$

et les courbes de niveau de v suivantes $v^{-1}(\{1\})$, $v^{-1}(\{0.8\})$, $v^{-1}(\{0.6\})$, $v^{-1}(\{0.4\})$, $v^{-1}(\{0.2\})$, $v^{-1}(\{0\})$, $v^{-1}(\{-0.2\})$, $v^{-1}(\{-0.4\})$, $v^{-1}(\{-0.6\})$, $v^{-1}(\{-0.8\})$, $v^{-1}(\{-1\})$ et $u^{-1}(\{1\})$.

Toutes les intersections forment des angles droits, sauf au point 0 qui est l'unique point critique de la fonction $z \mapsto z^2$.



Les équations de Cauchy-Riemann peuvent par exemple être utilisées pour montrer que l'exponentielle définie dans l'exemple 2.7 est une fonction holomorphe. Dans l'exemple 2.7, l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a été définie de la façon suivante

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \ \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Notons,

$$u(x, y) = e^x \cos y = \mathrm{Re}(\exp(x + iy)) \quad \text{et} \quad v(x, y) = e^x \sin y = \mathrm{Im}(\exp(x + iy)) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

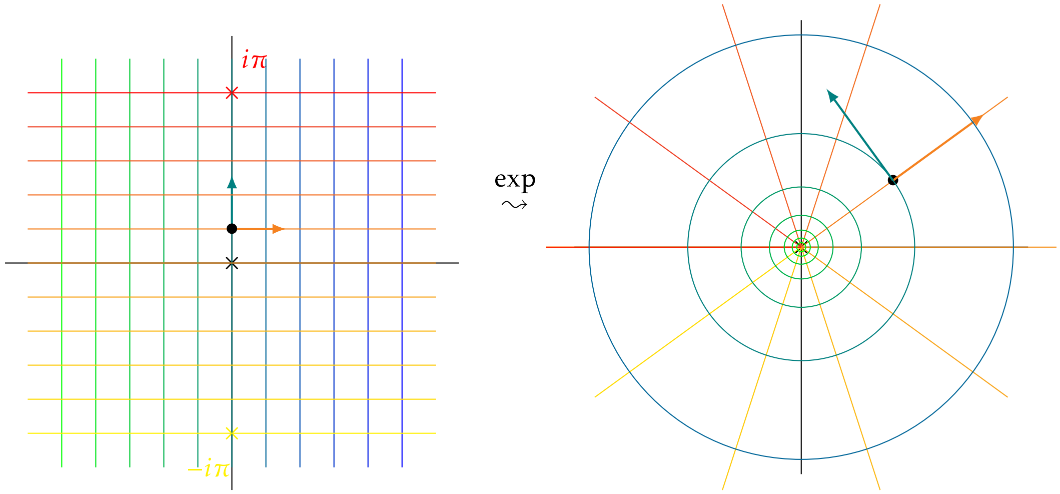
La fonction (u, v) est donc $\mathscr{C}^1$, en particulier, elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les équations de Cauchy-Riemann impliquent donc que exp est une fonction holomorphe. De plus, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on a

$$\exp'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp(z).$$

Illustrons dans ce cas particulier l'interprétation géométrique des équations de Cauchy-Riemann donnée ci-dessus.



Nous terminons cette section par le résultat suivant.

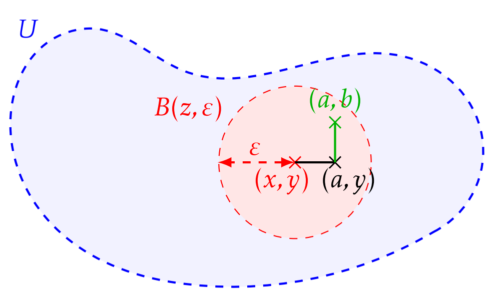
Corollaire 4.5: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert* connexe. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. On note $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ comme ci dessus. D'après le théorème 4.2 les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont nulles. On en déduit alors, d'après l'hypothèse de connexité que u et v sont constantes et donc que f est constante. Pour voir cela, on fixe $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ et on pose $\alpha = u(x_0, y_0)$. On considère alors

$$V := \{z = x + iy \in U \; ; \; u(x,y) = \alpha\}.$$

Comme V est continue, $V = u^{-1}(\{\alpha\})$ est un fermé. Comme $u(x_0,y_0) = \alpha$, V est non-vide. Il reste à montrer que V est ouvert. Soit $z \in V$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon) \subset U$:

alors $B(z,\varepsilon) \subset V$. En effet, notons $z = x+iy$, que nous identifions avec le point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $w = a+ib \in B(z,\varepsilon)$, que nous identifions avec le point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.



Comme $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ sur U, nous en déduisons que la fonction u est constante sur le segment allant de (x,y) à (a,y). En particulier $u(a,y) = u(x,y) = \alpha$. De même, en utilisant l'hypothèse $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ sur U, nous en déduisons que u est constante sur le segment allant de (a,y) à (a,b). En particulier En particulier $u(a,b) = u(a,y) = \alpha$. En particulier, $w \in V$.

Par connexité de U, cela implique que $V = U$ et donc que u est constante sur U. On montre de même que v est constante sur U, d'où le résultat. $\square$

5 Notations de Wirtinger

Nous introduisons ici les notations de Wirtinger, qui nous permettrons de faire du calcul différentiel avec les fonctions complexes de façon plus naturelle. Tout d'abord nous étendons la notion de dérivée partielle à des fonctions complexes.

Définition 5.1: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Notons $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ pour tout $z = x + iy \in U$ avec $u, v : U \to \mathbb{R}$. On définit les dérivées partielles de f par rapport à x et à y comme étant les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Pour être tout à fait précis, cela veut dire que pout tout $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, on a

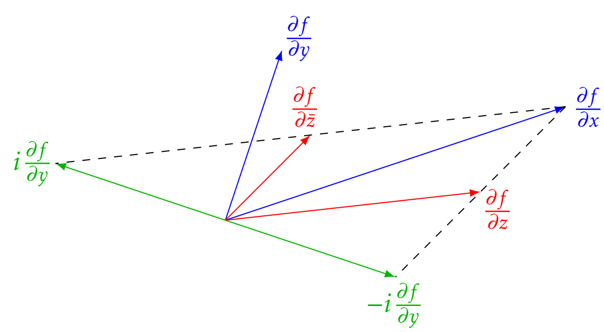
$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) := \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) := \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

On peut maintenant introduire les notations de Wirtinger

Définition 5.2: Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. On définit les fonctions $\frac{\partial f}{\partial z} : U \to \mathbb{C}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} : U \to \mathbb{C}$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Géométriquement, si on identifie $\frac{\partial f}{\partial x}$ avec le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ avec le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$, alors on peut représenter ces vecteurs de la façon suivante :



Exemple 5.3: On a par exemple $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1$ et $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$. En effet :

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x} - i\frac{\partial x}{\partial y} - i^2\frac{\partial y}{\partial y}\right) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x} + i\frac{\partial x}{\partial y} + i^2\frac{\partial y}{\partial y}\right) = 0.$$

De même, on montre que $\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$ et $\dfrac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$.

On a alors la reformulation suivante theorem 4.2.

Proposition 5.4: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Alors f est holomorphe si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Si tel est le cas, on a

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Démonstration. Notons $f = u + iv$ comme précédemment. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.2. □

Remarque 5.5: Soulignons que $\frac{\partial f}{\partial z}$ existe pour toute fonction différentiable, alors que f' n'est définie que pour les fonctions holomorphes.

Les dérivées partielles par rapport à z et $\bar{z}$ vérifient les propriétés usuelles du calcul différentiel.

Proposition 5.6: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f, g : U \to \mathbb{C}$ des fonctions différentiables. Alors*

1. $\dfrac{\partial (f+g)}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial z}$ *et* $\dfrac{\partial (f+g)}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}}$
2. $\dfrac{\partial fg}{\partial z} = g\dfrac{\partial f}{\partial z} + f\dfrac{\partial g}{\partial z}$ *et* $\dfrac{\partial fg}{\partial \bar{z}} = g\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} + f\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}}$
3. *Si de plus g ne s'annule jamais, alors*

$$\frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial z} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} g - f\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \frac{f}{g}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} g - f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\right)$$

Exemple 5.7: Grace à la règle de Leibnitz, une récurrence immédiate montre que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial z^n \bar{z}^m}{\partial z} = n z^{n-1} \bar{z}^m \quad \text{et} \quad \frac{\partial z^n \bar{z}^m}{\partial \bar{z}} = m z^n \bar{z}^{m-1}.$$

On a aussi la version suivante de la règle de dérivation des fonctions composées.

Proposition 5.8: *Soit $U, V \subset \mathbb{C}$ des ouverts. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ des fonctions différentiables telles que $f(U) \subset V$. On a alors*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g \circ f}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \\
\frac{\partial g \circ f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons nous ramener à la définition de $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ puis utiliser la règle de différentiation des fonctions composées pour les fonctions réelles. On note $z = x + iy$ et $w = s + it$. On note aussi $f(z) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ et $g(w) = \big(\varphi(s,t), \psi(s,t)\big)$, où u, v, φ, ψ sont à valeurs réelles. Observons déjà que

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g \circ f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}$$

En effet, vu comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, $g \circ f$ s'identifie à $\Theta := (\varphi, \psi) \circ (u, v)$, et par définition $\frac{\partial g \circ f}{\partial x}$ s'identifie à $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$. Il suffit donc de calculer la matrice jacobienne de Θ. Par la règle de différentiation des fonctions composées, on trouve

$$J(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En particulier,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + i\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pour démontrer la formule annoncée pour $\frac{\partial g \circ f}{\partial y}$, il suffit de faire le même calcul avec $\frac{\partial \Theta}{\partial y}$, la seconde colonne de la jacobienne.

On a donc

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g \circ f}{\partial x} - i\frac{\partial g \circ f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial z}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial s} - i\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial s} + i\frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial g}{\partial t}\left(-\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ceci prouve la première relation. La seconde se prouve de façon complètement analogue. $\square$

Pour conclure, voici une autre version qui nous sera utile.

Proposition 5.9: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application différentiable et soit $\varphi : I \to U$ une application différentiable. Alors $f \circ \varphi$ est différentiable et*

$$\frac{d f \circ \varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{d\overline{\varphi}}{dt}.$$

Ici, étant donné une application différentiable, $\Psi : I \to \mathbb{C}$, la dérivée $\Psi' : I \to \mathbb{C}$ est l'application

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi' = (\operatorname{Re}\Psi)' + i(\operatorname{Im}\Psi)'.$$

Démonstration. La fonction $f \circ \varphi$ est différentiable comme composée de fonctions différentiables. Notons $f = u + iv$ comme précédemment. Notons $\varphi_1 = \mathrm{Re}(\varphi)$ et $\varphi_2 = \mathrm{Im}(\varphi)$ de sorte que $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ que l'on peut identifier avec la fonction $(\varphi_1, \varphi_2) : I \to \mathbb{R}^2$. par définition, on a

$$(f \circ \varphi)' = (u \circ (\varphi_1, \varphi_2))' + (v \circ (\varphi_1, \varphi_2))'.$$

En vu de formule (3) rappelée ci-dessous, on a

$$(u \circ (\varphi_1, \varphi_2))' = \varphi_1' \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2' \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad (v \circ (\varphi_1, \varphi_2))' = \varphi_1' \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi_2' \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Donc

$$(f \circ \varphi)' = \varphi_1' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \varphi_2' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \varphi_1' \frac{\partial f}{\partial x} + i\varphi_2' \frac{\partial f}{\partial y}$$

Et l'on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{d\overline{\varphi}}{dt} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\varphi_1' + i\varphi_2') + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\varphi_1' - i\varphi_2') \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi_2' + i\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_2' - i\frac{\partial f}{\partial y}\varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial x}\varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi_2' - i\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_2' + i\frac{\partial f}{\partial y}\varphi_1'\right) \\
&= \varphi_1'\frac{\partial f}{\partial x} + i\varphi_2'\frac{\partial f}{\partial y} = (f \circ \varphi)'.
\end{aligned}$$

□

Cette proposition implique, au vu de la reformulation des équations de Cauchy-Riemann donnée par la proposition 5.4, que l'on a :

Corollaire 5.10: *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un interval et soit $\varphi : I \to U$ une application différentiable. Alors, $f \circ \varphi$ est différentiable, et pour tout $t \in I$,*

$$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t)).$$

Exemple 5.11: Cette proposition, appliquée à $f(z) = e^z$ et $\varphi(t) = it$, montre que l'on a

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it}.$$

6 Appendice : Rappels de calcul différentiel

Afin de fixer les notations, nous faisons un bref rappel sur le calcul différentiel. Nous renvoyons à l'UE 401 : *Analyse 3*, pour une présentation complète.

Définition 6.1: Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Soit $a \in U$. On dit que f est *différentiable* en a si il existe une application linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|) \quad \text{quand} \quad \|h\| \to 0.$$

Si une telle application df_a existe, alors elle est unique et elle est appelée la *différentielle de f en a*.

Remarque 6.2:

1. La norme utilisé ici est la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$: si $h = (h_1, \ldots, h_n)$ on note $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$.
2. Nous utilisons ici la notation o de Landau. Par définition, étant donné une fonction $g : U \to \mathbb{R}^m$, on note $g(h) = o(\|h\|)$ si il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^m$ telle que $g(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ et telle que $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. En particulier, on peut réécrire la définition de differentiabilité de f en a comme suit : il existe une application linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $\lim_{h\to 0} \varepsilon(a+h) = 0$ telles que
$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(a+h).$$

Définition 6.3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout $a \in U$, on dit *f est dérivable par rapport à la i-ème variable en a* si la fonction $g : t \mapsto f(a + te_i)$ est dérivable en 0. On pose alors
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\text{déf}}{=} g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}.$$
Si f est dérivable par rapport à la i-ème variable en tout point de U on dit que *f est dérivable par rapport à la i-ème variable sur U*. Si la fonction f est dérivable par rapport à la i-ème variable en $a \in U$ (resp. sur U) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on dit que *les dérivées partielles de f existe au point a (resp. sur U)*.

Dans le cas où $n = 2$, on notera en générale les coordonnées $x = x_1$ et $y = x_2$ et dénotera les dérivées partielles par
$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$
Si dans cette définition, on écrit $f = (f_1, \ldots, f_m)$ avec $f_j : U \to \mathbb{R}$, alors f est dérivable par rapport à la i-ème variable en a si et seulement si pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, la fonction f_j est dérivable par rapport à la i-ème variable en a, et on a alors
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right).$$

Si f est dérivable par rapport à chacune des variables $x_1, \ldots, x_n$ en un point a alors on définit la matrice jacobienne de f comme étant la matrice
$$J_a(f) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$
Il y a quelques subtilités pour faire le lien entre différentielle et dérivées partielles. En effet les dérivées partielles peuvent exister en un point a que la fonction ne soit différentiable. Par contre si f est différentiable en a, alors f est dérivable par rapport à chacune des variable $x_1, \ldots, x_n$ et de plus, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,
$$df_a(h) = J_a(f) \cdot h.$$
Ici on voit h comme un vecteur *colonne*.

La notion suivante nous donne une réciproque.

Définition 6.4: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$. Notons $(f_1, \ldots, f_m)$ les composantes de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$. On dit que f est *de classe $\mathscr{C}^1$ sur U* (ou plus simplement, f est $\mathscr{C}^1$), si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, la dérivée partielle $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existe sur U et est *continue* sur U.

On a la proposition suivante.

Proposition 6.5: *Avec les notations si dessus, si f est $\mathscr{C}^1$ sur U alors f et differentiable sur U.*

De façon plus générale, on peut définir par récurrence la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^r$ pour tout $r \geqslant 0$.

Définition 6.6: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction.

1. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si f est continue.
2. Pour tout $r \geqslant 1$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^r$ si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et et de classe $\mathscr{C}^{r-1}$ sur U.
3. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^r$ pour tout $r \geqslant 0$.

Remarque 6.7: Les sommes, produits et composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^r$.

La propriété suivante est fondamentale.

Proposition 6.8: *Soit $n, m, \ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $g : V \to \mathbb{R}^\ell$ des applications telles que $f(U) \subseteq V$. Soit $a \in U$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a*

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

De façon équivalente,

$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g) J_a(f).$$

Dans ce cours, nous utiliserons essentiellement les cas où $n \in \{1,2\}$ et $m \in \{1,2\}$. Illustrons donc les notions précédentes dans ce cadre. Pour simplifier, on suppose que $U = \mathbb{R}^n$ ici, mais les formules sont identiques pour un ouvert U quelconque.

Si $n = 1$ et $m = 1$. C'est le cadre de l'analyse réelle en une variable. On dénote la variable sur $\mathbb{R}$ par t (au lieu de x_1). Alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable si et seulement si f est dérivable si et seulement si la dérivée partielle par rapport à t existe. Dans ce cas on a

$$f' = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Du plus pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que f est différentiable en a, et pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$df_a(h) = f'(a)h.$$

Notons aussi que dans ce cadre la définition de fonction de classe $\mathscr{C}^r$ coincide avec la définition vu en première année de licence.

Si $n = 1$ et $m = 2$. On dénote la variable sur $\mathbb{R}$ par t (au lieu de x_1). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Notons $f = (f_1, f_2)$. Alors f est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables en a. Dans ce cas, on a

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ f_2'(a) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad df_a(h) = \left(f_1'(a)h, f_2'(a)h\right) \ \forall h \in \mathbb{R}.$$

Si $n = 2$ et $m = 1$. On dénote les variables sur $\mathbb{R}^2$ par x et y (au lieu de x_1 et x_2). Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est differentiable en $a \in \mathbb{R}^2$ on a

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \quad \text{et} \quad df_a(s,t) = s\frac{\partial f}{\partial x}(a) + t\frac{\partial f}{\partial y}(a) \ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $n = 2$ et $m = 1$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction et notons $f = (u, v)$. On dénote les variables sur $\mathbb{R}^2$ par x et y (au lieu de x_1 et x_2). Si f est differentiable en $a \in \mathbb{R}^2$ on a

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad df_a(s,t) = \left(s\frac{\partial u}{\partial x}(a) + t\frac{\partial u}{\partial y}(a), s\frac{\partial v}{\partial x}(a) + t\frac{\partial v}{\partial y}(a)\right) \ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour finir, nous donnons ici deux cas particuliers (essentiels et à connaitre absolument) de la formule de différentiation des fonctions composées.

Soit $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables. Alors,

$$(g \circ f)' = f_1'\frac{\partial g}{\partial x} + f_2'\frac{\partial g}{\partial y}. \tag{3}$$

Soit $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g \circ f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial g \circ f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé les coordonnées (x, y) sur le $\mathbb{R}^2$ qui est le domaine de définition de f (donc f est une fonction en (x, y)) et les coordonnées (s, t) sur le $\mathbb{R}^2$ qui est le domaine de définition de g (de sorte que g est une fonction en (s, t)).

7 Exercices

7.1 Exercices de révision sur les nombres complexes

Exercice 1. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x+iy$.

a. $(1+i)^2$

b. $(2+3i)(1-i)$

c. $(1+2i)i(1-i)$

d. $(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)$

e. $\dfrac{1}{(2-i)}$

f. $(-2+i)(1-i)^2$

g. $\dfrac{2+i}{2-i}$

h. $\dfrac{4-3i}{i}$

i. $\dfrac{-1+i}{3-i}$

j. $\dfrac{i(1-i)}{2+i}$.

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que z est un nombre réel si et seulement si $z = \bar{z}$.
2. Montrer que z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

Exercice 3. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire.

a. -5 b. $3i$ c. $1+i$ d. $1-i\sqrt{2}$ e. $-\sqrt{3}+i$.

Exercice 4. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x+iy$.

a. $e^{3i\pi}$ b. $e^{-i\pi}$ c. $5e^{i\pi/4}$ d. $e^{7i\pi/6}$ e. $\pi e^{-5i\pi/4}$.

Exercice 5. Soit $\theta \in \mathbb{C}$. Calculer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

1. $(1+i)z + 3i = -3-i$.
2. $iz + \bar{z} = 2$.
3. $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.
4. $z^2 + (1-i)z + i = 0$.
5. $z^2 + (3+2i) + 1 + 3i = 0$.
6. $2z^2 - (6+i)z + 1 - 3i = 0$.
7. $\bar{z}^2 + (-3+i)\bar{z} + 2 - 2i = 0$.

Exercice 8. Dessiner les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants, et déterminer ceux qui sont des ouverts de $\mathbb{C}$.

a. $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$

b. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$

c. $\mathbb{H} \cup \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) = 1\}$

d. $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > 1\}$

e. $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \neq 1\}$

f. $\{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 < |z| \leqslant 2\}$

g. $\{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 2\}$

h. $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z+1-i| < 3\}$

i. $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z+1-i| \leqslant 2 \text{ et } \mathrm{Re}(z) \neq 0\}$

Exercice 9. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| = 1$ et que $|z_2| \neq 1$. Montrer que

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_2 z_1}\right| = 1.$$

7.2 Exercices d'entrainement

Exercice 10. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'ensemble de définition de f puis déterminer les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ (à valeurs réelles) telles que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

a. $f(z) = z^2 - 1$ b. $f(z) = \dfrac{z}{z-i}$ c. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z + 2}$ d. $f(z) = \dfrac{z^2}{z\bar{z} - 1}$.

Exercice 11. Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{C}^*$, admettent-elles des limites en 0 ?

a. $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$ b. $f(z) = \dfrac{z^2}{|z|}$.

Exercice 12. On considère la fonction $f(z) = \frac{z}{1-z}$.

1. Quel est le domaine de définition de f?
2. Existe-t-il $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = -1$?
3. Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = w$. Combien y-a-t-il de solutions ?
4. Représenter l'ensemble $S = \left\{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\right\}$. Déterminer et dessiner son image par f.
5. Représenter l'ensemble $U = \left\{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}\right\}$. Déterminer et dessiner son image par f.

Exercice 13. On note $S = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$. Pour chacune de fonctions f suivantes, déterminer l'image de S par f.

a. $f(z) = \dfrac{z+1}{1-z}$ b. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2}$

Exercice 14. Determiner les zéros des fonctions suivantes :

a. $f_1(z) = 1 + e^z$ b. $f_2(z) = 1 + i - e^z$.

Exercice 15. Parmi les fonctions suivantes, déterminer lesquelles sont holomorphes sur leur ensemble de définition. Pour chacune des fonctions holomorphes, calculer la dérivé.

a. $f(z) = |z|^2$ b. $f(z) = z^3 - z^2$ c. $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ d. $f(z) = \dfrac{z}{1-\bar{z}}$ e. $f(z) = e^{iz^2 - z}$.

Exercice 16. On considère la fonction $f(z) = \sqrt{|xy|}$ où $z = x + iy$.

1. Montrer que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en 0.
2. Montrer que f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en 0.
3. Est-ce en contradiction avec le théorème 4.2 ? Pourquoi ?

Exercice 17. On considère la fonction $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ où $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble où f est $\mathbb{C}$-dérivable.

Exercice 18. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On note $f = u + iv$ où $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est constante,
2. u est constante,
3. v est constante,
4. $|f|$ est constante

Exercice 19. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. Montrer que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \quad \text{et} \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}.$$

Exercice 20. Pour chacune des fonctions f, déterminer l'ensemble de définition de f et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

a. $f(z) = z^2\overline{z}$
b. $f(z) = e^{\overline{z}}$
c. $f(z) = \dfrac{\overline{z} - i}{z^2 + iz - 2}$
d. $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$

Exercice 21. On considère la détermination principale du logarithme Log introduite dans l'exemple 2.8.

1. Montrer que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tels que $z_1 z_2 \notin \mathbb{R}_-$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) + 2i\pi n.$$

2. Trouver des nombres complexes $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tels que $z_1 z_2 \notin \mathbb{R}_-$ vérifiant

$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2).$$

7.3 Exercices d'approfondissement

Exercice 22. Soit $a, c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $ac - |b|^2 < 0$.

1. Montrer que l'ensemble $E := \left\{z \in \mathbb{C}\ ;\ az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0\right\}$ est une droite si $a = 0$ et un cercle si $a \neq 0$.
2. Montrer que toute droite et tout cercle peut s'écrire sous cette forme.
3. Que ce passe-t-il si $ac - |b|^2 \geqslant 0$?

Exercice 23 (Géométrie de l'inversion)**.** L'objectif de cet exercice est de comprendre géométriquement l'application $\iota : z \mapsto \frac{1}{z}$. On considère l'application

$$\overline{\iota} : \begin{cases} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{\overline{z}} \end{cases}$$

1. Montrer que $\overline{\iota} = \iota \circ c = c \circ \iota$ où c est la conjugaison complexe.
2. (Rappel de géométrie élémentaire). Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Soit C l'unique cercle de diamètre $|a-b|$ passant par a est b, c'est à dire que C est le cercle de centre $\dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, montrer que $z \in C$ si est seulement si l'angle non-orienté $\widehat{azb}$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que les triangles $z_1 z_2 0$ et $\overline{\iota}(z_1)\overline{\iota}(z_1)0$ sont semblables. Faire un dessin.
4. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $|\overline{\iota}(z_1) - \overline{\iota}(z_2)| = \dfrac{|z_1 - z_2|}{|z_1||z_2|}$.
5. (a) Soit S^1 le cercle de centre 0 et de rayon 1. Montrer que $\overline{\iota}(S^1) = S^1$.
   (b) Soit D une droite passant par 0. Montrer que $\overline{\iota}(D) = D$.

(c) Soit D une droite ne passant pas par 0. Montrer que $\bar{\imath}(D)$ est un cercle passant par 0. Faire un dessin dans les cas suivant : $S^1 \cap D = \emptyset$, $\#(S^1 \cap D) = 1$ et $\#(S^1 \cap D) = 2$.

(Indication : considérer z_0, la projection orthogonale de 0 sur D puis utiliser les questions 2 et 3)

(d) Soit C un cercle qui passe par 0. Montrer que $\bar{\imath}(C)$ est une droite ne passant pas par 0.

(e) Soit C un cercle ne passant pas par 0. Montrer que $\bar{\imath}(C)$ est un cercle ne passant pas par 0. Faire un dessin.

(f) Déduire des questions précédentes que ι envoie les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.

6. Redémontrer le résultat de la question 5f en utilisant le résultat de l'exercice 22.

7. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, déduire des questions précédentes une façon de construire $\bar{\imath}(z)$ à la règle et au compas. Puis en déduire une construction de $\iota(z)$ à la régle et au compas.

Exercice 24 (Quelques propriétés des transformations de Mobius)**.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. La transformation de Mobius associée à ces nombres est l'application $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Si $c = 0$ on utilise la notation $\frac{-d}{c} = \infty$ de sorte que $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} = \mathbb{C}$.

1. Soit f une transformation de Mobius. Déterminer l'image de f. Montrer que f est une bijection sur son image et montrer que l'application réciproque est une transformation de Mobius que l'on déterminera.

2. Montrer que l'ensemble des transformations de Mobius muni de la composition est un groupe.

3. Soit f une transformation de Mobius. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que

$$f = t_\alpha \circ m_\gamma \circ \iota \circ t_\beta,$$

où t_α et t_β sont les translations de vecteur α et β, où m_γ est la multiplication par γ et ι est l'application d'inversion.

4. À l'aide de l'exercice 23 et de la question 3, montrer que les transformations de Mobius envoient les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.

5. Notons $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) > 0\}$ le *demi-plan de Poincaré*. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$, alors la transformation de Mobius f associée à a, b, c, d vérifie $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

6. Notons $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ le *disque unité* aussi appelé *disque de Poincaré*. Soit $a \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la transformation de Mobius
$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$
vérifie $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

7. Montrer que la transformation de Mobius

$$\varphi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

induit un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$. (Un *biholomorphisme* est une application holomorphe bijective dont l'application réciproque est holomorphe).

Exercice 25 (Cauchy Riemann en coordonnée polaires)**.** Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On pour tout $z = re^{i\theta} \in U$ note

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).$$

1. Montrer que f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

2. Si tel est le cas, montrer que pour tout $z = re^{i\theta} \in U$ on a

$$f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}(r,\theta) - i\frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\theta)\right).$$

Exercice 26 (Holomorphie de la détermination principale du logarithme)**.** À l'aide de l'exercice 25 montrer que la détermination principale du logarithme Log définie dans l'exemple 2.8 est holomorphe et que

$$\mathrm{Log}'\, z = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$

Exercice 27 (Laplacien et fonctions harmoniques)**.** Le Laplacien est l'opérateur

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

c'est à dire que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et pour toute fonction $f : U \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^2$, on pose

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On dit que f est harmonique si $\Delta(f) = 0$.

1. Montrer que

$$\Delta(f) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} := 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right).$$

2. Montrer que si f est holomorphe alors f est harmonique.

3. Montrer que si f est holomorphe, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont harmoniques.

4. Montrer que si f est holomorphe et ne s'annule jamais, alors $\log|f|$ est harmonique.

5. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $g : V \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique. On suppose que f est holomorphe et que $f(U) \subset V$. Montrer que $g \circ f$ est harmonique.