Université de Lorraine,
Année 2017-18

Licence 3 Mathématique
Analyse Complexe S6

Feuille d'exercices n. 5 : Formule de Cauchy et intégration.

Exercice 1 Parmi les ouverts suivants, déterminer lesquels sont étoilés :

(a) $\mathbb{C} \setminus 0$;

(b) $\{z = x + iy : x > 0 \text{ et } xy > 1\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ $(R > r > 0)$;

(d) $\mathbb{C} \setminus D$ où D est une demi-droite ;

(b) $\{z = x + iy : (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$ $(a, b > 0)$.

Exercice 2 Calculer $\int_\gamma \bar{z} dz$, où γ est le chemin allant du point $1 + i$ au point $2 + 4i$ le long de la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 3 Donner une paramétrisation de l'ellipse E d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ $(a, b > 0)$. Déterminer une homotopie entre l'ellipse E et le cercle centré à l'origine de rayon a. En déduire la valeur de $ind_E(0)$.

Exercice 4 Soit C le cercle unité, D le disque unité fermé et f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant D. Calculer, en fonction des valeurs de f et f', l'intégrale :

$$\int_C (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) dt.$$

Exercice 5 Soit E l'ellipse d'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ $(a, b > 0)$. En calculant de deux manière différentes $\int_E \frac{dz}{z}$ déterminer la valeur des intégrales

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$;

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t \sin t dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

Exercice 6 Soit Γ_R le contour défini par le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamètre le segment $[-R, R]$, avec $R > 1$.

(a) Calculer $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$;

(b) En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Exercice 7 Soit $0 < a < b$ sur l'axe réel positif et soit C le cercle de rayon $r > 0$ centré à l'origine. Déterminer la valeur de

$$\int_C \frac{1}{(z - a)(z - b)} dz$$

en fonction de a, b et r.