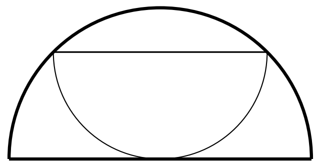
Autour du théorème de Pythagore

Damien Mégy

30 septembre 2023

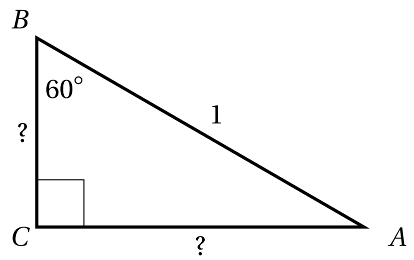
Catalogue d'exos sur Pythagore pour le Club Mathématique de Nancy. Rédaction en cours, ne pas diffuser.

Problème 1. Dans un demi-cercle de rayon 1cm, on inscrit un autre demi-cercle plus petit, comme sur la figure. Quel est le rayon du petit demi-cercle ?

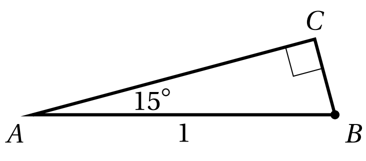


(Les exercices suivants sont faisables sans connaître le concept de cosinus ni de sinus, uniquement avec Pythagore.)

Problème 2. [Le triangle $30° - 60° - 90°$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent $30°$, $60°$ et $90°$. Son hypoténuse AB mesure 1 cm. Quelle est la longueur des deux autres côtés ?

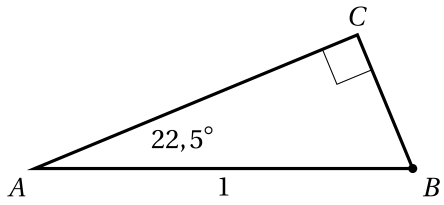


Problème 3. [Le triangle $15° - 75° - 90°$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent $15°$, $75°$ et $90°$, comme sur la figure ci-dessous. Son hypoténuse AB mesure 1 cm. Montrer que $AC = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ puis que $CB = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.



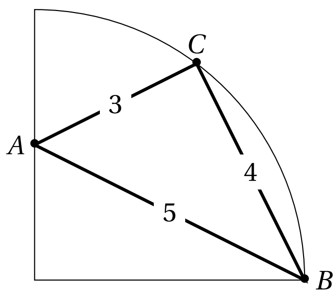
Problème 4. [Consolidation : le triangle $22,5° - 67,5° - 90°$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent $22,5°$, $67,5°$ et $90°$, comme sur la figure ci-dessous. Son hypoténuse mesure 1 cm.

En utilisant la même technique qu'au problème précédent, calculer AC.

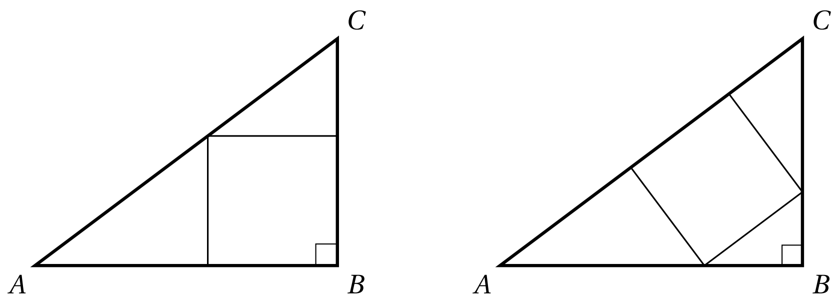


Dans toute la suite, un triangle « 3 – 4 – 5 » est un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 5cm. C'est un triangle rectangle, comme on peut le vérifier à l'aide du théorème de Pythagore.

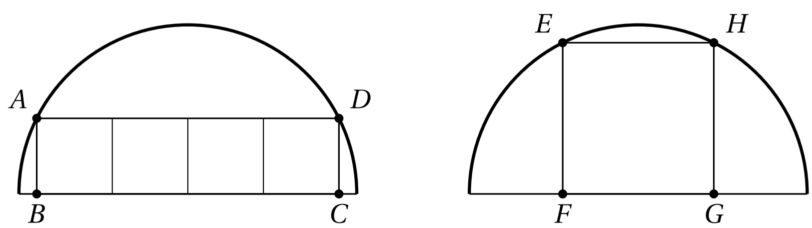
Problème 5. [Triangle rectangle dans un quart de cercle] Un triangle rectangle « 3 – 4 – 5 » est inscrit dans un quart de cercle comme ci-dessous ; Quel est le rayon du quart de cercle ?



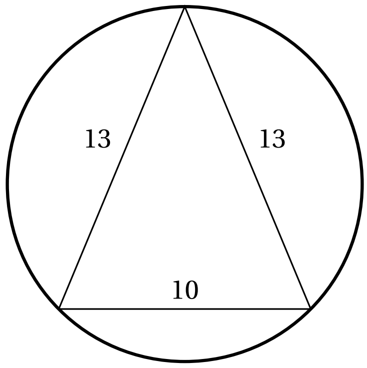
Problème 6. [Carrés dans un triangle 3-4-5] Dans un triangle rectangle ABC de type « 3 – 4 – 5 », on inscrit un carré de deux manières différentes, comme sur les deux figures. Quelles sont les dimensions des deux carrés ?



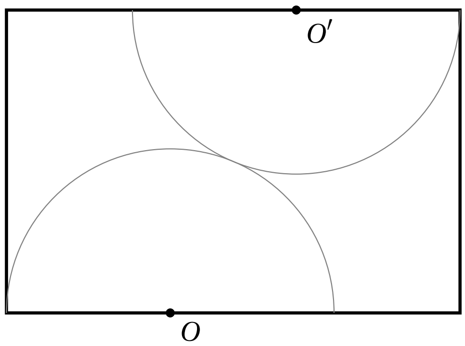
Problème 7. Dans deux demi-cercles identiques, on inscrit d'une part un rectangle $ABCD$ formé de quatre petits carrés juxtaposés, et d'autre part un carré $EFGH$. Lequel de $ABCD$ et $EFGH$ a la plus grande aire ?



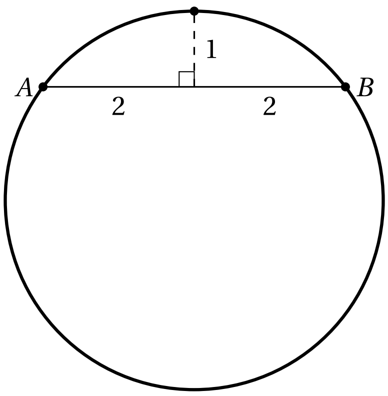
Problème 8. On considère un triangle isocèle dont les côtés mesurent 13cm, 13cm et 10cm. Quel est le rayon de son cercle circonscrit ?



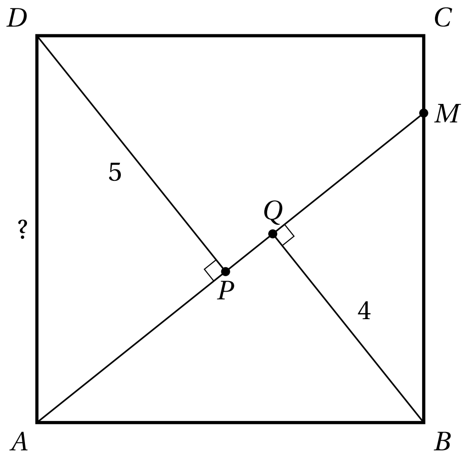
Problème 9. Dans un rectangle de dimensions 3cm × 2cm, on inscrit deux demi-cercles de même rayon qui se touchent en un seul point, comme sur la figure. Quel est le rayon de ces deux demi-cercles ? (Ce n'est pas 1 !)



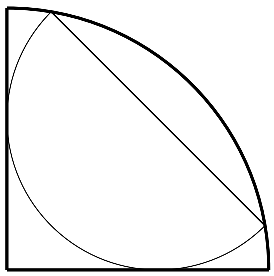
Problème 10. Dans un cercle $\mathscr{C}$, on a une corde $[AB]$ mesurant 4cm. De plus, on sait que la distance entre le milieu de cette corde et le cercle est de 1cm. Quel est le rayon du cercle ?



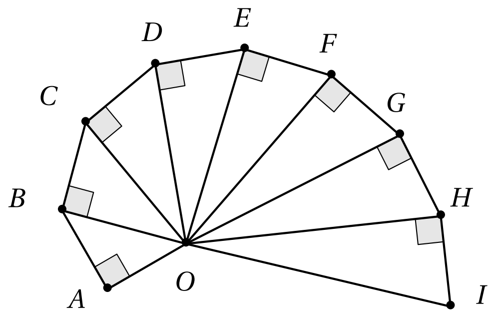
Problème 11. Dans un carré $ABCD$, on trace un point M sur le côté $[BC]$. Les perpendiculaires à (AM) passant par D et B coupent (AM) en P et Q. Sachant que $DP = 5$cm et $BQ = 4$cm, déterminer l'aire du carré $ABCD$.



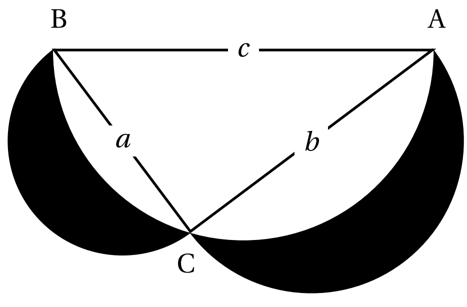
Problème 12. Dans un quart de cercle, on inscrit un demi-cercle comme sur la figure. Si le rayon du demi-cercle est 1cm, quel est le rayon du quart de cercle ?



Problème 13. [Spirale pythagoricienne] Cette spirale est formée de triangles rectangles juxtaposés. On a $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = 1$. Que vaut OI ?

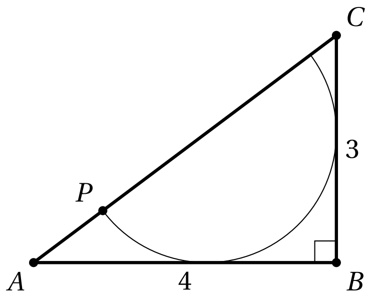


Problème 14. [Théorème des lunules] Soit ABC un triangle rectangle en C. On trace le demi-cercle de diamètre $[AB]$ qui contient C ainsi que les deux demi-cercles de diamètres $[BC]$ et $[CA]$ extérieurs au triangle. Ces trois demi-cercles délimitent deux lunules, coloriées en noir sur la figure. Démontrer que la somme des aires de ces deux lunules est exactement égale à l'aire du triangle !



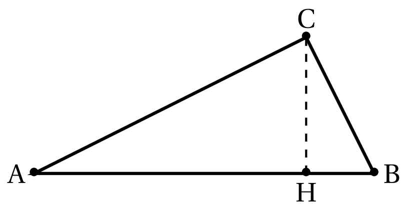
1 Pythagore et triangles semblables

Problème 15. Dans un triangle rectangle ABC de type « 3 – 4 – 5 », on inscrit un demi-cercle comme sur la figure. Calculer la distance AP.

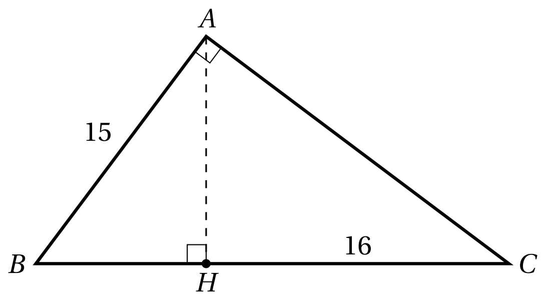


Problème 16. [Théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse] Soit ABC un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de C. Montrer que

$$HA \times HB = HC^2.$$

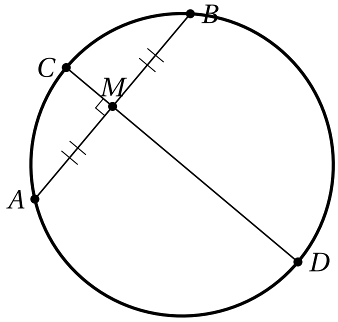


Problème 17. Dans un triangle rectangle en A, en notant H le pied de la hauteur issue de A, on a $AB = 15$ et $HC = 16$. Calculer BH, AH et AC.



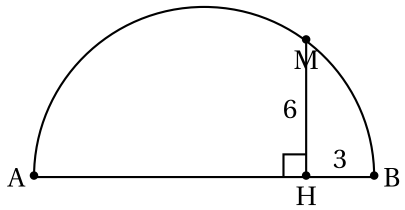
Problème 18. [Théorème des cordes sécantes dans un cas particulier] Dans un cercle, on trace une corde $[AB]$, de milieu M. Sa médiatrice intersecte le cercle en C et D. Montrer que

$$MA \times MB = MC \times MD.$$



(Note : en réalité, ce théorème reste vrai pour deux cordes *quelconques* s'intersectant en M, mais la démonstration est plus difficile et utilise le théorème de l'angle inscrit. La quantité $MA \times MB$ est alors appelée la *puissance* du point M par rapport au cercle.)

Problème 19. Sur un demi-cercle de diamètre $[AC]$, on place un point M de sorte à avoir les longueurs $HB = 3$ et $HM = 6$. Quel est le rayon du demi-cercle ?

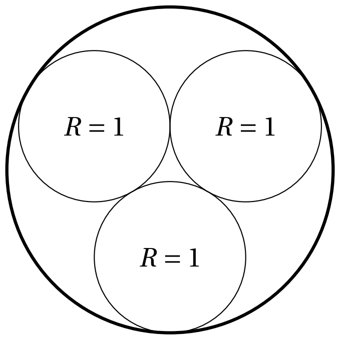


1.1 Calculs avec les racines carrées

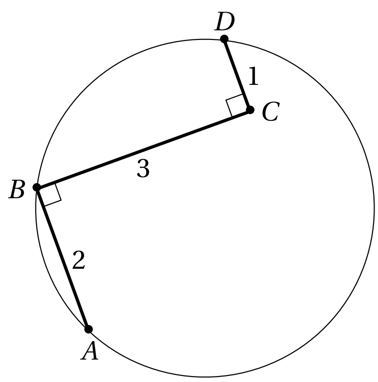
Problème 20. [Comparaisons de racines carrées]

On considère les trois nombres suivants : $A = 3 + \sqrt{2}$, $B = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ et $C = 1 + \sqrt{10}$? Classer ces trois nombres du plus petit au plus grand, sans utiliser évidemment de calculatrice.

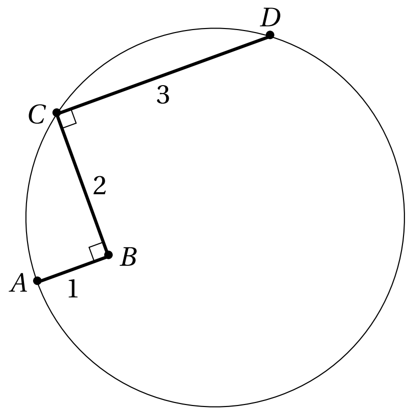
Problème 21. [Cercles tangents] Les trois petits cercles sont de rayon 1. Le grand cercle leur est simultanément tangent. Quel est son rayon ?



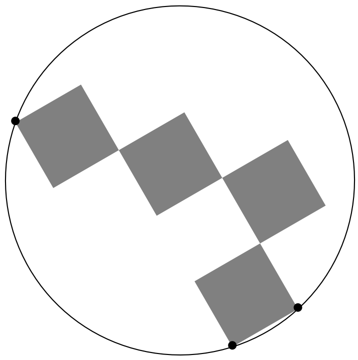
Problème 22. [Zig-zag dans un cercle] Quel est le rayon du cercle ci-dessous ?



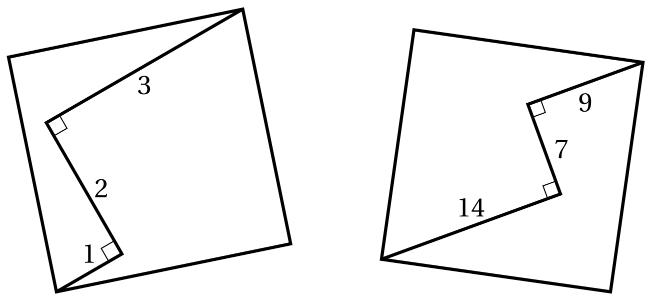
Problème 23. [Zig-zag dans un cercle,bis] Quel est le rayon du cercle ci-dessous ?



Problème 24. Quatre carrés placés en damier sont inscrits dans un cercle qu'ils touchent en trois points, comme sur la figure. Si les carrés mesurent chacun 1cm^2, quel est le rayon du cercle ?



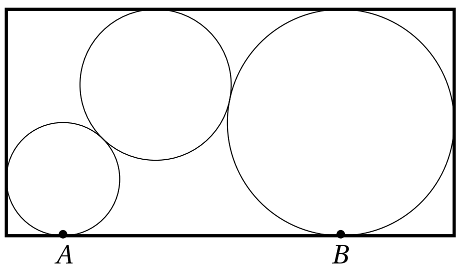
Problème 25. [Zig-Zag, ter] Que vaut à chaque fois le côté du carré ?



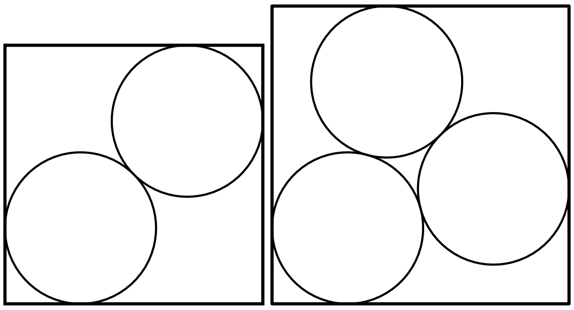
Rajouter `https://twitter.com/maliuhudmuaz/status/1315383186852118530` utilse les demi-cercles.

1.2 Circle Packing

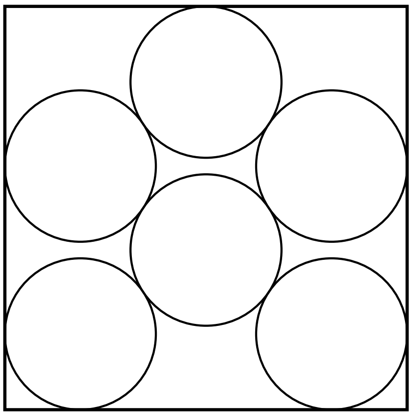
Problème 26. [circle packing, 1] Les trois cercles ci-dessous sont tangents et inscrits dans un rectangle. Leurs diamètres valent 3, 4 et 6. Calculer la longueur AB.



Problème 27. [Cercles dans un carré] La figure suivante représente des cercles qui ont un rayon égal à 1 et placés dans un carré. Quelles sont les dimensions des carrés ?



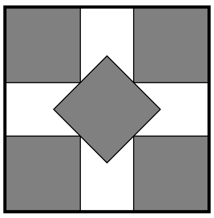
Problème 28. [Cercles dans un carré, bis] La figure suivante représente des cercles qui ont un rayon égal à 1 et placés dans un carré. Quelles sont les dimensions du carré ?



Note : il s'agit du plus petit carré qui peut contenir six disques de rayon un. Ce résultat a été prouvé par Graham en 1963.

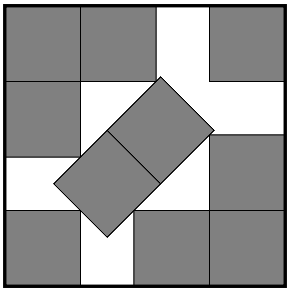
1.3 Square packing

Problème 29. [Cinq carrés dans un carré] Les cinq carrés gris sont de côté 1 et le carré oblique est incliné de 45°. Quelle est la taille du grand carré ?

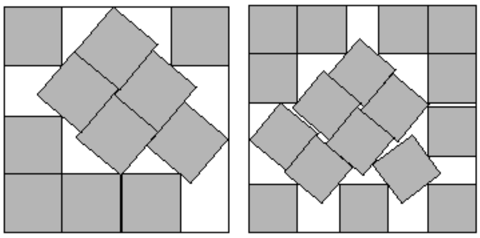


Note : Frits Göbel a prouvé en 1979 qu'il s'agit là du plus petit carré pouvant contenir cinq carrés de côté 1.

Problème 30. [Dix carrés dans un carré] Pour dix petits carrés, le plus petit carré est le suivant, mais ça n'a été démontré qu'en 2003 par Walter Stromquist. Quelle est la taille du carré ? (Les carrés obliques sont toujours inclinés de 45°.)



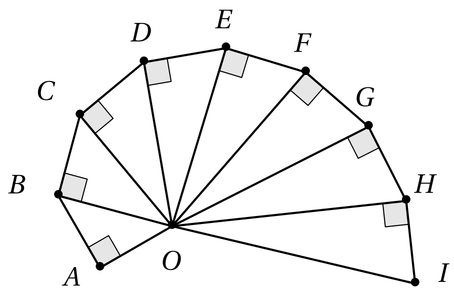
Ces problèmes pourraient sembler évidents mais ne le sont pas. Par exemple, pour 11 et 17 carrés, les meilleures configurations connues à ce jour sont celles ci-dessous mais on ignore encore si elles sont optimales.



Carrés dans un triangle équilatéral `https://erich-friedman.github.io/packing/squintri/`
Mettre les premiers, regarder la biblio pour voir si c'est optimal ou pas.

1.4 AUtre

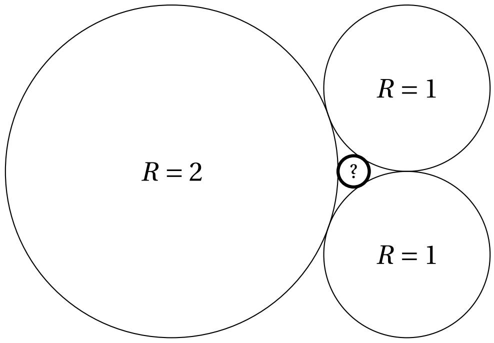
Problème 31. [Spirale pythagoricienne] Cette spirale est formée de triangles rectangles juxtaposés. On a $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = 1$. Que vaut son aire ?



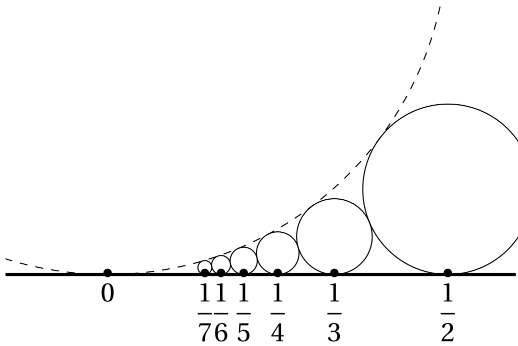
Problème 32. []`https://twitter.com/archimedes_000/status/1524521121827151874` très bon

Problème 33. [Comparaisons de racines carrées]
On considère les trois nombres suivants : $A = 3+\sqrt{2}$, $B = \sqrt{5}+\sqrt{6}$ et $C = 1+\sqrt{10}$? Classer ces trois nombres du plus petit au plus grand, sans utiliser évidemment de calculatrice.

Problème 34. [Vers le théorème de Descartes] Les trois grands cercles sont de rayon 1 et 2. Le petit cercle leur est simultanément tangent. Quel est son rayon ?



Problème 35. [Cercles de Ford] Sur une droite graduée, on « pose » des cercles de diamètre $\frac{1}{n^2}$ sur les abscisses $\frac{1}{n}$, comme sur la figure ci-dessous. Montrer que tous ces cercles sont tangents, et qu'ils sont tous tangents au cercle de diamètre 1 posé en l'origine !!

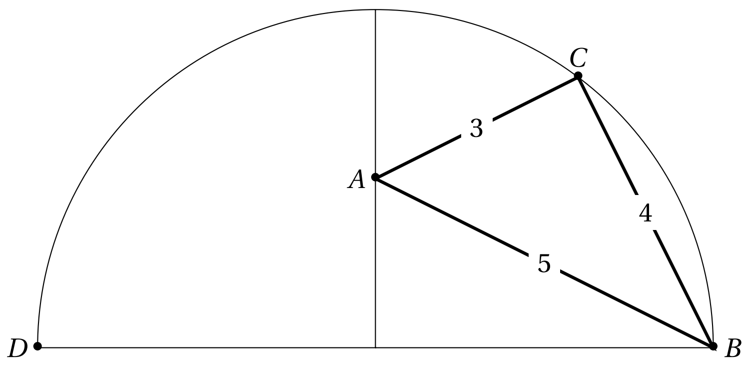


Problème 36. blabla

Problème 37. blabla

Indications

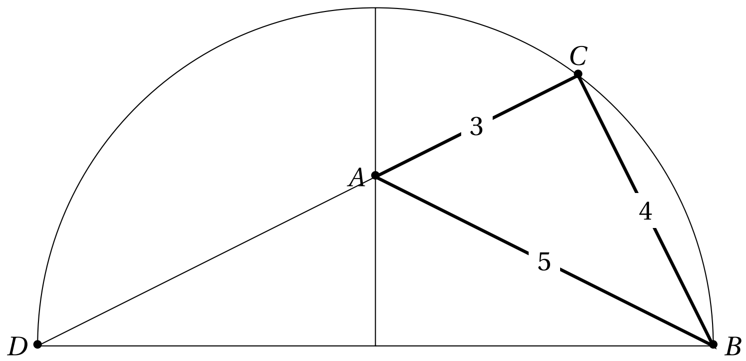
Exercice 2. Considérer la symétrie axiale d'axe (AC).
Exercice 3. Attention, le calcul peut mener à des expressions qui *semblent* différentes de celles demandées : il faut alors démontrer qu'elles coïncident avec les expressions demandées. Par exemple, on a $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$. (Exercice : pourquoi ?)
Exercice 5. On peut compléter la figure comme suit :



Ensuite, on peut prolonger la droite (AC).
Exercice 8. Il y a une hauteur h que l'on peut calculer à l'aide de Pythagore. Ensuite, si l'on note H le pied de cette hauteur et O le centre du cercle circonscrit, on peut par exemple appliquer Pythagore dans le triangle rectangle OHB.
Exercice 11. Considérer les triangles ADP et AQB
Exercice 13. Appliquer Pythagore dans les triangles rectangles en partant du plus petit. Le résultat demandé est un nombre entier.
Exercice 14. Pour calculer l'aire des deux lunules, il faut calculer l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ et la retrancher à une autre aire.
Exercice 20. Élever les trois quantités au carré.
Exercice 21. Tracer le triangle (équilatéral) reliant les centres des trois petits cercles. Combien mesure sa hauteur ?
Exercice 22. La droite (BC) recoupe le cercle en un point E. Que dire de $[AE]$? L'objectif est de calculer la distance CE, après quoi le rayon du cercle est relativement rapide à obtenir.
Autre indication : il y a une racine carrée dans la réponse.
Exercice 23. La droite (BC) recoupe le cercle en un point E. Que dire de $[AE]$? L'objectif est de calculer la distance CE, après quoi le rayon du cercle est relativement rapide à obtenir.
Exercice 24. On peut trouver le centre en intersectant les médiatrices de deux cordes.
Exercice 25.
Exercice 26.
Exercice 27.
Exercice 28.
Exercice 29.
Exercice 30.
Exercice 31.
Exercice 32.
Exercice 33. Élever les trois quantités au carré.
Exercice 34. Tracer les centres des cercles et les relier.
Exercice 35. Commencer par montrer que les deux premiers cercles, de diamètres $1/4$ et $1/9$, sont tangents. Dessiner leurs centres.

Correction

Correction de l'exercice 2.
On obtient un triangle équilatéral.
Correction de l'exercice 3.
Considérer la symétrie axiale d'axe (AC). On note B' l'image de B par cette symétrie. Ensuite, projeter perpendiculairement le point B sur la droite (AB'), et reconnaître un triangle rectangle ayant un angle de $30°$ et une hypoténuse de $1cm$.
Correction de l'exercice 5.
Complétons la figure comme suit :



Comme le triangle ABC est rectangle en C, la droite (AC) recoupe le droite (OB) en D. Le triangle DBC est rectangle en C et on a $DC = 8$ et $BC = 4$, donc en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient

$$DB = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Le rayon est donc égal à $2\sqrt{5}$.
Correction de l'exercice 6.
Pour le deuxième carré, on a intérêt à noter $60x$ le côté du carré, de cette façon c'est divisible par 3, 4 et 5. Ensuite on utilise les triangles semblables, mais du coup cet exo est faisable sans Pythagore. On trouve que $x = \frac{1}{37}$ par proportionnalité, le deuxième carré fait donc $60/37$ de côté.

Avec Pythagore ça doit être plus pénible...

Le première carré fait $12/7$ de côté. Là aussi, on a intérêt à noter $12y$ le côté, comme ça c'est divisible par trois et quatre. Et là aussi il vaut mieux faire ça avec des triangles semblables. Il est plus gros que le premier car $444 = 12 \times 37 \geq 7 \times 60 = 420$. Sur le dessin ça se voir quand même assez nettement.
Correction de l'exercice 7.
En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que les deux aires sont égales à $\frac{4}{5}R^2$!
Correction de l'exercice 8.
On trouve une hauteur de 12, et un rayon de $\frac{169}{24}$.
Correction de l'exercice 9.
On peut par exemple projeter le centre du rectangle sur une base, noter x la distance de O à ce projeté, et on obtient alors en considérant la largeur et la hauteur du rectangle : $3 = 2R + 2x$ et $2 = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, c'est-à-dire $1 = R^2 - x^2 = \frac{3}{2}(R - x)$, d'où finalement le système $R + x = \frac{3}{2}$ et $R - x = \frac{2}{3}$ et donc $2R = \frac{9+4}{6}$ et finalement $R = \frac{13}{12}$.

Autre méthode : on projette O' sur la base, et on applique Pythagore dans $OO'H$. On a $OH = 3 - 2R$, donc :

$$(3-2R)^2 + 4 = 4R^2$$

Et donc $13-12R=0$, c'est plus rapide !

Correction de l'exercice 11.

Les triangles ADP et AQB sont égaux : ils ont les mêmes angles et la même hypoténuse. On en déduit que $AP=4$ et $AQ=5$, et en appliquant le théorème de Pythagore, on trouve le côté du carré : $AB=\sqrt{41}$. Le carré a donc une aire de 41cm^2.

Pour trouver la distance AM, il suffit de trouver QM. Le plus simple est d'utiliser des triangles semblables, ou Thalès, on trouve $QM=16/5$, donc $AM=5+16/5=41/5$.

Correction de l'exercice 12.

Le rayon du quart de cercle est $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 16.

On fait Pythagore dans les trois triangles et ça se simplifie.

Évidemment on pourrait faire ça plus joliment avec des triangles semblables.

Correction de l'exercice 17.

En calculant l'aire du triangle de deux façons, on a $AH\times BC=AB\times AC$.

Ensuite, on peut procéder de plusieurs façons, juste avec Pythagore dans les trois triangles rectangles, ou en remarquant des triangles semblables. Par exemple, comme ABH et CAH sont semblables, on a, par proportionnalité, le produit en croix $AH^2=HB\times HC=16HB$.

Ensuite, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on obtient :

$$15^2=AH^2+BH^2=16BH+BH^2=(BH+8)^2-64$$

On en tire $BH+8=\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17$, d'où $BH=17-8=9$.

Ensuite, on continue et on trouve normalement $AH=12$ et $AC=20$.

Correction de l'exercice 19.

Source : `https://twitter.com/Math_World_/status/1519662926860365824`

On peut utiliser le théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse (citer référence du problème).

On peut aussi refaire trois fois Pythagore, (ou bien utiliser les triangles semblables, ou utiliser la puissance du point K par rapport au cercle.)

Correction de l'exercice 20.

On a

$$A^2=11+6\sqrt{2}=11+\sqrt{72},\quad B^2=11+2\sqrt{30}=11+\sqrt{120}\quad \text{et} C^2=11+2\sqrt{10}=11+\sqrt{40}.$$

On en déduit que

$$C<A<B.$$

Correction de l'exercice 23.

Le diamètre est 5.

Correction de l'exercice 24.

Le rayon vaut $\sqrt{85}/4$.

Correction de l'exercice 25.

Le côté vaut $\sqrt{10}$.

Pour le second la source d'origine est : `https://twitter.com/0y6tr4/status/1522092641017602049`. Mais en fai le premier est mieux, plus simple

Correction de l'exercice 26.

On obtient $AB=\sqrt{6}+2\sqrt{6}=3\sqrt{6}$. (on fait deux fois Pythagore) `https://twitter.com/0y6tr4/status/1521866673493618690`

Correction de l'exercice 27.

`https://erich-friedman.github.io/packing/cirinsqu/` VERIFIER Le carré est de côté $2+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Pour le premier le côté vaut $2+\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 28.

Le carré a un côté de $2+\dfrac{12}{\sqrt{13}}$. Voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=ONs1u3xRzrM&t=12s` et bien sûr le site `https://erich-friedman.github.io/packing/cirinsqu/`.

Correction de l'exercice 29.

`https://erich-friedman.github.io/packing/squinsqu/`

Correction de l'exercice 30.

`https://erich-friedman.github.io/packing/squinsqu/`

Correction de l'exercice 31.

Correction de l'exercice 33.

On a

$$A^2 = 11+6\sqrt{2} = 11+\sqrt{72}, \quad B^2 = 11+2\sqrt{30} = 11+\sqrt{120} \quad \text{et} C^2 = 11+2\sqrt{10} = 11+\sqrt{40}.$$

On en déduit que

$$C < A < B.$$