Autour du théorème de Thalès

Damien Mégy

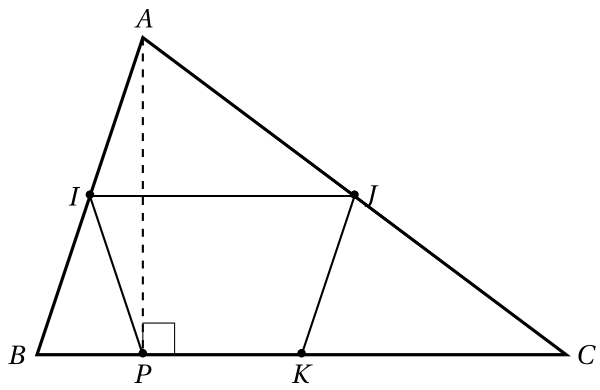
22 octobre 2023

AVERTISSEMENT ! Ce document est un brouillon qui sert de catalogue pour les feuilles d'exos du club mathématique de Nancy `https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/club/`**. Ne pas diffuser tel quel aux élèves ni de façon large sur le net, il reste des coquilles et énoncés parfois peu précis. Ce document a vocation a rester inachevé. Il peut néanmoins être utile aux enseignants. Enfin, ce document change en permanence, la version à jour est récupérable sur** `https://github.com/dmegy/clubmath-exos`**.**

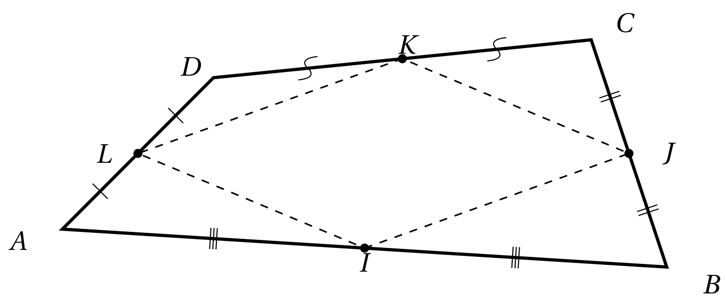
Table des matières

1 Uniquement avec le théorème des milieux

Problème 1. [Trapèze isocèle]Soit ABC un triangle, P le pied de la hauteur issue de A et I, J, K les milieux des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que $IJKP$ est un trapèze isocèle.

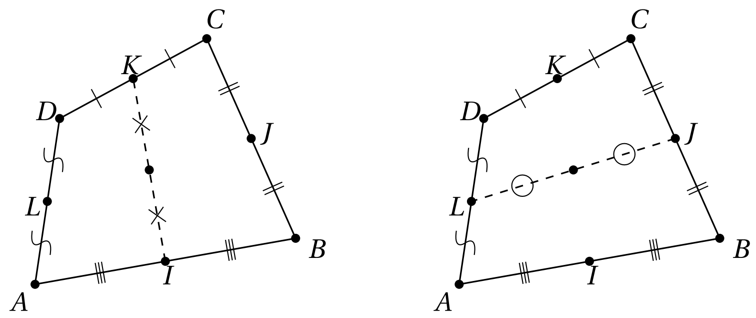


Problème 2. [Théorème de Varignon] Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque et I, J, K, L les milieux de ses côtés. Montrer que $IJKL$ est ... un parallélogramme. (Toujours !)

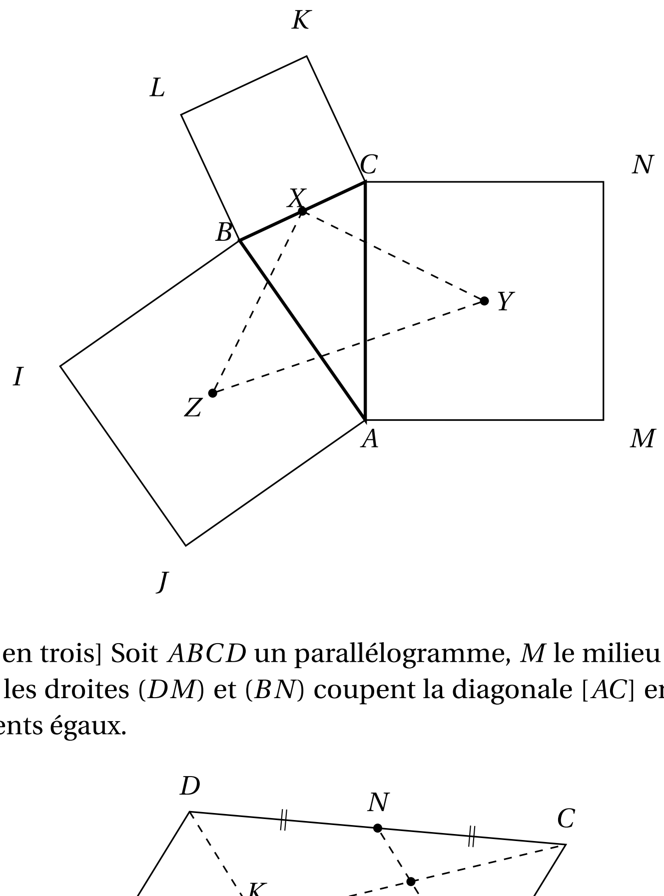


Problème 3. [Centre de gravité d'un quadrilatère] Soit $ABCD$ un quadrilatère et I, J, K et L les milieux de ses côtés. Montrer que le milieu du segment $[IK]$ est aussi le milieu du segment $[JL]$.

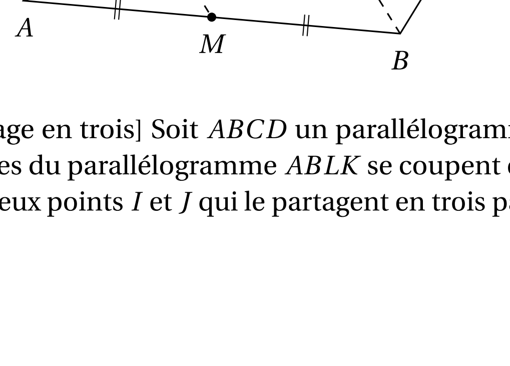
(Ce point est appelé le *centre de gravité* des quatre points, ou aussi l'*isobarycentre* des quatre points. Attention, ce n'est pas le centre de gravité du quadrilatère plein ! -> exo sur le centre de gravité du quadrilatère plein ?)



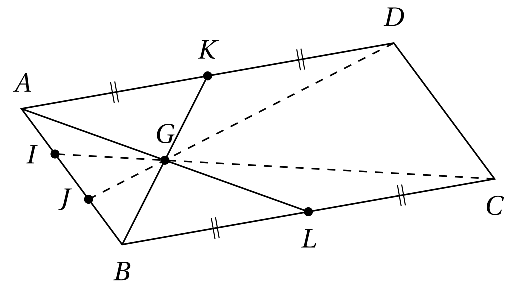
Problème 4. [Moulin à vent et milieux]Sur l'extérieur d'un triangle ABC, on accole des carrés $ABIJ$, $BCKL$ et $CAMN$. On note X, Y et Z les milieux des segments $[MC]$, $[CB]$ et $[BI]$. Montrer que le triangle XYZ est rectangle isocèle en Y.



Problème 5. [Partage en trois] Soit $ABCD$ un parallélogramme, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$. Montrer que les droites (DM) et (BN) coupent la diagonale $[AC]$ en deux points K et L le divisant en trois segments égaux.

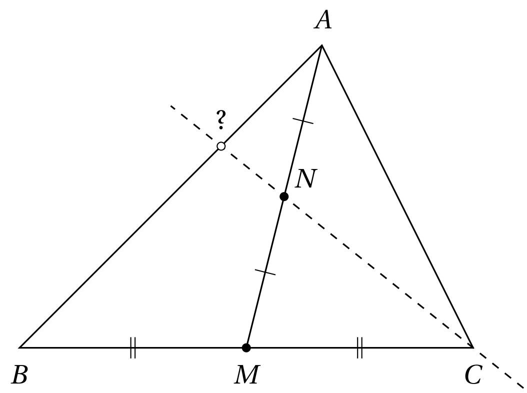


Problème 6. [Un autre partage en trois] Soit $ABCD$ un parallélogramme, K le milieu de $[AD]$, L le milieu de $[BC]$. Les diagonales du parallélogramme $ABLK$ se coupent en G. Montrer que les droites (CG) et (DG) coupent $[AB]$ deux points I et J qui le partagent en trois parties égales.

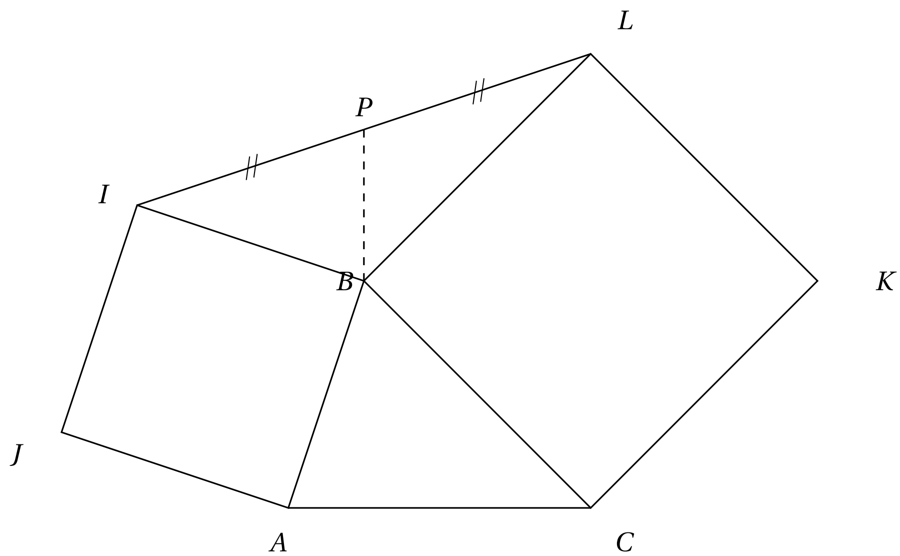


Problème 7. [Médiane sur médiane]

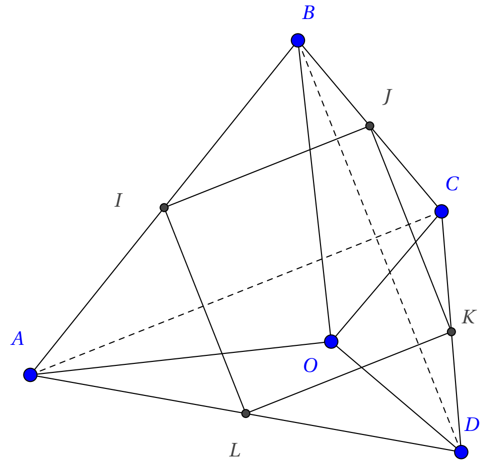
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AM]$. À quel endroit la droite (CN) coupe-t-elle le segment $[AB]$?



Problème 8. [Échange médiane contre hauteur, v2 avec rotations]Sur l'extérieur d'un triangle ABC, on accole des carrés $ABIJ$ et $BCKL$. On note P le milieu du segment$[IL]$. Montrer que la droite (PB) est perpendiculaire à (AC) et que de plus $AC = 2PB$.



Problème 9. [Deux triangles isocèles rectangles REMPLACER par VECTEN] Soient AOB et COD deux triangles directs, isocèles rectangles en O. Soient I, J, K et L les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Montrer que $IJKL$ est un carré.

Problème 10. [Le triangle de Feynman/partage en sept]
Soit ABC un triangle,
(séparer les deux étapes, voir page wikipedia "partage d'un triangle en sept" .
Autres exos avec tritianes ?

Problème 11. Énoncé

Problème 12. Énoncé

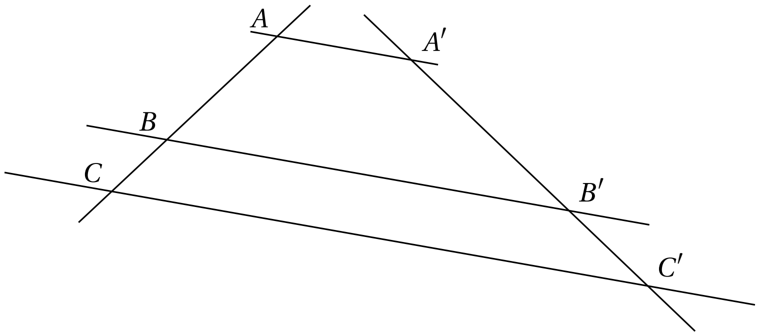
Petit exo marrant :
`https://www.youtube.com/watch?v=wIk97NRwj5I`

2 Thalès, version générale mais non croisé

TODO : rajouter `https://www.youtube.com/watch?v=l6XaE_U9FDU` Thalès, mais aussi triangles semblables. Déplacer dans triangles semblables ?

Problème 13. [Thalès, variation 1] Soit ABC un triangle, M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$ tels que $(MN)//(BC)$. Montrer que
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}.$$

Problème 14. [Thalès, variation 2] Soient A, B, C trois points distincts alignés sur une droite $\mathscr{D}$, et A', B', C' trois autres points distincts alignés sur une autre droite $\mathscr{D}'$, tels que l'on ait le parallélisme suivant
$$(AA')//(BB')//(CC').$$



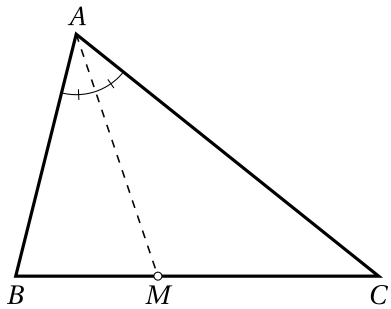
Montrer que l'on a la relation suivante, qui est une forme généralisée du théorème de Thalès :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Cette version est souvent très utile.

Problème 15. [Théorème de la bissectrice]

Soit ABC un triangle, et M le pied de la bissectrice issue de A. Montrer que $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$.



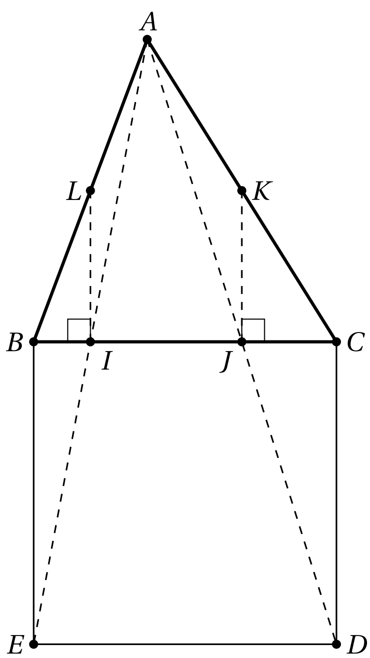
Problème 16. [FIG Pappus affine] Soient D et D' deux droites non parallèles. Soient A, B, C trois points sur D, et A', B' et C' trois points sur D'. On suppose que $(AB')//(BC')$ et $(BA')//(CB')$. Montrer que $(AA')//(CC')$.

Problème 17. [Construction d'un carré inscrit dans un triangle] Soit ABC un triangle.

On souhaite construire un carré intérieur à ABC dont un sommet appartienne à $[AB]$, un à $[AC]$ et deux sommets adjacents appartiennent à (BC). On procède en trois étapes :

Étape 1 On construit un grand carré extérieur $BCDE$.
Étape 2 On trace les droites (AE) et (AD). Elles coupent le segment $[BC]$ en deux points I et J.
Étape 3 On trace les perpendiculaires à (BC) passant par I et J. Elles coupent $[AC]$ et $[AB]$ en K et L.

Montrer que le quadrilatère $IJKL$ ainsi construit est effectivement un carré.

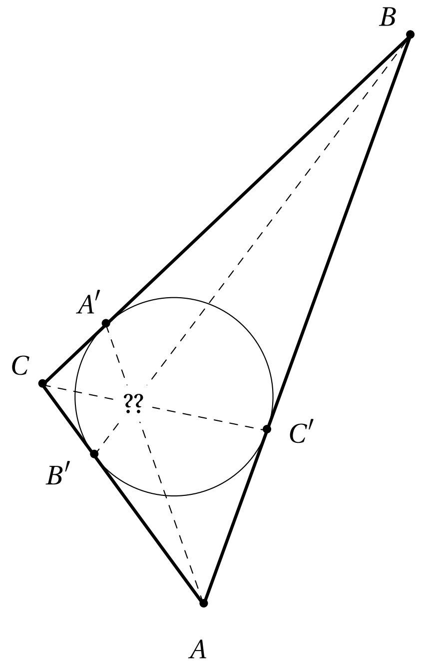


Problème 18. [Théorème de Ceva] Soit ABC un triangle quelconque. Soient I, J et K trois points placés sur chaque côté de ce triangle, comme sur la figure. Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes si et seulement si on a l'égalité

$$\frac{IB}{IC} \times \frac{JC}{JA} \times \frac{KA}{KB} = 1.$$

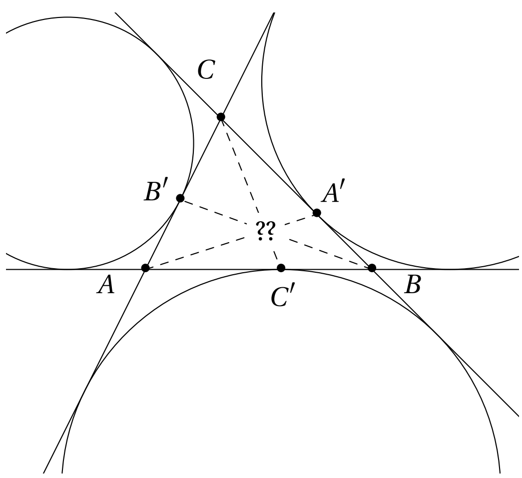
En déduire une nouvelle preuve du fait que les médianes d'un triangle sont concourantes :-)

Problème 19. [Application de Ceva : le point de Gergonne] Soit ABC un triangle et I, J K les points de contact avec le cercle inscrit. Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.



Indication : utiliser le théorème de Ceva.

Problème 20. [Application de Ceva : le point de Nagel] On considère un triangle ABC ainsi que ses trois cercles exinscrits (voir problème précédent). O note A', B' et C' les points de contact de ces cercles avec les côtés du triangle, comme sur la figure. Montrer que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.



Problème 21. [Le miraculeux cercle des neuf points] Soit ABC un triangle. On place :

— les milieux des trois côtés I, J et K ;

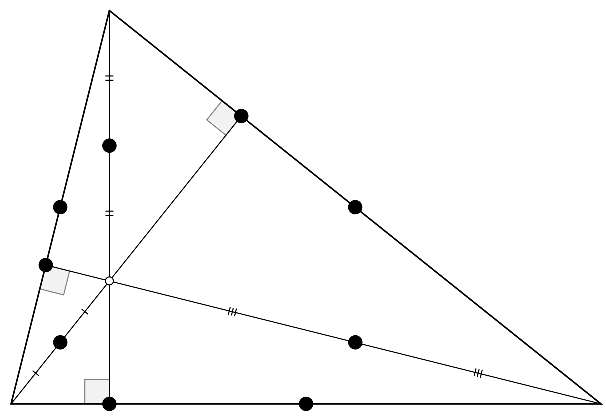
— les pieds des hauteurs H_A H_B et H_C ;

— les points M_A, M_B et M_C situés à mi-chemin entre l'orthocentre H et les sommets du triangle.

L'objectif de ce problème est de montrer la propriété époustouflante suivante :

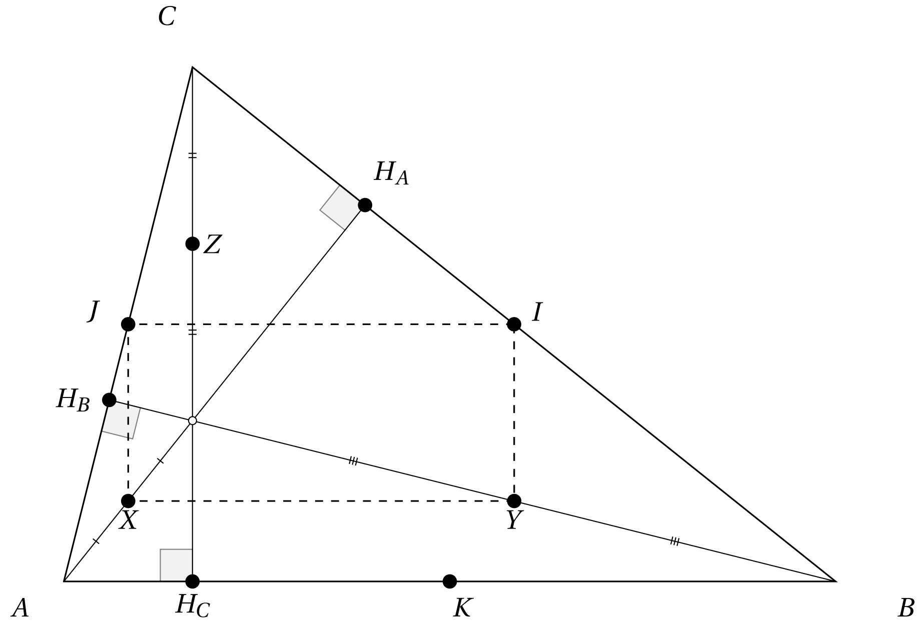
Théorème : les neuf points I, J, K, H_A, H_B, H_C, M_A, M_B et M_C sont sur un seul et même cercle.

Ce cercle est appelé cercle des neuf points, cercle d'Euler, cercle de Feuerbach ou encore cercle de Terquem.



Ce magnifique théorème se démontre en plusieurs étapes.

Étape 1 Montrer que le quadrilatère $IJXY$ est un parallélogramme en appliquant le théorème de Thalès dans deux triangles différents.



Étape 1bis Montrer que le quadrilatère $IJXY$ est en réalité un rectangle et en déduire que I, J, X et Y se trouvent sur un même cercle $\mathscr{C}$.

Étape 2 Montrer que les pieds des hauteurs H_A, et H_B se trouvent également sur ce cercle $\mathscr{C}$. À ce stade il ne manque plus que trois points.

Étape 3 En appliquant les étapes 1 et 1bis à un autre quadrilatère, en déduire que Z et K sont eux aussi sur le cercle $\mathscr{C}$.

Étape 4 et fin Comme dans l'étape 2, montrer que H_C est sur le cercle.

Problème 22. [Desargues affine REFORMULER AVEC THALES]

1. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles (non aplatis) sans sommet commun. Montrer qu'ils se déduisent l'un de l'autre par homothétie ou translation ssi leurs côtés sont parallèles.
2. (Application) On donne deux droites se coupant en un point O hors de la feuille, ainsi qu'un point M hors de ces droites. Tracer la droite (OM).

Problème 23. Énoncé

Problème 24. Énoncé

3 Thalès, version générale avec croisements

Problème 25. Énoncé

Problème 26. Énoncé

Indications

Exercice 2. Tracer les diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
Exercice 4. Commencer par faire le problème **??**.
Exercice 5. Il y a plusieurs triangles dans lesquels on peut appliquer le théorème de Thalès.
Exercice 6. Tracer le symétrique de K par rapport à A, et le symétrique de L par rapport à D.
Exercice 7. Tracer la parallèle à (PC) passant par M.
Exercice 8. Considérer une rotation de 90° de centre B, appliquée au triangle ABC.
Exercice 9. Penser au problème **??**.
Exercice 11. Indication.
Exercice 12. Indication.
Exercice 14. Tracer une nouvelle droite pour pouvoir appliquer le théorème de Thalès habituel.
Exercice 15. Tracer la parallèle à la bissectrice passant par un des sommets.
Exercice 16. On peut appliquer le théorème de Thalès dans deux triangles différents.
Exercice 17.
Exercice 18.
Exercice 19.
Exercice 20.
Exercice 22. Homothéties et translations
Exercice 23. Indication.
Exercice 24. Indication.
Exercice 25. Indication.
Exercice 26. Indication.

Correction

Correction de l'exercice 1.

D'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, donc $IJKP$ est un trapèze. Il reste à montrer que $IP = JK$.

Toujours d'après le théorème des milieux, on a $AB = 2JK$ et donc :

$$JK = AI = IB.$$

D'autre part, dans le triangle APB rectangle en P, le point I est le milieu de l'hypoténuse et donc on a $IA = IB = IP$.

Finalement, on obtient donc :

$$IP = IB = KJ.$$

Correction de l'exercice 2.

1. Dans le triangle ABC, en notant I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$, le théorème de Thalès dit que (IJ) est parallèle à (AC) et $IJ = \frac{1}{2}AC$. On raisonne pareillement avec le triangle ACD, ce qui donne (KL) parallèle à AC et $KL = \frac{1}{2}AC$. Or, un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.
2. La preuve la plus élémentaire utilise uniquement qu'une médiane d'un triangle donné le partage en deux triangles de même aire.

   Soit O le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$. On considère le triangle AOB. Soit O_1 le point d'intersection de la diagonale $[AC]$ avec $[IL]$ et soit O_2 le point d'intersection de $[IJ]$ avec la diagonale $[BD]$.

   Par le théorème de Thalès, O_1 est le milieu de $[AO]$ et O_2 le milieu de $[BO]$. Les triangles IO_1A et IO_1B ont même aire, de même que les triangles $I0_2O$ et IO_2B.

   La somme des aires des triangles AIO_1 et IO_2B est donc exactement égale à l'aire du parallélogramme IO_1OO_2.

   On applique le même raisonnement aux triangles BCO, CDO et ADO, ce qui signifie que, dans le quadrilatère $ABCD$, la partie complémentaire de $IJKL$ a une aire qui est exactement égale à celle de $IJKL$, ce qui permet de conclure.

Correction de l'exercice 5.

On a $MB = DN$ donc $MBND$ est un parallélogramme.

On en déduit que $(DM)//(BN)$.

Comme M est le milieu de $[AB]$, on a par le théorème des milieux que $AK = KL$.

De la même façon, le théorème de Thalès appliqué dans DCK entraîne que $KL = LC$, d'où le résultat.

<u>Variante, demande plus d'initiative</u> :

Soit Q le symétrique de M par rapport à B. On a $MB = BQ$, donc $BQ = NC$ et $(BQ)//(NC)$. Donc $BQCM$ est un parallélogramme et donc $(NB)//(CQ)$.

Comme $AM = MB = BQ$ et que $(MK)//(BL)//(QC)$, le théorème de Thalès donne $AK = KL = LC$.

<u>Autre preuve, avec centre de gravité</u> :

Dans le triangle ABD, le point K est l'intersection des deux médianes (DM) et (AO). C'est donc le centre de gravité de ABD.

On en déduit que $KA = 2KO$.

Par symétrie centrale de centre O, on a $AK = CL$ et $KO = LO$, et finalement $AK = KO + OL = KL = LC$.

Correction de l'exercice 7.
La parallèle à (PC) passant par M coupe le segment $[AB]$ en un point Q. D'après le théorème de Thalès dans le triangle AQM, on a :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AN}{AM}.$$

On en déduit que P est le milieu du segment $[AQ]$.

Appliquons maintenant le théorème de Thalès dans le triangle BPC : on obtient alors

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BQ}{BP},$$

et donc Q est le milieu du segment $[BP]$.

On en déduit donc que $BQ = QP = PA$, et donc la droite (CN) coupe le segment $[AB]$ aux deux tiers.

Correction de l'exercice 8.
ATTENTIOn finir figure.

La rotation d'angle 90° et de centre B envoie le triangle ABC sur le triangle IBM, où M est le symétrique de L par rapport à B.

On en déduit que $IM = AC$ et que $(IM)\perp(AC)$. Maintenant, dans le triangle ILM, on applique le théorème des milieux avec le segment $[PB]$.

On aurait pu appliquer la rotation à IBL, ça marche aussi. On peut aussi considérer la rotation de centre B et d'angle -90°, ça marche aussi.

Correction de l'exercice 9.
ATTENTION VIRER LES VECTEURS. On commence par prouver que $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$. Ensuite on rouve le résultat.

1. Soit ρ la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. D'après l'énoncé, on a $\rho(B) = A$ et $\rho(D) = C$. Donc $[AC]$ est l'image de $[AD]$ par ρ, d'où on déduit que $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$.
2. Le quadrilatère $IJKL$ est toujours un parallélogramme, même sans hypothèses sur $ABCD$ (c'est le théorème de Varignon). En effet, par le théorème de Thalès (ou simplement le théorème des milieux) :

   $$\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{JK}.$$

   Ceci signifie que les côtés $[IL]$ et $[JK]$ ont même longueur et sont parallèles, donc $IJKL$ est un parallélogramme.
   Pour voir que c'est un carré, remarquons qu'on montre de même que

   $$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK},$$

   et d'après la première question, $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$, donc $IJKL$ est un parallélogramme ayant un angle droit et des cotés consécutifs de même longueur. C'est donc un carré.

Correction de l'exercice 11.
Correction.

Correction de l'exercice 12.
Correction.

Correction de l'exercice 14.
Traçons la parallèle à $\mathscr{D}'$ passant par A. Elle coupe (BB') en B'' et (CC') en C''.

Le théorème de Thalès donne alors la relation

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB''}{AC''}.$$

D'autre part, le parallélisme entraîne que

$$AB'' = A'B' \quad \text{et} \quad AC'' = A'C'.$$

On en déduit que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.
Pour démontrer le parallélisme, d'après la réciproque du théorème de Thalès, il suffit de démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OC'}{OA'}.$$

Appliquons le théorème de Thalès dans le triangle OBA'. On obtient

$$\frac{OC}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Appliquons ensuite le théorème de Thalès dans le triangle OAB'. On obtient cette fois

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC'}{OB'}.$$

On peut alors écrire :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OC}{OB}\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}\frac{OC'}{OB'} = \frac{OC'}{OA'},$$

ce qu'il suffisait de démontrer.
Correction de l'exercice 17.

Analyse. Traçons comme suggéré une figure avec le carré déjà construit : on trace un carré puis on trace un triangle adéquat autour. On constate qu'un des côtés du carré, notons-le $[IJ]$, est parallèle à $[BC]$. Il y a une homothétie h de centre A qui envoie $[IJ]$ sur $[BC]$. Alors, l'image du carré $IJKL$ par h est un carré dont un des côtés est $[BC]$. Notons $BCDE$ ce carré et traçons-le. On constate que $h(K) = D$ et $h(L) = E$, c'est-à-dire $K = h^{-1}(D)$ et $L = h^{-1}(E)$. Il ne reste plus qu'à faire la synthèse.
Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 23.
Correction.
Correction de l'exercice 24.
Correction.
Correction de l'exercice 25.
Correction.
Correction de l'exercice 26.
Correction.