Trinômes

Damien Mégy

22 octobre 2023

1 Factorisation

Rappel : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Problème 1. Factoriser les expression suivantes :

$$a^2+4a+4,\quad b^2+20b+100,\quad c^2+14c+49,\quad d^2+26d+169,\quad e^2+22e+121,\quad f^2+30f+225,$$

$$4a^2+4a+1,\quad 9b^2+6b+1,\quad 64c^2+16c+1,\quad 49d^2+14d+1,\quad 144e^2+24e+1,\quad 256f^2+32f+1,$$

$$4a^2+8a+4,\quad 4b^2+12b+9,\quad 25c^2+20c+4,\quad 9d^2+12d+4,\quad 9e^2+30e+25,\quad 36f^2+108f+81.$$

Problème 2. Factoriser les expression suivantes :

$$x^2+2x\sqrt{5}+5,\quad y^2+y\sqrt{20}+5,\quad z^2+z\sqrt{12}+3,\quad t^2+4t\sqrt{3}+12,\quad u^2+6u\sqrt{2}+18,$$

$$3a^2+2a\sqrt{3}+1,\quad 7b^2+2b\sqrt{7}+1,\quad 12c^2+4c\sqrt{3}+1,\quad 18d^2+6d\sqrt{2}+1,\quad 72e^2+12e\sqrt{2}+1.$$

Problème 3. Factoriser les expressions suivantes :

$$x^2-4,\quad y^2-144,\quad z^2-169,\quad t^2-225,\quad 4u^2-121,\quad 9v^2-81,\quad 36w^2-25,$$

$$x^2-5,\quad x^2-20,\quad 3x^2-1,\quad 12x^2-1,\quad 81x^2-7,\quad 7x^2-121,\quad 145x^2-144,\quad 11x^2-40.$$

Problème 4. Si on se donne deux nombres S (pour « somme ») et P (pour « produit »), il est parfois possible de deviner deux nombres a et b tels que $a+b=S$ et $ab=P$. Par exemple, si on donne $S=6$ et $P=5$, on peut deviner $a=5$ et $b=1$ (ou l'inverse) : on a alors bien $a+b=6=S$ et $ab=5=P$. De même, si on se donne $S=5$ et $P=6$, on peut trouver de tête que $S=5=2+3$ et $P=6=2\times 3$. Savoir faire ce type de calcul de tête est extrêmement utile. Pour chaque couple d'entiers S et P, déterminer des nombres entiers a et b tels que $a+b=S$ et $ab=P$. Attention, dans la troisième ligne, les nombres a et b peuvent être négatifs.

$$S=3 \text{ et } P=2,\quad S=6 \text{ et } P=8,\quad S=5 \text{ et } P=4,\quad S=13 \text{ et } P=12,\quad S=12 \text{ et } P=35,$$

$$S=13 \text{ et } P=36,\quad S=20 \text{ et } P=36,\quad S=37 \text{ et } P=36,\quad S=15 \text{ et } P=36,\quad S=12 \text{ et } P=36,$$

$$S=1 \text{ et } P=-2,\quad S=1 \text{ et } P=-6,\quad S=5 \text{ et } P=-6,\quad S=-6 \text{ et } P=5,\quad S=-5 \text{ et } P=6.$$

Problème 5. [Échauffement pour la suite] Développer et réduire les expressions suivantes :

$$(x+1)(x+7),\quad (x+3)(x+4),\quad (x+11)(x+2),\quad (x+12)(x+5),\quad (2x+1)(x+3),\quad (3x+1)(2x+5).$$

Problème 6. Si on cherche à factoriser le trinôme x^2+5x+6, on « voit » (avec de l'entraînement) que $5=2+3$ et $6=2\times 3$ et donc on peut trouver rapidement la factorisation $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$. Utiliser ce principe pour factoriser les trinômes suivants :

$$x^2+3x+2,\quad x^2+7x+6,\quad x^2+13x+12,\quad x^2+7x+12,\quad x^2+6x+8,\quad x^2+8x+12,\quad x^2+12x+35,$$

$$x^2+x-2,\quad x^2+x-6,\quad x^2-x-20,\quad x^2-5x+6,\quad x^2-3x+2,\quad x^2-5x+4,\quad x^2-6x+8,\quad x^2-7x+10.$$

2 Conditions sur le graphe

Le graphe est ...

Problème 7. Déterminer les couples (b,c) de réels tels que le graphe du trinôme x^2+bx+c passe par les points de coordonnées $(1,1)$ et $(3,0)$.

Problème 8. Déterminer les triplets (a,b,c) de nombres réels tels que le graphe du trinôme ax^2+bx+c passe par les points de coordonnées $(2,1)$, $(3,2)$ et $(5,0)$.

Problème 9. Soient P et Q les points du plan de coordonnées $(2,3)$ et $(4,5)$. Parmi les trinômes ax^2+bx+c dont le graphe passe par les deux points P et Q, lesquels ont un graphe qui passe par l'origine ?

Problème 10. Soient P et Q les points du plan de coordonnées $(2,3)$ et $(4,0)$. Parmi les trinômes ax^2+bx+c dont le graphe passe par les deux points P et Q, lesquels ont un graphe qui est tangent à l'axe des abscisses ?

Problème 11. Déterminer les trinômes ax^2+bx+c dont le graphe admet l'axe de symétrie $x=3$ et contient les points de coordonnées $(2,2)$ et $(5,-1)$.

Problème 12. Soit p un nombre réel et considérons le trinôme $3x^2+px+3$. Sachant qu'une de ses racines est le carré de l'autre, que vaut p ?

Problème 13. Déterminer le nombre réel b de sorte que le trinôme x^2+bx+3 possède deux racines à distance un l'une de l'autre, c'est-à-dire deux racines α et β telles que $|\alpha-\beta|=1$.

Problème 14. Soient $a<b$ deux nombres réels. Combien de racines le polynôme $(x-a)(x-b)-1$ possède-il dans les intervalles $]-\infty,a[$, $]a,b[$ et $]b,+\infty[$?

Problème 15.

Problème 16.

Problème 17.

Problème 18.

Indications

Exercice ??. Pour les premiers de chaque ligne : $(a+2)^2$, $(2a+1)^2$ et $(2a+2)^2$. À noter que pour ce dernier trinôme, on peut commencer par factoriser l'expression par 4 ce qui donne $4(a^2+2a+1)$, puis utiliser l'identité remarquable : $4(a+1)^2$, puis « rentrer » le 4 dans le carré en écrivant $4(a+1)^2 = 2^2(a+1)^2 = \big(2(a+1)\big)^2 = (2a+2)^2$.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??. Distinguer suivant si a est nul ou pas.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??.
Exercice ??.

Correction

Correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice ??.
On trouve un système 2×3 dont la résolution donne $a = -2/3$, $b = 13/3$ et $c = -5$.
Correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice ??.
Si $a \neq 0$, on trouve $a = -1$ et $b = 6$ et $c = -6$. (Si $a = 0$ il n'y a pas de solution.)
Correction de l'exercice ??.
-6.
Correction de l'exercice ??.
Discriminant, ou bien formules de Viète.
Correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice ??.

Correction de l'exercice ??.