Loi des cosinus (Al-Kashi), loi des sinus

Damien Mégy

22 octobre 2023

AVERTISSEMENT ! Ce document est un brouillon qui sert de catalogue pour les feuilles d'exos du club mathématique de Nancy `https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/club/`**. Ne pas diffuser tel quel aux élèves ni de façon large sur le net, il reste des coquilles et énoncés parfois peu précis. Ce document a vocation a rester inachevé. Il peut néanmoins être utile aux enseignants. Enfin, ce document change en permanence, la version à jour est récupérable sur** `https://github.com/dmegy/clubmath-exos`**.**

1 Loi des cosinus (Al Kashi)

Catalogue d'exos sur Pythagore généralisé.

Wikipedia : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_cosinus`

Mettre tout ce qu'il y a ici : `https://studymath.github.io/trigonometry/2017/02/02/the-law-of-cosines html`

Mettre la superbe preuve sans mots de `https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/CosineLawAB.shtml`

Problème 1. `https://www.youtube.com/watch?v=tynkHePOzJc` ajouter un point pour faire apparaître un triangle isocèle, Pythagore puis Al Kashi. Bien

Problème 2. La preier de `https://geometry.ru/articles/Luis_Casey.pdf`

Deux cercles sont tangent à un troisième. On calcule la distance entre les points de contact d'une tangente commune aux deux cercles en fonction des trois rayons, et de la distance entre les pts de contact avec le troisième cercle.

Ceci sert ensuite à prouver le théorème de Casey, avec Ptolémée.

Problème 3. [Formules de Mahavira via Al-Kashi] Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. On note $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ et $d = DA$. Montrer que la diagonale BD est calculable en fonction des côtés grâce à la formule

$$BD = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

Problème 4. [Le théorème d'Apollonius / (premier) théorème de la médiane] Soit ABC un triangle de côtés a, b et c, et soit P le milieu du segment $[BC]$. On note $p = AP$. Montrer que l'on a

$$2(b^2+c^2) = a^2 + 4p^2.$$

Problème 5. L'identité du parallélogramme : `https://en.wikipedia.org/wiki/Parallelogram_law` preuve avec loi des cosinus.

Problème 6. [Deuxième théorème de la médiane] Voir wiki

Problème 7. [Troisième théorème de la médiane] Voir wiki

Problème 8. [Formule de Héron] Voir wiki : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_H%C3%A9ron#D%C3%A9monstrations`

Problème 9. [Le théorème de Stewart] Soit ABC un triangle de côtés a, b et c, et soit P un point du segment $[BC]$. On note $p = AP$, $m = BP$ et $n = PC$. Montrer que l'on a

$$b^2 m + c^2, = a(p^2 + mn)$$

Problème 10. [Stewart pour les quadrilatères convexes]
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Stewart#Cas_du_quadrilat%C3%A8re_convexe` Al-Kashi dans les quatre triangles.

Problème 11. https ://www.youtube.com/watch?v=F8yO2pWFasA

2 Loi des sinus

Problème 12. [Une preuve de la loi des sinus] Soit ABC un triangle, dont on note a, b et c les côtés et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les angles. On note O le centre du cercle circonscrit et R son rayon. Montrer que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R$. En déduire que

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}.$$

C'est la *loi des sinus.*

Problème 13. [Une autre preuve de la loi des sinus] Celle de l'autre feuille d'exos : on se ramène à un triangle rectangle

Problème 14. [Une troisième preuve de la loi des sinus (aires) ?]

Problème 15. [Application directe] Soit ABC un triangle de côtés a, b et c. Montrer que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}}$$

Problème 16. Soit ABC un triangle, a, b et c ses côtés et R le rayon de son cercle circonscrit. Montrer que son aire est égale à $\dfrac{abc}{4R}$.

Problème 17.

Problème 18. Fan de géométrie 55 = concours géénral 2005

Problème 19.

3 Loi des cosinus et loi des sinus

Problème 20.

Problème 21. `https://www.youtube.com/watch?v=nwPWeEfkVkQ` bien, mais un peu de trigo à la fin...

Indications

Exercice 3. Il s'agit de montrer que $BD(ad+bc) = (ab+cd)(ac+bd)$. Pour cela, écrire BD de deux manières distinctes avec Al-Kashi. Quelle est la relation entre les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$?
Exercice 4. La droite (AP) coupe le cercle circonscrit en un point D.
Exercice 5.
Exercice 6.
Exercice 7.
Exercice 8.
Exercice 9. La droite (AP) coupe le cercle circonscrit en un point D.
Exercice 10.
Exercice 11.
Exercice 12. Projeter O sur $[BC]$, et utiliser le théorème de l'angle au centre.
Exercice 13.
Exercice 14.
Exercice 15. Faire apparaître le facteur de proportionnalité.
Exercice 16.
Exercice 17.
Exercice 18.
Exercice 19.
Exercice 20.
Exercice 21.

Correction

Correction de l'exercice 3.
On a d'une part
$$BD = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{C},$$
et d'autre part
$$BD = a^2 + d^2 - 2ad\cos\widehat{A} = a^2 + d^2 - 2ad\cos\widehat{C},$$
car $\widehat{A} = \pi - \widehat{C}$ puisque le quadrilatère est inscriptible.

On multiplie la première expression par ad et la seconde par bc, on somme et on vérifie que ça se factorise comme annoncé.

Correction de l'exercice 4.

Preuve avec la loi des cosinus : `https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonius%27s_theorem`

Sinon, Ptolémée, mais lorsque placé dans l'autre feuille :

On applique Ptolémée dans le quadrilatère $ABDC$ puis on utilise deux paires de triangles semblables pour écrire toutes les distances en fonction de a, b, c et p.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.
On applique Ptolémée dans le quadrilatère $ABDC$ puis on utilise deux paires de triangles semblables pour écrire toutes les distances en fonction de a, b, c, m, n, p.

Il y a aussi une preuve avec la loi des cosinus, à mettre dans l'autre feuille.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12.
Soit P le projeté orthogonal de O sur $[BC]$. On a $\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$, et donc $\widehat{BOP} = \widehat{A}$. On en déduit
$$\sin\widehat{A} = \sin\widehat{BOP} = \frac{BP}{BO} = \frac{a}{2R}.$$

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.
On applique juste la loi des sinus.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.