Autour du théorème de Thalès

Damien Mégy

15 octobre 2023

AVERTISSEMENT ! Ce document est un brouillon qui sert de catalogue pour les feuilles d'exos du club mathématique de Nancy `https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/club/`. Ne pas diffuser tel quel aux élèves ni de façon large sur le net, il reste des coquilles et énoncés parfois peu précis. Ce document a vocation a rester inachevé. Il peut néanmoins être utile aux enseignants. Enfin, ce document change en permanence, la version à jour est récupérable sur `https://github.com/dmegy/clubmath-exos`.

Table des matières

1 Uniquement avec le théorème des milieux

Remettre les exos du bouquin déjà tapés

Problème 1. Énoncé

Problème 2. Énoncé

Petit exo marrant :
`https://www.youtube.com/watch?v=wIk97NRwj5I`

2 Thalès, version générale mais non croisé

Problème 3. Énoncé

Problème 4. Énoncé

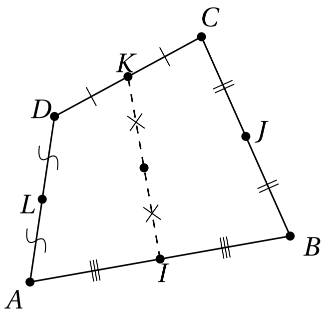
3 Thalès, version générale avec croisements

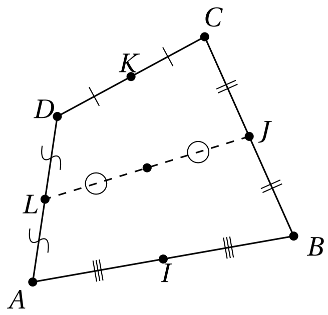
Problème 5. Énoncé

Problème 6. Énoncé

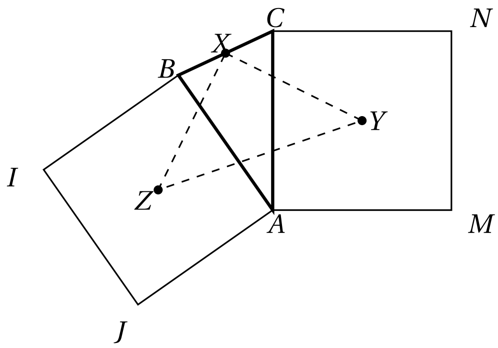
Problème 7. [Centre de gravité d'un quadrilatère] Soit $ABCD$ un quadrilatère et I, J, K et L les milieux de ses côtés. Montrer que le milieu du segment $[IK]$ est aussi le milieu du segment $[JL]$.

(Ce point est appelé le *centre de gravité* des quatre sommets, ou aussi l'*isobarycentre* des quatre sommets. Attention, ce n'est pas le centre de gravité du quadrilatère plein, contrairement au cas des triangles ! Ce n'est pas non plus l'intersection des diagonales.)

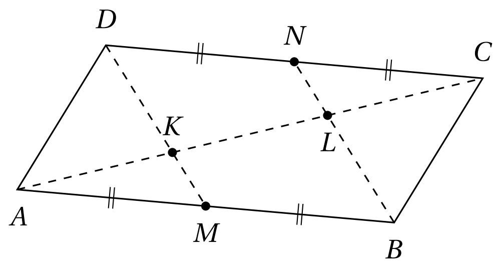




Problème 8. Sur l'extérieur d'un triangle ABC, on accole des carrés $ABIJ$ et $CAMN$ de centres Z et Y. On note X, le milieu du segment $[BC]$. Montrer que le triangle XYZ est rectangle isocèle en X.

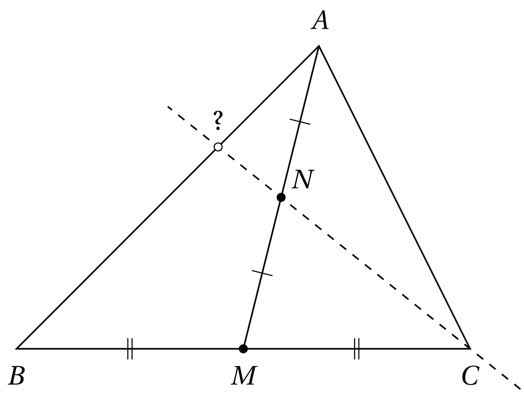


Problème 9. [Partage en trois] Soit $ABCD$ un parallélogramme, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$. Montrer que les droites (DM) et (BN) coupent la diagonale $[AC]$ en deux points K et L qui la partagent en trois segments égaux.

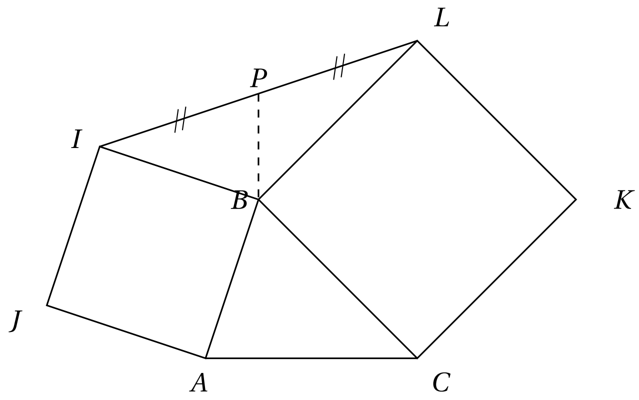


Problème 10. [Médiane sur médiane]

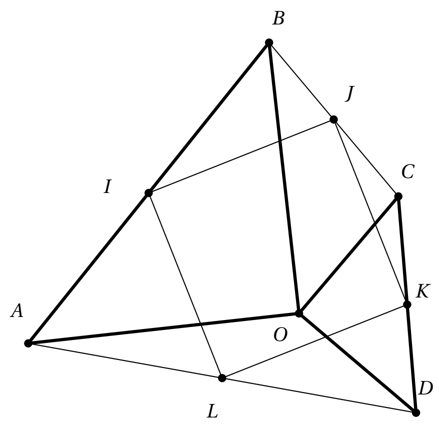
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AM]$. À quel endroit la droite (CN) coupe-t-elle le segment $[AB]$?



Problème 11. [Échange médiane contre hauteur]Sur l'extérieur d'un triangle ABC, on accole des carrés $ABIJ$ et $BCKL$. On note P le milieu du segment$[IL]$. Montrer que la droite (PB) est perpendiculaire à (AC) et que de plus $AC = 2PB$.

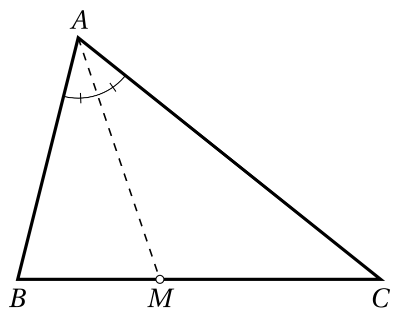


Problème 12. [Deux triangles isocèles rectangles] Soient AOB et COD deux triangles directs, isocèles rectangles en O. Soient I, J, K et L les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que $IJKL$ est un carré.



Problème 13. [Théorème de la bissectrice]

Soit ABC un triangle, et M le pied de la bissectrice issue de A. Montrer que $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{MB}{MC}$.

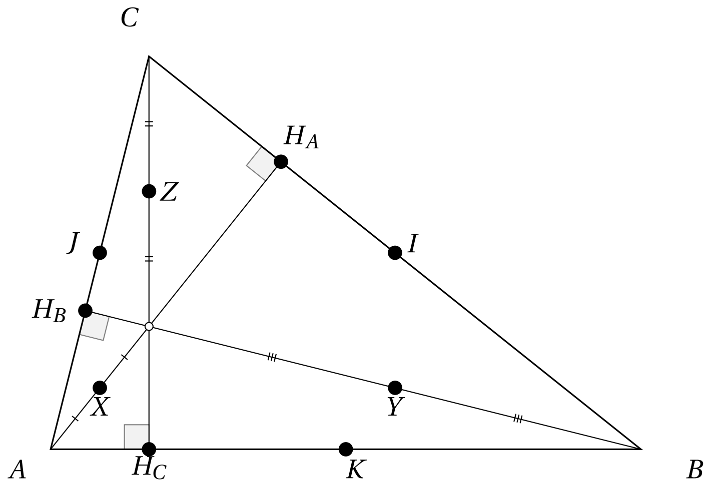


Problème 14. [Le miraculeux « cercle des neuf points »] Soit ABC un triangle. On place :

— les milieux des trois côtés I, J et K ;

— les pieds des hauteurs H_A H_B et H_C ;

— les points X, Y et Z situés à mi-chemin entre l'orthocentre H et les sommets du triangle.



Le théorème des neuf cercles est la propriété incroyable suivante :

Théorème : les neuf points I, J, K, H_A, H_B, H_C, X, Y et Z sont sur un seul et même cercle.

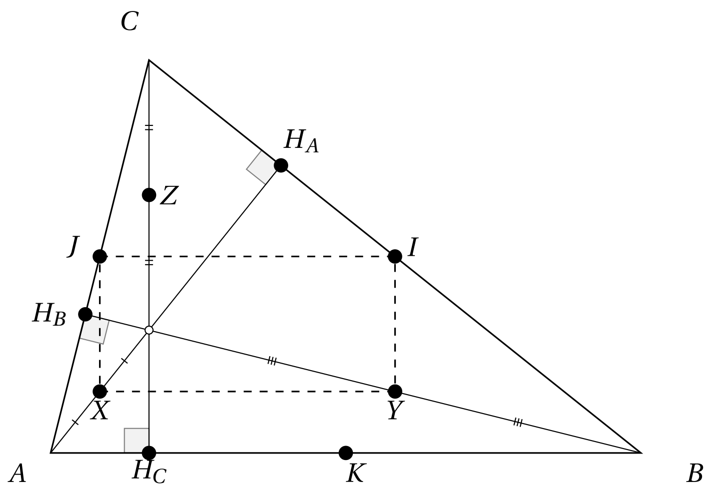
Ce cercle est appelé cercle des neuf points, cercle d'Euler, cercle de Feuerbach ou encore cercle de Terquem.

Pour démontrer le théorème, on s'intéressera au quadrilatère $IJXY$, puis à d'autres du même type. Ne pas hésiter à demander des indications, ce problème n'est pas facile.

Indications

Exercice ??. Indication.
Exercice ??. Indication.
Exercice ??. Indication.
Exercice ??. Indication.
Exercice ??. Indication.
Exercice ??. Indication.
Exercice ??. Considérer une rotation de centre A et d'angle 90°.
Exercice ??. Il y a plusieurs triangles dans lesquels on peut appliquer le théorème de Thalès.
Exercice ??. Tracer la parallèle à (PC) passant par M.
Exercice ??. Considérer une rotation de 90° de centre B, appliquée au triangle ABC.
Exercice ??. Tracer les « diagonales » $[AC]$ et $[BD]$.
Exercice ??. Tracer la parallèle à la bissectrice passant par un des sommets.
Exercice ??. Ce magnifique théorème se démontre en plusieurs étapes.

Étape 1 Montrer que le quadrilatère $IJXY$ est un parallélogramme en appliquant le théorème de Thalès dans deux triangles différents.



Étape 1bis Montrer que le quadrilatère $IJXY$ est en réalité un rectangle et en déduire que I, J, X et Y se trouvent sur un même cercle $\mathscr{C}$.

Étape 2 Montrer que les pieds des hauteurs H_A, et H_B se trouvent également sur ce cercle $\mathscr{C}$. À ce stade il ne manque plus que trois points.

Étape 3 En appliquant les étapes 1 et 1bis à un autre quadrilatère, en déduire que Z et K sont eux aussi sur le cercle $\mathscr{C}$.

Étape 4 et fin Comme dans l'étape 2, montrer que H_C est sur le cercle.

Correction

Correction de l'exercice ??.
Correction.
Correction de l'exercice ??.
Correction.
Correction de l'exercice ??.
Correction.
Correction de l'exercice ??.
Correction.
Correction de l'exercice ??.
Correction.
Correction de l'exercice ??.
Correction.
Correction de l'exercice ??.
La rotation de centre A et d'angle $90°$ envoie B sur J et M sur C. Elle envoie donc le segment $[BM]$ sur $[JC]$. On en déduit que ces deux segments sont de même longueur et perpendiculaires.

Ensuite on applique Thalès pour en déduire que $[XY]$ et $[XZ]$ sont de même longueur et perpendiculaires.

Correction de l'exercice ??.
On a $MB = DN$ donc $MBND$ est un parallélogramme.

On en déduit que $(DM)//(BN)$.

Comme M est le milieu de $[AB]$, on a par le théorème des milieux que $AK = KL$.

De la même façon, le théorème de Thalès appliqué dans DCK entraîne que $KL = LC$, d'où le résultat.

Variante, demande plus d'initiative :
Soit Q le symétrique de M par rapport à B. On a $MB = BQ$, donc $BQ = NC$ et $(BQ)//(NC)$. Donc $BQCM$ est un parallélogramme et donc $(NB)//(CQ)$.

Comme $AM = MB = BQ$ et que $(MK)//(BL)//(QC)$, le théorème de Thalès donne $AK = KL = LC$.

Autre preuve, avec centre de gravité :
Dans le triangle ABD, le point K est l'intersection des deux médianes (DM) et (AO). C'est donc le centre de gravité de ABD.

On en déduit que $KA = 2KO$.

Par symétrie centrale de centre O, on a $AK = CL$ et $KO = LO$, et finalement $AK = KO + OL = KL = LC$.

Correction de l'exercice ??.
La parallèle à (PC) passant par M coupe le segment $[AB]$ en un point Q. D'après le théorème de Thalès dans le triangle AQM, on a :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AN}{AM}.$$

On en déduit que P est le milieu du segment $[AQ]$.

Appliquons maintenant le théorème de Thalès dans le triangle BPC : on obtient alors

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BQ}{BP},$$

et donc Q est le milieu du segment $[BP]$.

On en déduit donc que $BQ = QP = PA$, et donc la droite (CN) coupe le segment $[AB]$ aux deux tiers.

Correction de l'exercice ??.
ATTENTIOn finir figure.

La rotation d'angle 90° et de centre B envoie le triangle ABC sur le triangle IBM, où M est le symétrique de L par rapport à B.

On en déduit que $IM = AC$ et que $(IM)\perp(AC)$. Maintenant, dans le triangle ILM, on applique le théorème des milieux avec le segment $[PB]$.

On aurait pu appliquer la rotation à IBL, ça marche aussi. On peut aussi considérer la rotation de centre B et d'angle -90°, ça marche aussi.

Correction de l'exercice ??.

ATTENTION VIRER LES VECTEURS pour le collège. On commence par prouver que $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$. Ensuite on rouve le résultat.

1. Soit ρ la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. D'après l'énoncé, on a $\rho(B) = A$ et $\rho(D) = C$. Donc $[AC]$ est l'image de $[AD]$ par ρ, d'où on déduit que $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$.
2. Le quadrilatère $IJKL$ est toujours un parallélogramme, même sans hypothèses sur $ABCD$ (c'est le théorème de Varignon). En effet, par le théorème de Thalès (ou simplement le théorème des milieux) :
$$\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{JK}.$$
Ceci signifie que les côtés $[IL]$ et $[JK]$ ont même longueur et sont parallèles, donc $IJKL$ est un parallélogramme.
Pour voir que c'est un carré, remarquons qu'on montre de même que
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK},$$
et d'après la première question, $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$, donc $IJKL$ est un parallélogramme ayant un angle droit et des cotés consécutifs de même longueur. C'est donc un carré.

Correction de l'exercice ??.