Loi des cosinus (alias Al-Kashi)

Damien Mégy

15 octobre 2023

AVERTISSEMENT ! Ce document est un brouillon qui sert de catalogue pour les feuilles d'exos du club mathématique de Nancy `https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/club/`**. Ne pas diffuser tel quel aux élèves ni de façon large sur le net, il reste des coquilles et énoncés parfois peu précis. Ce document a vocation a rester inachevé. Il peut néanmoins être utile aux enseignants. Enfin, ce document change en permanence, la version à jour est récupérable sur** `https://github.com/dmegy/clubmath-exos`**.**

Catalogue d'exos sur Pythagore généralisé.

Wikipedia : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_des_cosinus`

Mettre tout ce qu'il y a ici : `https://studymath.github.io/trigonometry/2017/02/02/the-law-of-cosines html`

Mettre la superbe preuve sans mots de `https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/CosineLawAB.shtml`

Problème 1. La preier de `https://geometry.ru/articles/Luis_Casey.pdf`

Deux cercles sont tangent à un troisième. On calcule la distance entre les points de contact d'une tangente commune aux deux cercles en fonction des trois rayons, et de la distance entre les pts de contact avec le troisième cercle.

Ceci sert ensuite à prouver le théorème de Casey, avec Ptolémée.

Problème 2. [Formules de Mahavira via Al-Kashi] Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. On note $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ et $d = DA$. Montrer que la diagonale BD est calculable en fonction des côtés grâce à la formule

$$BD = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

Problème 3. [Le théorème d'Apollonius / (premier) théorème de la médiane] Soit ABC un triangle de côtés a, b et c, et soit P le milieu du segment $[BC]$. On note $p = AP$. Montrer que l'on a

$$2(b^2+c^2) = a^2+4p^2.$$

Problème 4. L'identité du parallélogramme : `https://en.wikipedia.org/wiki/Parallelogram_law` preuve avec loi des cosinus.

Problème 5. [Deuxième théorème de la médiane] Voir wiki

Problème 6. [Troisième théorème de la médiane] Voir wiki

Problème 7. [Formule de Héron] Voir wiki : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_H%C3%A9ron#D%C3%A9monstrations`

Problème 8. [Le théorème de Stewart] Soit ABC un triangle de côtés a, b et c, et soit P un point du segment $[BC]$. On note $p = AP$, $m = BP$ et $n = PC$. Montrer que l'on a

$$b^2 m + c^2, = a(p^2+mn)$$

Problème 9. [Stewart pour les quadrilatères convexes]

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Stewart#Cas_du_quadrilat%C3%A8re_convexe` Al-Kashi dans les quatre triangles.

Problème 10.

Indications

Exercice 2. Il s'agit de montrer que $BD(ad+bc) = (ab+cd)(ac+bd)$. Pour cela, écrire BD de deux manières distinctes avec Al-Kashi. Quelle est la relation entre les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$?
Exercice 3. La droite (AP) coupe le cercle circonscrit en un point D.
Exercice 4.
Exercice 5.
Exercice 6.
Exercice 7.
Exercice 8. La droite (AP) coupe le cercle circonscrit en un point D.
Exercice 9.
Exercice 10.

Correction

Correction de l'exercice 2.
On a d'une part
$$BD = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{C},$$
et d'autre part
$$BD = a^2 + d^2 - 2ad\cos\widehat{A} = a^2 + d^2 - 2ad\cos\widehat{C},$$
car $\widehat{A} = \pi - \widehat{C}$ puisque le quadrilatère est inscriptible.

On multiplie la première expression par ad et la seconde par bc, on somme et on vérifie que ça se factorise comme annoncé.

Correction de l'exercice 3.

Preuve avec la loi des cosinus : `https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonius%27s_theorem`

Sinon, Ptolémée, mais lorsque placé dans l'autre feuille :

On applique Ptolémée dans le quadrilatère $ABDC$ puis on utilise deux paires de triangles semblables pour écrire toutes les distances en fonction de a, b, c et p.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.
On applique Ptolémée dans le quadrilatère $ABDC$ puis on utilise deux paires de triangles semblables pour écrire toutes les distances en fonction de a, b, c, m, n, p.

Il y a aussi une preuve avec la loi des cosinus, à mettre dans l'autre feuille.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.