

Loi des sinus

Damien Mégy

15 octobre 2023

AVERTISSEMENT ! Ce document est un brouillon qui sert de catalogue pour les feuilles d'exos du club mathématique de Nancy <https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/club/>. Ne pas diffuser tel quel aux élèves ni de façon large sur le net, il reste des coquilles et énoncés parfois peu précis. Ce document a vocation à rester inachevé. Il peut néanmoins être utile aux enseignants. Enfin, ce document change en permanence, la version à jour est récupérable sur <https://github.com/dmegy/clubmath-exos>.

Prérequis : Pythagore, Angle inscrit/angle au centre, Thalès, parfois Al-Kashi.

1 Sans Al-Kashi

Problème 1. [Une preuve de la loi des sinus] Soit ABC un triangle, dont on note a , b et c les côtés et \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} les angles. On note O le centre du cercle circonscrit et R son rayon. Montrer que $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$. En déduire que

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}.$$

C'est la *loi des sinus*.

Problème 2. [Une autre preuve de la loi des sinus] Celle de l'autre feuille d'exos : on se ramène à un triangle rectangle

Problème 3. [Une troisième preuve de la loi des sinus (aires)?]

Problème 4. [Application directe] Soit ABC un triangle de côtés a , b et c . Montrer que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}$$

Problème 5. Soit ABC un triangle, a , b et c ses côtés et R le rayon de son cercle circonscrit. Montrer que son aire est égale à $\frac{abc}{4R}$.

Problème 6.

Problème 7.

2 Avec Al-Kashi

Problème 8.

Indications

Exercice 1. Projeter O sur $[BC]$, et utiliser le théorème de l'angle au centre.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4. Faire apparaître le facteur de proportionnalité.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

Correction

Correction de l'exercice 1.

Soit P le projeté orthogonal de O sur $[BC]$. On a $\widehat{BOC} = 2\hat{A}$, et donc $\widehat{BOP} = \hat{A}$. On en déduit

$$\sin \hat{A} = \sin \widehat{BOP} = \frac{BP}{BO} = \frac{a}{2R}.$$

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

On applique juste la loi des sinus.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.