Autour du théorème de Pythagore

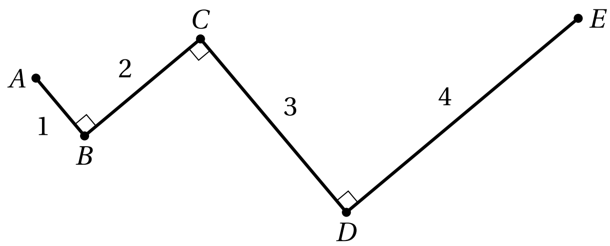
Damien Mégy

1er octobre 2023

Catalogue d'exos sur Pythagore pour le Club Mathématique de Nancy. Rédaction en cours, ne pas diffuser.

(Les exercices sont faisables sans connaître le concept de cosinus ni de sinus, uniquement avec Pythagore.)

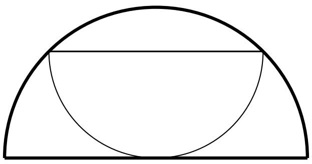
Problème 1. On considère une ligne brisée $ABCDE$ avec des angles droits et des distances comme sur la figure. Calculer la distance AE.



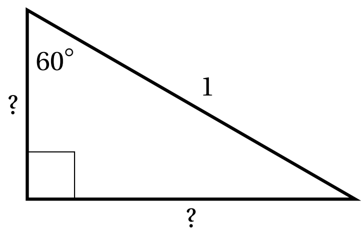
Double Pythagore : `https://www.youtube.com/watch?v=izbTPRWu050` (facile)

Un trapèze rectangle, aussi.

Problème 2. Dans un demi-cercle de rayon 1cm, on inscrit un autre demi-cercle plus petit, comme sur la figure. Quel est le rayon du petit demi-cercle ?

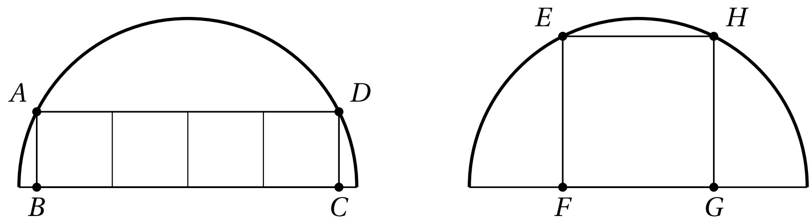


Problème 3. [Le triangle $30° - 60° - 90°$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent 30°, 60° et 90°. Son hypoténuse AB mesure 1 cm. Quelle est la longueur des deux autres côtés ?

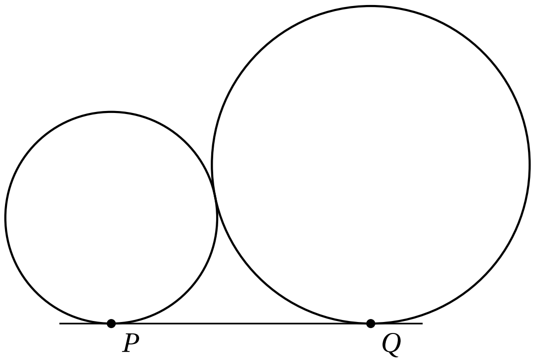


Dans toute la suite, un triangle « 3 – 4 – 5 » est un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 5cm. C'est un triangle rectangle, comme on peut le vérifier à l'aide du théorème de Pythagore.

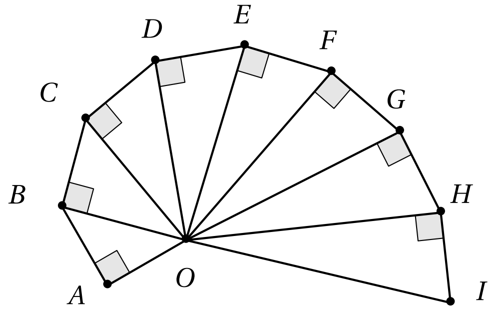
Problème 4. Dans deux demi-cercles identiques, on inscrit d'une part un rectangle $ABCD$ formé de quatre petits carrés juxtaposés, et d'autre part un carré $EFGH$. Lequel de $ABCD$ et $EFGH$ a la plus grande aire ?



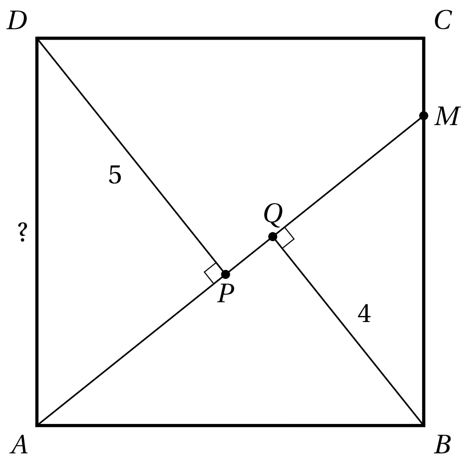
Problème 5. On considère deux cercles de rayon 2cm et 3cm qui ont un unique point de contact entre eux. Ils sont tous deux tangents en P et Q à une certaine droite. Quelle est la distance PQ ?



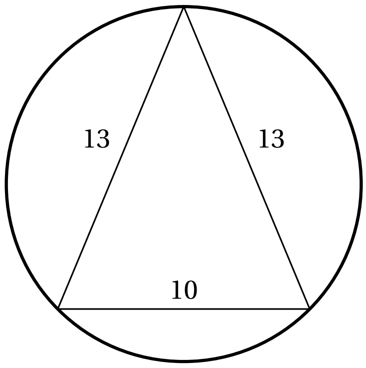
Problème 6. [Spirale pythagoricienne] Cette spirale est formée de triangles rectangles juxtaposés. On a $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = 1$. Que vaut OI ?



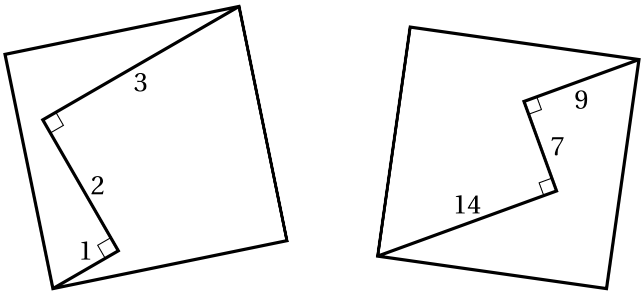
Problème 7. Dans un carré $ABCD$, on trace un point M sur le côté $[BC]$. Les perpendiculaires à (AM) passant par D et B coupent (AM) en P et Q. Sachant que $DP = 5$cm et $BQ = 4$cm, déterminer l'aire du carré $ABCD$.



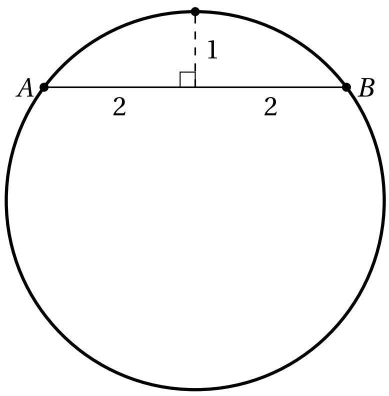
Problème 8. On considère un triangle isocèle dont les côtés mesurent 13cm, 13cm et 10cm. Quel est le rayon de son cercle circonscrit ?



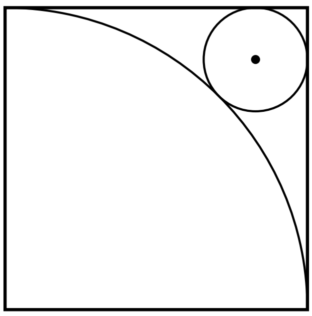
Problème 9. [Zig-Zag dans un carré] Que vaut à chaque fois le côté du carré ?



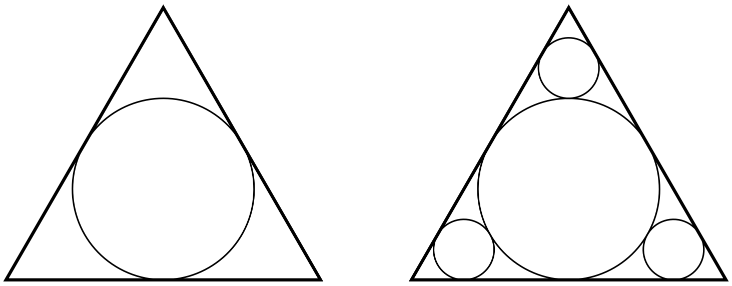
Problème 10. Dans un cercle $\mathscr{C}$, on a une corde $[AB]$ mesurant 4cm. De plus, on sait que la distance entre le milieu de cette corde et le cercle est de 1cm. Quel est le rayon du cercle ?



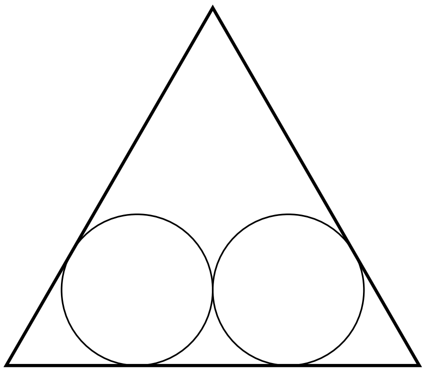
Problème 11. Dans un carré dont les côtés mesurent 1cm, on inscrit un quart de cercle puis un petit cercle comme sur la figure. Quel est le rayon du petit cercle ?



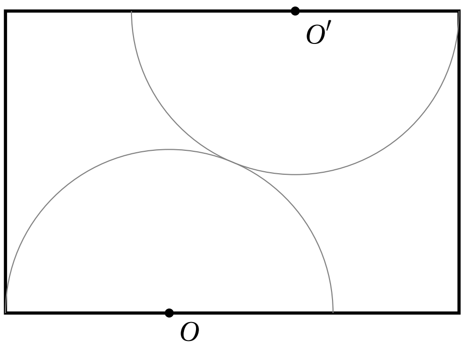
Problème 12. Quel est le rayon du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 1cm ? Et si on rajoute trois petits cercles comme sur la figure de droite, quel est le rayon des petits cercles ?



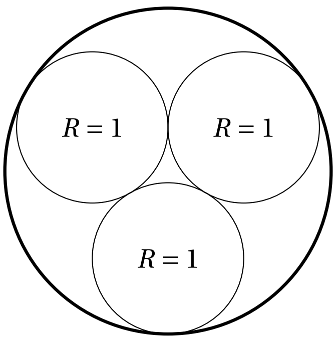
Problème 13. Combien mesure le côté du triangle équilatéral, si les deux cercles ont un rayon de 1cm ?



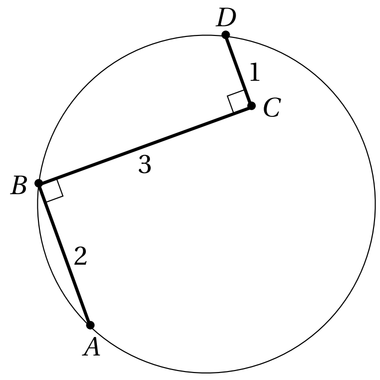
Problème 14. Dans un rectangle de dimensions 3cm × 2cm, on inscrit deux demi-cercles de même rayon qui se touchent en un seul point, comme sur la figure. Quel est le rayon de ces deux demi-cercles ? (Ce n'est pas 1 !)



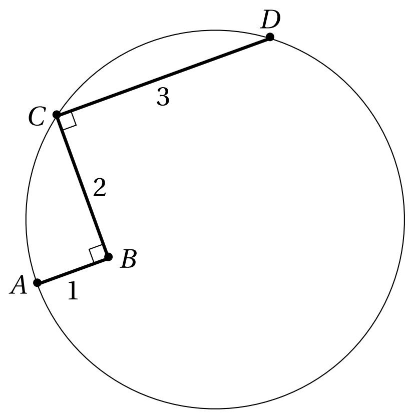
Problème 15. [Cercles tangents] Les trois petits cercles sont de rayon 1. Le grand cercle leur est simultanément tangent. Quel est son rayon ?



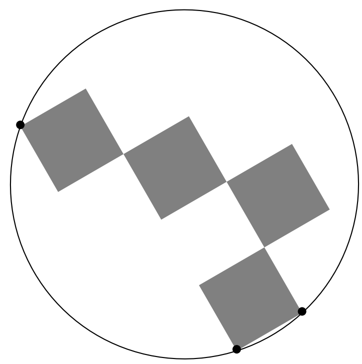
Problème 16. [Zig-zag dans un cercle] Quel est le rayon du cercle ci-dessous ?



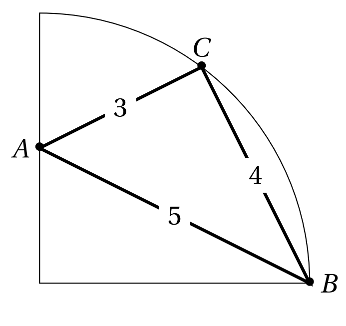
Problème 17. [Zig-zag dans un cercle,bis] Quel est le rayon du cercle ci-dessous ?



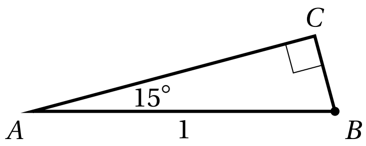
Problème 18. Quatre carrés placés en damier sont inscrits dans un cercle qu'ils touchent en trois points, comme sur la figure. Si les carrés mesurent chacun 1cm^2, quel est le rayon du cercle ?



Problème 19. [Triangle rectangle dans un quart de cercle] Un triangle rectangle « $3-4-5$ » est inscrit dans un quart de cercle comme ci-dessous ; Quel est le rayon du quart de cercle ?

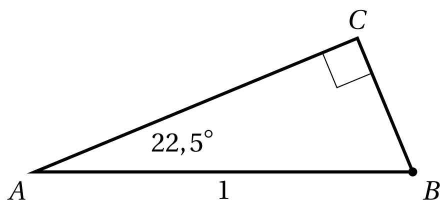


Problème 20. [Le triangle $15° - 75° - 90°$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent $15°$, $75°$ et $90°$, comme sur la figure ci-dessous. Son hypoténuse AB mesure 1 cm. Montrer que $AC = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ puis que $CB = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

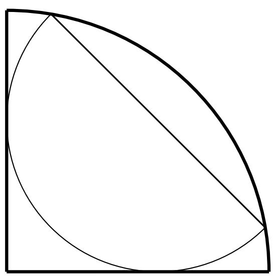


Problème 21. [Consolidation : le triangle $22,5° - 67,5° - 90°$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent $22,5°$, $67,5°$ et $90°$, comme sur la figure ci-dessous. Son hypoténuse mesure 1 cm.

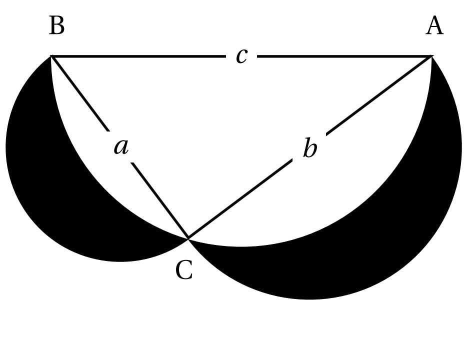
En utilisant la même technique qu'au problème précédent, calculer AC.



Problème 22. Dans un quart de cercle, on inscrit un demi-cercle comme sur la figure. Si le rayon du demi-cercle est 1cm, quel est le rayon du quart de cercle ?

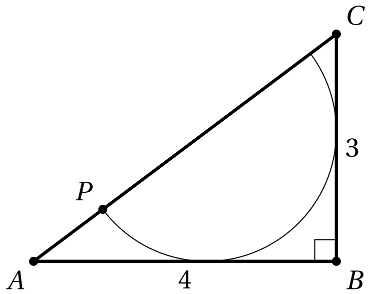


Problème 23. [Théorème des lunules] Soit ABC un triangle rectangle en C. On trace le demi-cercle de diamètre $[AB]$ qui contient C ainsi que les deux demi-cercles de diamètres $[BC]$ et $[CA]$ extérieurs au triangle. Ces trois demi-cercles délimitent deux lunules, coloriées en noir sur la figure. Démontrer que la somme des aires de ces deux lunules est exactement égale à l'aire du triangle !

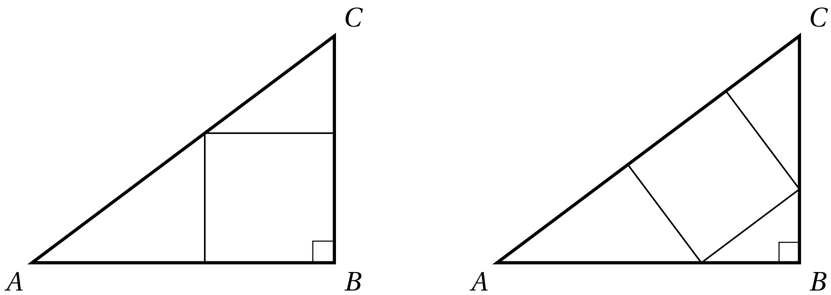


1 Pythagore et triangles semblables

Problème 24. Dans un triangle rectangle ABC de type « $3-4-5$ », on inscrit un demi-cercle comme sur la figure. Calculer la distance AP.

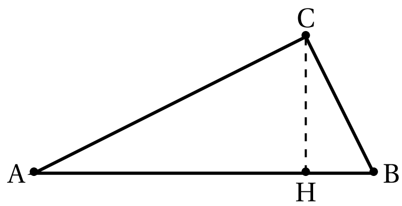


Problème 25. [Carrés dans un triangle 3-4-5] Dans un triangle rectangle ABC de type « $3-4-5$ », on inscrit un carré de deux manières différentes, comme sur les deux figures. Quelles sont les dimensions des deux carrés ?

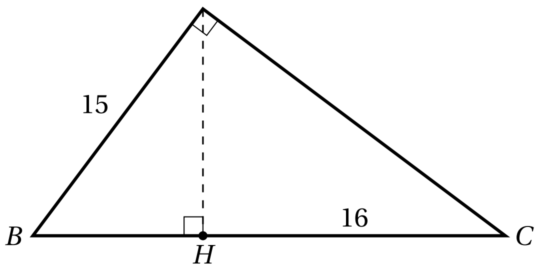


Problème 26. [Théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse] Soit ABC un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de C. Montrer que

$$HA \times HB = HC^2.$$

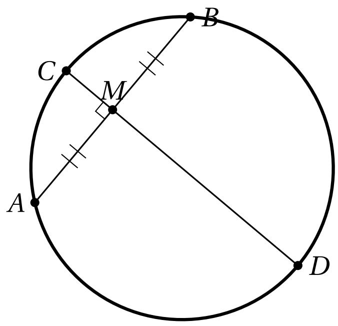


Problème 27. Dans un triangle rectangle en A, en notant H le pied de la hauteur issue de A, on a $AB = 15$ et $HC = 16$. Calculer BH, AH et AC.



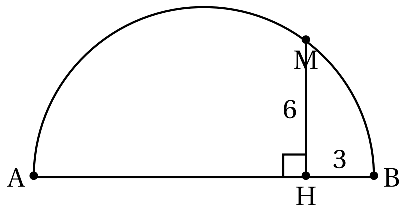
Problème 28. [Théorème des cordes sécantes dans un cas particulier] Dans un cercle, on trace une corde $[AB]$, de milieu M. Sa médiatrice intersecte le cercle en C et D. Montrer que

$$MA \times MB = MC \times MD.$$



(Note : en réalité, ce théorème reste vrai pour deux cordes *quelconques* s'intersectant en M, mais la démonstration est plus difficile et utilise le théorème de l'angle inscrit. La quantité $MA \times MB$ est alors appelée la *puissance* du point M par rapport au cercle.)

Problème 29. Sur un demi-cercle de diamètre $[AC]$, on place un point M de sorte à avoir les longueurs $HB = 3$ et $HM = 6$. Quel est le rayon du demi-cercle ?



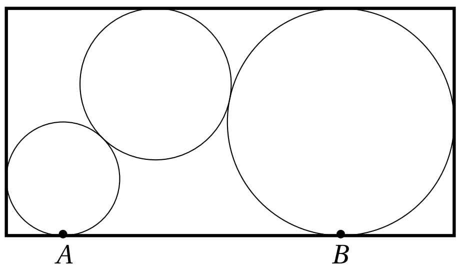
1.1 Calculs avec les racines carrées

Problème 30. [Comparaisons de racines carrées]

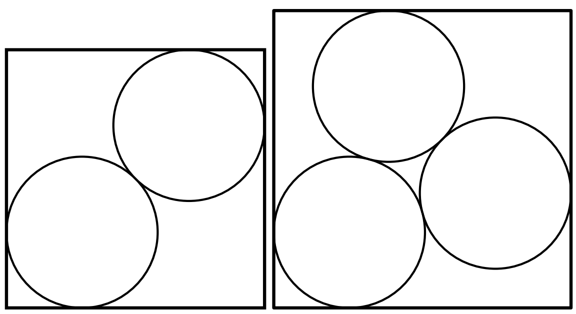
On considère les trois nombres suivants : $A = 3 + \sqrt{2}$, $B = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ et $C = 1 + \sqrt{10}$? Classer ces trois nombres du plus petit au plus grand, sans utiliser évidemment de calculatrice.

1.2 Circle Packing

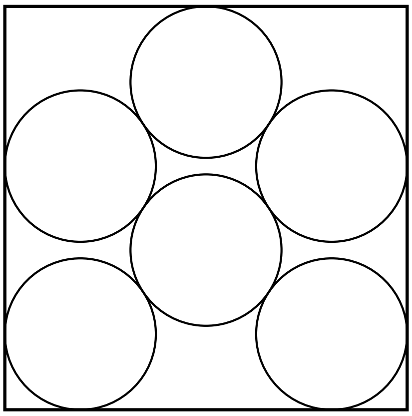
Problème 31. [circle packing, 1] Les trois cercles ci-dessous sont tangents et inscrits dans un rectangle. Leurs diamètres valent 3, 4 et 6. Calculer la longueur AB.



Problème 32. [Cercles dans un carré] La figure suivante représente des cercles qui ont un rayon égal à 1 et placés dans un carré. Quelles sont les dimensions des carrés ?



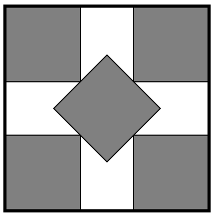
Problème 33. [Cercles dans un carré, bis] La figure suivante représente des cercles qui ont un rayon égal à 1 et placés dans un carré. Quelles sont les dimensions du carré ?



Note : il s'agit du plus petit carré qui peut contenir six disques de rayon un. Ce résultat a été prouvé par Graham en 1963.

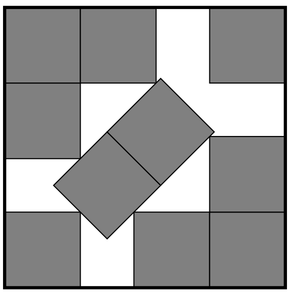
1.3 Square packing

Problème 34. [Cinq carrés dans un carré] Les cinq carrés gris sont de côté 1 et le carré oblique est incliné de 45°. Quelle est la taille du grand carré ?

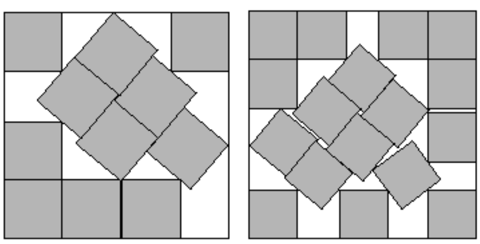


Note : Frits Göbel a prouvé en 1979 qu'il s'agit là du plus petit carré pouvant contenir cinq carrés de côté 1.

Problème 35. [Dix carrés dans un carré] Pour dix petits carrés, le plus petit carré est le suivant, mais ça n'a été démontré qu'en 2003 par Walter Stromquist. Quelle est la taille du carré ? (Les carrés obliques sont toujours inclinés de 45°.)



Ces problèmes pourraient sembler évidents mais ne le sont pas. Par exemple, pour 11 et 17 carrés, les meilleures configurations connues à ce jour sont celles ci-dessous mais on ignore encore si elles sont optimales.

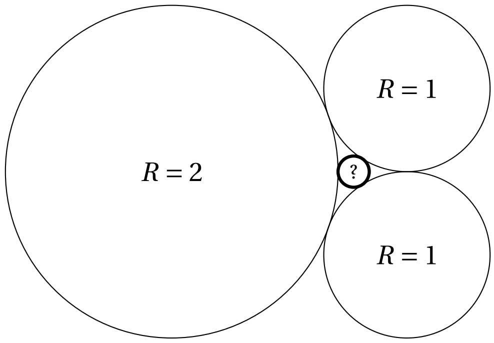


Carrés dans un triangle équilatéral `https://erich-friedman.github.io/packing/squintri/`
Mettre les premiers, regarder la biblio pour voir si c'est optimal ou pas.

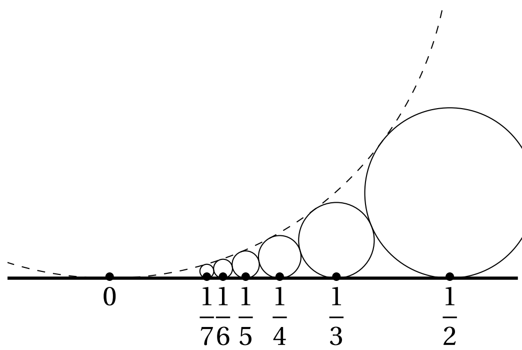
1.4 AUtre

Problème 36. [Comparaisons de racines carrées]
On considère les trois nombres suivants : $A = 3+\sqrt{2}$, $B = \sqrt{5}+\sqrt{6}$ et $C = 1+\sqrt{10}$? Classer ces trois nombres du plus petit au plus grand, sans utiliser évidemment de calculatrice.

Problème 37. [Vers le théorème de Descartes] Les trois grands cercles sont de rayon 1 et 2. Le petit cercle leur est simultanément tangent. Quel est son rayon?



Problème 38. [Cercles de Ford] Sur une droite graduée, on « pose » des cercles de diamètre $\frac{1}{n^2}$ sur les abscisses $\frac{1}{n}$, comme sur la figure ci-dessous. Montrer que tous ces cercles sont tangents, et qu'ils sont tous tangents au cercle de diamètre 1 posé en l'origine!!



Problème 39. blabla

Problème 40. blabla

Problème 41. Identité du parallélogramme

Problème 42. Théorème de la médiane (idem que plus haut) `https://www.youtube.com/watch?v=pqHpU84ggpY` et chercher variantes sur wikipedia

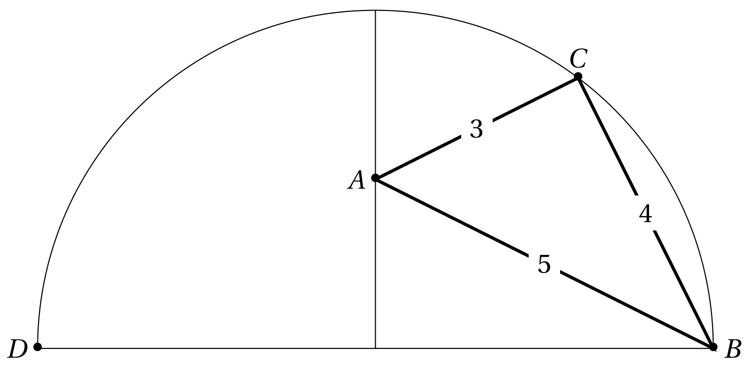
Problème 43. Plus dur : `https://www.youtube.com/watch?v=HbPQco5PVuU` Demi-cercle avec trois cercles inscrits.

Plus difficile, avec trinôme et factoriastion : `https://www.youtube.com/watch?v=KKzf3vh7-pY`

Indications

Exercice 1. Trouver un rectangle dont $[AE]$ est une diagonale et appliquer Pythagore.
Exercice 3. Considérer la symétrie axiale d'axe (AC).
Exercice 5.
Exercice 6. Appliquer Pythagore dans les triangles rectangles en partant du plus petit. Le résultat demandé est un nombre entier.
Exercice 7. Considérer les triangles ADP et AQB
Exercice 8. Il y a une hauteur h que l'on peut calculer à l'aide de Pythagore. Ensuite, si l'on note H le pied de cette hauteur et O le centre du cercle circonscrit, on peut par exemple appliquer Pythagore dans le triangle rectangle OHB.
Exercice 9.
Exercice 10. Placer le centre O du cercle. Que vaut la distance de O à la corde, en fonction du rayon R ? Ensuite, on peut appliquer Pythagore.
Exercice 11. Tracer le centre du petit cercle et décomposer la diagonale du carré en plusieurs segments.
Exercice 12. Il est peut-être plus simple de s'imaginer que le cercle est de rayon 1 et de chercher la taille du triangle équilatéral. Tracer les hauteurs de ce triangle équilatéral.
Exercice 13. On peut tracer la hauteur qui passe entre les deux cercles et qui divise le triangle équilatéral en deux triangles rectangles. Combien mesure cette hauteur en fonction du côté du triangle ? Ensuite, on peut se concentrer sur un seul de ces deux triangles, marquer les points de contact avec le cercle, et
Exercice 15. Tracer le triangle (équilatéral) reliant les centres des trois petits cercles. Combien mesure sa hauteur ?
Exercice 16. La droite (BC) recoupe le cercle en un point E. Que dire de $[AE]$? L'objectif est de calculer la distance CE, après quoi le rayon du cercle est relativement rapide à obtenir.

Autre indication : il y a une racine carrée dans la réponse.
Exercice 17. La droite (BC) recoupe le cercle en un point E. Que dire de $[AE]$? L'objectif est de calculer la distance CE, après quoi le rayon du cercle est relativement rapide à obtenir.
Exercice 18. On peut trouver le centre en intersectant les médiatrices de deux cordes.
Exercice 19. On peut compléter la figure comme suit :



Ensuite, on peut prolonger la droite (AC).
Exercice 20. Attention, le calcul peut mener à des expressions qui *semblent* différentes de celles demandées : il faut alors démontrer qu'elles coïncident avec les expressions demandées. Par exemple, on a $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$. (Exercice : pourquoi ?)
Exercice 23. Pour calculer l'aire des deux lunules, il faut calculer l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ et la retrancher à une autre aire.
Exercice 30. Élever les trois quantités au carré.
Exercice 31.
Exercice 32.
Exercice 33.
Exercice 34.

Exercice 35.
Exercice 36. Élever les trois quantités au carré.
Exercice 37. Tracer les centres des cercles et les relier.
Exercice 38. Commencer par montrer que les deux premiers cercles, de diamètres $1/4$ et $1/9$, sont tangents. Dessiner leurs centres.

Correction

Correction de l'exercice 1.
Considérons un point P tel que $BCDP$ est un rectangle. Alors APE est rectangle en P. On a alors $AE^2 = (1+3)^2 + (2+4)^2 = 4^2 + 6^2 = 52$, d'où $AE = 2\sqrt{13}$.
Correction de l'exercice 3.
On obtient un triangle équilatéral quand on dédouble le triangle suivant l'axe proposé. On en déduit qu'un côté mesure $1/2$, et ensuite Pythagore donne $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour le troisième côté.
Correction de l'exercice 4.
En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que les deux aires sont égales à $\frac{4}{5}R^2$!
Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.
Les triangles ADP et AQB sont égaux : ils ont les mêmes angles et la même hypoténuse. On en déduit que $AP = 4$ et $AQ = 5$, et en appliquant le théorème de Pythagore, on trouve le côté du carré : $AB = \sqrt{41}$. Le carré a donc une aire de 41cm^2.

Pour trouver la distance AM, il suffit de trouver QM. Le plus simple est d'utiliser des triangles semblables, ou Thalès, on trouve $QM = 16/5$, donc $AM = 5 + 16/5 = 41/5$.
Correction de l'exercice 8.
On trouve une hauteur de 12, et un rayon de $\frac{169}{24}$.
Correction de l'exercice 9.
Le côté vaut $\sqrt{10}$.

Pour le second la source d'origine est : `https://twitter.com/0y6tr4/status/1522092641017602049`.
Mais en fait le premier est mieux, plus simple
Correction de l'exercice 10.
Le diamètre vaut 5cm.
Correction de l'exercice 11.
On décompose la diagonale en trois segments : on obtient

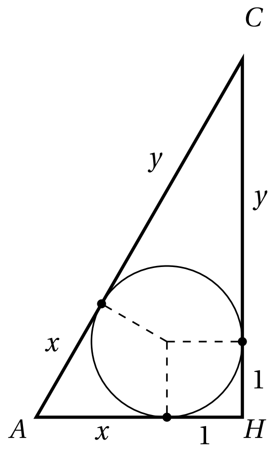
$$\sqrt{2} = 1 + R + R\sqrt{2}$$

Ceci aboutit à $R = 3 - 2\sqrt{2}$.
Correction de l'exercice 12.
On trouve $R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. (Si le triangle est de côté 1.)

Sinon, on peut remarquer que pour un triangle équilatéral, le centre du cercle inscrit est également le centre de gravité, ou le centre du cercle circonscrit. Il se trouve donc au tiers des médianes en partant de la base. Or, les médianes sont les hauteurs, elles mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les petits cercles sont trois fois plus petits que le grand cercle, comme on le voit en traçant les tangentes communes aux cercles, ce qui partage le triangle en un hexagone de côté $1/3$ et trois petits triangles équilatéraux.

Comme on sait que $R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, on trouve donc $r = \frac{1}{6\sqrt{3}}$.
Correction de l'exercice 13.
On tracer la hauteur CH comme indiqué, et on se concentre sur le triangle de gauche :



La quantité que l'on cherche est $\ell = x + y$.

Appliquons Pythagore dans le triangle rectangle ACH, rectangle en H :

$$(x+y)^2 = (y+1)^2 + (x+1)^2,$$

c'est-à-dire, après simplification :

$$xy = x + y + 1$$

Comme il s'agit d'un triangle rectangle ayant des angles de 30° et 60°, on sait (sinon on refait Pythagore) que le petit côté mesure la moitié de l'hypoténuse : $x + y = 2(x+1)$, d'où on déduit que $y = x+2$. En remplaçant y par $x+2$ dans l'équation donnée par Pythagore, on obtient alors $x^2 + 2x = 2x + 3$ donc $x = \sqrt{3}$.

Finalement, on obtient $\ell = x + y = 2x + 2 = 2 + 2\sqrt{3}$ pour la longueur du côté du triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 14.

On peut par exemple projeter le centre du rectangle sur une base, noter x la distance de O à ce projeté, et on obtient alors en considérant la largeur et la hauteur du rectangle : $3 = 2R + 2x$ et $2 = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, c'est-à-dire $1 = R^2 - x^2 = \frac{3}{2}(R - x)$, d'où finalement le système $R + x = \frac{3}{2}$ et $R - x = \frac{2}{3}$ et donc $2R = \frac{9+4}{6}$ et finalement $R = \frac{13}{12}$.

Autre méthode : on projette O' sur la base, et on applique Pythagore dans $OO'H$. On a $OH = 3 - 2R$, donc :

$$(3-2R)^2 + 4 = 4R^2$$

Et donc $13 - 12R = 0$, c'est plus rapide !

Correction de l'exercice 17.

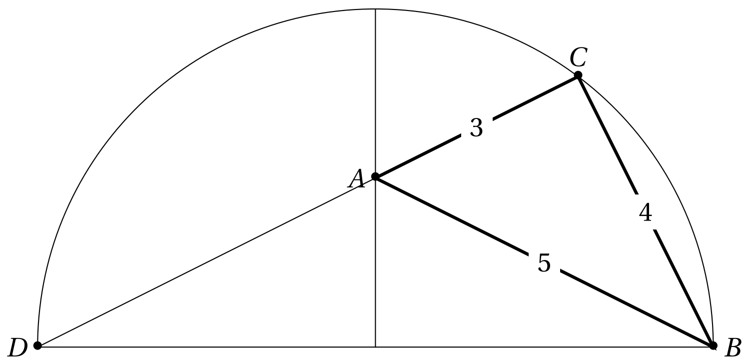
Le diamètre est 5.

Correction de l'exercice 18.

Le rayon vaut $\sqrt{85}/4$.

Correction de l'exercice 19.

Complétons la figure comme suit :



Comme le triangle ABC est rectangle en C, la droite (AC) recoupe le droite (OB) en D. Le triangle DBC est rectangle en C et on a $DC = 8$ et $BC = 4$, donc en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient

$$DB = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Le rayon est donc égal à $2\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 20.

Considérer la symétrie axiale d'axe (AC). On note B' l'image de B par cette symétrie. Ensuite, projeter perpendiculairement le point B sur la droite (AB'), et reconnaître un triangle rectangle ayant un angle de $30°$ et une hypoténuse de $1cm$.

Correction de l'exercice 22.

Le rayon du quart de cercle est $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 25.

Pour le deuxième carré, on a intérêt à noter $60x$ le côté du carré, de cette façon c'est divisible par 3, 4 et 5. Ensuite on utilise les triangles semblables, mais du coup cet exo est faisable sans Pythagore. On trouve que $x = \frac{1}{37}$ par proportionnalité, le deuxième carré fait donc 60/37 de côté.

Avec Pythagore ça doit être plus pénible...

Le première carré fait 12/7 de côté. Là aussi, on a intérêt à noter $12y$ le côté, comme ça c'est divisible par trois et quatre. Et là aussi il vaut mieux faire ça avec des triangles semblables. Il est plus gros que le premier car $444 = 12 \times 37 \geq 7 \times 60 = 420$. Sur le dessin ça se voir quand même assez nettement.

Correction de l'exercice 26.

On fait Pythagore dans les trois triangles et ça se simplifie.

Évidemment on pourrait faire ça plus joliment avec des triangles semblables.

Correction de l'exercice 27.

En calculant l'aire du triangle de deux façons, on a $AH \times BC = AB \times AC$.

Ensuite, on peut procéder de plusieurs façons, juste avec Pythagore dans les trois triangles rectangles, ou en remarquant des triangles semblables. Par exemple, comme ABH et CAH sont semblables, on a, par proportionnalité, le produit en croix $AH^2 = HB \times HC = 16HB$.

Ensuite, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on obtient :

$$15^2 = AH^2 + BH^2 = 16BH + BH^2 = (BH+8)^2 - 64$$

On en tire $BH + 8 = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$, d'où $BH = 17 - 8 = 9$.

Ensuite, on continue et on trouve normalement $AH = 12$ et $AC = 20$.

Correction de l'exercice 29.

Source : `https://twitter.com/Math_World_/status/1519662926860365824`

On peut utiliser le théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse (citer référence du problème).

On peut aussi refaire trois fois Pythagore, (ou bien utiliser les triangles semblables, ou utiliser la puissance du point K par rapport au cercle.)

Correction de l'exercice 30.

On a

$$A^2 = 11 + 6\sqrt{2} = 11 + \sqrt{72}, \quad B^2 = 11 + 2\sqrt{30} = 11 + \sqrt{120} \quad \text{et} C^2 = 11 + 2\sqrt{10} = 11 + \sqrt{40}.$$

On en déduit que

$$C < A < B.$$

Correction de l'exercice 31.

On obtient $AB = \sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$. (on fait deux fois Pythagore) `https://twitter.com/0y6tr4/status/1521866673493618690`

Correction de l'exercice 32.

`https://erich-friedman.github.io/packing/cirinsqu/` VERIFIER Le carré est de côté $2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Pour le premier le côté vaut $2+\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 33.

Le carré a un côté de $2+\dfrac{12}{\sqrt{13}}$. Voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=ONs1u3xRzrM&t=12s` et bien sûr le site `https://erich-friedman.github.io/packing/cirinsqu/`.

Correction de l'exercice 34.

`https://erich-friedman.github.io/packing/squinsqu/`

Correction de l'exercice 35.

`https://erich-friedman.github.io/packing/squinsqu/`

Correction de l'exercice 36.

On a

$$A^2 = 11+6\sqrt{2} = 11+\sqrt{72}, \quad B^2 = 11+2\sqrt{30} = 11+\sqrt{120} \quad \text{et} C^2 = 11+2\sqrt{10} = 11+\sqrt{40}.$$

On en déduit que

$$C < A < B.$$