

Autour du théorème de Pythagore

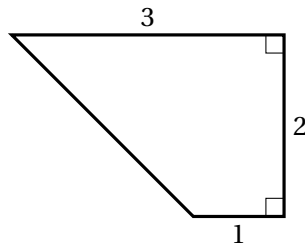
Damien Mégy

23 octobre 2023

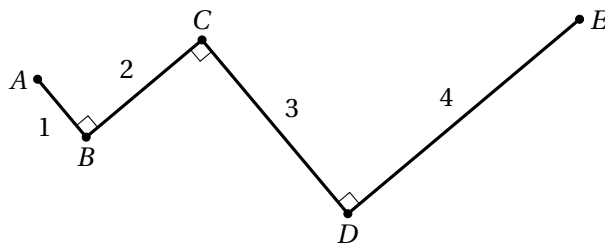
AVERTISSEMENT ! Ce document est un brouillon qui sert de catalogue pour les feuilles d'exos du club mathématique de Nancy <https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/club/>. Ne pas diffuser tel quel aux élèves ni de façon large sur le net, il reste des coquilles et énoncés parfois peu précis. Ce document a vocation à rester inachevé. Il peut néanmoins être utile aux enseignants. Enfin, ce document change en permanence, la version à jour est récupérable sur <https://github.com/dmegy/clubmath-exos>.

(Les exercices sont faisables sans connaître le concept de cosinus ni de sinus, uniquement avec Pythagore, à part les exceptions mentionnées à la fin.)

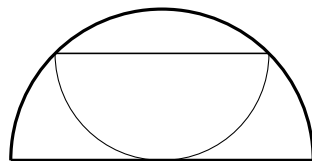
Problème 1. Soit $ABCD$ un trapèze rectangle comme sur la figure. Calculer la longueur AD .



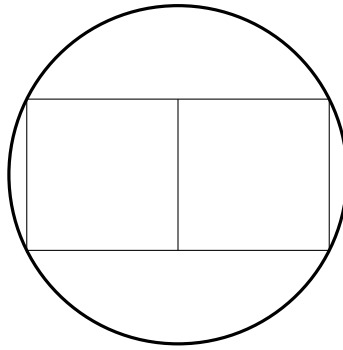
Problème 2. On considère une ligne brisée $ABCDE$ avec des angles droits et des distances comme sur la figure. Calculer la distance AE .



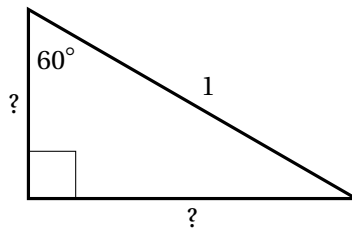
Problème 3. Dans un demi-cercle de rayon 1cm , on inscrit un autre demi-cercle plus petit, comme sur la figure. Quel est le rayon du petit demi-cercle ?



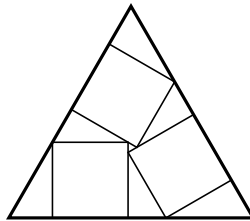
Problème 4. Deux carrés identiques de 1cm^2 sont juxtaposés et inscrits dans un cercle, comme sur la figure. Quel est le rayon du cercle ?



Problème 5. [Le triangle $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent 30° , 60° et 90° . Son hypoténuse AB mesure 1 cm. Quelle est la longueur des deux autres côtés?



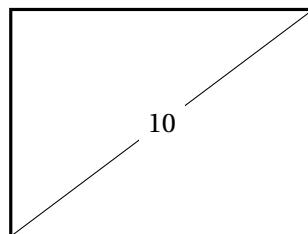
Problème 6. [Trois carrés dans un triangle équilatéral] Trois carrés identiques de 1cm^2 sont placés dans un triangle équilatéral comme sur la figure. Combien mesure le triangle équilatéral?



Problème 7. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

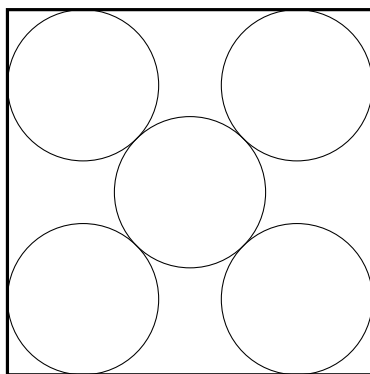
1. $ABCD$ est un rectangle.
2. Pour tout point X du plan, on a $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$.

Problème 8. [Périmètre et diagonale] Un rectangle a une diagonale de 10 mètres et un périmètre de 28 mètres. Calculer sa largeur et sa longueur.

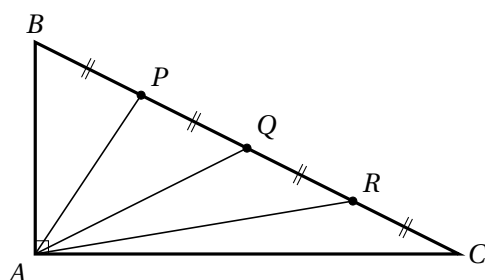


Dans toute la suite, un triangle « $3 - 4 - 5$ » est un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 5cm. C'est un triangle rectangle, comme on peut le vérifier à l'aide du théorème de Pythagore.

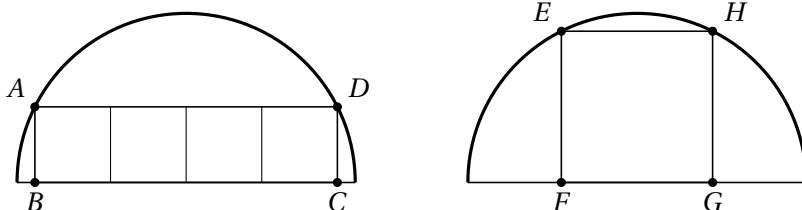
Problème 9. On inscrit cinq cercles identiques dans un carré, comme sur la figure. Sachant que le rayon des cercles est égal à 1cm , quelles sont les dimensions du carré?



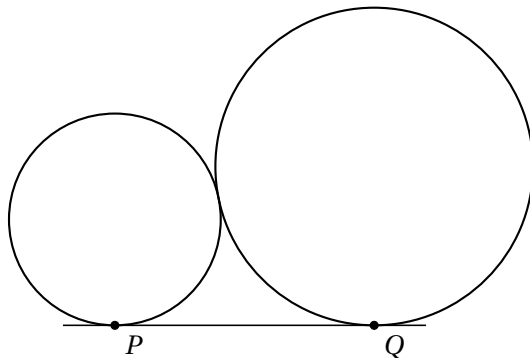
Problème 10. Soit ABC un triangle rectangle en A dont l'hypoténuse mesure 4cm. On la partage en quatre segments égaux $[BP]$, $[PQ]$, $[QR]$ et $[RC]$. Calculer $AP^2 + AQ^2 + AR^2$. Dans le cas général où l'hypoténuse est de longueur ℓ , calculer $AP^2 + AQ^2 + AR^2$ en fonction de ℓ .



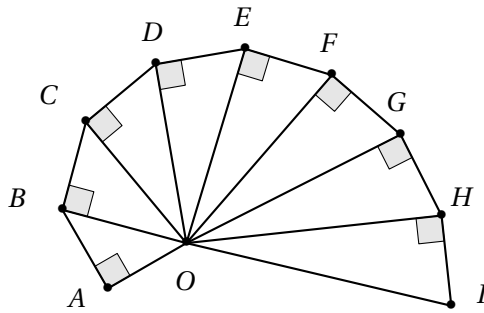
Problème 11. Dans deux demi-cercles identiques, on inscrit d'une part un rectangle $ABCD$ formé de quatre petits carrés juxtaposés, et d'autre part un carré $EFGH$. Lequel de $ABCD$ et $EFGH$ a la plus grande aire?



Problème 12. On considère deux cercles de rayon 2cm et 3cm qui ont un unique point de contact entre eux. Ils sont tous deux tangents en P et Q à une certaine droite. Quelle est la distance PQ ?

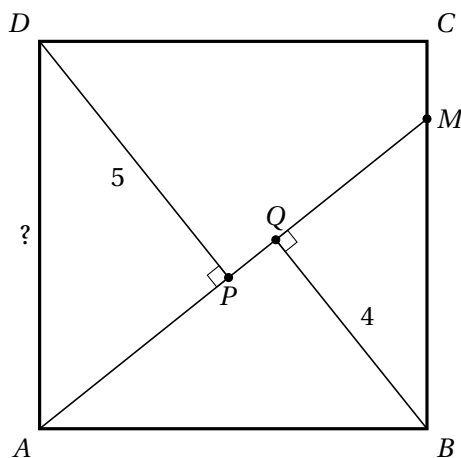


Problème 13. [Spirale pythagoricienne] Cette spirale est formée de triangles rectangles juxtaposés. On a $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = 1$. Que vaut OI ?

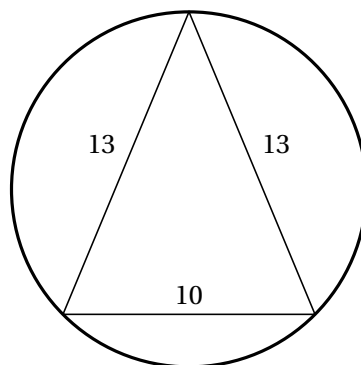


Problème 14. [Pythagore et triangles isocèles] <https://www.youtube.com/watch?v=tbRtYT1bLNs>
Début avec Pythagore et triangles isocèles. Tronquer l'exo pour ne pas avoir besoin de trigo.

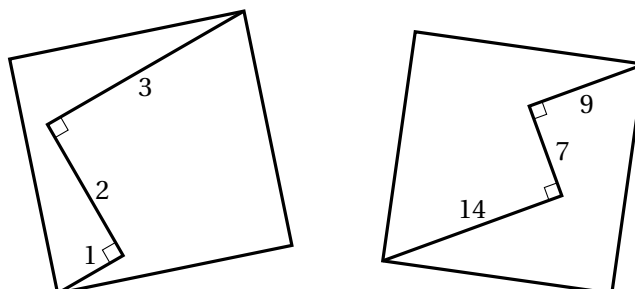
Problème 15. Dans un carré $ABCD$, on trace un point M sur le côté $[BC]$. Les perpendiculaires à (AM) passant par D et B coupent (AM) en P et Q . Sachant que $DP = 5\text{cm}$ et $BQ = 4\text{cm}$, déterminer l'aire du carré $ABCD$.



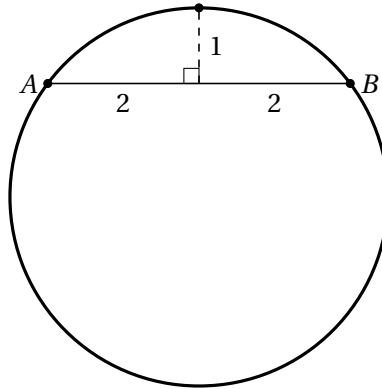
Problème 16. On considère un triangle isocèle dont les côtés mesurent 13cm, 13cm et 10cm. Quel est le rayon de son cercle circonscrit?



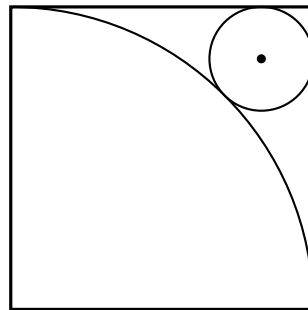
Problème 17. [Zig-Zag dans un carré] Que vaut à chaque fois le côté du carré?



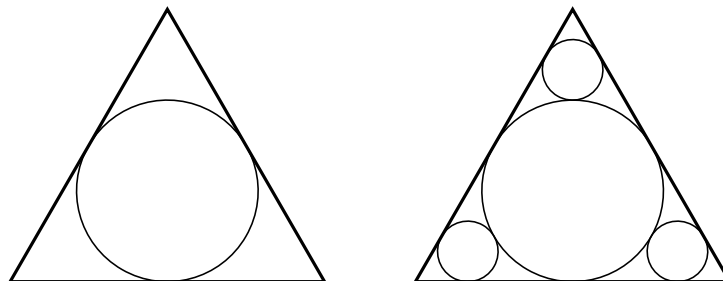
Problème 18. Dans un cercle \mathcal{C} , on a une corde $[AB]$ mesurant 4cm. De plus, on sait que la distance entre le milieu de cette corde et le cercle est de 1cm. Quel est le rayon du cercle?



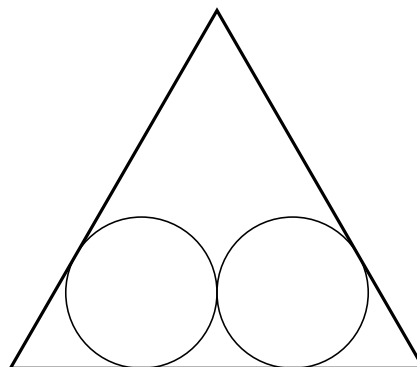
Problème 19. Dans un carré dont les côtés mesurent 1cm, on inscrit un quart de cercle puis un petit cercle comme sur la figure. Quel est le rayon du petit cercle?



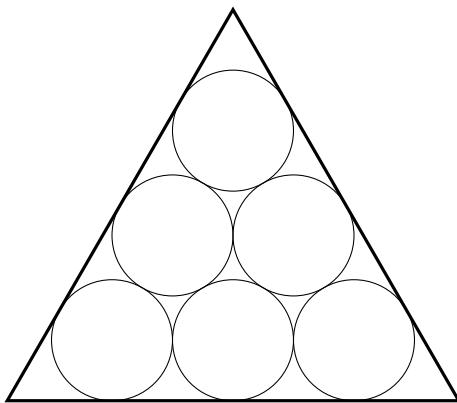
Problème 20. Quel est le rayon du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 1cm? Et si on rajoute trois petits cercles comme sur la figure de droite, quel est le rayon des petits cercles?



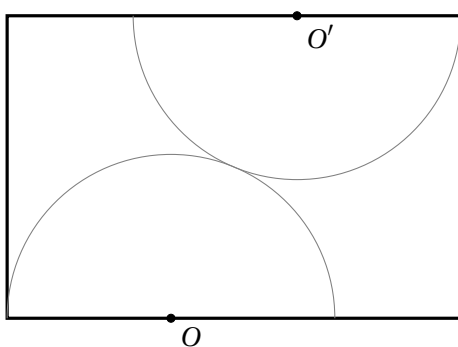
Problème 21. Combien mesure le côté du triangle équilatéral, si les deux cercles ont un rayon de 1cm?



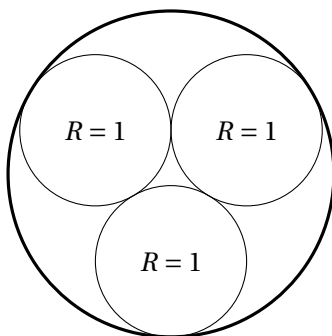
Problème 22. Combien mesure le côté du triangle équilatéral, si les six cercles ont un rayon de 1cm? (Généraliser ensuite avec plus de cercles : au lieu de six cercles, traiter le cas avec dix cercles, puis quinze etc.)



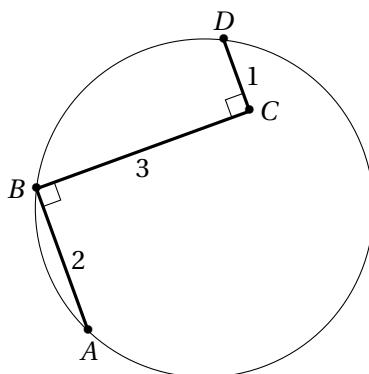
Problème 23. Dans un rectangle de dimensions $3\text{cm} \times 2\text{cm}$, on inscrit deux demi-cercles de même rayon qui se touchent en un seul point, comme sur la figure. Quel est le rayon de ces deux demi-cercles? (Ce n'est pas 1!)



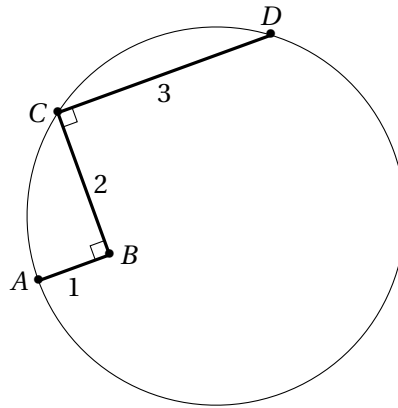
Problème 24. [Cercles tangents] Les trois petits cercles sont de rayon 1. Le grand cercle leur est simultanément tangent. Quel est son rayon?



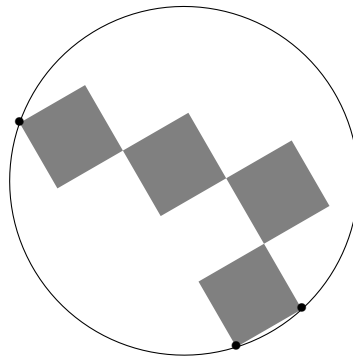
Problème 25. [Zig-zag dans un cercle] Quel est le rayon du cercle ci-dessous?



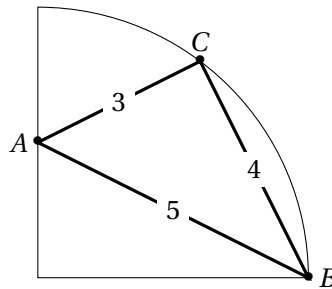
Problème 26. [Zig-zag dans un cercle,bis] Quel est le rayon du cercle ci-dessous?



Problème 27. Quatre carrés placés en damier sont inscrits dans un cercle qu'ils touchent en trois points, comme sur la figure. Si les carrés mesurent chacun 1cm^2 , quel est le rayon du cercle?

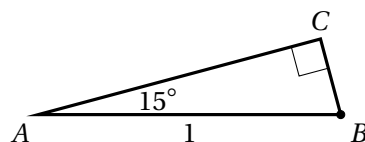


Problème 28. [Triangle rectangle dans un quart de cercle] Un triangle rectangle « 3 – 4 – 5 » est inscrit dans un quart de cercle comme ci-dessous ; Quel est le rayon du quart de cercle?



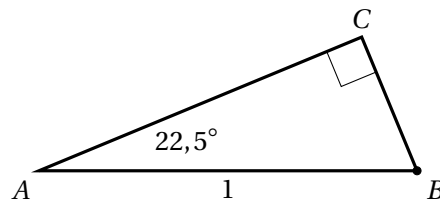
Problème 29. [Le triangle $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent 15° , 75° et 90° , comme sur la figure ci-dessous. Son hypoténuse AB mesure 1 cm. Montrer que $AC = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ puis que

$$CB = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

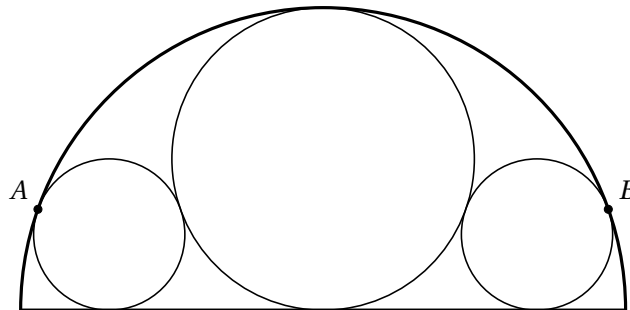


Problème 30. [Consolidation : le triangle $22,5^\circ - 67,5^\circ - 90^\circ$] Le triangle ABC a des angles qui mesurent $22,5^\circ$, $67,5^\circ$ et 90° , comme sur la figure ci-dessous. Son hypoténuse mesure 1 cm.

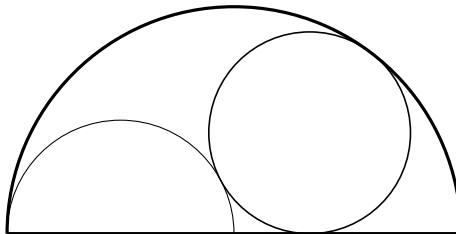
En utilisant la même technique qu'au problème précédent, calculer AC .



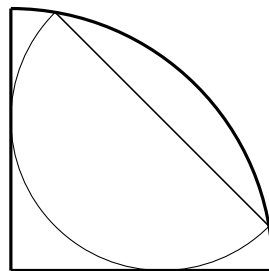
Problème 31. On inscrit trois cercles dans un demi-cercle de diamètre 8cm, comme sur la figure ci-dessous. On note A et B les points de contact du demi-cercle avec les deux petits cercles latéraux. Combien mesure le segment $[AB]$?



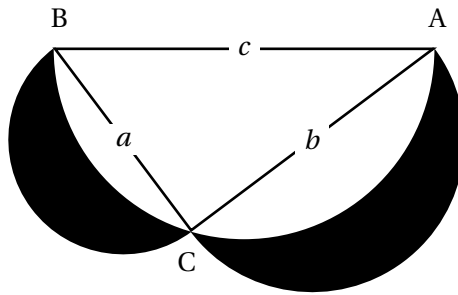
Problème 32. [Olympiades polonaises] Dans un demi-cercle de rayon 2cm, on inscrit un premier demi-cercle deux fois plus petit, de rayon 1cm, et un un cercle de rayon R , comme sur la figure. Que vaut R ?



Problème 33. Dans un quart de cercle, on inscrit un demi-cercle comme sur la figure. Si le rayon du demi-cercle est 1cm, quel est le rayon du quart de cercle?

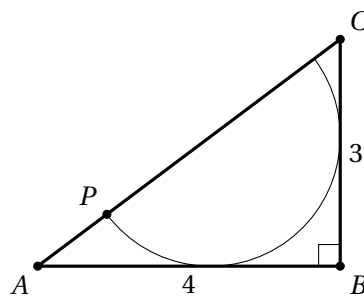


Problème 34. [Théorème des lunules] Soit ABC un triangle rectangle en C . On trace le demi-cercle de diamètre $[AB]$ qui contient C ainsi que les deux demi-cercles de diamètres $[BC]$ et $[CA]$ extérieurs au triangle. Ces trois demi-cercles délimitent deux lunules, coloriées en noir sur la figure. Démontrer que la somme des aires de ces deux lunules est exactement égale à l'aire du triangle!

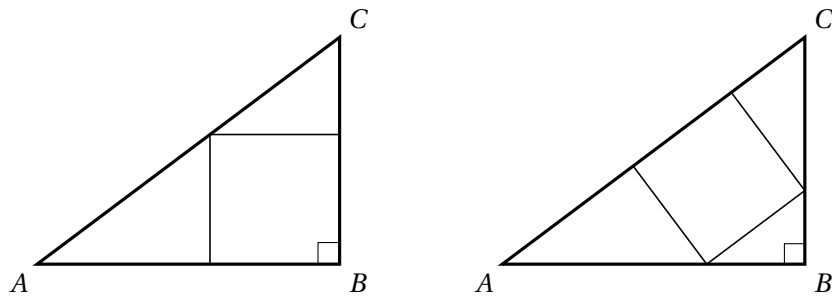


1 Pythagore et triangles semblables

Problème 35. Dans un triangle rectangle ABC de type « 3 – 4 – 5 », on inscrit un demi-cercle comme sur la figure. Calculer la distance AP .

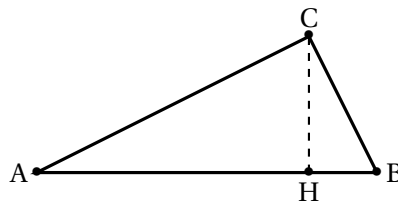


Problème 36. [Carrés dans un triangle 3-4-5] Dans un triangle rectangle ABC de type « 3 – 4 – 5 », on inscrit un carré de deux manières différentes, comme sur les deux figures. Quelles sont les dimensions des deux carrés ?

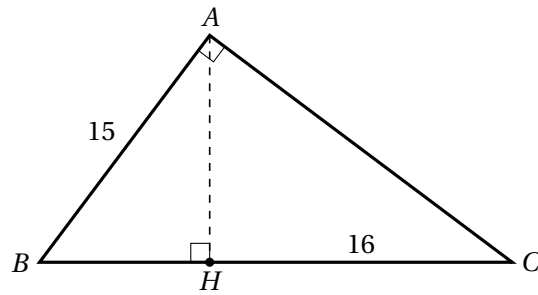


Problème 37. [Théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse] Soit ABC un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de C . Montrer que

$$HA \times HB = HC^2.$$

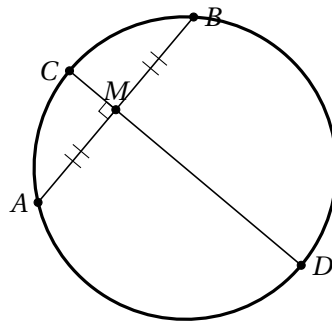


Problème 38. Dans un triangle rectangle en A , en notant H le pied de la hauteur issue de A , on a $AB = 15$ et $HC = 16$. Calculer BH , AH et AC .



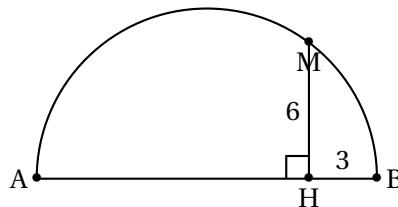
Problème 39. [Théorème des cordes sécantes dans un cas particulier] Dans un cercle, on trace une corde $[AB]$, de milieu M . Sa médiatrice intersecte le cercle en C et D . Montrer que

$$MA \times MB = MC \times MD.$$



(Note : en réalité, ce théorème reste vrai pour deux cordes *quelconques* s'intersectant en M , mais la démonstration est plus difficile et utilise le théorème de l'angle inscrit. La quantité $MA \times MB$ est alors appelée la *puissance* du point M par rapport au cercle.)

Problème 40. Sur un demi-cercle de diamètre $[AC]$, on place un point M de sorte à avoir les longueurs $HB = 3$ et $HM = 6$. Quel est le rayon du demi-cercle?



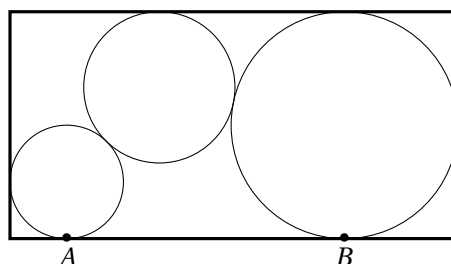
1.1 Calculs avec les racines carrées

Problème 41. [Comparaisons de racines carrées]

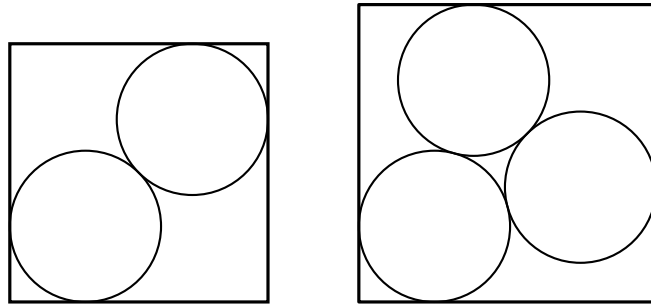
On considère les trois nombres suivants : $A = 3 + \sqrt{2}$, $B = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ et $C = 1 + \sqrt{10}$? Classer ces trois nombres du plus petit au plus grand, sans utiliser évidemment de calculatrice.

1.2 Circle Packing

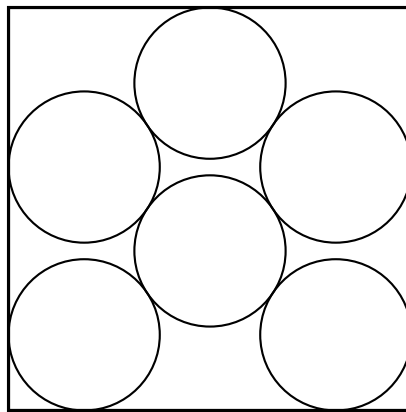
Problème 42. [circle packing, 1] Les trois cercles ci-dessous sont tangents et inscrits dans un rectangle. Leurs diamètres valent 3, 4 et 6. Calculer la longueur AB .



Problème 43. [Cercles dans un carré] La figure suivante représente des cercles qui ont un rayon égal à 1 et placés dans un carré. Quelles sont les dimensions des carrés ?



Problème 44. [Cercles dans un carré, bis] La figure suivante représente des cercles qui ont un rayon égal à 1 et placés dans un carré. Quelles sont les dimensions du carré ?

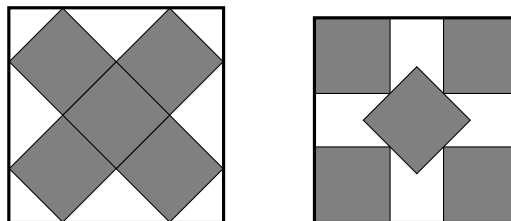


Note : il s'agit du plus petit carré qui peut contenir six disques de rayon un. Ce résultat a été prouvé par Graham en 1963.

1.3 Square packing

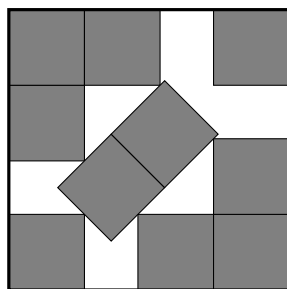
Problème 45. [Cinq carrés dans un carré] On cherche à placer cinq petits carrés identiques de 1cm^2 dans un grand carré, de la façon la plus « efficace » possible.

Les deux figures ci-dessous présentent deux configurations possibles. On arrive à voir à l'œil nu que la seconde configuration est la plus efficace des deux. Démontrer ce résultat en calculant dans les deux cas les dimensions du grand carré.



Note : Frits Göbel a prouvé en 1979 que la configuration de droite est la plus efficace parmi toutes les manières de placer cinq carrés dans un carré.

Problème 46. [Dix carrés dans un carré] Pour dix petits carrés, le plus petit carré est le suivant, mais ça n'a été démontré qu'en 2003 par Walter Stromquist. Quelle est la taille du carré ? (Les carrés obliques sont toujours inclinés de 45° .)



Ces problèmes pourraient sembler évidents mais ne le sont pas. Par exemple, pour 11 carrés, on a longtemps cru que la configuration optimale était celle ci-dessous à gauche, avec des carrés inclinés à 45° . Mais en 1979, Walter Trump trouva une autre configuration légèrement meilleure, avec un angle d'environ $40,18^\circ$. On ignore encore si cette dernière configuration est optimale!

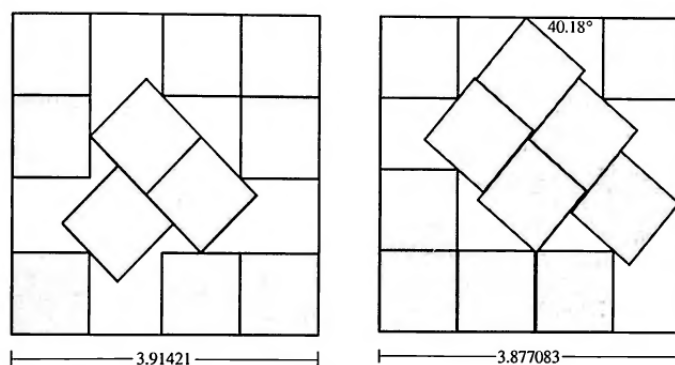
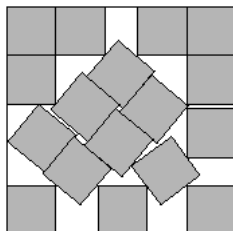


Illustration tirée du livre *Which Way Did The Bicycle Go?*, p. 105.

Pour 17 carrés, la meilleure configuration connue à ce jour est la suivante. On connaît finalement assez peu de choses sur ces questions!



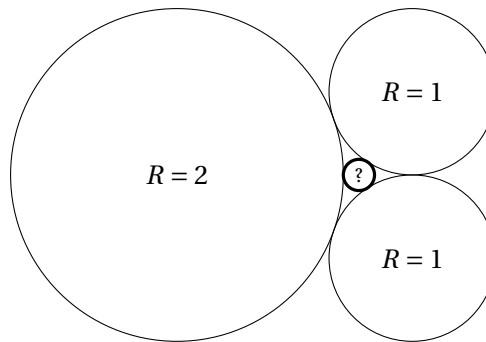
Carrés dans un triangle équilatéral

1.4 Autre

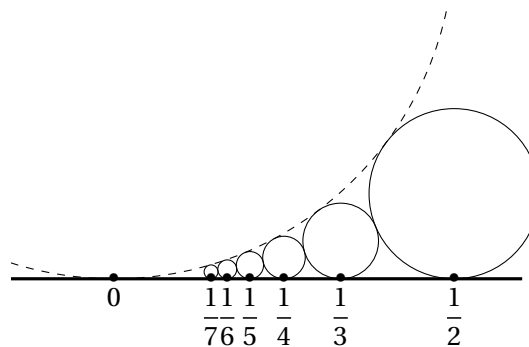
Problème 47. [Comparaisons de racines carrées]

On considère les trois nombres suivants : $A = 3 + \sqrt{2}$, $B = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ et $C = 1 + \sqrt{10}$? Classer ces trois nombres du plus petit au plus grand, sans utiliser évidemment de calculatrice.

Problème 48. [Vers le théorème de Descartes] Les trois grands cercles sont de rayon 1 et 2. Le petit cercle leur est simultanément tangent. Quel est son rayon?



Problème 49. [Cercles de Ford] Sur une droite graduée, on « pose » des cercles de diamètre $\frac{1}{n^2}$ sur les abscisses $\frac{1}{n}$, comme sur la figure ci-dessous. Montrer que tous ces cercles sont tangents, et qu'ils sont tous tangents au cercle de diamètre 1 posé en l'origine!!



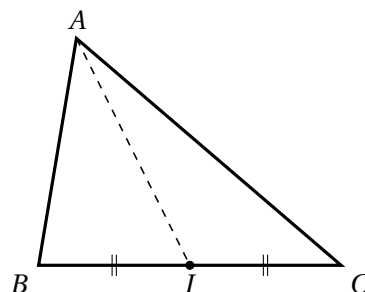
Problème 50. blabla

Problème 51. blabla

Problème 52. [Premier théorème de la médiane (théorème d'Apollonius)] Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Établir les deux identités (équivalentes) suivantes :

$$2AB^2 + 2AC^2 = BC^2 + 4AI^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$



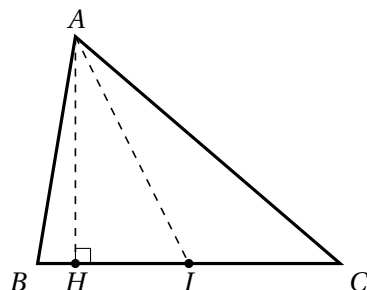
Problème 53. [Identité du parallélogramme] Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$$

Problème 54. [Troisième théorème de la médiane] Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A . En supposant que I est dans le segment $[BI]$ comme sur la figure ci-dessous, montrer que

$$AC^2 - AB^2 = 2BC \times IH.$$

Et si la hauteur n'appartient pas au segment $[BI]$?



Indications

Exercice 2. Trouver un rectangle dont $[AE]$ est une diagonale et appliquer Pythagore.

Exercice 4.

Exercice 5. Considérer la symétrie axiale d'axe (AC) .

Exercice 6. Les triangles qui apparaissent sont tous des triangles rectangles ayant des angles de 30° et 60° , dont on sait calculer les côtés.

Exercice 7. Pour $2 \Rightarrow 1$, on peut prendre des points P particuliers.

Exercice 8. La largeur et la longueur sont des nombres entiers.

Exercice 9. Tracer une diagonale du carré : combien mesure-t-elle ?

Exercice 10. Pour le cas particulier on trouve 14.

Exercice 12.

Exercice 13. Appliquer Pythagore dans les triangles rectangles en partant du plus petit. Le résultat demandé est un nombre entier.

Exercice 15. Considérer les triangles ADP et AQB

Exercice 16. Il y a une hauteur h que l'on peut calculer à l'aide de Pythagore. Ensuite, si l'on note H le pied de cette hauteur et O le centre du cercle circonscrit, on peut par exemple appliquer Pythagore dans le triangle rectangle OHB .

Exercice 17.

Exercice 18. Placer le centre O du cercle. Que vaut la distance de O à la corde, en fonction du rayon R ? Ensuite, on peut appliquer Pythagore.

Exercice 19. Tracer le centre du petit cercle et décomposer la diagonale du carré en plusieurs segments.

Exercice 20. Il est peut-être plus simple de s'imaginer que le cercle est de rayon 1 et de chercher la taille du triangle équilatéral. Tracer les hauteurs de ce triangle équilatéral.

Exercice 21. On peut tracer la hauteur qui passe entre les deux cercles et qui divise le triangle équilatéral en deux triangles rectangles. Combien mesure cette hauteur en fonction du côté du triangle ? Ensuite, on peut se concentrer sur un seul de ces deux triangles, marquer les points de contact avec le cercle, et

Exercice 22. On peut par exemple tracer les centres des cercles puis tracer le triangle qui relie les trois cercles extrémaux.

Exercice 24. Tracer le triangle (équilatéral) reliant les centres des trois petits cercles. Combien mesure sa hauteur ?

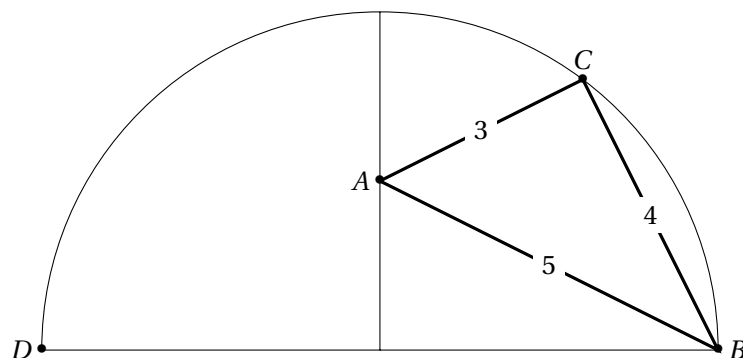
Exercice 25. La droite (BC) recoupe le cercle en un point E . Que dire de $[AE]$? L'objectif est de calculer la distance CE , après quoi le rayon du cercle est relativement rapide à obtenir.

Autre indication : il y a une racine carrée dans la réponse.

Exercice 26. La droite (BC) recoupe le cercle en un point E . Que dire de $[AE]$? L'objectif est de calculer la distance CE , après quoi le rayon du cercle est relativement rapide à obtenir.

Exercice 27. On peut trouver le centre en intersectant les médiatrices de deux cordes.

Exercice 28. On peut compléter la figure comme suit :



Ensuite, on peut prolonger la droite (AC) .

Exercice 29. Attention, le calcul peut mener à des expressions qui *semblent* différentes de celles demandées : il faut alors démontrer qu'elles coïncident avec les expressions demandées. Par exemple, on a $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$. (Exercice : pourquoi?)

Exercice 31. Notons R le rayon des petits cercles, O le centre du demi-cercle, I le centre du grand cercle, O' le centre du petit cercle latéral gauche, C son projeté orthogonal sur la base du demi-cercle, D son projeté orthogonal sur (OI) . Appliquer Pythagore dans les triangles $OO'C$ et $O'DI$.

Exercice 32.

Exercice 34. Pour calculer l'aire des deux lunules, il faut calculer l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ et la retrancher à une autre aire.

Exercice 41. Élever les trois quantités au carré.

Exercice 42.

Exercice 43.

Exercice 44.

Exercice 45.

Exercice 46.

Exercice 47. Élever les trois quantités au carré.

Exercice 48. Tracer les centres des cercles et les relier.

Exercice 49. Commencer par montrer que les deux premiers cercles, de diamètres $1/4$ et $1/9$, sont tangents. Dessiner leurs centres.

Exercice 52. On peut par exemple démontrer la seconde identité pour commencer. (Conseil : noter les longueurs a , b , c , h et m , par exemple. Et on peut noter $BI : a/2 = a'$. Ainsi on veut démontrer que $b^2 + c^2 = 2m^2 + 2a'^2$.) Considérer la hauteur $[AH]$ issue de A et utiliser Pythagore dans les trois triangles AHB , AHI et AHC . Puis, exprimer toutes les quantités inconnues autres que les côtés du triangle en fonction de AI et BI .

Exercice 53. Utiliser le premier théorème de la médiane. Sinon, on peut refaire le travail en projetant un sommet du parallélogramme sur une diagonale.

Exercice 54.

Correction

Correction de l'exercice 2.

Considérons un point P tel que $BCDP$ est un rectangle. Alors APE est rectangle en P . On a alors $AE^2 = (1+3)^2 + (2+4)^2 = 4^2 + 6^2 = 52$, d'où $AE = 2\sqrt{13}$.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

On obtient un triangle équilatéral quand on dédouble le triangle suivant l'axe proposé. On en déduit qu'un côté mesure $1/2$, et ensuite Pythagore donne $\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour le troisième côté.

Correction de l'exercice 6.

On trouve $\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 8.

On a d'après Pythagore $\ell^2 + L^2 = 10^2 = 100$ et $28 = p = 2\ell + 2L$ donc $\ell + L = 14$.

On en déduit $(\ell + L)^2 = 14^2 = 196$ et donc en soustrayant, $L \times \ell = 48$.

D'après l'indication, la largeur et la longueur sont des nombres entiers. En procédant par tâtons, on trouve $\ell = 6$ et $L = 8$. Sans utiliser l'indication, on peut remplacer L par $14 - \ell$, remplacer dans la seconde équation et résoudre le trinôme.

Correction de l'exercice 9.

La diagonale mesure $d = 4 + 2\sqrt{2}$. On en déduit que le côté du carré est égal à :

$$c = \frac{d}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2.$$

Correction de l'exercice 10.

On « quadrille », c'est-à-dire qu'on projette les points P , Q et R sur (AB) et (AC) . Ensuite on applique plusieurs fois Pythagore. Cas général : $\frac{7}{8}BC^2$.

Correction de l'exercice 11.

En appliquant le théorème de Pythagore, on voit que les deux aires sont égales à $\frac{4}{5}R^2$!

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 15.

Les triangles ADP et AQB sont égaux : ils ont les mêmes angles et la même hypoténuse. On en déduit que $AP = 4$ et $AQ = 5$, et en appliquant le théorème de Pythagore, on trouve le côté du carré : $AB = \sqrt{41}$. Le carré a donc une aire de 41cm^2 .

Pour trouver la distance AM , il suffit de trouver QM . Le plus simple est d'utiliser des triangles semblables, ou Thalès, on trouve $QM = 16/5$, donc $AM = 5 + 16/5 = 41/5$.

Correction de l'exercice 16.

On trouve une hauteur de 12, et un rayon de $\frac{169}{24}$.

Correction de l'exercice 17.

Le côté vaut $\sqrt{10}$.

Pour le second la source d'origine est : <https://twitter.com/Oy6tr4/status/1522092641017602049>. Mais en fait le premier est mieux, plus simple

Correction de l'exercice 18.

Le diamètre vaut 5cm.

Correction de l'exercice 19.

On décompose la diagonale en trois segments : on obtient

$$\sqrt{2} = 1 + R + R\sqrt{2}$$

Ceci aboutit à $R = 3 - 2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 20.

On trouve $R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. (Si le triangle est de côté 1.)

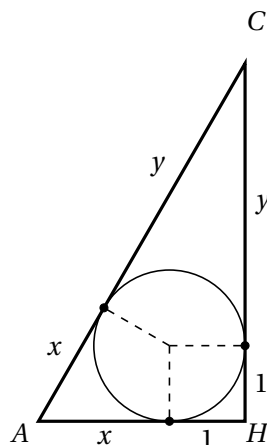
Sinon, on peut remarquer que pour un triangle équilatéral, le centre du cercle inscrit est également le centre de gravité, ou le centre du cercle circonscrit. Il se trouve donc au tiers des médianes en partant de la base. Or, les médianes sont les hauteurs, elles mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les petits cercles sont trois fois plus petits que le grand cercle, comme on le voit en traçant les tangentes communes aux cercles, ce qui partage le triangle en un hexagone de côté $1/3$ et trois petits triangles équilatéraux.

Comme on sait que $R = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, on trouve donc $r = \frac{1}{6\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 21.

On trace la hauteur CH comme indiqué, et on se concentre sur le triangle de gauche :



La quantité que l'on cherche est $\ell = x + y$.

Appliquons Pythagore dans le triangle rectangle ACH , rectangle en H :

$$(x + y)^2 = (y + 1)^2 + (x + 1)^2,$$

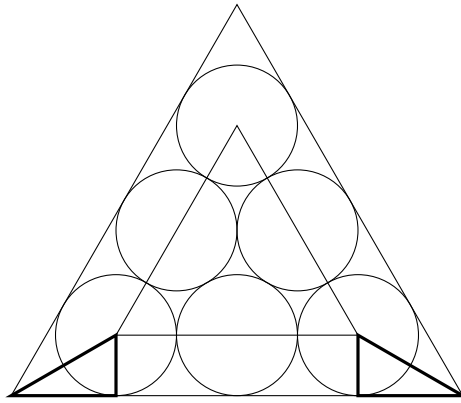
c'est-à-dire, après simplification :

$$xy = x + y + 1$$

Comme il s'agit d'un triangle rectangle ayant des angles de 30° et 60° , on sait (sinon on refait Pythagore) que le petit côté mesure la moitié de l'hypoténuse : $x + y = 2(x + 1)$, d'où on déduit que $y = x + 2$. En remplaçant y par $x + 2$ dans l'équation donnée par Pythagore, on obtient alors $x^2 + 2x = 2x + 3$ donc $x = \sqrt{3}$.

Finalement, on obtient $\ell = x + y = 2x + 2 = 2 + 2\sqrt{3}$ pour la longueur du côté du triangle équilatéral.

Correction de l'exercice 22.



Le triangle « intérieur », celui qui relie les centres des trois cercles extrémaux, fait 4cm de côté. Ensuite, il faut rajouter ce qui correspond aux deux petits triangles marqués sur la figure.

Ces petits triangles sont des triangles rectangle avec des angles de 30° et 60° et un petit côté de 1cm. L'autre côté mesure donc $\sqrt{3}$ (et l'hypoténuse mesure 2cm).

Le grand triangle équilatéral a donc un côté qui mesure $4 + 2\sqrt{3}$ cm.

Généralisation : s'il y a N cercles sur la rangée du bas, alors le côté est égal à $2N - 2 + 2\sqrt{3}$. Il y a alors $\frac{N(N+1)}{2}$ cercles dans le triangle.

Correction de l'exercice 23.

On peut par exemple projeter le centre du rectangle sur une base, noter x la distance de O à ce projeté, et on obtient alors en considérant la largeur et la hauteur du rectangle : $3 = 2R + 2x$ et $2 = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, c'est-à-dire $1 = R^2 - x^2 = \frac{3}{2}(R - x)$, d'où finalement le système $R + x = \frac{3}{2}$ et $R - x = \frac{2}{3}$ et donc $2R = \frac{9+4}{6}$

et finalement $R = \frac{13}{12}$.

Autre méthode : on projette O' sur la base, et on applique Pythagore dans $OO'H$. On a $OH = 3 - 2R$, donc :

$$(3 - 2R)^2 + 4 = 4R^2$$

Et donc $13 - 12R = 0$, c'est plus rapide!

Correction de l'exercice 26.

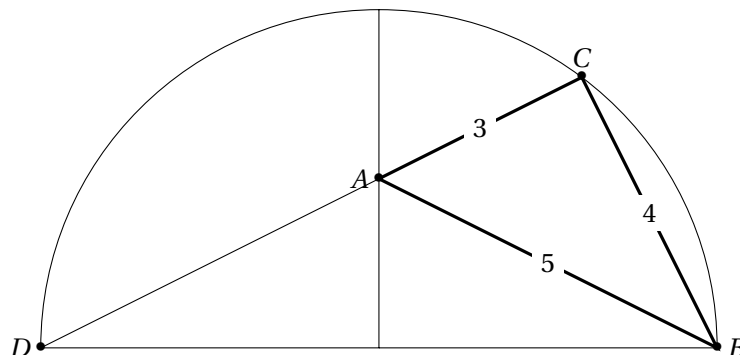
Le diamètre est 5.

Correction de l'exercice 27.

Le rayon vaut $\sqrt{85}/4$.

Correction de l'exercice 28.

Complétons la figure comme suit :



Comme le triangle ABC est rectangle en C , la droite (AC) recoupe le droite (OB) en D . Le triangle DBC est rectangle en C et on a $DC = 8$ et $BC = 4$, donc en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient

$$DB = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Le rayon est donc égal à $2\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 29.

Considérer la symétrie axiale d'axe (AC) . On note B' l'image de B par cette symétrie. Ensuite, projeter perpendiculairement le point B sur la droite (AB') , et reconnaître un triangle rectangle ayant un angle de 30° et une hypoténuse de 1 cm .

Correction de l'exercice 31.

En exprimant toutes les distances en fonction de R , les termes en R^2 s'annulent et on trouve une équation de degré un qui donne $R = 1$. Ensuite, on en déduit que $AB = 16\sqrt{2}/3$.

Correction de l'exercice 32.

On note H le projeté du centre du petit cercle sur la base du grand demi-cercle. On écrit Pythagore dans les deux triangles rectangles. En notant $x = OH$, on trouve en éliminant r^2 l'équation $3r = 2 + x$. On injecte $x = 3r - 2$ dans la première équation, il reste $0 = 9r^2 - 8r$ d'où $r = 8/9$.

Correction de l'exercice 33.

Le rayon du quart de cercle est $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 36.

Pour le deuxième carré, on a intérêt à noter $60x$ le côté du carré, de cette façon c'est divisible par 3, 4 et 5. Ensuite on utilise les triangles semblables, mais du coup cet exo est faisable sans Pythagore. On trouve que $x = \frac{1}{37}$ par proportionnalité, le deuxième carré fait donc $60/37$ de côté.

Avec Pythagore ça doit être plus pénible...

Le premier carré fait $12/7$ de côté. Là aussi, on a intérêt à noter $12y$ le côté, comme ça c'est divisible par trois et quatre. Et là aussi il vaut mieux faire ça avec des triangles semblables. Il est plus gros que le premier car $444 = 12 \times 37 \geq 7 \times 60 = 420$. Sur le dessin ça se voit quand même assez nettement.

Correction de l'exercice 37.

On fait Pythagore dans les trois triangles et ça se simplifie.

Évidemment on pourrait faire ça plus joliment avec des triangles semblables.

Correction de l'exercice 38.

En calculant l'aire du triangle de deux façons, on a $AH \times BC = AB \times AC$.

Ensuite, on peut procéder de plusieurs façons, juste avec Pythagore dans les trois triangles rectangles, ou en remarquant des triangles semblables. Par exemple, comme ABH et CAH sont semblables, on a, par proportionnalité, le produit en croix $AH^2 = HB \times HC = 16HB$.

Ensuite, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H , on obtient :

$$15^2 = AH^2 + BH^2 = 16BH + BH^2 = (BH + 8)^2 - 64$$

On en tire $BH + 8 = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$, d'où $BH = 17 - 8 = 9$.

Ensuite, on continue et on trouve normalement $AH = 12$ et $AC = 20$.

Correction de l'exercice 40.

Source : https://twitter.com/Math_World_/status/1519662926860365824

On peut utiliser le théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse (citer référence du problème).

On peut aussi refaire trois fois Pythagore, (ou bien utiliser les triangles semblables, ou utiliser la puissance du point K par rapport au cercle.)

Correction de l'exercice 41.

On a

$$A^2 = 11 + 6\sqrt{2} = 11 + \sqrt{72}, \quad B^2 = 11 + 2\sqrt{30} = 11 + \sqrt{120} \quad \text{et} \quad C^2 = 11 + 2\sqrt{10} = 11 + \sqrt{40}.$$

On en déduit que

$$C < A < B.$$

Correction de l'exercice 42.

On obtient $AB = \sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$. (on fait deux fois Pythagore) <https://twitter.com/0y6tr4/status/1521866673493618690>

Correction de l'exercice 43.

<https://erich-friedman.github.io/packing/cirinsqu/> VERIFIER Le carré est de côté $2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Pour le premier le côté vaut $2 + \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 44.

Le carré a un côté de $2 + \frac{12}{\sqrt{13}}$. Voir la vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=ONs1u3xRzrM&t=12s> et bien sûr le site <https://erich-friedman.github.io/packing/cirinsqu/>.

Correction de l'exercice 45.

<https://erich-friedman.github.io/packing/squinsqu/>

Correction de l'exercice 46.

<https://erich-friedman.github.io/packing/squinsqu/>

Correction de l'exercice 47.

On a

$$A^2 = 11 + 6\sqrt{2} = 11 + \sqrt{72}, \quad B^2 = 11 + 2\sqrt{30} = 11 + \sqrt{120} \quad \text{et} \quad C^2 = 11 + 2\sqrt{10} = 11 + \sqrt{40}.$$

On en déduit que

$$C < A < B.$$

Correction de l'exercice 53.

Il y a aussi une rédaction courte ici <https://math.stackexchange.com/questions/3185755/parallelogram-law> avec Pythagore.