
TD1 : courbes algébriques planes

Dans la suite les courbes sont définies sur un corps k quelconque sauf précision supplémentaire.

Exercice 1. La courbe $x^2 + y^2 = 1$ a-t-elle des points à l'infini sur \mathbb{F}_q ?

Exercice 2. On considère la courbe algébrique affine $x^2 - 2y^2 = 1$ sur un corps k de caractéristique différente de 2 .

1. Est-elle lisse?
2. Quels sont ses points à l'infini sur \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{F}_p ?
3. La courbe projective est-elle lisse aux points à l'infini?

Exercice 3. Mêmes questions pour la courbe $x^2 - 3y^2 = 1$.

Exercice 4. [Folium] Soit $a \in k$, avec $\text{car}(k) \neq 3$. On considère la courbe algébrique

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Est-elle lisse? A-t-elle des points à l'infini (en fonction du corps k) ?

Exercice 5. Expliquer pourquoi la courbe affine d'équation $y^2 = 3(1 - (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 4))$ n'a aucun point sur \mathbb{F}_7 .

Exercice 6. Montrer qu'une courbe de genre 0 ou 1 projective lisse sur \mathbb{F}_p possède toujours au moins un point.

Exercice 7. Déterminer la fonction zêta de l'espace affine et projectif de dimension d . Que peut-on dire en relation avec les conjectures de Weil ?

Exercice 8. Déterminer la fonction zêta de la courbe affine \mathcal{C} d'équation affine $xy = 0$, puis de la courbe projective associée $\tilde{\mathcal{C}}$. Que peut-on dire en relation avec les conjectures de Weil ?

Exercice 9. Déterminer la fonction zêta de la droite projective privée des deux points $(0 : 1)$ et $(1 : 0)$. Que peut-on dire en relation avec les conjectures de Weil ?

Exercice 10. Déterminer la fonction zêta de la courbe affine $y^2 = x^3$ sur \mathbb{F}_q , avec $q > 3$. Que remarque-t-on ?