Défis mathématiques pour le collège

(classés par niveau, programmes 2016)

Version préliminaire, compilée le 27 janvier 2018

Table des matières

1 Introduction

1.1 Présentation du document

Ce document est une liste d'exercices niveau collège mais pouvant être assez difficiles (pour élèves motivé(e)s / pour motiver les élèves).

Il a été écrit dans l'intention d'être conforme aux programmes de 2016. La référence est le BO et, lorsque ça ne permettait pas d'être totalement sûr, les manuels Sésamath 2016, qui sont disponibles gratuitement en version électronique (à l'adresse `http://manuel.sesamath.net/index.`

php?page=telechargement). Les exercices sont classés par année, de la sixième à la troisième, puis par thèmes. Toute suggestion est la bienvenue.

En complément, on propose quelques exercices sur des notions ayant récemment disparu des programmes de collège (typiquement la notion de droite tangente à un cercle ou de centre de gravité). Ces exercices sont clairement distingués de ceux qui peuvent être traités en se limitant au programme et sont placés dans des sections à part. Les anciennes éditions des manuels Sesamath, toujours accessibles gratuitement en ligne, sont de bonnes sources d'exercices sur ces thèmes.

Quasiment tous les exercices sont corrigés, mais les corrections destinées aux enseignants : le style de rédaction est inégal, certaines solutions sont incomplètes ou utilisent des formulations et notations non étudiées au collège (par exemple, certains exercices sur les angles sont rédigés à l'aide d'angles orientés de droites).

Dans la mesure du possible, on a privilégié les exercices qui demandent un raisonnement un minimum complexe, articulé en plusieurs points. La géométrie prédomine donc largement, mais il existe aussi de beaux exercices d'arithmétique et de combinatoire abordables au collège et on s'est efforcé d'en inclure le plus possible.

Certains exercices demandent plus d'initiative que d'autres : compléter une figure, placer des points supplémentaires des points pour voir une symétrie, etc. Ces exercices sont signalés par le symbole 💡. L'icône ⚙ permet de distinguer des exercices plus difficiles et l'icône ♡ orne les exercices qui ont particulièrement plu.

Ce document ainsi que son fichier source modifiable (en LaTeX) sont disponibles à l'adresse : http://depmath-nancy.univ-lorraine.fr/club.

2 Sources d'exercices

Les manuels et cahiers Sésamath actuels ainsi que les anciennes éditions toujours disponibles sont de bonnes sources d'exercices. Citons également :

1. Le concours Kangourou.
2. Les rallyes mathématiques. Exemples :
   — http://apmeplorraine.fr/doc/Rallye%20Math%C3%A9matique%20de%20Lorraine%202016.pdf,
   — http://apmeplorraine.fr/doc/Rallye%20Math%C3%A9matique%20de%20Lorraine%202017.pdf,

   Voir aussi les rallyes d'autres académies. En général, certains exercices sont abordables au collège.
3. Les anciens manuels de mathématiques de collège, par exemple la série Lebossé-Hémery (années 60) dont sont tirés quelques exercices présentés ici.
4. Les exercices des olympiades académiques sont parfois en partie accessibles au collège;
5. Les exercices estampillés « collège » dans les coupes Animath et leurs éliminatoires, ainsi que des anciens test d'entrée de l'OFM. On en a inclus cinq dans ce document.
6. Wikipedia, MathWorld, Cut the Knot, Brillant.org, ...
7. Le jeu Euclidea sur ordinateur ou smartphone.
8. Sans oublier les nombreux blogs et sites web personnels de collègues. (Chronomath, Descartes et les mathématiques, Fan de géométrie, Maths en folie, ...)

3 Classe de 6ème

Contenu du Sesamath : nombres naturels, fractions, nombres décimaux, distances et cercles, angles, milieux, droites parallèles et perpendiculaires, triangles et quadrilatères, symétrie axiale, axe de symétrie, médiatrice d'un segment (équivalence des deux définitions) et bissectrice d'un angle, triangles isocèles et équilatéraux, quadrilatères particuliers.

3.1 Divers

Exercice 1 (Somme et différence)**.** Jacques et Jean comptent leurs CD. Ils en ont 54 à eux deux. Jean en a 12 de moins que Jacques.

Combien possèdent-ils de CD chacun ? [Indications] [Correction]

Exercice 2 (Suites de nombres)**.** On considère les trois suites de nombres :

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 8, \quad 16, \quad 18, \dots$$

$$0, \quad 2, \quad 6, \quad 14, \quad 30, \quad 62, \dots$$

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \dots$$

À chaque fois, quel devrait être le nombre suivant ? [Indications] [Correction]

Exercice 3 (Les enfants du voisin)**.** Mon voisin vient d'emménager. Il me dit avoir trois enfants dont les âges sont des nombres entiers.

Si on fait le produit de leurs âges, on trouvera 36 et leur somme sera justement le numéro de la maison d'en face.

Intrigué, je rentre faire quelques petits calculs et m'aperçoit qu'il me manque une donnée.

Je sonne donc chez mon nouveau voisin. Effectivement me dit-il, j'avais oublié de vous dire que mon aîné(e) a les cheveux bouclés.

[Indications] [Correction]

Exercice 4 (Petit Poucet)**.** Le Petit Poucet s'amuse dans un escalier. Il a 55 cailloux dans la poche de son pantalon.

Il vide sa poche en posant les cailloux de la manière suivante :

-Un caillou sur la première marche.

-Deux cailloux sur la deuxième marche.

-Trois cailloux sur la troisième marche.

Et ainsi de suite… Sur quelle marche pose-t-il le dernier caillou ? [Indications] [Correction]

Exercice 5 (Parties dans un tournoi)**.** Une compétition de football réunit dix équipes. Chaque équipe dispute deux matchs contre chacune des neuf autres.

Combien de matchs vont être joués pendant cette compétition ? [Indications] [Correction]

Exercice 6 (Dénombrement)**.** [Éliminatoires de la coupe Animath d'automne 2017] Combien de façon y a-t-il d'insérer un ou plusieurs signes + entre les caractères de l'expression 0123456789 de telle sorte que l'expression garde un sens ? [Indications] [Correction]

Exercice 7 (Nénuphar)**.** (Traduit de : Arnold : *77 problems for children 5 to 15*)

En Amérique du Sud, il y a un étang circulaire. Tous les ans, le premier juin, un nénuphar apparaît au centre du lac et commence à grandir. Toutes les 24 heures, la superficie du lac couverte par le nénuphar double, et le premier juillet à midi, le lac est tout juste entièrement couvert par le nénuphar.

À quel moment le lac est-il recouvert exactement à la moitié par le nénuphar ?

[Indications] [Correction]

Exercice 8 (Même nombre d'amis)**.** Le jour de la rentrée, certains élèves d'une même classe se connaissent et d'autres non. (On suppose que le fait, pour deux élèves, de se connaître est symétrique : si Pierre connaît Paul alors Paul connaît Pierre.)

Montrer qu'il y a deux élèves de la classe qui connaissent chacun autant de monde. [Indications] [Correction]

Exercice 9 (Forcément consécutifs)**.** On choisit onze nombres entiers compris entre 1 et 20. Montrer que deux d'entre eux sont consécutifs.

[Indications] [Correction]

Exercice 10 (Carré un peu magique)**.** On remplit un tableau 3×3 avec les nombres -1, 0 et 1, puis on calcule la somme des nombres dans chaque ligne, chaque colonne, et chacune des deux diagonales. Montrer que parmi les sommes obtenues, il y en a deux qui sont égales. [Indications] [Correction]

Exercice 11 (Même anniversaire)**.**

1. Le lycée Dirichlet compte 400 élèves. Montrer qu'il existe (au moins) deux élèves qui fêtent leur anniversaire le même jour.
2. Même avec un peu moins d'élèves, on aurait pu avoir la même conclusion. Quel est le nombre minimal d'élèves à partir duquel on peut obtenir la même conclusion ?
3. À partir de combien d'élèves dans un lycée peut-on affirmer qu'il en existe (au moins) quatre avec la même date d'anniversaire ?

[Indications] [Correction]

3.2 Symétrie axiale, bissectrices (sans cercle inscrit), médiatrices, triangles isocèles

Exercice 12 (Construction du centre)**.** On donne un cercle $\mathscr{C}$ (sans son centre). Tracer son centre, si possible de plusieurs façons. [Indications] [Correction]

Exercice 13 (Cerf-volant)**.** Un quadrilatère non croisé est un *cerf-volant* si $AB = BC$ et $CD = DA$. Montrer que les deux diagonales d'un cerf-volant se croisent à angle droit au milieu de $[AC]$. [Indications] [Correction]

Exercice 14 (Losange)**.** Un quadrilatère non croisé est un *losange* si ses quatre côtés ont la même longueur. Montrer que les deux diagonales d'un losange se croisent à angle droit et en leur milieu. [Indications] [Correction]

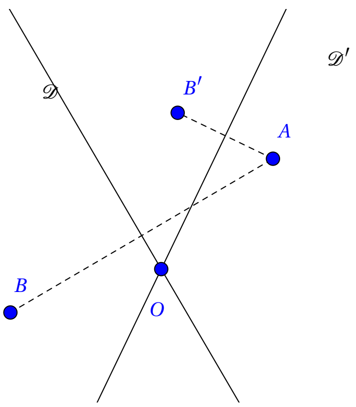
---

4 Classe de 5ème

4.1 Cercle circonscrit, triangles isocèles

Exercice 15 (Deux réflexions)**.** Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes en un point O, et A un point hors de ces droites.

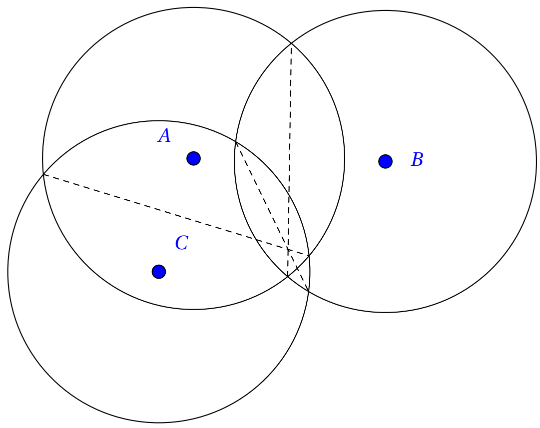
On appelle B et B' les symétriques de A par rapport aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Montrer que la médiatrice du segment $[BB']$ contient le point O.



[Indications] [Correction]

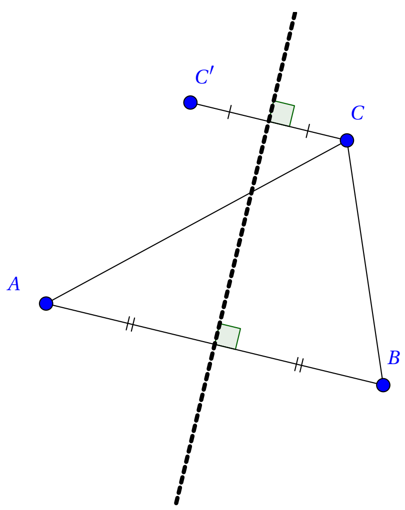
Exercice 16 (Cordes concourantes)**.** Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ trois cercles de même rayon, sécants deux à deux et dont on note A, B et C les centres.

Montrer que les trois sécantes communes (aux trois paires de cercles) sont trois droites concourantes.



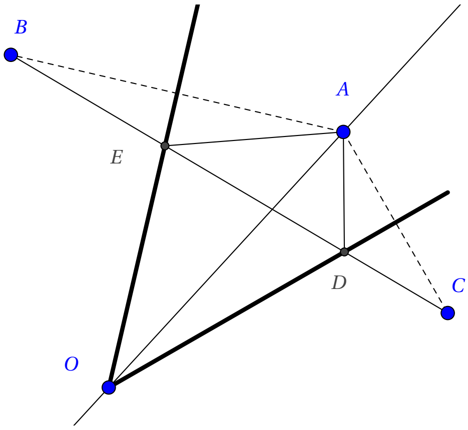
[Indications] [Correction]

Exercice 17 (Triangles inscrits dans le même cercle)**.** Soit ABC un triangle, $\mathscr{D}$ la médiatrice du segment $[AB]$ et C' le symétrique de C par rapport à $\mathscr{D}$. Montrer que les deux triangles ABC et ABC' ont le même cercle circonscrit.



[Indications] [Correction]

Exercice 18 (Deux réflexions ♡)**.** Soit A un point intérieur à un angle xOy. On note B et C les symétriques de A par rapport aux bords de l'angle. Le segment $[BC]$ coupe les bords de l'angle en D et E. Montrer que $[AO)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAE}$.



[Indications] [Correction]

4.2 Aires et périmètres

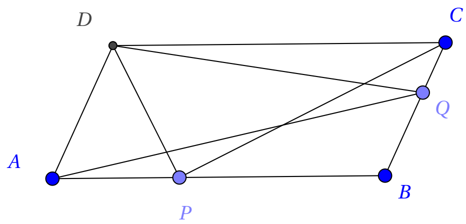
Exercice 19 (Aire d'un quadrilatère orthodiagonal)**.** Un quadrilatère est dit *orthodiagonal* si ses diagonales sont perpendiculaires.

Soit $ABCD$ un quadrilatère orthodiagonal non croisé. Montrer que son aire vaut $\frac{1}{2}AC \cdot BD$.

[Indications] [Correction]

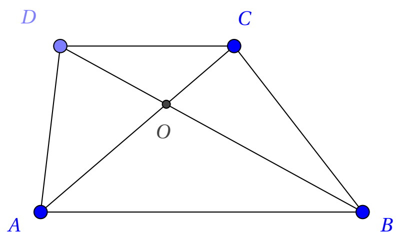
Exercice 20 (Égalité d'aires)**.** (Complexité : 2)

Soit $ABCD$ un parallélogramme, P un point de $[AB]$ et Q un point de $[BC]$. Montrer que les triangles CDP et DAQ ont la même aire.



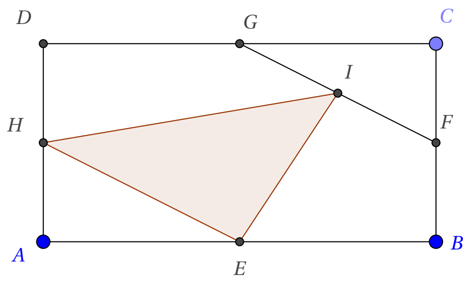
[Indications] [Correction]

Exercice 21 (Théorème du papillon)**.** Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, et O l'intersection de ses diagonales. Montrer que les triangles OBC et ODA on la même aire.



[Indications] [Correction]

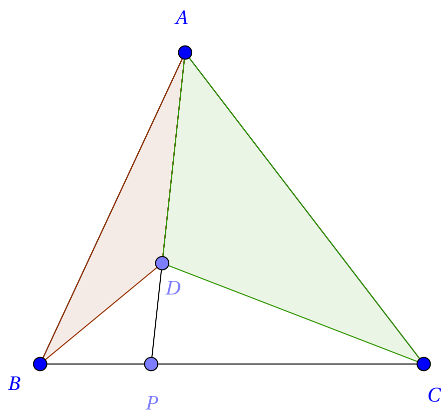
Exercice 22 (Triangle dans un pentagone)**.** Soit $ABCD$ un rectangle, E, F, G et H les milieux de ses côtés, et I le milieu de $[GF]$. Que vaut l'aire du triangle HEI, en fonction de celle du rectangle ?



[Indications] [Correction]

Exercice 23 (Théorème du chevron)**.** Soit ABC un triangle, P un point sur $[BC]$, et D un point sur (AP). Montrer que la proportion entre les aires de ACD et ABD est la même que celle entre les longueurs PC et PB.

(Par exemple, si P est au tiers de $[BC]$ à partir de B, alors $PC = 2PB$ et le résultat dit que l'aire de ACD vaut le double de celle de ABD.)

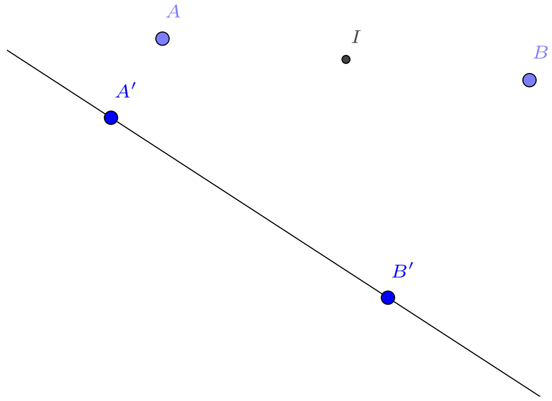


[Indications] [Correction]

4.3 Symétries centrales

Exercice 24 (Points au tiers des côtés)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère. On place des points I, J, K et L au tiers de chacun de ses côtés lorsqu'on les parcourt dans le même sens. Montrer que si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $IJKL$ aussi. [Indications] [Correction]

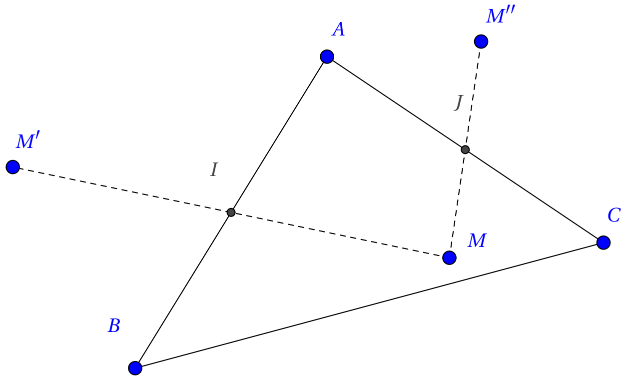
Exercice 25 (Trapèze rectangle)**.** Soit $\mathscr{D}$ une droite, A et B deux points hors de cette droite, et A', B' leurs projetés orthogonaux sur $\mathscr{D}$, supposés distincts. Soit enfin I le milieu de $[AB]$. Montrer que $A'IB'$ est isocèle en I.



[Indications] [Correction]

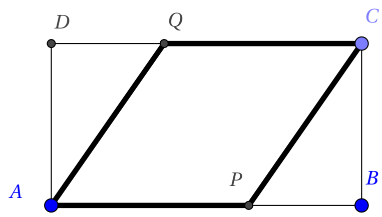
Exercice 26 (Distance entre symétriques). Soit ABC un triangle et I, J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

Pour tout point M, on note M' et M'' ses symétriques par rapport à I et J. Montrer que $M'M'' = BC$.



[Indications] [Correction]

Exercice 27 (Constructions d'un losange inscrit). (**Prérequis: Médiatrice, losanges**)
Soit $ABCD$ un rectangle, avec $AB \geq BC$. Expliquer comment construire un point P sur $[AB]$ et un point Q sur $[CD]$ de telle sorte que $APCQ$ soit un losange.

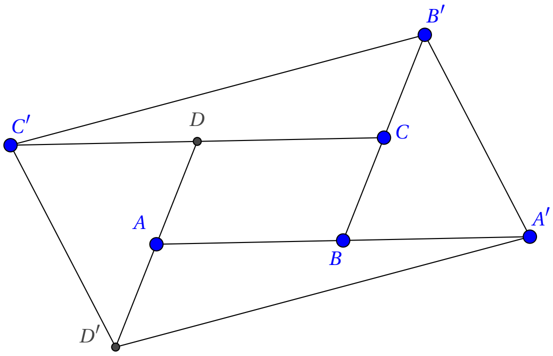


[Indications] [Correction]

Exercice 28 (Parallélogramme cinq fois plus grand). (Complexité : 4+2)

Soit $ABCD$ un parallélogramme et A' (respectivement B', C' et D') le symétrique de A (resp. B, C et D) par rapport à B (resp. C, D et A).

Montrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme, d'aire cinq fois plus grande que $ABCD$.

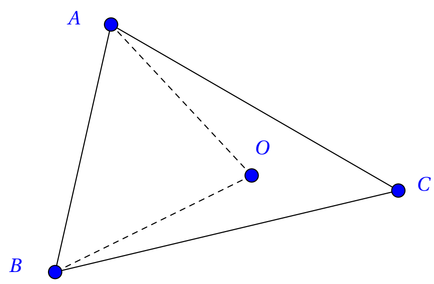


[Indications] [Correction]

4.4 Inégalité triangulaire

Exercice 29 (Chemin moins long)**.** Soit ABC un triangle, et soit O un point à l'intérieur du triangle. Montrer que

$$OA + OB \leq CA + CB.$$



[Indications] [Correction]

Exercice 30 (Conditions d'intersection de cercles)**.** Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de rayon R et R' (avec $R \leq R'$), dont les centres sont à une distance d l'un de l'autre.

Montrer que

1. les cercles sont extérieurs si et seulement si $d > R + R'$;
2. les cercles sont tangents extérieurement si et seulement si $d = R + R'$.
3. les cercles sont sécants si et seulement si $R' - R < d < R + R'$;
4. les cercles sont tangents intérieurement si et seulement si $d = R' - R$.
5. les cercles sont intérieurs l'un à l'autre si et seulement si $d < R' - R$.

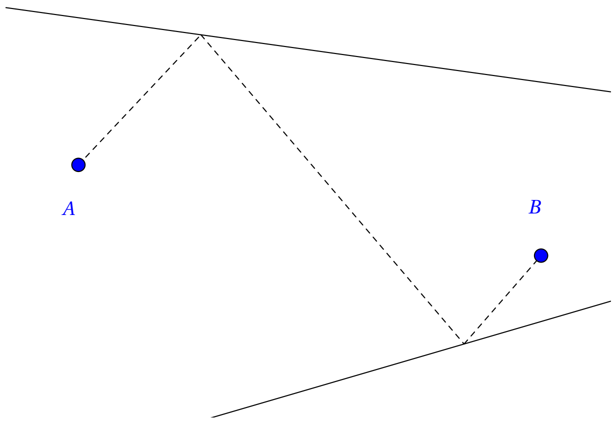
[Indications] [Correction]

Exercice 31 (Prendre de l'eau à la rivière)**.** Soit $\mathscr{D}$ une droite, et A et B deux points distincts, situés du même côté de $\mathscr{D}$. Quel est le plus court chemin allant de A à B, et qui touche la droite $\mathscr{D}$?

Que dire des angles d'incidence et de réflexion du chemin sur la droite $\mathscr{D}$?

[Indications] [Correction]

Exercice 32 (Double contrainte)**.** On donne deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, et deux points A et B comme sur l'illustration. Parmi tous les chemins allant de A à B en passant par la droite $\mathscr{D}$ puis par la droite $\mathscr{D}'$, déterminer le plus chemin le plus court.



[Indications] [Correction]

Exercice 33 (Périmètre minimal à base fixée). (**Prérequis: Aire = base · hauteur, inégalité triangulaire, symétries axiales.**)
Soient A et B deux points, et $\mathscr{A}$ une mesure d'aire. Parmi tous les triangles ABC d'aire $\mathscr{A}$, déterminer celui ou ceux dont le périmètre est minimal. [Indications] [Correction]

Exercice 34 (Aire maximale à base et périmètre fixés). Soient A et B deux points. Parmi tous les triangles de périmètre p fixé, trouver celui ou ceux d'aire maximale. [Indications] [Correction]

4.5 Sorti du programme : triangles rectangles et demi-cercles

Exercice 35 (Triangles rectangles et demi-cercles).

1. Soit ABC un triangle rectangle en A. Montrer que $[BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit.
2. Montrer ensuite la réciproque : si un triangle est inscrit dans un demi-cercle au sens où B appartient au cercle de diamètre $[AB]$, alors il est rectangle (en B).

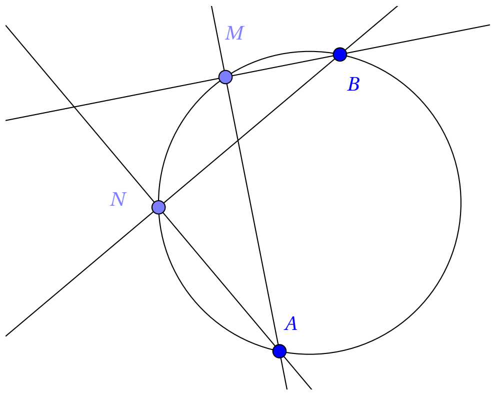
[Indications] [Correction]

Exercice 36 (Triangle de l'écolier, 1). On donne deux points A et B. Construire un triangle ABC rectangle en C tel que $AB = 2AC$.
[Indications] [Correction]

Exercice 37 (Triangle de l'écolier, 2). Soit ADC un triangle équilatéral et B le symétrique de A par rapport à D. Montrer que ABC est rectangle en C et déterminer également $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.
[Indications] [Correction]

Exercice 38 (Droites parallèles). Soit ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit, de centre O. A' est le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$. La hauteur (AH) issue de A du triangle ABC recoupe le cercle $\mathscr{C}$ au point D.
Montrer que la droite (DA') est parallèle à (BC).
[Indications] [Correction]

Exercice 39 (Angles inscrits égaux). Soit $[AB]$ un segment et M, N deux points appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
Montrer (sans utiliser le théorème de l'angle au centre) que $\widehat{MAN}$ et $\widehat{MBN}$ sont égaux si M et N sont du même côté de $[AB]$, et supplémentaires sinon.



[Indications] [Correction]

4.6 Orthocentre

L'orthocentre a l'air d'être au programme de 5ème mais sans démonstration que les hauteurs sont concourantes. La notion d'orthocentre apparaît dans les exercices de 4ème et de 3ème du Sésamath donc ça devrait être bon.

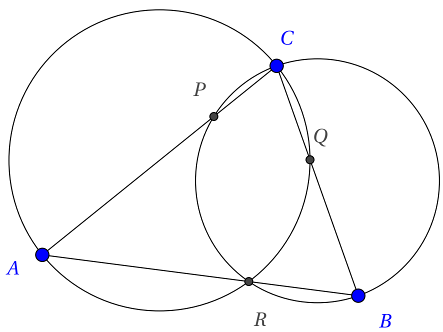
Exercice 40 (Les hauteurs sont concourantes)**.** Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes, en utilisant le triangle formé par les trois droites passant par les sommets et parallèles aux côtés. (Et trois parallélogrammes.) [Indications] [Correction]

Exercice 41 (Construction d'un projeté à la règle seule)**.** (**Prérequis: Triangles rectangles et demi-cercles)**
On donne un cercle $\mathscr{C}$, un diamètre $[AB]$ et un troisième point M du cercle. L'objectif est de construire le projeté orthogonal de M sur (AB) à la règle seule.

1. Montrer qu'il suffit de construire une droite orthogonale à (AB) coupant le cercle en deux points.
2. Construire une telle droite.

[Indications] [Correction]

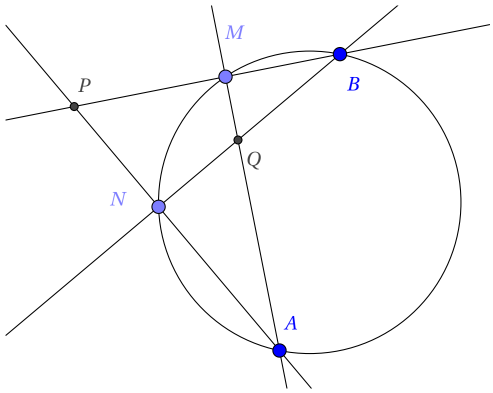
Exercice 42 (Droites concourantes)**.** (**Prérequis: Triangles rectangles et demi-cercles)**
Soit ABC un triangle. Le cercle $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}'$) de diamètre $[BC]$ (resp. $[CA]$) coupe la droite (CA) (resp. la droite (BC)) en P (resp. Q). Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se recoupent en un second point R. Montrer que R est sur $[AB]$ et que (CR), (BP) et (AQ) sont concourantes.



[Indications] [Correction]

Exercice 43 (Angle à déterminer)**.** (**Prérequis: Triangles rectangles et demi-cercles)**

Soit $[AB]$ un segment et M, N deux points appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. On suppose que les droites (MB) et (AN) (respectivement (NB) et (AM)) s'intersectent en P (respectivement en Q). Déterminer l'angle formé par les droites (AB) et (PQ).

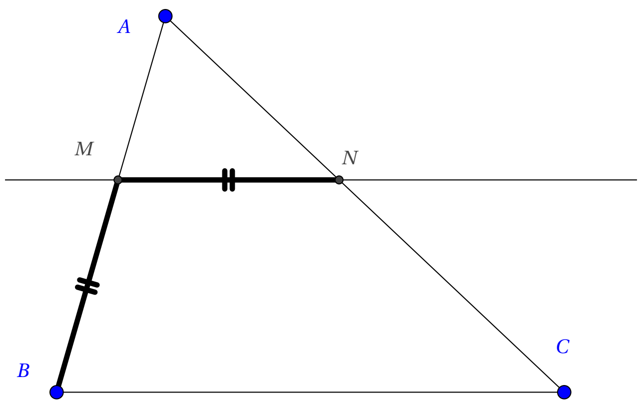


[Indications] [Correction]

4.7 Bissectrices sans cercle inscrit

Exercice 44 (Bissectrices d'un parallélogramme)**.** Montrer que les quatre points d'intersection des bissectrices intérieures d'un parallélogramme sont les quatre sommets d'un rectangle. Réciproquement, montrer que si les bissectrices d'un quadrilatère non croisé sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. [Indications] [Correction]

Exercice 45 (Construction d'un point équidistant ♡)**.** Soit ABC un triangle. Construire un point M sur le côté $[AB]$ de telle sorte que la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en un point N tel que $BM = MN$.



[Indications] [Correction]

Exercice 46 (Triangles bisocèles)**.** Un triangle bisocèle est, par définition, un triangle isocèle tel qu'une des trois bissectrices le partage en deux triangles isocèles.

Montrer qu'il n'existe que deux types possibles de triangles bisocèles. (Par « type », on entend la donnée des trois angles [1].) [Indications] [Correction]

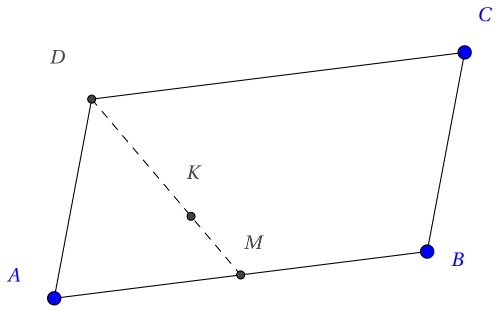
1. Autrement dit, le type est la classe de similitude, mais on n'a pas besoin de parler de similitude ou de triangles semblables pour cet exercice.

4.8 Sorti du programme : centre de gravité

Exercice 47 (Les médianes sont concourantes)**.** Montrer que dans un triangle, deux médianes quelconques se croisent en un point, qui sur chacune des médianes est situé aux deux-tiers à partir du sommet. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours G est appelé *centre de gravité* du triangle. [Indications] [Correction]

Exercice 48 (Alignement)**.** (Complexité : 3/4)

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M le milieu de $[BC]$. Soit K le point de $[DM]$ tel que $KD = 2KM$. Montrer que A, K et C sont alignés.



[Indications] [Correction]

Exercice 49 (Subdivision en trois 💡)**.** On donne un segment $[AB]$. Le diviser en trois parts égales. [Indications] [Correction]

Exercice 50 (Triangles de même aire)**.** Démontrer qu'une médiane divise un triangle en deux triangles de même aire, et que les trois médianes partagent le triangle en six petits triangles de même aire. [Indications] [Correction]

Exercice 51 (Triangle avec $AB = 2BC$ ♡💡)**.** (Complexité : 4, initiative) (**Prérequis: Centre de gravité)** Soit ABC un triangle avec $AB = 2BC$ et M un point de $[AC]$ tel que $AM = 2MC$. Comparer les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{MBC}$. [Indications] [Correction]

---

5 Classe de 4ème

5.1 Calcul littéral

Exercice 52 (Somme d'entiers consécutifs)**.** [Éliminatoires de la coupe Animath d'automne 2017] On peut écrire 225 comme la somme de trois entiers consécutifs : $225 = 74 + 75 + 76$.

1. Peut-on l'écrire comme la somme de cinq nombres consécutifs ?
2. Peut-on l'écrire comme la somme de quatre nombres consécutifs ?

[Indications] [Correction]

Exercice 53 (Foot à trois)**.** [Coupe Animath d'automne 2017] Le foot à trois personnes se joue en phases successives. Un joueur est gardien pendant que les deux autres, appelés « joueurs de champ », tentent de marquer un but. Dès qu'un joueur marque, la phase se termine et il devient gardien pour la phase suivante. Amandine, Bobby et Charles jouent à ce jeu. La partie terminée, ils se souviennent qu'Amandine était 12 fois joueuse de champ, Bobby 21 joueur de champ, et Charles 8 fois gardien.

1. Combien y a-t-il eu de phases au total ?
2. Qui a marqué le sixième but ?

[Indications] [Correction]

5.2 Translations

Exercice 54 (Corde de longueur fixée)**.** Soit $\mathscr{C}$ un cercle et D une droite. Construire une droite parallèle à D coupant le cercle $\mathscr{C}$ en deux points situés à une distance a donnée (inférieure au diamètre).
[Indications] [Correction]

Exercice 55 (Alignement)**.** Soit $ABCD$ un rectangle et M un point du plan.

On note C' le projeté orthogonal de C sur (AM), D' le projeté orthogonal de D sur (BM) et M' le projeté orthogonal de M sur (AB). Enfin, on note I le point d'intersection des droites (CC') et (DD').

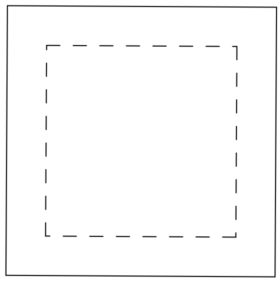
Montrer que les points M, M' et I sont alignés.

[Indications] [Correction]

Exercice 56 (Pappus affine)**.** Soient D et D' deux droites parallèles. Soient A, B, C trois points sur D, et A', B' et C' trois points sur D'. Si $(AB')//(BC')$ et $(BA')//(CB')$, alors $(AA')//(CC')$. [Indications] [Correction]

5.3 Rotations

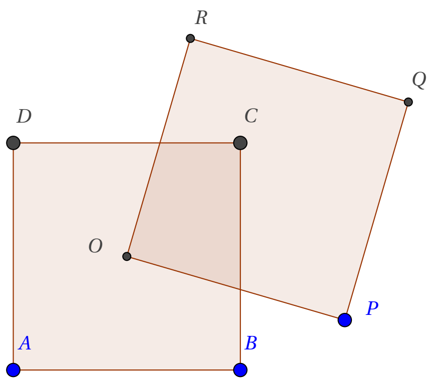
Exercice 57 (Carré d'aire moitié)**.** On se donne un carré, et on cherche à construire un carré de même centre, aux côtés parallèles, et d'aire deux fois plus petite, comme ci-dessous :



1. (Question intermédiaire) Soit $\mathscr{C}$ un cercle. Montrer qu'un carré circonscrit au cercle a une aire deux fois plus grande qu'un carré inscrit dans le cercle.
2. En déduire une solution au problème initial.

[Indications] [Correction]

Exercice 58 (Aire de l'intersection de deux carrés)**.** Soit $ABCD$ un carré de centre O, et $OPQR$ un second carré de même taille. Calculer l'aire de l'intersection de ces deux carrés en fonction de l'aire de $ABCD$.



[Indications] [Correction]

Exercice 59 (Alignement)**.** Soit $ABCD$ un carré de centre O, et M un point sur (AB). À partir de M, on construit le triangle isocèle OMN, rectangle en O. Montrer que les points B, C et N sont alignés.

[Indications] [Correction]

Exercice 60 (Pseudo-carré)**.** Soit BOA un triangle indirect quelconque, OAC et OEB deux triangles rectangles isocèles en O directs.

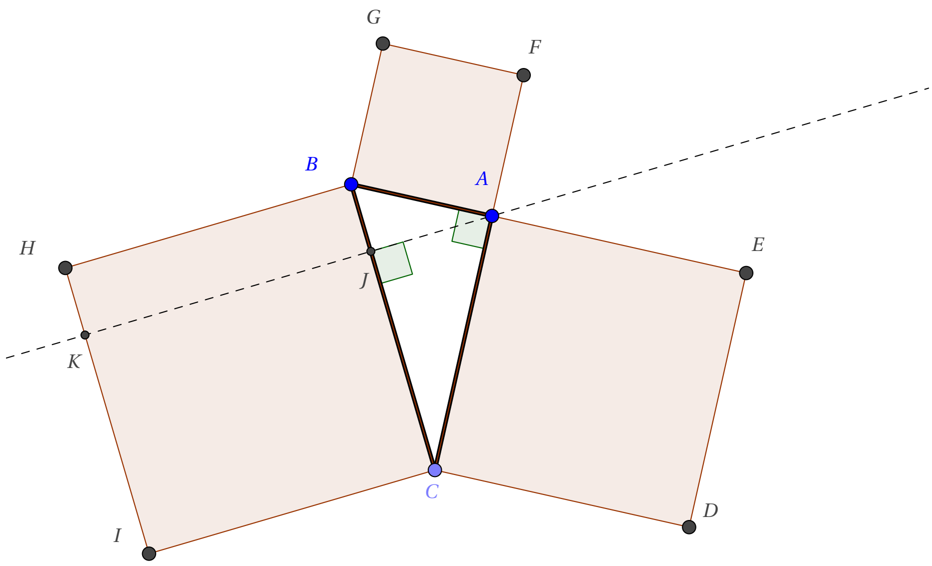
Montrer que $ACEB$ est un pseudo-carré, c'est-à-dire que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires et que $BC = AE$.

[Indications] [Correction]

Exercice 61 (Octogone régulier)**.** Construire un octogone régulier inscrit dans un carré donné (c'est-à-dire un octogone dont quatre des huit cotés s'appuient sur les cotés du carré).

[Indications] [Correction]

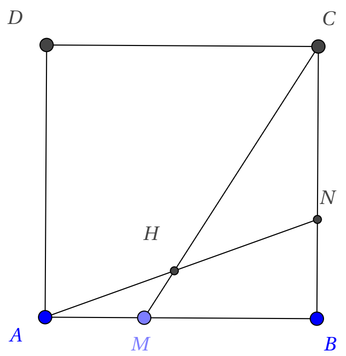
Exercice 62 (Preuve d'Euclide du th. de Pythagore)**.** Soit ABC un triangle rectangle en A. On considère trois carrés appuyés sur les côtés de ABC comme sur la figure ci-dessous :



1. Montrer que BGF et BJH ont même aire.
2. De même, montrer que CDE et CIK ont même aire.
3. En déduire que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

[Indications] [Correction]

Exercice 63 (Triangle inscrit dans un carré)**.** Sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ d'un carré direct $ABCD$, on place des points M et N vérifiant $AM = BN$. Soit H le point d'intersection des droites (AN) et (CM). Montrer que H est l'orthocentre du triangle DMN.



[Indications] [Correction]

Exercice 64 (Angle et distance)**.** Soit BOA un triangle indirect isocèle en O, OAC et OEB deux triangles équilatéraux directs.

Montrer que $BC = AE$ et vérifier que l'angle des droites (BC) et (AE) est de $\pi/3$. [Indications] [Correction]

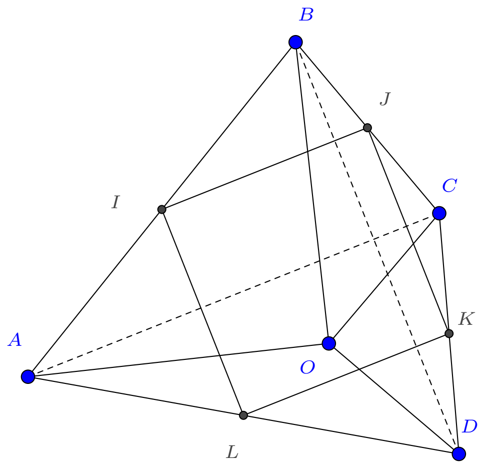
Exercice 65 (Triangle rectangle isocèle)**.** Soit $ABCD$ un carré, E le symétrique de C par rapport à D, I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[DE]$.

Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle en A.

[Indications] [Correction]

Exercice 66 (Triangle équilatéral sur trois droites). [Difficile] On considère trois droites parallèles D_1, D_2 et D_3. Construire un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent respectivement à D_1, D_2 et D_3. [Indications] [Correction]

Exercice 67 (Deux triangles isocèles rectangles). Soient AOB et COD deux triangles directs, isocèles rectangles en O. Soient I, J, K et L les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



1. Montrer que $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$.
2. Montrer que $IJKL$ est un carré.

[Indications] [Correction]

Exercice 68 (Construction du centre d'une rotation). Soit ρ une rotation du plan. On donne deux points A et B, ainsi que leurs images $\rho(A)$ et $\rho(B)$. Construire le centre de la rotation, en distinguant les cas. [Indications] [Correction]

Exercice 69 (Carré partagé en deux). Soit $ABCD$ un carré et E un point à l'extérieur du carré tel que AEB soit rectangle en E. Soit $\mathscr{D}$ la bissectrice de l'angle $\widehat{AEB}$. Montrer qu'elle coupe le carré BCD en deux parties de même aire. [Indications] [Correction]

5.4 Rotations et translations

Exercice 70 (Carré invisible). [difficile] On considère un carré $ABCD$ et on place quatre points E, F, G, et H sur les côtés de ce carré, en-dehors des sommets. Puis, on efface le carré. En considérant une rotation et une translation, reconstruire le carré.
[Indications] [Correction]

5.5 Pythagore

Exercice 71 (Aire maximale à deux côtés fixés). Soient a et b deux longueurs fixées. Déterminer les triangles ABC avec $BC = a$ et $CA = b$, et qui sont d'aire maximale. [Indications] [Correction]

Exercice 72 (Test d'entrée à l'OFM 2014). (**Prérequis: Pythagore, triangles isocèles**)
Soit $ABCD$ un carré. On suppose qu'il existe un point E sur $[AD]$ et un point F sur $[BC]$ vérifiant : $BE = EF = FD = 1$. Quelle est l'aire du carré? [Indications] [Correction]

---

6 Sorti du programme de 4ème en 2016

6.1 Distance d'un point à une droite, projetés orthogonaux

Ces notions sont relativement intuitives et n'utilisent que le théorème de Pythagore.

Exercice 73 (Projeté orthogonal et distance)**.** Soit A un point et $\mathscr{D}$ une droite. Montrer que le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de A est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$, c'est-à-dire A lui-même si $A \in \mathscr{D}$ et sinon, le point H vérifiant $(AH) \perp \mathscr{D}$. [Indications] [Correction]

Exercice 74 (Une projection orthogonale diminue les distances)**.** Soit $\mathscr{D}$ une droite, et A, B deux points du plan n'appartenant pas à $\mathscr{D}$.

Notons A' (respectivement B') le point tel que $(AA') \perp \mathscr{D}$ (respectivement $(BB') \perp \mathscr{D}$).

Montrer que $A'B' \leq BB'$. [Indications] [Correction]

Exercice 75 (Distances aux côtés 💡)**.** Soit ABC un triangle équilatéral. Pour tout point M à l'intérieur du triangle, on note $d = dist(M, [AB]) + dist(M, [BC]) + dist(M, [AC])$ la somme des distances de M aux trois côtés. Montrer que d ne dépend en fait pas du point M.

[Indications] [Correction]

Exercice 76 (Minimisation)**.** Soient C et C' deux cercles sécants de centres O et O', et A un de leurs points d'intersection. Une droite D passant par A recoupe les deux cercles en M et M'. Déterminer la position de la droite qui maximise la distance MM' et calculer le maximum.

[Indications] [Correction]

6.2 Tangente à un cercle

Les tangentes à un cercle semblent avoir disparu des derniers programmes. Pour le cours et de nombreux exercices de base, voir par exemple le Sésamath 4ème pré-2016.

Exercice 77 (Construction de cercles : DDP)**.** Soit $\mathscr{D}$ une droite, et soient A et B deux points distincts hors de la droite tels que $\mathscr{D} // (AB)$.

Construire un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B, et tangent à la droite $\mathscr{D}$. [Indications] [Correction]

Exercice 78 (Construction de la tangente)**.** On donne un cercle $\mathscr{C}$ et un point P sur le cercle. Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point P. [Indications] [Correction]

Exercice 79 (Construction de la tangente, bis)**.** (**Prérequis: Triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle.)**
On donne un cercle $\mathscr{C}$ et un point P hors du cercle. Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ passant par P. [Indications] [Correction]

Exercice 80 (Construction de tangentes communes)**.** On donne deux cercles distincts de même rayon. Combien y a-t-il de tangentes communes aux deux cercles ? Tracer ces tangentes. [Indications] [Correction]

Exercice 81 (Construction de cercles : DDP)**.** On donne deux droites parallèles et un point A entre les deux droites. Dénombrer et tracer les cercles passant par A et tangents aux deux droites.

[Indications] [Correction]

Exercice 82 (Cercles tangents)**.** On donne deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de rayons distincts, de centres O et O', tangents extérieurement en un point A. On admet qu'il existe trois tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$: la tangente commune en A, qui est directement constructible, et deux autres droites. L'objectif de l'exercice est de tracer ces deux dernières tangentes.

1. Considérons donc une droite tangente à $\mathscr{C}$ en B et à $\mathscr{C}'$ en C, avec $B \neq C$. La tangente commune en A aux deux cercles coupe (BC) en I. Montrer que I est le milieu de $[BC]$ et que ABC est rectangle en A.
2. Finir l'exercice (c'est-à-dire construire B et C) de l'une des deux façons suivantes :
   (a) Soit D tel que $ABDC$ soit un rectangle. Quels sont les points d'intersection entre (DB), (DC) et (OO') ? En déduire une construction du point D.
   (b) Montrer que OIO' est rectangle en I et en déduire une construction du point I.

[Indications] [Correction]

Exercice 83 (Distances)**.** Soit A un point quelconque du diamètre d'un cercle $\mathscr{C}$ et B l'extrémité d'un rayon perpendiculaire à ce diamètre. On mène une droite (BA) qui coupe le cercle en P, puis la tangente au point P qui coupe en C le diamètre prolongé. Démontrer que $CA = CP$.

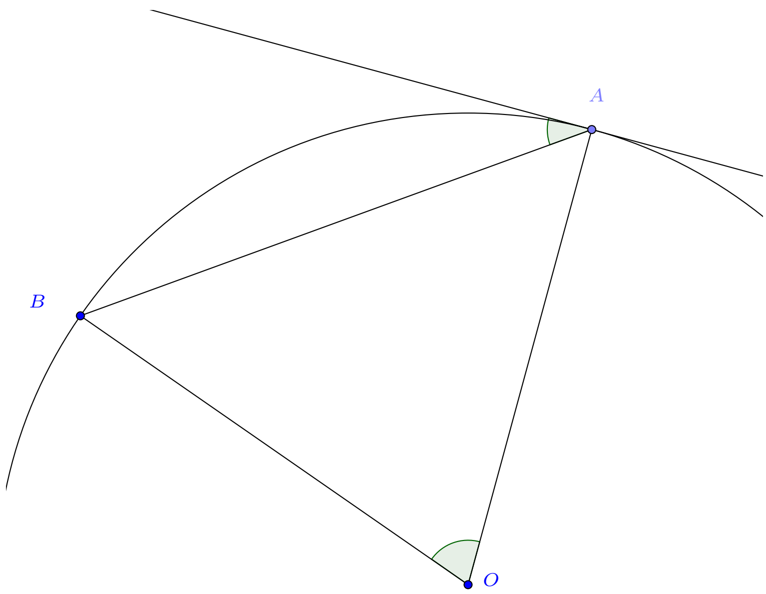
[Indications] [Correction]

Exercice 84 (Cercle tangent à un carré)**.** On considère un carré $ABCD$, et un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent à $[CD]$.

1. Montrer que le point de tangence est le milieu de $[CD]$.
2. Montrer que si le rayon vaut $r = 10$ alors $AB = 16$, et réciproquement.

[Indications] [Correction]

Exercice 85 (Angle inscrit dans le cas limite)**.** Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, $[AB]$ une corde et $\mathscr{T}$ la tangente de A. Montrer que l'angle entre $\mathscr{T}$ et (AB) vaut la moitié de $\widehat{AOB}$.



[Indications] [Correction]

6.3 Bissectrices et cercle inscrit

Les bissectrices sont toujours au programme de collège mais pas le fait qu'elles soient concourantes, ni le cercle inscrit .

Exercice 86 (Les bissectrices sont concourantes)**.** Montrer que les bissectrices (intérieures) d'un triangle sont concourantes et que leur intersection est le centre d'un cercle tangent à chaque côté, que l'on appelle cercle inscrit. [Indications] [Correction]

Exercice 87 (Cercles exinscrits)**.** Soit ABC un triangle. Montrer que les bissectrices extérieures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ et la bissectrice intérieure en A sont concourantes, et que leur intersection est le centre l'un cercle tangent à $[BC]$ et aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$. Ce cercle est appelé le cercle exinscrit en $\widehat{A}$. [Indications] [Correction]

Exercice 88 (Application des cercles inscrits et exinscrits)**.** On donne trois droites. Combien y a-t-il de cercles tangents aux trois droites ? [Indications] [Correction]

Exercice 89 (Tangentes communes concourantes)**.** Trois cercles sont tangents extérieurement. Montrer que les trois tangentes communes aux points de contact sont concourantes. [Indications] [Correction]

Exercice 90 (Distance au centre du cercle inscrit)**.** Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit, dont on note r le rayon. Montrer qu'un des sommets du triangle est à distance $\geq 2r$ de I, et qu'un autre est à distance $\leq 2r$.

[Indications] [Correction]

Exercice 91 (Quadrilatères tangentiels)**.** Un quadrilatère convexe est dit *tangentiel* ou *circonscriptible* s'il possède un cercle inscrit, c'est-à-dire si ses quatre côtés sont tangents à un même cercle.

1. Montrer qu'un quadrilatère est tangentiel ssi ses bissectrices intérieures sont concourantes.
2. Montrer le théorème de Pitot (1725) : dans un quadrilatère tangentiel, la somme des longueurs de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres. Réciproque ?
3. Montrer qu'un cerf-volant isocèle (ou rhomboïde) est tangentiel.

[Indications] [Correction]

Exercice 92 (Théorème des trois tangentes)**.** Soit ABC un triangle. Le cercle exinscrit dans l'angle en A touche les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ en P, Q et R. Montrer que la somme $AR + AQ$ est égale au périmètre du triangle. [Indications] [Correction]

Exercice 93 (Aire, périmètre et cercle inscrit)**.** Soit ABC un triangle dont on note a, b et c les longueurs des côtés.

1. Exprimer l'aire S du triangle en fonction du périmètre $a + b + c = 2p$ et du rayon r du cercle inscrit.
2. Exprimer également S en fonction de a et du rayon r_A du cercle exinscrit en A.
3. En déduire $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_A} + \dfrac{1}{r_B} + \dfrac{1}{r_C}$.

[Indications] [Correction]

Exercice 94 (Cercles inscrits et exinscrits)**.** On donne un cercle $\mathscr{C}$ (de centre O), un point M à l'extérieur du cercle, les deux tangentes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ à $\mathscr{C}$ passant par M. On notera A et B les points de tangence.

Le cercle $\mathscr{C}$ coupe (MO) en deux points P et Q. D'autre part, soit H l'intersection de la corde $[AB]$ avec (OM). Montrer que les cercles de centres P et Q et passant par H sont tangents à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

[Indications] [Correction]

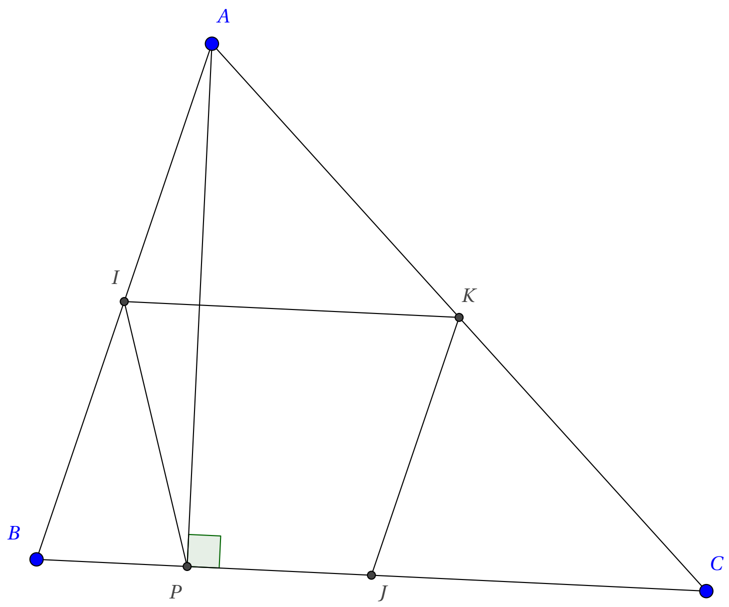
---

7 Classe de 3ème

7.1 Théorème des milieux (ou Thalès)

Le théorème des milieux et sa réciproque ne semblent plus être au programme, (mais Thalès oui). On a néanmoins séparé les exercices qui ne nécessitent que les milieux et pas Thalès en toute généralité.

Exercice 95 (Trapèze isocèle)**.** Soit ABC un triangle, P le pied de la hauteur issue de A et I, J, K les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Montrer que le quadrilatère $IPJK$ est un trapèze isocèle.



[Indications] [Correction]

Exercice 96 (Partage en trois)**.** (Complexité : 4)

Soit $ABCD$ un parallélogramme, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[CD]$. Montrer que les droites (DM) et (BN) coupent la diagonale $[AC]$ en deux points K et L le divisant en trois segments égaux.

[Indications] [Correction]

Exercice 97 (Un autre partage en trois, plus difficile)**.** Soit $ABCD$ un parallélogramme, K le milieu de $[AD]$, L le milieu de $[BC]$. Les diagonales du parallélogramme $ABLK$ se coupent en G. Montrer que les droites (CG) et (DG) coupent $[AB]$ deux points I et J qui le partagent en trois parties égales. [Indications] [Correction]

Exercice 98 (Théorème de Varignon)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, et I, J, K, L les milieux de ses côtés. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme. Montrer que l'aire de $ABCD$ est le double de celle de $IJKL$. [Indications] [Correction]

7.2 Théorème de Thalès

La section comporte peu d'exercices, beaucoup ayant été placés dans la section sur les homothéties.

Exercice 99 (Le tourniquet dans le triangle)**.** Par un point D du côté $[AB]$ d'un triangle ABC, on trace la parallèle à $[BC]$ qui coupe $[AC]$ en E. Par E on trace la parallèle à $[AB]$ qui coupe $[CB]$ en F. Par F on trace la parallèle à $[AC]$ qui coupe $[BC]$ en G. On construit de même H, I et J. Montrer que $J = D$.
[Indications] [Correction]

Exercice 100 (Subdivision en sept)**.** [Subdivision] On donne un segment $[AB]$. Le diviser en sept parts égales. [Indications] [Correction]

Exercice 101 (Nombres constructibles)**.** On donne deux points O et I, avec $OI = 1$. Un réel r est constructible si on peut construire à la règle et au compas un point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OI}$. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

1. Construire sur la droite (OI) des points A, B et C tels que $OA = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $OB = \sqrt{2}$ et $OC = \sqrt{3}$.
2. (Construction du produit et de l'inverse de deux nombres constructibles.) On donne deux points A et B alignés avec O. Construire sur la droite (AB) des points C et D tel que $OC = OA \times OB$ et $OD = \frac{OA}{OB}$.
3. (Construction de la racine carrée.) Soit A un point sur la demi-droite $[OI)$. Soit I' le symétrique de I par rapport à O, soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $I'A$, et soit F l'une des intersections du cercle $\mathscr{C}$ avec la perpendiculaire à (OA) passant par O. Montrer que $OF = \sqrt{OA}$.

[Indications] [Correction]

7.3 Calcul littéral, identités remarquables

Exercice 102 (Mise en équation)**.** Il manque sept kopecks à Masha pour s'acheter un livre, mais il n'en manque qu'un à Misha. Même en mettant leur argent en commun, il leur manque encore de l'argent. Combien coûte le livre ? [Indications] [Correction]

Exercice 103 (Mise en équation, bis)**.** Une bouteille avec son bouchon en liège coûte dix kopecks. La bouteille seule est neuf fois plus chère que son bouchon. Combien coûte la bouteille sans son bouchon ? [Indications] [Correction]

Exercice 104 (Mise en équation, ter)**.** Une brique pèse 500 grammes de plus qu'une moitié de brique. Combien pèse une brique ? [Indications] [Correction]

Exercice 105 (Chiffres d'un nombre)**.** [Éliminatoires de la coupe Animath d'automne 2017] Pour tout entier n strictement positif, on définit le nombre a_n comme étant le dernier chiffre de la somme des chiffres du nombre

20052005...2005(2005 écrit n fois.)

Par exemple $a_1 = 7$, $a_2 = 4$ etc.

1. Quels sont les entiers strictement positifs n tels que $a_n = 0$?
2. Calculer $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2005}$.

[Indications] [Correction]

Exercice 106 (Deux vieilles dames)**.** Deux vieilles dames habitent dans deux villages différents, le village A et le village B. Au lever du soleil, elles partent chacune en direction de l'autre village. Elles se croisent à midi, mais continuent chacune leur chemin, chacune à sa vitesse. La première dame arrive au village B à quatre heures de l'après-midi, l'autre arrive au village A à neuf heures du soir.

À quelle heure sont-elles parties? À quel endroit se sont-elles croisées? [Indications] [Correction]

Exercice 107 (Mise en équation, quater)**.** Vasya a deux sœurs de plus qu'il n'a de frères. Combien de filles de plus que de garçons les parents de Vasya ont-ils? [Indications] [Correction]

Exercice 108 (Fourmi)**.** Une fourmi se trouve à un coin d'une pièce cubique et souhaite se rendre au coin opposé, en suivant les murs. Quel est le chemin le plus court (peut-il y avoir plusieurs chemins de longueur minimale) et quelle longueur fait-il?

[Indications] [Correction]

Exercice 109 (Die Hard 3)**.** On dispose de deux récipients, l'un de cinq litres, l'autre de trois litres. Comment faire pour obtenir exactement un litre dans un des deux récipients? [Indications] [Correction]

Exercice 110 (Un système)**.** Dans une famille, il y a cinq têtes et quatorze jambes. Combien de chiens et combien d'humains compte cette famille? [Indications] [Correction]

Exercice 111 (Sections possibles d'un cube)**.** On découpe un cube suivant un plan. Sur le plan de découpe, la trace du cube forme un polygone. Quels sont les polygones qui peuvent apparaître? Combien de côtés? Peuvent-ils être réguliers? [Indications] [Correction]

Exercice 112 (Tétraèdres)**.** Dans un cube, il y a deux tétraèdres réguliers inscrits maximaux. Quelle est l'intersection de ces tétraèdres? [Indications] [Correction]

Exercice 113 (Somme des impairs)**.** Combien font $1+3$? Et $1+3+5$? Et enfin $1+3+5+7$? Que remarque-t-on? Peut-on le prouver? [Indications] [Correction]

Exercice 114 (Somme des entiers)**.** Trouver un moyen de calculer $1+2+3+\ldots+100$ relativement rapidement, sans faire toutes les additions.

[Indications] [Correction]

7.4 Homothéties

Exercice 115 (Condition sur quatre points)**.**

1. À quelle condition sur quatre points $P_1, \ldots P_4$ existe-t-il une homothétie h telle que $h(P_1) = P_2$ et $h(P_3) = P_4$?
2. Soit ϕ une homothétie. On donne deux points A et B, ainsi que leurs images $\phi(A)$ et $\phi(B)$. Le centre de l'homothétie n'est pas donné. Le construire, y compris si les quatre points donnés sont alignés.

[Indications] [Correction]

Exercice 116 (Deux cercles sont homothétiques)**.** Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de rayons distincts. Montrer qu'il existe des homothéties transformant l'un en l'autre. Suivant la position et la taille des cercles, combien y a-t-il de telles homothéties ? Tracer leurs centres.

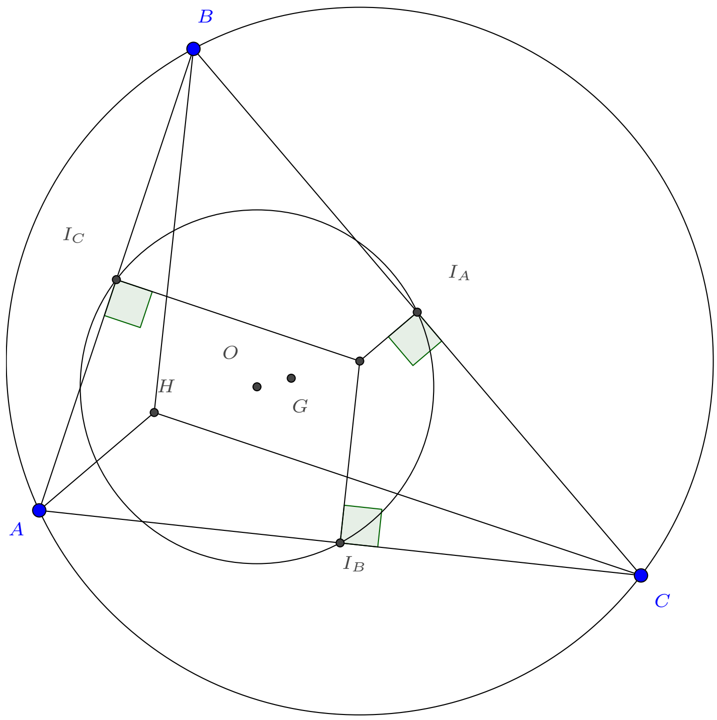
[Indications] [Correction]

Exercice 117 (Construction d'un carré inscrit dans un triangle 💡)**.** Soit ABC un triangle. Construire un carré dont un sommet appartient à $[AB]$, un à $[AC]$ et deux sommets adjacents appartiennent à $[BC]$.

[Indications] [Correction]

Exercice 118 (Cercle d'Euler)**.** Soit ABC un triangle. On note G, Ω et H le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ et l'orthocentre. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle passant par les milieux I_A, I_B et I_C des côtés de ABC.

1. Montrer que le centre de $\mathscr{C}'$ appartient à la droite $(G\Omega)$. Calculer son rayon.
2. Montrer que $\mathscr{C}'$ coupe les segments reliant les sommets à l'orthocentre H en leur milieu.



[Indications] [Correction]

Exercice 119 (Théorème du trapèze)**.** Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments parallèles de longueurs différentes. Montrer qu'il existe des homothéties transformant l'un en l'autre. Combien y a-t-il de telles homothéties ? Tracer leurs centres. Montrer que la droite reliant ces centres coupe les segments en leur moitié.

Application : construire à la règle seule le symétrique de A par rapport à B. Expliquer comment construire à la règle seule n'importe quel barycentre à coefficients rationnels de A et de B. [Indications] [Correction]

Exercice 120 (Application du th. du trapèze)**.** Soit $\mathscr{D}$ une droite, A et B deux points distincts n'appartenant pas à cette droite, et A' le symétrique de A par rapport à $\mathscr{D}$. On suppose que $A'B$ n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$. Construire à la règle seule le symétrique B' de B par rapport à $\mathscr{D}$.

[Indications] [Correction]

Exercice 121 (Application du th. du trapèze, bis)**.** Soient deux droites parallèles distinctes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, et P un point non situé sur ces droites. Construire à la règle seule la droite passant par P et parallèle aux deux autres. [Indications] [Correction]

Exercice 122 (Projections affines)**.** Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M un point sur la diagonale (BD). Soit I le symétrique de C par rapport à M. Soit E la projection de I sur (AB) parallèlement à (AD), et F la projection de I sur (AD) parallèlement à (AB). Montrer que E, M et F sont alignés.
[Indications] [Correction]

Exercice 123 (Pappus affine)**.** Soient D et D' deux droites non parallèles. Soient A, B, C trois points sur D, et A', B' et C' trois points sur D'. Si $(AB')//(BC')$ et $(BA')//(CB')$, alors $(AA')//(CC')$. [Indications] [Correction]

Exercice 124 (Desargues affine)**.**

1. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles (non aplatis) sans sommet commun. Montrer qu'ils se déduisent l'un de l'autre par homothétie ou translation ssi leurs côtés sont parallèles.
2. (Application) On donne deux droites se coupant en un point O hors de la feuille, ainsi qu'un point M hors de ces droites. Tracer la droite (OM).

[Indications] [Correction]

7.5 Triangles semblables et trigonométrie

La notion de triangle semblable est au programme et figure dans le Sésamath 2016. La définition est que les angles sont égaux, et il est admis que dans ce cas, les longueurs des côtés sont proportionnelles. La réciproque est énoncée mais sans démonstration non plus.

(La notion - plus difficile - de similitude elle, est hors-programme du collège mais l'a quasiment toujours été : elle était auparavant vue en terminale S (spécialité maths) mais plus depuis quelques années.)

Exercice 125 (Triangles rectangles semblables)**.** Soit ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que ABH et ACH sont semblables à ABC. [Indications] [Correction]

Exercice 126 ($HA^2 = HB \cdot HC$)**.** Soit ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer $AH^2 = HB \cdot HC$.
[Indications] [Correction]

Exercice 127 (Quadrilatère croisé)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère croisé, tel que $(AB)//(CD)$. Soit O le point d'intersection de (BC) et (AD). Montrer que ABO et OCD sont semblables. [Indications] [Correction]

Exercice 128 (Un quadrilatère)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Montrer que $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. [Indications] [Correction]

7.6 Arithmétique

La division euclidienne est au programme, de même que la décomposition unique en facteurs premiers (admise).

Le pgcd est sorti du programme à la dernière réforme mais on peut le redéfinir et redémontrer ses propriétés grâce à la décomposition en facteurs premiers, qui est un résultat beaucoup plus sophistiqué.

Exercice 129 (Muguet)**.** Pour le premier mai, on dispose de 182 brins de muguet et de 78 roses. On veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs. Combien de bouquets identiques pourra-t-on faire et quelle sera la composition des bouquets ? [Indications] [Correction]

Exercice 130 (Poteaux pour enclos)**.** On souhaite clôturer un terrain rectangulaire de dimensions 78 mètres sur 102. Afin de poser un grillage, on doit planter des poteaux régulièrement espacés et pour simplifier le travail, on veut que la distance entre chaque poteau soit un nombre entier de mètres. De plus, il faut un poteau à chaque coin.

On veut utiliser le moins de poteaux possibles. Combien de poteaux suffisent ? [Indications] [Correction]

Exercice 131 (Écriture en base dix)**.** Si a est un chiffre, démontrer que le nombre $\overline{a00a}$ est divisible par 143. [Indications] [Correction]

Exercice 132 (Impairs consécutifs)**.** Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par quatre. [Indications] [Correction]

Exercice 133 (Même reste)**.** Quel est le plus grand nombre de 3 chiffres qui, divisé par 6, 9 et 12 donne toujours le même reste 5 ? [Indications] [Correction]

---

8 Abordable en 3ème après compléments

8.1 Autour de l'inégalité arithmético-géométrique

L'inégalité arithmético-géométrique (à deux variables) peut se prouver facilement en utilisant simplement l'inégalité remarquable $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$. On présente le résultat sous forme d'exercice, puis quelques exercices d'application.

Exercice 134 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** Soient a et b deux nombres positifs. Montrer

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

(« La moyenne arithmétique est supérieure ou égale à la moyenne géométrique. ») [Indications] [Correction]

Exercice 135 (Aire maximale à périmètre fixé)**.** Soit p un nombre réel positif. Déterminer le ou les rectangles de périmètre égal à p dont l'aire est maximale. [Indications] [Correction]

Exercice 136 (Une inégalité)**.** On considère deux réels positifs dont le produit vaut 100. Leur somme a-t-elle une valeur minimale ou maximale et si oui la(les)quelle(s) et dans quel(s) cas ?

[Indications] [Correction]

8.2 Exercices utilisant les anciens programmes de 5ème et 4ème

Exercice 137 (Trois cercles tangents)**.** Trois cercles sont tangents extérieurement deux à deux. Montrer que les tangentes communes sont concourantes.

[Indications] [Correction]

Exercice 138 (Tangentes communes à deux cercles)**.** On donne deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de rayons $r < r'$, de centres O et O', disjoints et extérieurs l'un à l'autre. On admet qu'il existe quatre tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. L'objectif est de les construire.

1. (Analyse) Soit $\mathscr{D}$ une tangente commune. On note A et A' les points de contact de $\mathscr{D}$ avec les deux cercles. Que peut-on dire de la parallèle à (AA') passant par O et de son intersection avec $(O'A')$?
2. (Synthèse) En déduire une construction du point d'intersection de ces deux droites, puis ces deux droites et enfin de $\mathscr{D}$. Tracer les quatre tangentes communes de cette façon.

[Indications] [Correction]

Exercice 139 (Construction de cercles, CDP)**.**

1. On donne une droite $\mathscr{D}$ et un point O hors de la droite. Tracer le cercle de centre O et tangent à $\mathscr{D}$.
2. On donne deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes et un point O d'une bissectrice (et hors des droites). Construire le cercle de centre O et tangent aux deux droites.

[Indications] [Correction]

Exercice 140 (Construction de cercles DPP)**.**

1. On donne une droite $\mathscr{D}$, un point H sur $\mathscr{D}$ et un point A en-dehors. Tracer le cercle passant par A et tangent à la droite en H.
2. On donne trois droites dont deux parallèles. Dénombrer et construire les cercles tangents aux trois droites.

[Indications] [Correction]

Exercice 141 (Construction de cercles, CCC)**.** On donne trois cercles distincts $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de même rayon et dont les centres ne sont pas alignés. Construire deux cercles tangents à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

[Indications] [Correction]

Exercice 142 (Construction de cercles de rayon donné)**.** Dans tout l'exercice, on fixe $R > 0$. Dénombrer et construire les cercles de rayon R tangents à :

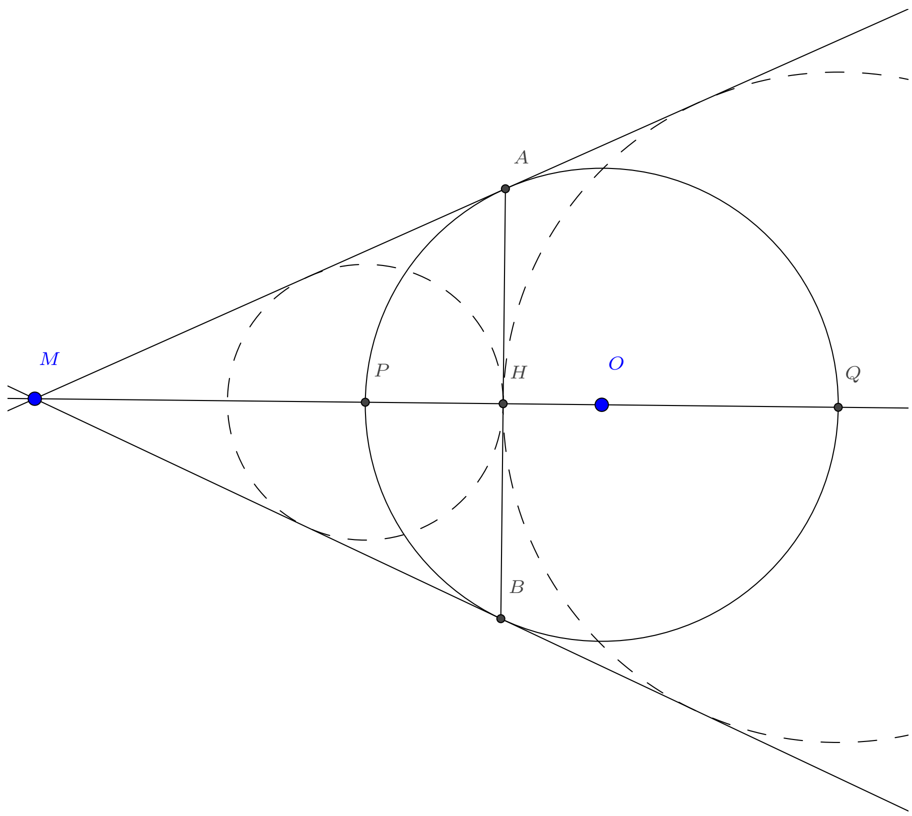
1. deux cercles distincts $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$;
2. deux droites sécantes $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$;
3. un cercle $\mathscr{C}$ et une droite $\mathscr{D}$.

[Indications] [Correction]

Exercice 143 (Tangentes communes à plusieurs cercles)**.** **(Prérequis:Droite tangente à un cercle.)**

On donne un cercle $\mathscr{C}$ (de centre O), un point M à l'extérieur du cercle, les deux tangentes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ à $\mathscr{C}$ passant par M. On notera A et B les points de tangence.

Le cercle $\mathscr{C}$ coupe (MO) en deux points P et Q. D'autre part, soit H l'intersection de la corde $[AB]$ avec (OM). À l'aide d'homothéties, montrer que les cercles de centres P et Q et passant par H sont tangents à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.



[Indications] [Correction]

Exercice 144 (Tangentes communes)**.** (**Prérequis:Droite tangente à un cercle.)**
On donne trois cercles disjoints, de rayons distincts et à l'extérieur les uns des autres. Chacune des trois paires de cercles fournit deux tangentes communes extérieures qui se croisent en un point. Montrer que ces trois points sont alignés.
[Indications] [Correction]

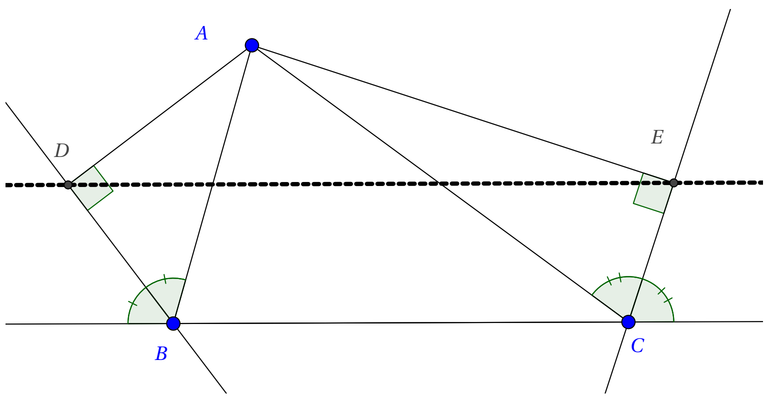
Exercice 145 (Construction de cercles DDP)**.** (**Prérequis:Droite tangente à un cercle.)**

1. On donne deux droites parallèles et un point A entre les deux droites. Dénombrer et tracer les cercles passant par A et tangents aux deux droites.
2. On donne deux droites sécantes et un point A n'appartenant pas aux deux droites. Dénombrer et tracer les cercles passant par A et tangents aux deux droites.

[Indications] [Correction]

Exercice 146 (distance au centre du cercle inscrit)**.** (**Prérequis: cercle inscrit, somme des angles d'un triangle)**
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit, dont on note r le rayon. Montrer qu'un des sommets du triangle est à distance $\geq 2r$ de I, et qu'un autre est à distance $\leq 2r$. [Indications] [Correction]

Exercice 147 (Bissectrices extérieures)**.** (**Prérequis:triangle rectangle ⇔ inscrit ds un demi-cercle.)**
À l'extérieur d'un triangle ABC, on construit deux triangles rectangles ADB et ACE, rectangles en D et E, et tels que D et E soient sur les bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC.
Que peut-on dire de (DE) ? De la distance DE ?



[Indications] [Correction]

9 Sorti du programme de 3ème en 2016

9.1 Angles inscrits, angles au centre

Ce petit bijou est sorti du programme de troisième à la dernière réforme, mais de toute façon il était sous-exploité. Pour des exercices de base sur le théorème des angles inscrits, voir le manuel Sesamath pré-2016. On a regroupé ici des exercices un peu plus stimulants.

Exercice 148 (Construction de l'arc capable)**.** On donne un segment $[AB]$ et un réel $\alpha \in]-\pi,\pi[$. On suppose que l'on dispose également d'un triangle auxiliaire XYZ avec $(\widehat{\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ}}) = \alpha$, de sorte que les angles de mesure α sont constructibles.

Construire le lieu des points M tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \alpha$.

[Indications] [Correction]

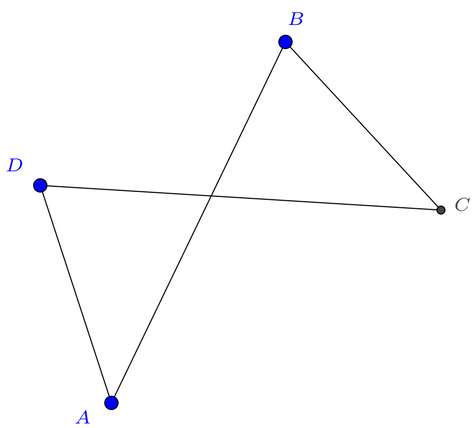
Exercice 149 (Octogone sur un segment)**.** Construire un octogone convexe régulier dont un des côtés est un segment $[AB]$ donné.

[Indications] [Correction]

Exercice 150 (Trapèzes inscriptibles)**.** Montrer qu'un trapèze est isocèle si et seulement s'il est inscriptible.

[Indications] [Correction]

Exercice 151 (antiparallélogramme)**.** Un antiparallélogramme est un quadrilatère croisé dont les cotés opposés sont deux à deux de même longueur. Soit $ABCD$ un antiparallélogramme. Montrer les assertion suivantes.



1. Les angles opposés ont la même mesure.
2. Les diagonales (AC) et (BD) sont parallèles.
3. La médiatrice des diagonales est un axe de symétrie de $ABCD$.
4. Deux côtés opposés ont leur point d'intersection situé sur cette médiatrice.
5. Le quadrilatère convexe $ADBC$ formé par les deux côtés non croisés et les diagonales est un trapèze isocèle.
6. $ABCD$ est inscriptible.

[Indications] [Correction]

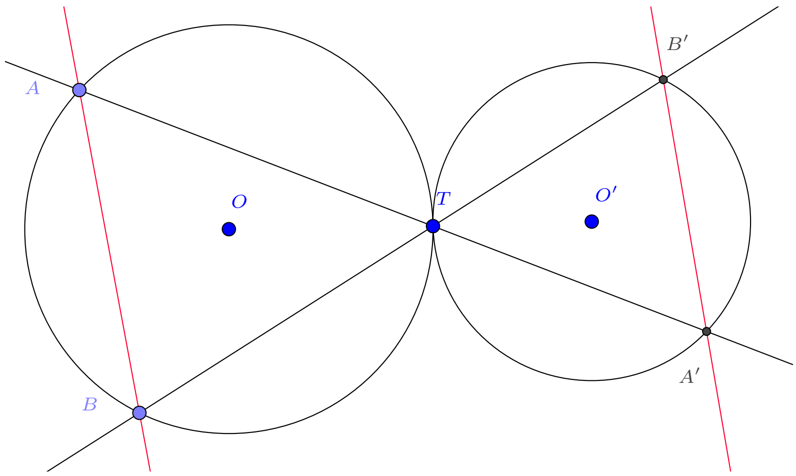
Exercice 152 (Théorème de Reim)**.** Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles sécants en A et B, et $\mathscr{D}_A$ (respectivement $\mathscr{D}_B$) une droite passant par A (resp. B). On note C et E (resp. D et F) l'intersection de $\mathscr{D}_A$ (resp. $\mathscr{D}_B$) avec les deux cercles. Montrer que $(CD)//(EF)$.

[Indications] [Correction]

Exercice 153 (Bissectrices et cercle circonscrit)**.** Les bissectrices intérieure et extérieure en A d'un triangle ABC non isocèle en A recoupent le cercle Γ circonscrit à ce triangle respectivement en I et J. Montrer que I et J appartiennent à la médiatrice de $[BC]$.

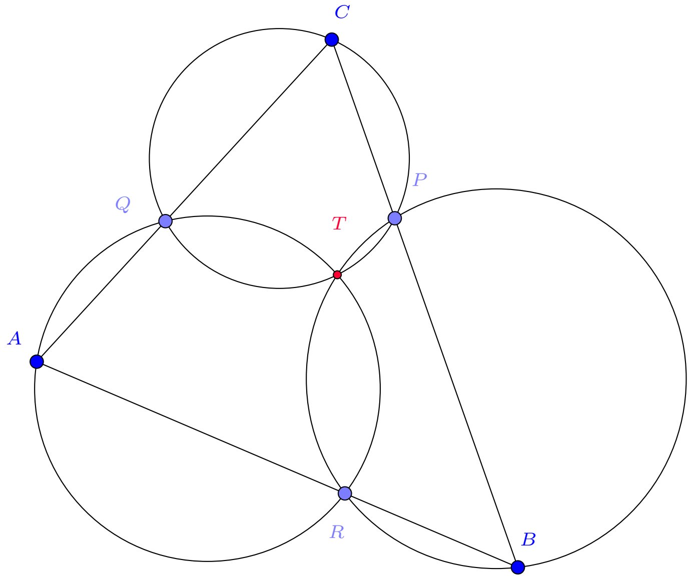
[Indications] [Correction]

Exercice 154 (Cas limite du théorème de Reim)**.** Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles tangents en un point T, et $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ deux droites sécantes en T. On note A et A' (resp. B et B') les points d'intersection de $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) avec $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.



[Indications] [Correction]

Exercice 155 (Théorème des trois cercles de Miquel)**.** Soit ABC un triangle direct, et P, Q R trois points situés sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que les cercles circonscrits à ARQ, BPR et CQP sont concourants.



[Indications] [Correction]

Exercice 156 (Triangle orthique ♡)**.** Soit ABC un triangle non rectangle et A', B', C' les pieds des hauteurs. Montrer que les hauteurs de ABC sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$, dit *triangle orthique*.

[Indications] [Correction]

Exercice 157 (Pentagramme)**.** Soit $\mathscr{C}$ un cercle, $[BC]$ une corde, et $A \in \mathscr{C}$ tels que les arcs AB et AC soient égaux. Soient $[AD]$ et $[AE]$ deux autres cordes d'extrémités A, qui coupent $[BC]$ en F et en G, respectivement. Montrer que $DEFG$ est inscriptible.

[Indications] [Correction]

Exercice 158 (Cercles sécants)**.** Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles se coupant en P et Q, et considérons une droite $\mathscr{D}$ coupant $\mathscr{C}_1$ en A et B, et coupant $\mathscr{C}_2$ en C et D. Montrer que $(PA, PC) = (DQ, BQ)$.

Plus précisément, montrer que les angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{DQB}$ sont égaux si $\mathscr{D}$ coupe le segment $[PQ]$ et que A, C, B et D sont alignés dans cet ordre. Que peut-on dire dans les autres cas ?

[Indications] [Correction]

Exercice 159 (Une application de Ptolémée)**.** Soit ABC un triangle équilatéral et M un point du cercle circonscrit appartenant à l'arc BC ne contenant pas A. Montrer que $MA = MB + MC$.

[Indications] [Correction]

Exercice 160 (Trisection)**.**

1. Soit Γ un cercle, O son centre et M un point n'appartenant pas à Γ. Deux sécantes issues de M coupent Γ respectivement en A et B, et en C et D. Démontrer l'égalité :
$$2\widehat{AMC} = \widehat{BOD} - \widehat{COA}.$$
2. Soient A et B deux points d'un cercle Γ de centre O et de rayon r. Sur la droite (OA), soit C le point extérieur au cercle tel que la droite (CB) recoupe le cercle en un point M vérifiant $MC = r$. (On ne demande pas de construire ce point, le placer approximativement sur la figure.) Montrer que $\widehat{ACB} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$.

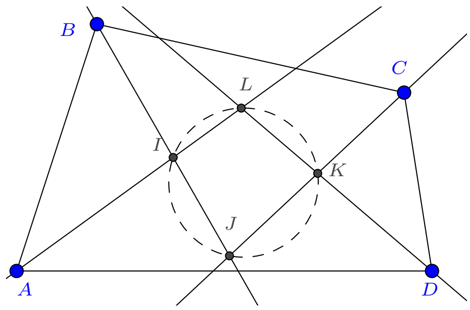
[Indications] [Correction]

Exercice 161 (Problème « DPP »)**.** Soit $\mathscr{D}$ une droite et A et B deux points situés d'un seul côté de $\mathscr{D}$. L'objectif est de construire un cercle passant par les deux points et tangent à la droite. On suppose que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles. (Si elles le sont, le problème est plus facile, voir l'exercice 77.)

1. (Analyse) Soit $\mathscr{C}$ un tel cercle et T son point de tangence avec $\mathscr{D}$. Montrer que $(AB, AT) = (TB, \mathscr{D})$.
2. (Synthèse) Soit I le point d'intersection de (AB) avec $\mathscr{D}$, B' le symétrique de B par rapport à I, et B'' le symétrique de B par rapport à $\mathscr{D}$. Montrer que le cercle circonscrit à $AB'B''$ (de diamètre $[AB']$ dans le cas où $B' = B''$) coupe $\mathscr{D}$ en deux points qui conviennent pour le choix de T.

[Indications] [Correction]

Exercice 162 (Bissectrices d'un quadrilatère convexe)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On note $\mathscr{B}_A$ (resp. $\mathscr{B}_B$, $\mathscr{B}_C$, $\mathscr{B}_D$) la bissectrice intérieure en A (resp. en B, C, D). Soient $I = \mathscr{B}_A \cap \mathscr{B}_B$, $J = \mathscr{B}_B \cap \mathscr{B}_C$, $K = \mathscr{B}_C \cap \mathscr{B}_D$ et $L = \mathscr{B}_D \cap \mathscr{B}_A$. Montrer que $IJKL$ est inscriptible.



[Indications] [Correction]

Exercice 163 (Médiatrices d'un quadrilatère convexe)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Que dire du quadrilatère formé par les intersections des médiatrices des quatre côtés ? En particulier, que dire si $ABCD$ est un parallélogramme ? Un losange ?

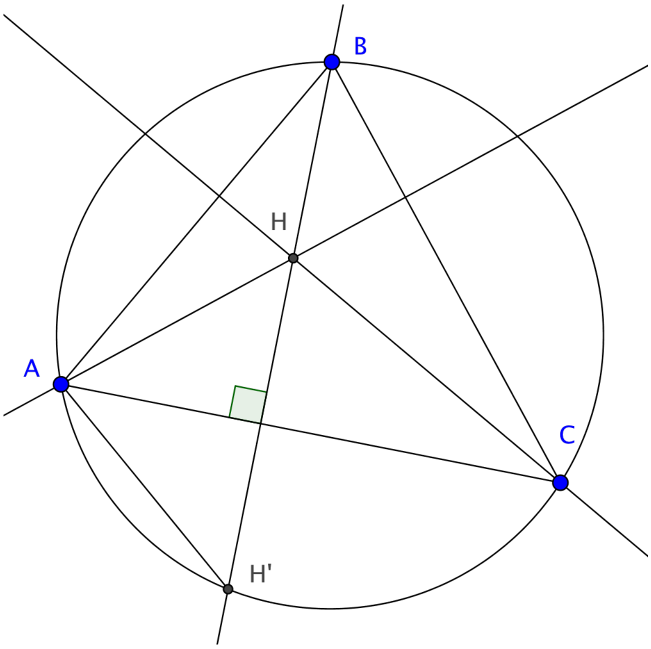
[Indications] [Correction]

Exercice 164 (Carré invisible, bis)**.** On considère un carré $ABCD$ et on place quatre points E, F, G, et H sur les côtés de ce carré (en-dehors des sommets). Puis, on efface le carré. L'objectif est de reconstruire le carré en utilisant le théorème de l'angle inscrit.

Si A est le sommet entre E et F, montrer que la diagonale du carré partant de A passe par l'intersection du cercle de diamètre $[EF]$ avec la médiatrice de $[EF]$. En déduire une construction des diagonales du carré, puis du carré.

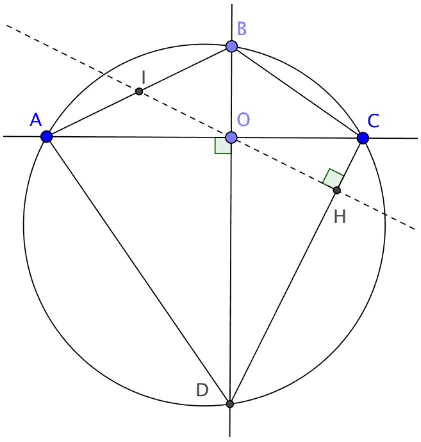
[Indications] [Correction]

Exercice 165 (Symétrique de l'orthocentre)**.** Soit ABC un triangle, H son orthocentre et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. La hauteur issue de B recoupe $\mathscr{C}$ en H'. Montrer que H' est le symétrique de H par rapport à la droite (AC).



[Indications] [Correction]

Exercice 166 (Un théorème de Brahmagupta)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible dont les diagonales sont perpendiculaires, et soit O leur point d'intersection. Soit H le projeté orthogonal de O sur $[CD]$, et I l'intersection de (OH) avec $[AB]$. L'objectif est de montrer que I est le milieu de $[AB]$.



1. Montrer qu'il est suffisant d'établir que $IO = IA$.
2. Conclure.

[Indications] [Correction]

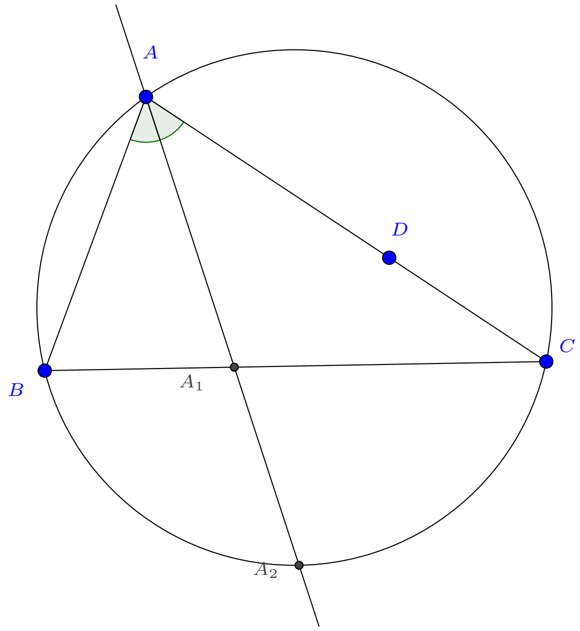
Exercice 167 (Puissance par rapport à un cercle)**.** Soit $\mathscr{C}$ un cercle, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes en P et coupant chacune le cercle en deux points, A et B et A' et B'.

Montrer que $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.

[Indications] [Correction]

Exercice 168 (Réflexion)**.** Soit ABC un triangle non isocèle en A. La bissectrice intérieure Δ de $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en A_1 et le cercle circonscrit à ABC en A_2.

1. Soit D le symétrique de B par rapport à Δ. Justifier que $D \in (AC)$.
2. Montrer que A_1A_2CD est inscriptible.
3. Montrer que $AA_1 \cdot AA_2 = AB \cdot AC$.



[Indications] [Correction]

10 Indications pour la résolution des exercices

Indications pour l'exercice 12 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser une ou plusieurs cordes.
Indications pour l'exercice 18 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser un triangle isocèle.
Indications pour l'exercice 19 (retour à l'énoncé, voir la correction) Décomposer l'aire comme la somme des aires de deux triangles.
Indications pour l'exercice 25 (retour à l'énoncé, voir la correction) Les diagonales d'un rectangle sont égales et se coupent en leur milieu.
Indications pour l'exercice 27 (retour à l'énoncé, voir la correction) Raisonner d'abord par conditions nécessaires en faisant une figure approximative. Si de tels points existent, alors on peut dire un certain nombre de choses sur ce losange.
Indications pour l'exercice 29 (retour à l'énoncé, voir la correction) Prolonger le segment $[AO]$.
Indications pour l'exercice 32 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer les symétries axiales d'axe $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Indications pour l'exercice 36 (retour à l'énoncé, voir la correction) Tracer le milieu I de AB puis procéder par analyse-synthèse.
Indications pour l'exercice 38 (retour à l'énoncé, voir la correction) Le triangle rectangle ADA' est inscrit dans un demi-cercle.
Indications pour l'exercice 39 (retour à l'énoncé, voir la correction) Pour le premier cas, utiliser des angles complémentaires.
Indications pour l'exercice 40 (retour à l'énoncé, voir la correction)
Indications pour l'exercice 41 (retour à l'énoncé, voir la correction)

1. Penser à un trapèze.
2. On peut obtenir une telle droite comme hauteur d'un triangle ABC adéquat.

Indications pour l'exercice 42 (retour à l'énoncé, voir la correction) Montrer que $(AB)\perp(RC)$.
Indications pour l'exercice 43 (retour à l'énoncé, voir la correction) Déterminer les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.
Indications pour l'exercice 45 (retour à l'énoncé, voir la correction) Reformulation de l'énoncé : le triangle BMN doit être isocèle.
Indications pour l'exercice 47 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer deux médianes ainsi que leur point d'intersection G, puis considérer le symétrique de G par rapport au pied des deux médianes.
Indications pour l'exercice 49 (retour à l'énoncé, voir la correction) Il n'y a pas besoin du théorème de Thalès : les médianes d'un triangle se croisent en un point situé aux deux-tiers des sommets.
Indications pour l'exercice 51 (retour à l'énoncé, voir la correction) Où se trouve le point M sur le segment $[AC]$?
Indications pour l'exercice 54 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer la translation τ de distance a suivant la direction de la droite.
Indications pour l'exercice 55 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et l'image de I par cette translation.
Indications pour l'exercice 56 (retour à l'énoncé, voir la correction) Des translations commutent
Indications pour l'exercice 57 (retour à l'énoncé, voir la correction) Faire tourner le carré circonscrit par rapport au carré inscrit.
Indications pour l'exercice 58 (retour à l'énoncé, voir la correction) L'aire de l'intersection vaut le quart de l'aire du carré $ABCD$.
Indications pour l'exercice 59 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Indications pour l'exercice 60 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Indications pour l'exercice 61 (retour à l'énoncé, voir la correction) Procéder par analyse-synthèse et considérer des rotations.
Indications pour l'exercice 62 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser des rotations.
Indications pour l'exercice 64 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$.
Indications pour l'exercice 65 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer une rotation de centre A.
Indications pour l'exercice 66 (retour à l'énoncé, voir la correction) Si ABC est un tel triangle, considérer les rotations d'angles $\pm\pi/3$ et centrées sur les sommets. Déterminer les images des différents points et droites par ces rotations.
Indications pour l'exercice 69 (retour à l'énoncé, voir la correction) Il suffit de montrer que cette bissectrice passe par le centre du carré.
Indications pour l'exercice 70 (retour à l'énoncé, voir la correction) Il suffit de construire une des droites d'appui du carré. Pour cela, il suffit de construire un deuxième point sur cette droite.
Indications pour l'exercice 71 (retour à l'énoncé, voir la correction) Ce sont les deux triangles rectangles en C.
Indications pour l'exercice 73 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser le théorème de Pythagore.
Indications pour l'exercice 74 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser le théorème de Pythagore.
Indications pour l'exercice 75 (retour à l'énoncé, voir la correction) Méthodologie : essayer avec plusieurs points M. Que remarque-t-on ?
Indications pour l'exercice 76 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer I et J les milieux de MA et AM' ainsi qu'une projection orthogonale. Une telle projection réduit les distances.
Indications pour l'exercice 81 (retour à l'énoncé, voir la correction) Commencer par construire un cercle tangent aux deux droites.

Indications pour l'exercice 82 (retour à l'énoncé, voir la correction)

1. Penser au triangle de l'écolier.

Indications pour l'exercice 83 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser la caractérisation des triangles isocèles à l'aide d'angles.
Indications pour l'exercice 84 (retour à l'énoncé, voir la correction) Pythagore.
Indications pour l'exercice 85 (retour à l'énoncé, voir la correction) Triangles isocèles et rectangles
Indications pour l'exercice 86 (retour à l'énoncé, voir la correction) La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ est la demi-droite composée des points à égale distance des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.
Indications pour l'exercice 89 (retour à l'énoncé, voir la correction) Centre du cercle inscrit.
Indications pour l'exercice 90 (retour à l'énoncé, voir la correction) Écrire les distances aux sommets en fonction des angles du triangle.
Indications pour l'exercice 91 (retour à l'énoncé, voir la correction) Décomposer les longueurs suivant les points de tangence du cercle inscrit.
Indications pour l'exercice 93 (retour à l'énoncé, voir la correction) Partitionner le triangle en plusieurs triangles pour calculer l'aire.
Indications pour l'exercice 98 (retour à l'énoncé, voir la correction) Méthodologie : de quels théorèmes dispose-t-on? Lesquels concernent le parallélisme? Pour l'aire, considérer l'aire du complémentaire de $IJKL$ par exemple, ou bien utiliser les diagonales de $ABCD$.
Indications pour l'exercice 99 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer l'application du segment $[AB]$ dans lui-même qui a un point D sur le segment associe G comme construit dans l'énoncé. Que dire si D est une des extrémités du segment? Que peut-on dire de cette application?
Indications pour l'exercice 101 (retour à l'énoncé, voir la correction)

1. Utiliser des triangles particuliers.
2. Utiliser le théorème de Thalès.

Indications pour l'exercice 105 (retour à l'énoncé, voir la correction) Écrire de façon plus simple le nombre dont a_n est le dernier chiffre.
Indications pour l'exercice 113 (retour à l'énoncé, voir la correction) Les sommes semblent toujours donner des carrés.
Indications pour l'exercice 116 (retour à l'énoncé, voir la correction) Si ϕ est une homothétie envoyant $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$, alors $O' = \phi(O)$. Il suffit d'avoir un deuxième couple $(M, \phi(M))$ pour pouvoir tracer le centre de l'homothétie ϕ.
Indications pour l'exercice 117 (retour à l'énoncé, voir la correction) En faisant une figure avec le carré déjà construit, on voit alors deux segments parallèles, ce qui invite à utiliser une homothétie.
Indications pour l'exercice 118 (retour à l'énoncé, voir la correction)

1. Considérer une homothétie de centre G.
2. Considérer une homothétie de centre H. On rappelle que $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Indications pour l'exercice 120 (retour à l'énoncé, voir la correction) Considérer le quadrilatère $ABB'A'$ et ses diagonales : elles se croisent sur la droite.
Indications pour l'exercice 122 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser une homothétie et une symétrie centrale.
Indications pour l'exercice 123 (retour à l'énoncé, voir la correction) Des homothéties de même centre commutent
Indications pour l'exercice 124 (retour à l'énoncé, voir la correction) Homothéties et translations
Indications pour l'exercice 126 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser des triangles semblables, ou bien utiliser la puissance d'un point par rapport à un cercle.
Indications pour l'exercice 131 (retour à l'énoncé, voir la correction) Que valent ces nombres?
Indications pour l'exercice 137 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser des triangles isocèles.
Indications pour l'exercice 138 (retour à l'énoncé, voir la correction)

1. À quelle distance de O' se situe ce point d'intersection?

2. Utiliser le cercle de centre O' et de rayon $r'-r$ pour une tangente « extérieure » ou bien $r'+r$ pour une tangente « intérieure », et un autre cercle.

Indications pour l'exercice 139 (retour à l'énoncé, voir la correction) 1. Commencer par trouver le point de la droite qui va appartenir au cercle.

2. Idem.

Indications pour l'exercice 140 (retour à l'énoncé, voir la correction)

1. Test de méthodologie : quelles droites peut-on tracer à partir de ce qui est donné ?
2. Construire la droite équidistante (à distance r) des deux parallèles, puis les deux droites parallèles à la troisième et à distance r.

Indications pour l'exercice 141 (retour à l'énoncé, voir la correction) Soient O_1, O_2 et O_3 les centres des trois cercles. Considérer le centre le centre du cercle circonscrit à $O_1O_2O_3$.

Indications pour l'exercice 144 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser des homothéties.

Indications pour l'exercice 145 (retour à l'énoncé, voir la correction) Sans la condition sur A, l'exercice est facile. Tracer n'importe quel cercle tangent aux droites. Ensuite, appliquer la méthodologie classique.

Indications pour l'exercice 146 (retour à l'énoncé, voir la correction) Écrire les distances aux sommets en fonction des angles du triangle.

Indications pour l'exercice 147 (retour à l'énoncé, voir la correction) Elle est parallèle à (BC), et elle coupe $[AB]$ et $[AC]$ en leur milieu. La distance DE vaut la moitié du périmètre de ABC.

Indications pour l'exercice 149 (retour à l'énoncé, voir la correction) Il y a deux tels octogones. En notant O le centre d'un tel octogone, on doit avoir $\widehat{AOB} = \pm\pi/4$.

Indications pour l'exercice 153 (retour à l'énoncé, voir la correction) Rédiger avec des angles de droites et ne pas faire de distinction entre bissectrice extérieure et intérieure.

Indications pour l'exercice 154 (retour à l'énoncé, voir la correction) Introduire la tangente commune $\mathscr{T}$ aux deux cercles.

Indications pour l'exercice 155 (retour à l'énoncé, voir la correction) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits à ARQ et BPR. Ils se coupent en R et en un deuxième point T. Montrer que T est sur le cercle circonscrit à CQP.

Indications pour l'exercice 156 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser les angles droits pour montrer que des points sont cocycliques, puis utiliser le théorème de l'angle inscrit.

Indications pour l'exercice 159 (retour à l'énoncé, voir la correction) Sans le théorème de Ptolémée, on peut aussi considérer le point $N \in [AM]$ tel que $\widehat{BNM} = \pi/3$.

Indications pour l'exercice 160 (retour à l'énoncé, voir la correction) Décomposer $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})$ en $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MC})$.

Indications pour l'exercice 162 (retour à l'énoncé, voir la correction) La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π.

Indications pour l'exercice 165 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser les différentes caractérisations des triangles isocèles.

Indications pour l'exercice 166 (retour à l'énoncé, voir la correction) Où se trouve le centre du triangle circonscrit d'un triangle rectangle ?

Indications pour l'exercice 167 (retour à l'énoncé, voir la correction) Utiliser des triangles semblables.

11 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) 21 et 33.
Correction de l'exercice 2 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. La suite semble être construite en itérant alternativement les opérations $+2$ et $\times 2$. Dans ce cas, le prochain nombre devrait être 36.
2. La suite semble être construite en itérant le groupe d'opérations $+1$ et $\times 2$ à chaque étape (ou $\times 2$ et $+2$, c'est pareil). Dans ce cas, le prochain nombre devrait être 126.
3. Chaque terme semble être la somme des deux précédents. Dans ce cas, le prochain nombre devrait être 21.

Correction de l'exercice 3 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On fait la liste des diviseurs de 36, et on calcule les sommes possibles de trois nombres dont le produit vaut trente-six.

S'il manque des données, c'est que cette somme à elle seule, qui est connue en théorie, ne permet pas de conclure. Ceci ne se produit que si les âges sont 1, 6 et 6 ou bien 2, 2 et 9.

Comme il y a un(e) ainé(e), on est forcément dans le deuxième cas.

Correction de l'exercice 5 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Il y a 90 matchs joués : chaque équipe joue 18 matchs. Il y a dix équipes, mais multiplier le nombre de maths par équipes par le nombre d'équipes revient à compter chaque match deux fois.

Correction de l'exercice 6 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Entre chacun des dix chiffres, c'est-à-dire à neuf emplacements possibles, on doit choisir si oui ou non on insère un signe + ou pas. Pour chaque emplacement, on a donc deux choix, et donc au final, on a $2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 512 (= 2^9)$ choix. Mais parmi ces 512 choix, il y a celui de ne rien insérer du tout, or l'énoncé est formulé de telle sorte qu'on doit au moins insérer un signe +. Il y a donc finalement 511 choix.

Correction de l'exercice 7 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Vingt-quatre heures avant qu'il ne soit totalement recouvert, c'est-à-dire le 30 juin à midi.

Correction de l'exercice 8 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) (Note : la solution qui suit n'est pas adaptée à la 6ème car il y a du calcul littéral, mais on peut faire sans.)

Notons n le nombre de participants. Pour chaque entier k compris entre 1 et n, notons a_n le nombre personnes que connaît le n-ème participant. Alors les a_i sont n entiers entre 0 et $n-1$ et il s'agit de montrer que deux d'entre eux sont identiques. (Notons que le principe des tiroirs ne permet pas de conclure immédiatement, puisqu'il y a n entiers à distribuer dans n tiroirs.)

Supposons que tous les a_i soient distincts. Alors ils valent forcément (dans le désordre) 0, 1, 2, .. $n-1$. Ceci signifie qu'un participant connaît tout le monde, et qu'un autre ne connaît personne, ce qui est absurde. On en déduit que deux des entiers a_i sont égaux.

Correction de l'exercice 9 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Groupons les entiers de 1 à 20 deux par deux : 1 et 2, puis 3 et 4, etc jusqu'à 19 et 20. Ceci donne dix « lots » de deux entiers consécutifs.

Or on a choisi onze nombres entiers, donc comme il n'y a que dix lots, on a forcément choisi deux nombres dans un même lot au moins une fois, sinon on aurait choisi moins de dix nombres.

Correction de l'exercice 10 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Comme chaque coefficient est compris entre -1 et 1, la somme de trois coefficients est comprise entre -3 et 3, ce qui fait sept valeurs entières possibles.

D'autre part il y a huit sommes à calculer (les trois lignes, les trois colonnes et les deux diagonales).

Il y a donc au moins deux des huit sommes qui sont identiques. (C'est le principe des tiroirs, mais ici le résultat est intuitif.)

Correction de l'exercice 11 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. Comme il y a plus d'élèves que de jours dans l'année, il y a au moins deux élèves qui fêtent leur anniversaire le même jour.
2. À partir de 367 élèves, on peut conclure de la même manière.
3. S'il y a $3\times 366 = 1098$ élèves, il est possible qu'exactement trois d'entre eux fêtent leur anniversaire chaque jour. À partir de $3\times 366+1 = 1099$ élèves, il y en a forcément quatre qui fêtent leur anniversaire le même jour.

Correction de l'exercice 12 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On trace une corde et sa médiatrice, qui doit contenir le centre du cercle.

Ensuite, soit on recommence avec une autre corde, soit, puisque la première médiatrice fournit un diamètre, on construit la médiatrice de ce diamètre.

Correction de l'exercice 13 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Comme $BA = BC$, B est sur la médiatrice de $[AC]$.

De même, D est sur la médiatrice de $[AC]$.

Donc la droite (BD) est la médiatrice de $[AC]$, ce dont on déduit que ces deux droites se croisent à angle droit au milieu de $[AC]$.

Correction de l'exercice 14 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Comme dans le cas du cerf-volant, les égalités $BA = BC$ et $DA = DC$ montrent que B et D sont sur la médiatrice de $[AC]$ et donc que la droite (BD) est la médiatrice de $[AC]$.

On montre de la même manière que la droite (AC) est la médiatrice du segment $[DB]$.

Correction de l'exercice 15 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) L'exercice ressemble comme deux gouttes d'eau à la preuve que les médiatrices sont concourantes, mais rédigé avec des réflexions.

Comme B est le symétrique de A par rapport à $\mathscr{D}$, la droite $\mathscr{D}$ est la médiatrice de $[AB]$. On en déduit que pour tout point P de $\mathscr{D}$, on a $PA = PB$. En particulier, comme O est sur $\mathscr{D}$, on a

$$OA = OB.$$

On prouve de la même manière que

$$OA = OB'.$$

On en déduit donc l'égalité de distances

$$OB = OB',$$

ce qui montre que $\boxed{O \text{ est sur la médiatrice de } [BB']}$.

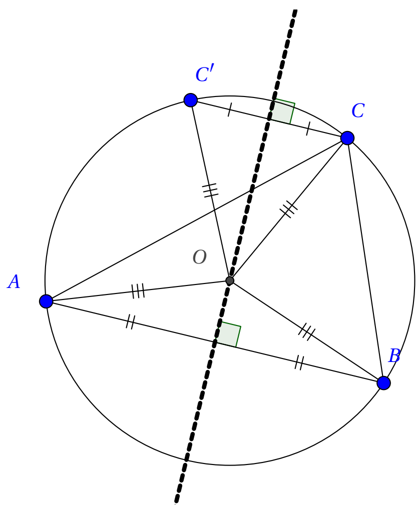
Correction de l'exercice 16 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les cercles ont même rayon, donc les cordes communes sont les médiatrices des segments reliant les centres des cercles. Ces médiatrices sont donc concourantes.

Correction de l'exercice 17 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Il s'agit de montrer que C' appartient au cercle circonscrit de ABC.

Comme C et C' sont symétriques par rapport à $\mathscr{D}$, tout point P de cette droite vérifie $PC = PC'$.

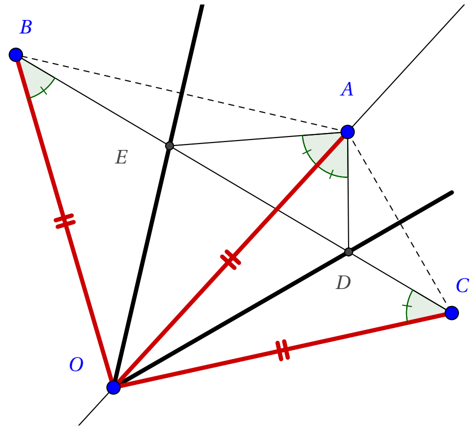
En particulier, le centre O, du cercle circonscrit à ABC, qui est l'intersection des trois médiatrices, vérifie $OC = OC'$.

On en déduit que C' est sur le cercle de centre O et de rayon OC. Ce cercle est le cercle circonscrit à ABC, ce qu'il fallait démontrer.



Note : on peut aussi poser cet exercice de la façon suivante « Montrer qu'un trapèze est inscriptible si et seulement s'il est isocèle ». En général, on montre ce résultat à l'aide du théorème de l'angle inscrit mais la preuve élémentaire ci-dessus marche aussi et n'est pas très longue.

Correction de l'exercice 18 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Bel exercice qui demande d'utiliser deux caractérisations des triangles isocèles, ainsi que de la médiatrice.



Comme A et B sont symétriques l'un de l'autre par rapport au bord de l'angle, on a $OA = OB$. On a de même $OA = OC$, donc $OB = OC$, et donc OBC est isocèle.

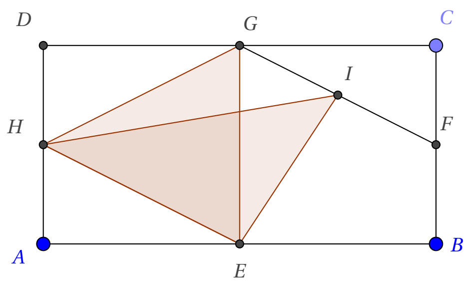
Par l'autre caractérisation des triangles isocèles, on en déduit $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$.

Or, comme les symétries axiales préservent les angles (non orientés), on a $\widehat{OBC} = \widehat{OBE} = \widehat{OAE}$, et d'autre part, $\widehat{OCB} = \widehat{OCD} = \widehat{OAD}$.

Finalement, $\boxed{\widehat{OAE} = \widehat{OAD}\text{, et donc } [AO) \text{ est la bissectrice de } \widehat{EAD}.}$

Correction de l'exercice 20 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) C'est la moitié de l'aire du parallélogramme.

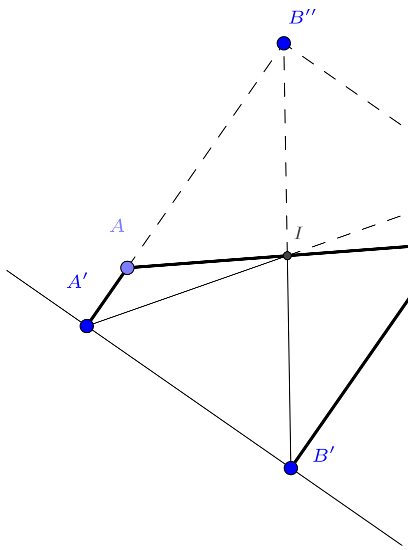
Correction de l'exercice 22 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On peut découper en plusieurs petits triangles, ou bien voir que $(GF)//(HE)$. On peut alors calculer l'aire de la façon suivante :



On en déduit que l'aire du triangle vaut un quart de celle du rectangle.

Correction de l'exercice 24 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On considère la symétrie centrale de centre O (le centre de $ABCD$). Comme une symétrie centrale préserve les distances, et de plus envoie une droite sur une droite parallèle, on voit que l'image de I est K, et l'image de J est L. Ceci montre que $IJKL$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 25 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)



<u>Première solution</u> : soit σ la symétrie centrale de centre I et A'' (respectivement B'') l'image de A' (resp. B') par σ.

Par construction, $A'B'A''B''$ est un parallélogramme de centre I, et par construction également, on a $B = \sigma(A)$.

Montrons que $A'B'A''B''$ est un rectangle. Comme une symétrie centrale envoie une droite sur une droite parallèle, l'image de la droite (AA') lui est parallèle, et doit forcément contenir $\sigma(A)$ c'est-à-dire B. C'est donc la droite (BB'). Ceci montre que A'' est le point d'intersection des droites $(A'I)$ et (BB'), et donc que $A'B'A''B''$ est un rectangle.

Comme les diagonales d'un rectangle on même longueur, on a terminé.

<u>Deuxième solution</u> : une projection orthogonale sur une droite préserve les milieux : on peut par exemple le prouver en considérant un repère orthonormé et des coordonnées. On voit alors que la projection orthogonale I' de I sur $(A'B')$ est le milieu de $[A'B']$. Ceci signifie que dans le triangle $A'IB'$, la hauteur issue de I est également la médiane issue de I. Le triangle $A'IB'$ est donc isocèle, d'où $A'I = B'I$.

Correction de l'exercice 26 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Le quadrilatère $AMBM'$ est un parallélogramme car ses diagonales se croisent en leur milieu. Les segments $[AM]$ et $[M'B]$ sont donc parallèles et de même longueur.

De même, $AMCM''$ est un parallélogramme, et donc les segments $[AM]$ et $[M''C]$ sont donc parallèles et de même longueur.

On en déduit que $M'BCM''$ est un parallélogramme, et donc ses côtés opposés $[M'M'']$ et $[BC]$ sont (parallèles et) de même longueur.

Correction de l'exercice 27 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Procédons par conditions nécessaires, puis suffisantes. (On dit aussi que l'on raisonne par analyse-synthèse.)

Si de tels points existent et que $APCQ$ est un losange, alors ses diagonales $[AC]$ et $[PQ]$ se croisent en leur milieu et sont orthogonales. Donc (PQ) doit être la médiatrice de $[AC]$.

Faisons maintenant la synthèse : traçons la médiatrice de $[AC]$: elle passe par le centre O du rectangle, et coupe $[AB]$ et $[CD]$ en deux points P et Q. De plus, $OP = OQ$, en effet, toute droite passant par le centre du rectangle coupe le rectangle en deux points qui sont à même distance du centre, par symétrie centrale.

Correction de l'exercice 28 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Soit O le centre de $ABCD$.

Comme $BA' = DC'$ et $(BA')//(DC')$, on en déduit que $BA'DC'$ est un parallélogramme. 1

Son centre est le milieu de la diagonale $[BD]$ c'est-à-dire O, et donc O est le milieu de $[A'C']$. (En d'autres termes, A' et C' sont symétriques para rapport à O.) 1

On montre de même que O est le milieu de $[B'D']$. 1

Donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme, soit parce que ses diagonales se croisent en leur milieu, soit, en reformulant avec des symétries, parce que la symétrie centrale de centre O envoie A' sur C' et

B' sur D'. 1

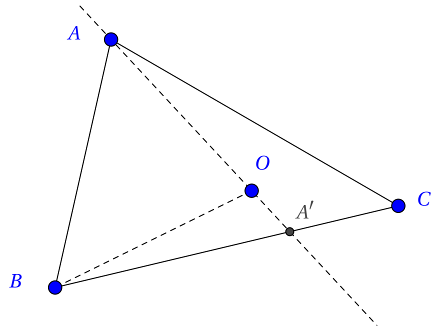
Montrons que son aire est cinq fois celle de $ABCD$.

Le triangle $BA'B'$ a la même aire que BAB', car ils ont des bases $[AB]$ et $[BA']$ de même longueur et la même hauteur. 1

Ensuite, le triangle BAB' a la même aire que $ABCD$, car sa base $[BB']$ est deux fois plus grande que la base $[BC]$ du parallélogramme, et les hauteurs relativement à ces bases sont égales. 1

On peut faire un peu plus rapide avec la théorème des milieux, mais cette preuve-ci évite de faire appel à ce théorème.

Correction de l'exercice 29 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) La droite (AO) coupe $[BC]$ en un point A'.



On applique l'inégalité triangulaire sur $AA'C$ et $OA'B$:

$$AO + OA' \leq AC + CA',$$

$$OB \leq OA' + A'B$$

En sommant, on obtient le résultat.

Correction de l'exercice 31 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Considérons la symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$, et soit B' l'image de B par cette symétrie axiale. Les points A et B' sont situés de part et d'autre de la droite $\mathscr{D}$.

Si un chemin va de A à B en touchant la droite, alors à partir du moment où on touche la droite, il est équivalent d'aller vers B ou d'aller vers B', puisque la droite $\mathscr{D}$ est la médiatrice de $[BB']$.

Considérons alors le segment $[AB']$: c'est le plus court chemin entre A et B'. Il coupe $\mathscr{D}$ en un point C. Alors le plus court chemin de A à B qui touche la droite $\mathscr{D}$ consiste à aller de A à C en ligne droite, puis de C à B en ligne droite.

En utilisant qu'une symétrie axiale conserve les angles (non orientés), ainsi que des angles opposés par le sommet ou bien alternes-internes, on en déduit que les angles d'incidence et de réflexion sur la droite $\mathscr{D}$ sont égaux.

Correction de l'exercice 33 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Il y a deux triangles vérifiant ces conditions : ce sont les deux triangles isocèles de base AB et d'aire $\mathscr{A}$. Pour le démontrer, considérons les deux droites parallèles à (AB) et à une distance $h = \dfrac{\mathscr{A}}{AB}$ de la droite (AB). Un triangle ABC a une aire égale à $\mathscr{A}$ si et seulement si le point C appartient à un de ces deux droites (suivant s'il est direct ou indirect).

Pour simplifier, supposons que l'on cherche uniquement les triangles ABC directs, et appelons $\mathscr{D}$ la droite formée des points C tels que ABC soit direct et d'aire $\mathscr{A}$.

Il s'agit donc de trouver un tel point C pour que le périmètre de ABC soit minimal. Comme la distance AB est fixe, il s'agit donc de minimiser $AC + CB$. On peut appliquer le résultat de l'exercice 31, d'après lequel le point C qui convient est l'intersection de $\mathscr{D}$ et du segment joignant A à l'image de B par symétrie axiale d'axe $\mathscr{D}$. Ceci produit un triangle isocèle (utilisation d'angles opposés, ou alors alternes-internes).

Correction de l'exercice 34 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Ce sont les deux triangles isocèles de base $[AB]$. Le problème est dual du précédent.

Autre solution, de plus haut niveau : fixer le périmètre revient à fixer la longueur $AC+CB$. Le point C décrit donc une ellipse.

D'autre part, par la formule $\mathscr{A} = AB \cdot h$ avec h la longueur de la hauteur issue de C, le ou les triangles d'aire maximale sont ceux pour lesquels C est le plus éloigné de la droite (AB).

On voit alors que l'aire maximale est atteinte lorsque C est sur a médiatrice de $[AB]$.

Correction de l'exercice 35 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Notons O le milieu de $[BC]$, et considérons le symétrique A' de A par rapport à O. Alors $ABA'C$ est un rectangle : en effet c'est un parallélogramme car ses côtés sont deux à deux de même longueur (ou aussi : parallèles deux à deux, puisqu'une symétrie centrale envoie une droite sur une droite parallèle). Or, un parallélogramme qui possède un angle droit est un rectangle.

On en déduit que les médiatrices de ses côtés se croisent au centre de ce rectangle, qui est le milieu de ses diagonales, donc le milieu de $[BC]$, et donc O. Ceci montre que O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Preuve de la réciproque :

Correction de l'exercice 36 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On relie les points A et B. On construit le milieu I de $[AB]$. On a donc $AI = \frac{1}{2}AB$. On trace le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AI. Ceci fait, On trace le cercle $\mathscr{C}'$ centré en I de diamètre AB. Nommons C l'un des deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Il s'agit de l'une des deux solutions possibles.

En effet, par construction $AC = \frac{1}{2}AB$, puisque C appartient à $\mathscr{C}$. En outre ACB est rectangle en C. En effet, ACB est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$ et AB est un diamètre de $\mathscr{C}'$.

Correction de l'exercice 37 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Comme par hypothèse $DA = DC = DB$, les points A, B et C sont situés sur le cercle de centre A et de diamètre AB. Donc, ACB est rectangle en C.

Puisque ADC est équilatéral, $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} = 60°$. Comme ACB est rectangle en C, donc $\widehat{ACB} = 90°$.

De la relation $180° = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA}$ on tire $\widehat{CBA} = 30°$.

Correction de l'exercice 38 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

D'après les hypothèses, la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (AH) et ADA' est rectangle en D. Donc, les droites (AH) et $(A'D)$ sont perpendiculaires. Or, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Correction de l'exercice 39 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les angles en M et N sont droits.

Dans le premier cas, les angles sont égaux car ils ont le même complémentaire.

Dans le second cas, ils sont supplémentaires car leur comme plus deux angles droits vaut 2π (dans un quadrilatère convexe, la somme des angles vaut 2π).

Correction de l'exercice 41 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Prendre un deuxième point N sur le cercle de telle sorte que (AM) et (BN) se coupent en un point C. On peut alors construire l'orthocentre de ABC. La troisième hauteur fournit une droite orthogonale à (AB), coupant le cercle en deux points P et Q. On peut alors compléter MPQ en un trapèze (isocèle) $MPQR$, en utilisant les diagonales d'un tel trapèze. La droite (MR) est orthogonale à (AB).

Correction de l'exercice 42 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les trois droites sont les hauteurs de ABC.

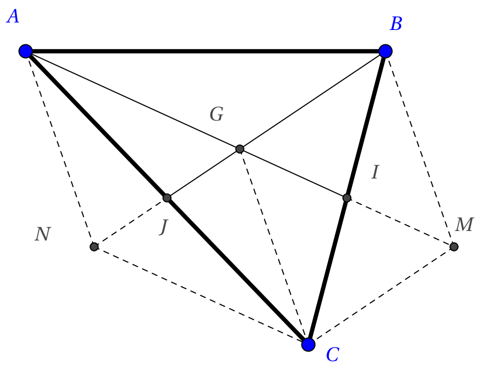
Correction de l'exercice 43 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Le point A est l'orthocentre de PQB. L'angle est donc droit.

Correction de l'exercice 44 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, et deux angles consécutifs sont supplémentaires. On en déduit que deux bissectrices consécutives sont perpendiculaires. La réciproque est vraie aussi : si les bissectrices consécutives sont perpendiculaires, alors deux angles consécutifs sont supplémentaires et donc on a un parallélogramme.

Correction de l'exercice 45 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Méthodologie : tracer la figure avec le point M construit (même approximativement), ce qui permet de réfléchir. Ensuite, tracer ce qui peut être tracé, par exemple ici la droite (BN). On voit que cette droite doit être la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA}$, bissectrice qui est constructible priori. Une fois construite, elle coupe $[AC]$ en un point N. On construit alors M en menant la parallèle.

Noter qu'en appelant M' le symétrique de M par rapport à la bissectrice (BN), alors M' est sur $[BC]$ et en plus $BMNM'$ est un losange, ce qui montre que la construction est correcte.

Correction de l'exercice 47 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Notons ABC un triangle quelconque, I (resp. J) le pied de la médiane issue de A (resp. B). Soit M (resp. N) le symétrique de G par rapport à I (resp. J).



Alors, $AGCN$ et $BGCM$ sont des parallélogrammes car leurs diagonales se croisent en leur milieu.

On en déduit que $ABMN$ est un parallélogramme. Donc ses diagonales se coupent en leur milieu, ce qui montre que $AG = 2GI$ et $BG = 2GJ$. (Note : on aurait aussi peu utiliser que $GMCN$ est un parallélogramme.)

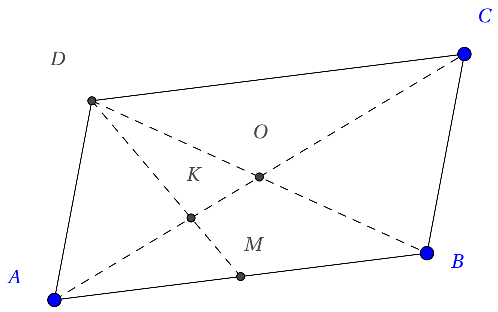
On a donc montré qu'étant donné un triangle, deux médianes quelconques se coupent toujours aux deux-tiers à partir des sommets. Ceci montre que les trois médianes sont forcément concourantes, puisqu'on peut échanger le rôle des deux dernières médianes.

(Autre façon de conclure, en utilisant le théorème des milieux : montrons que si K est le milieu de $[AB]$, alors (CK) contient le point G. Par le théorème des milieux appliqué au triangle ABM, le segment $[GK]$ est parallèle à (BM), donc par ce qui précède, à (GC). On en déduit que K, G et C sont alignés.)

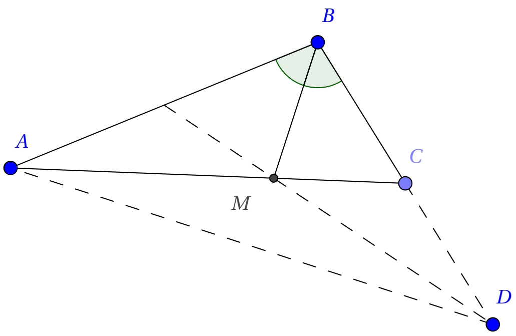
Correction de l'exercice 48 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Le point K est le centre de gravité 1
de ABD. 1

On en déduit que (AK) est une autre médiane de ce triangle, et donc qu'elle coupe $[BD]$ en son
milieu O. 1

Et donc, (AK) contient le centre du parallélogramme $ABCD$, c'est donc une diagonale et donc elle contient C.



Correction de l'exercice 50 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les deux triangles coupés par la médiane ont la même hauteur et des bases de même longueur (égales à la moitié de la base du triangle d'origine).
Correction de l'exercice 51 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)



1

Soit D le symétrique de B par rapport à C. 1

Alors $AB = BD$ donc ABD est isocèle en B. 1

De plus, M est son centre de gravité puisqu'il est aux deux tiers d'une des médianes. 1

La droite (BM) est donc la médiane issue de B, et donc également la bissectrice de ABD issue de B. On en déduit que

$$\widehat{ABM} = \widehat{MBC}.$$

Correction de l'exercice 52 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. C'est le cas si et seulement s'il existe un entier n tel que $225 = n + (n+1) + \ldots + (n+4) = 5n + (0+1+2+3+4) = 5n + 10$. Or, cette équation est équivalente à $215 = 5n$ donc à $n = 215/5$. Ici, comme 215 est bien divisible par 5, il y a bien une solution entière, c'est $n = 215/5 = 43$. On a donc $225 = 43 + 44 + 45 + 46 + 47$.

2. Le même raisonnement aboutit à $219 = 4n$, qui n'a pas de solution entière car 219 n'est pas pair, et donc a fortiori n'est pas divisible par quatre.

Pour un corrigé différent, voir `http://www.animath.fr/IMG/pdf/coupe_animath_automne_17_corrige.pdf`

Ouverture pour le lycée : on peut se demander pour quels k est-ce que 225 est la somme de k entiers consécutifs.
Correction de l'exercice 53 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On trouve, en résolvant un système linéaire ou bien en étant un peu astucieux, qu'il y a eu 25 phases. Amandine a donc été 13 fois gardienne, et comme le gardien change à chaque phase, elle a forcément été gardienne lors des phases 1, 3, 5, ... et 25. Ceci montre que c'est elle qui a marqué le sixième but, puisqu'elle était la gardienne durant la septième phase.

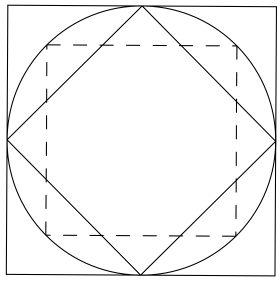
Pour un corrigé plus détaillé, voir `http://www.animath.fr/IMG/pdf/coupe_animath_automne_17_corrige.pdf`.

Correction de l'exercice 54 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Appliquer la translation au cercle. (Si on n'a pas donné le centre du cercle, commencer par construire le centre.)

Les points d'intersection des deux cercles fournissent les (ou la) solutions du problème.

Correction de l'exercice 56 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Soit O le pt d'intersection. On note ϕ la translation qui envoie A sur B, et ψ celle qui envoie B sur C. Alors $\phi\psi = \psi\phi$. L'image de A est C et l'image de A' est C', d'où le parallélisme demandé. Écrire la solution de façon élémentaire avec des parallélogrammes.

Correction de l'exercice 57 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)



Correction de l'exercice 58 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Tracer une figure en prolongeant les segments $[OP]$ et $[OR]$, et considérer une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

Correction de l'exercice 61 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On construit l'image du carré par une rotation d'angle $\pi/4$. Les points d'intersection des deux carrés forment un octogone régulier qui répond à la question.

Correction de l'exercice 62 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les triangles BGF et BGC ont même aire. Ensuite, les triangles BGC et BAH ont même aire car ils se déduisent l'un de l'autre par rotation de centre B et d'angle $\pi/2$. (On peut aussi utiliser le critère d'égalité des triangles et regarder les angles. Mais il est clair que la rotation fixe B, et envoie G sur A, et C sur H.)

Ensuite, on remarque que les triangles BAH et BJH ont même aire.

On fait de même pour le second triangle.

Ceci permet de conclure, en multipliant les aires par deux, que le carré $BAFG$ a la même aire que le rectangle $BHKJ$, et que le carré $ACDE$ a même aire que le rectangle $CIKJ$, d'où le résultat.

C'est la preuve que l'on trouve dans Euclide, prop. 37 du libre I.

Correction de l'exercice 63 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Pour montrer que H est l'orthocentre du triangle DMN, il suffit de montrer que (AN) et (CM) sont des hauteurs de ce triangle : leur point d'intersection H sera alors l'orthocentre.

Soit ρ la rotation de centre O (le centre du carré) et d'angle $\pi/2$. Par définition d'un carré direct, on a $\rho(A) = B$, $\rho(B) = C$, $\rho(C) = D$ et $\rho(D) = A$.

On a de plus $\underline{\rho(M) = N}$. En effet, comme $M \in [AB]$, on a $\rho(M) \in [\rho(A)\rho(B)] = [BC]$, et d'autre part, comme ρ est une isométrie, on a $AM = \rho(A)\rho(M) = B\rho(M)$. Or il n'y a qu'un point sur $[BC]$ à distance AM de B, et d'après l'énoncé c'est N.

La rotation ρ envoie donc le triangle DAM sur ABN. Comme c'est une rotation d'angle $\pi/2$, on en déduit que $(DM)\perp(AN)$ et donc que (AN) est une hauteur de DMN. On procède de même pour la deuxième hauteur.

Remarque : on peut rédiger la solution sans rotations, juste en utilisant des angles complémentaires, mais c'est plus laborieux et moins éclairant, donc (fortement) déconseillé.

Correction de l'exercice 67 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

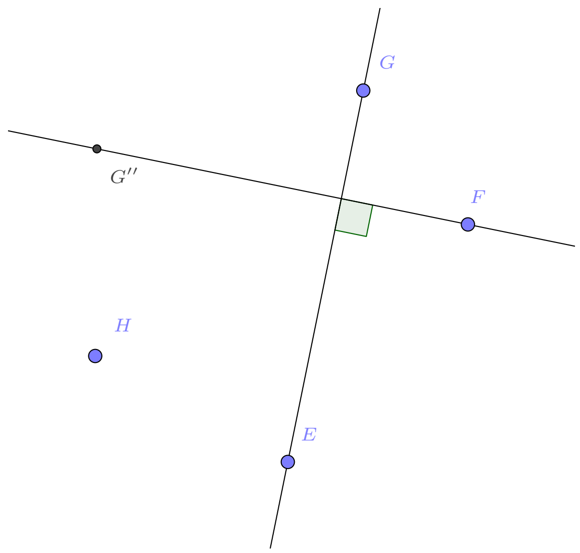
1. Soit ρ la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. D'après l'énoncé, on a $\rho(B) = A$ et $\rho(D) = C$. Donc $[AC]$ est l'image de $[AD]$ par ρ, d'où on déduit que $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$.
2. Le quadrilatère $IJKL$ est toujours un parallélogramme, même sans hypothèses sur $ABCD$ (c'est le théorème de Varignon). En effet, par le théorème de Thalès (ou simplement le théorème des milieux) :
$$\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{JK}.$$
Ceci signifie que les côtés $[IL]$ et $[JK]$ ont même longueur et sont parallèles, donc $IJKL$ est un parallélogramme.
Pour voir que c'est un carré, remarquons qu'on montre de même que
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK},$$
et d'après la première question, $(AC)\perp(BD)$ et que $AC = BD$, donc $IJKL$ est un parallélogramme ayant un angle droit et des cotés consécutifs de même longueur. C'est donc un carré.

Correction de l'exercice 69 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Considérer une rotation de centre O et d'angle $\pi/4$, et les images itérées de E par cette rotation. Ce sont les sommets d'un carré.

Correction de l'exercice 70 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Voici une solution dans une configuration « générique ».

Commençons par analyser le problème. On suppose que $ABCD$ est direct et que $E \in [AB]$, $F \in [BC]$ etc. Considérons la rotation de centre O (le centre du carré), et d'angle $\pi/4$. L'image du segment $[EG]$ est un segment $[E'G']$, que l'on suppose distinct de $[FH]$. En fait, on suppose pour simplifier $E' \neq F$. Considérons alors la translation de vecteur $\overrightarrow{E'F}$. Elle envoie G' sur un point G'' appartenant à la droite (DA). Si on suppose que ce point est différent de H, alors on a $(DA) = (G''H)$.

Voici comment obtenir le point G''. On construit la perpendiculaire à (EG) passant par F, et sur cette droite, on place le point G'' tel que $FG'' = EG$ et $(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{FG''}) = \pi/2$. Ceci permet de tracer la droite (HG'') c'est-à-dire (AD).



On projette ensuite les points E et G sur cette droite, ce qui donne A et D. On peut ensuite terminer la construction du carré.

Il existe d'autres solutions qui utilisent le théorème de l'angle au centre.

Correction de l'exercice 71 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On peut supposer, sans perte de généralité, que B et C sont fixes et vérifient $BC = a$. On cherche alors le point A tel que $CA = b$, tel que l'aire de ABC soit maximale.

A priori, le point A doit appartenir au cercle de centre C et de rayon b.

Si A est sur la perpendiculaire à (BC) passant par C, alors l'aire est $\mathscr{A} = BC \cdot CA = ab$.

Si A' est un autre point du cercle, en notant H son projeté orthogonal sur (BC), l'aire est $BC \cdot AH$ (base fois hauteur), or par Pythagore dans le triangle rectangle AHC rectangle en H, on a $A'H \leq A'C = AC$.

Note : on peut aussi calculer l'aire avec un sinus et utiliser que $\sin\theta$ est maximal pour $\theta = \pi/2$, mais ceci compliqué au niveau collège et de toute façon la preuve est celle donnée plus haut avec Pythagore.

Correction de l'exercice 72 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) (Note : l'aire est forcément inférieure à 1, puisque par Pythagore $AB \leq EB = 1$.)

De $EB = EF$ on tire que EFB est isocèle en E, et on conclut de la même façon que DFE est isocèle en F.

Soit E' (respectivement F') le pied de la hauteur de BEF (resp. DFE) issue de E (resp. F).

Alors comme ces deux hauteurs sont aussi des médianes, on a $BE' = E'F$ et d'autre part $EF' = F'D$. D'autre part, comme $ABE'E$, $EE'FF'$ et $F'FCD$ sont des rectangles (ils ont trois angles droits), on a finalement :

$$AE = EF' = F'D = BE' = E'F = FC$$

et ces quantités valent donc le tiers du côté du carré.

On applique alors Pythagore dans un des triangles rectangles, et on obtient $AE = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. On en déduit que le carré a une aire de $9/10$.

Voir la correction d'Animath, ainsi que des autres exercices de 2014, ici : `http://www.animath.fr/IMG/pdf/2014-10-test-OFM-corrige.pdf`

Correction de l'exercice 73 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Pour tout autre point H' de $\mathscr{D}$, on écrit Pythagore dans le triangle AHH', ce qui donne $AH'^2 = AH^2 + HH'^2$, d'où on déduit que $AH' > AH$.

Correction de l'exercice 74 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Si $A' = B'$, alors le résultat est vrai.

Sinon, cela signifie que (AA') et (BB') sont deux droites différentes. Notons H le projeté orthogonal de A sur (BB'), c'est-à-dire le point tel que $(AH)\perp(BB')$.

Notons que $AHB'A'$ a trois angles droits donc est un rectangle, et donc en particulier $AH = A'B'$.

Si $H = B$, cela signifie que $AB = A'B'$ et on a fini.

Sinon, le triangle ABH est rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 = BH^2 + AH^2$. Comme $AH = A'B'$, ceci donne donc $AB^2 = A'B'^2 + BH^2$ donc $AB \geq A'B'$, ce qu'il fallait démontrer.

Note : avec des vecteurs et du produit scalaire, on n'a pas besoin de séparer les différents cas, les points peuvent être sur la droite, être confondus etc : une projection orthogonale diminue toujours les distances (au sens large).

Correction de l'exercice 75 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Écrire chacune des distances à l'aide d'aires de triangles.

Ou bien dessiner les trois petits triangles, chaque distance est une hauteur d'un petit triangle équilatéral, faire tourner ces hauteurs.

Correction de l'exercice 76 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On a et $MM' = 2IJ$ et d'autre part I et J sont les projetés de O et O' sur la droite D, donc $IJ \leq OO'$ avec égalité ssi $(OO')//(IJ)$, dans ce cas le maximum est donc $2OO'$.

Correction de l'exercice 81 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Après avoir suivi l'indication, translater ce cercle de manière à ce qu'il contienne le point A.

Correction de l'exercice 82 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. Par définition, (IA) et (IB) sont tangentes au cercle $\mathscr{C}$, donc $IA = IB$. On a de même $IA = IC$ et donc I est le milieu de $[BC]$. Le triangle ABC est donc un triangle d'écolier et il est rectangle en A.

Correction de l'exercice 83 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

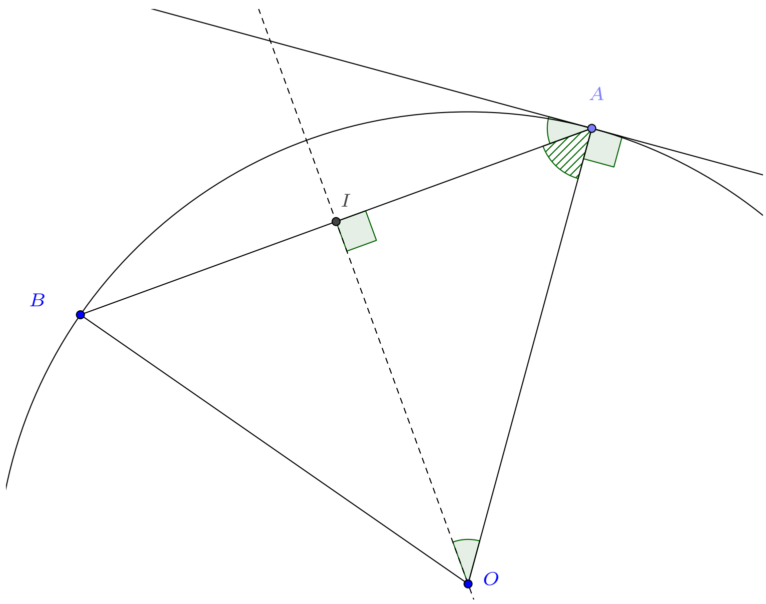
Pour montrer $CA = CP$, on va montrer que le triangle CAP est donc isocèle en C.

On a les égalités d'angles :

$$\begin{aligned}\widehat{CAP} &= \widehat{OAB} \text{ car les angles sont opposés par le sommet}\\ &= \pi/2 - \widehat{ABO}\\ &= \pi/2 - \widehat{OPB} \text{ car } POB \text{ est isocèle en } O\\ &= \widehat{APC}\end{aligned}$$

Le triangle CAP est donc isocèle en C, et donc $CA = CP$.

Correction de l'exercice 85 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Traçons la figure, où on a placé I le milieu de $[AB]$, de telle sorte que $\frac{1}{2}(OA, OB) = (OA, OI)$.



Les angles $(AO, \mathcal{T})$ et (AI, IO) sont droits. On a d'une part :

$$0 = (\mathcal{T}, \mathcal{T}) = (\mathcal{T}, AI) + (AI, AO) + \pi/2,$$

et d'autre part, dans le triangle AIO :

$$0 = (AI, AO) + (IO, IA) + (OA, OI) = (AI, AO) + \pi/2 + (OA, OI).$$

Finalement, on a donc :

$$(\mathcal{T}, AB) = (\mathcal{T}, AI) = -(AI, AO) - \pi/2 = (OA, OI) = \frac{1}{2}(OA, OB),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Correction de l'exercice 86 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Considérons deux bissectrices du triangle (celles des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ par exemple), ainsi que leur point d'intersection I. Alors I est à égale distance des trois côtés, donc il est sur la troisième bissectrice, et c'est aussi le centre d'un cercle qui est tangent aux trois côtés.

Correction de l'exercice 88 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) En général (si les trois droites sont distinctes), quatre : les droites forment un triangle, et les cercles qui conviennent sont le cercle inscrit et les trois cercles exinscrits.

Correction de l'exercice 90 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Deuxième indication : un des angles du triangle a une mesure $\geq \pi/3$, et un autre a une mesure $\leq \pi/3$.

Correction de l'exercice 94 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Pour le cercle de centre P, il suffit de montrer que P est le centre du cercle inscrit du triangle MAB. Pour cela, en notant C le projeté orthogonal de P sur (MA), il suffit de montrer que $PC = PH$, ou de montrer que $AC = AH$. Or, on a $AC = AH = \cos(\widehat{AMO})/OA$.

D'autres solutions sont possibles, par exemple avec des homothéties.

Correction de l'exercice 95 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Par le théorème des milieux, on a $(IK)//(PJ)$ donc $IPJK$ est un trapèze. On va montrer qu'il est isocèle en trouvant un axe de symétrie.

Soit Q le milieu de $[IK]$. Le point Q est aussi le milieu de $[AJ]$ (on le voit en considérant l'homothétie de centre A et de rapport deux, qui envoie Q sur J).

En appliquant le théorème des milieux à APJ, on voit que la perpendiculaire à (IK) en Q coupe $[PJ]$ (orthogonalement) en son milieu.

C'est donc un axe de symétrie de $IPJK$.

Correction de l'exercice 96 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On a $MB = DN$ donc $MBND$ 1
est un parallélogramme. 1

On en déduit que $(DM)//(BN)$. 1

Comme M est le milieu de $[AB]$, on a par le théorème des milieux que $AK = KL$. 1

De la même façon, le théorème de Thalès appliqué dans DCK entraîne que $KL = LC$, d'où le résultat.

Variante, demande plus d'initiative :

Soit Q le symétrique de M par rapport à B. On a $MB = BQ$, donc $BQ = NC$ et $(BQ)//(NC)$. Donc $BQCM$ est un parallélogramme et donc $(NB)//(CQ)$.

Comme $AM = MB = BQ$ et que $(MK)//(BL)//(QC)$, le théorème de Thalès donne $AK = KL = LC$.

Autre preuve, avec centre de gravité :

Dans le triangle ABD, le point K est l'intersection des deux médianes (DM) et (AO). C'est donc le centre de gravité de ABD.

On en déduit que $KA = 2KO$.

Par symétrie centrale de centre O, on a $AK = CL$ et $KO = LO$, et finalement $AK = KO + OL = KL = LC$.

Correction de l'exercice 98 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. Dans le triangle ABC, en notant I est le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$, le théorème de Thalès dit que (IJ) est parallèle à (AC) et $IJ = \frac{1}{2}AC$. On raisonne pareillement avec le triangle ACD, ce qui donne (KL) parallèle à AC et $KL = \frac{1}{2}AC$. Or, un quadrilatère qui a deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

2. La preuve la plus élémentaire utilise uniquement qu'une médiane d'un triangle donné le partage en deux triangles de même aire.

   Soit O le point d'intersection des diagonales du quadrilatère $ABCD$. On considère le triangle AOB. Soit O_1 le point d'intersection de la diagonale $[AC]$ avec $[IL]$ et soit O_2 le point d'intersection de $[IJ]$ avec la diagonale $[BD]$.

   Par le théorème de Thalès, O_1 est le milieu de $[AO]$ et O_2 le milieu de $[BO]$. Les triangles IO_1A et IO_1B ont même aire, de même que les triangles $I0_2O$ et IO_2B.

   La somme des aires des triangles AIO_1 et IO_2B est donc exactement égale à l'aire du parallélogramme IO_1OO_2.

   On applique le même raisonnement aux triangles BCO, CDO et ADO, ce qui signifie que, dans le quadrilatère $ABCD$, la partie complémentaire de $IJKL$ a une aire qui est exactement égale à celle de $IJKL$, ce qui permet de conclure.

Correction de l'exercice 99 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Soit ϕ l'application du segment $[AB]$ dans lui-même qui a un point D sur le segment associe le point G comme construit dans l'énoncé. On veut montrer qu'appliquer deux fois de suite la fonction ϕ à un point revient à ne rien faire.

Pour comprendre l'application ϕ, calculons les images de quelques points. SI $D = A$, on voit on effectuant les trois projections que $\phi(A) = B$. On voit de la même manière que $\phi(B) = A$. L'application ϕ échange donc les deux extrémités du segment. D'autre part, on voit en utilisant le théorème des milieux trois fois de suite que l'image du milieu de $[AB]$ par ϕ est toujours le milieu de $[AB]$. Ceci porte à croire que l'application ϕ est la symétrie du segment par rapport à son milieu, autrement dit que si D est un point de $[AB]$, alors $\phi(D)$ (autrement dit G dans les notations de l'énoncé) est le point qui est à la même distance de B que D de A.

Autrement dit, on veut montrer :

$$AD = BG \text{ ou bien, de façon équivalente : } BD = AG.$$

On prouve cette égalité en appliquant trois fois le théorème de Thalès (une fois pour chaque projection).

Correction de l'exercice 102 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Le livre coûte sept kopecks.

Correction de l'exercice 105 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Le nombre dont a_n est le dernier chiffre est simplement $7n$. En considérant la table de multiplication par sept, on voit que les premières valeurs sont 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7 et à partir de ce moment la suite « boucle ». On en déduit que les n pour lesquels $a_n = 0$ sont les multiples de 10, et que la somme demandée vaut $45 \cdot 200 + 7 + 4 + 1 + 8 + 5 = 9025$. Pour un corrigé plus détaillé, voir la correction d'Animath : `www.animath.fr/IMG/pdf/coupe_animath_automne_17_corrige.pdf`.

Correction de l'exercice 106 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Elles sont parties à six heures, et se sont croisées au 2/5ème du trajet pour la plus lente, au 3/5ème pour la plus rapide.

Cet exercice tombe tout de suite si on trace le graphe des positions des deux dames au cours du temps et qu'on applique... le théorème de Thalès. On obtient immédiatement, en notant t le temps écoulé entre le départ et midi :

$$\frac{t+4}{t+9} = \frac{4}{t} = \frac{t}{9},$$

d'où $t = 6$.

Correction de l'exercice 107 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Une de plus. On peut noter f le nombre de filles et g le nombre de garçons. Alors, Vasya a f sœurs et $g-1$ frères, et la première phrase se traduit donc par $f = (g-1)+2$.

Correction de l'exercice 108 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On déplie le patron du cube et on trace une ligne droite. Si le cube est de côté 1, on trouve $\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 113 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) La somme demandée vaut n^2. Au lycée, on peut prouver le résultat demandé par récurrence, ou bien encore, si on connaît la formule $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$, on peut écrire $1+3+5+\ldots+(2n+1) = 1+2+3+4+\ldots+2(n+1)-(2+4+6+(2(n+1)) = 1+2+\ldots+2(n+1)-2(1+2+\ldots+(n+1))$ et trouver le résultat.

Au collège, on peut expliquer la « preuve sans mots »avec le dessin du carré quadrillé.

Correction de l'exercice 114 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Méthode de Gauß : on écrit deux fois la somme en commençant par la fin la deuxième fois. On obtient $(101 \times 100)/2 = 5050$.

Correction de l'exercice 116 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Tracer des rayons de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ parallèles entre eux.

Correction de l'exercice 117 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Analyse. Traçons comme suggéré une figure avec le carré déjà construit : on trace un carré puis on trace un triangle adéquat autour. On constate qu'un des côtés du carré, notons-le $[IJ]$, est parallèle à $[BC]$. Il y a une homothétie h de centre A qui envoie $[IJ]$ sur $[BC]$. Alors, l'image du carré $IJKL$ par h est un carré dont un des côtés est $[BC]$. Notons $BCDE$ ce carré et traçons-le. On constate que $h(K) = D$ et $h(L) = E$, c'est-à-dire $K = h^{-1}(D)$ et $L = h^{-1}(E)$. Il ne reste plus qu'à faire la synthèse.

Correction de l'exercice 118 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. Le triangle des milieux est l'image de ABC par l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est l'image du cercle circonscrit par cette homothétie, et donc que son centre est l'image de Ω par cette homothétie : il est donc sur la droite $(G\Omega)$.
2. Montrons que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$. Considérons la composition de l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ avec l'homothétie de rapport -1 et de centre J. C'est une homothétie de rapport $1/2$ qui envoie $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$. Comme elle envoie de plus Ω sur J, son centre est le point M tel que $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M\Omega}$. Or on sait déjà, par exemple en considérant l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, que $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. On en déduit que $M = H$.

Correction de l'exercice 123 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Soit O le pt d'intersection. On note ϕ l'homothétie qui envoie A sur B, et ψ celle qui envoie B sur C. Alors $\phi\psi = \psi\phi$. L'image de A est C et l'image de A' est C', d'où le parallélisme demandé.

Correction de l'exercice 125 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Ces triangles ont les mêmes angles, donc sont semblables.

Correction de l'exercice 126 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les triangles ABC, ABH et ACH sont semblables car ils ont à chaque fois deux (donc trois) angles identiques. Les rapports de longueurs de côtés homologues sont donc égaux, ce qui donne

$$\frac{AB}{AC} = \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}$$

d'où on tire $HA^2 = HB \cdot HC$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque (autre preuve, plus sophistiquée) : Soit A' le symétrique de A par rapport à $[BC]$. Alors, $BACA'$ est inscriptible, et la puissance de H par rapport à son cercle circonscrit est

$$p_{\mathscr{C}}(H) = HB \cdot HC = HA \cdot HA' = HA^2.$$

Correction de l'exercice 127 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les triangles ont les mêmes angles (alternes-internes).

Ou alors, on applique directement Thalès « inversé ».

Correction de l'exercice 128 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Les angles $\widehat{AIB}$ et $\widehat{DIC}$ sont opposés par le sommet donc leurs mesures sont égales.

On en déduit que les triangles AIB et DIC sont semblables car ils ont deux paires d'angles égaux.

On en déduit que leurs troisièmes angles sont égaux.

Correction de l'exercice 131 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Ces nombres sont les neuf premiers multiples de 1001, donc il suffit de vérifier pour celui-ci, puisque $143 = 11 \times 13$.

Correction de l'exercice 133 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) $n-5$ doit être multiple de 36. 977.

Correction de l'exercice 134 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Comme les deux quantités sont positives, il suffit de vérifier que les carrés des deux quantités vérifient la même inégalité.

Ou alors, comme a et b sont positifs, on peut écrire $a = x^2$ et $b = y^2$ et on reconnait une identité remarquable.

Correction de l'exercice 135 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Soient a et b les mesures des côtés du rectangle. L'aire du rectangle vaut donc :

$$A = ab.$$

D'autre part, en calculant le périmètre en fonction de a et b on obtient la contrainte :

$$2(a+b) = p.$$

Il s'agit donc de déterminer a et b tels que $a+b=p/2$, de telle façon à maximiser la quantité ab. Or, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\sqrt{a}b \leq \frac{a+b}{2}$$

avec égalité si et seulement si $a=b$, autrement dit, en élevant au carré et en écrivant le résultat en fonction de p et de A :

$$A \leq \frac{p^2}{16},$$

avec égalité ssi $a=b$.

Ceci montre que l'aire maximale est atteinte lorsque les deux côtés du rectangle sont égaux, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré. Dans ce cas, le périmètre vaut $4a=4b$ et l'aire vaut $A=p^2/16=a^2$.

Correction de l'exercice 136 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Notons a et b les nombres de l'énoncé. On a $ab=100$.

On voit assez vite que la somme de a et b peut être aussi grande que l'on veut, par exemple l'on désire avoir une somme supérieure à un million, il suffit de choisir $a=1000000$, puis $b=\frac{1}{10000}$. Plus généralement, pour avoir une somme supérieure à un nombre arbitraire $M>0$ il suffit de prendre $a=M$ et $b=100/M$.

Essayons donc de voir si la somme a une valeur minimale.

L'inégalité arithmético-géométrique fournit :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 10$$

avec égalité ssi $a=b$, donc la somme est supérieure à 20, avec égalité ssi $a=b=10$.

Correction de l'exercice 137 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) L'exercice se résout assez simplement en utilisant trois triangles isocèles, mais on peut remarquer que les trois tangentes sont les trois axes radicaux, qui s'intersectent tous trois au centre radical des trois cercles.

Correction de l'exercice 138 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. Les droites sont perpendiculaires.
2. Pour les tangentes communes extérieures, le cercle de centre O' et de rayon $r'-r$ intersecte le cercle de diamètre $[OO']$ en deux points C et D. Les droites $(O'C)$ et $(O'D)$ coupent $\mathscr{C}'$ en deux points A' et B'. Les tangentes extérieures sont les parallèles à (OC) et (OD) passant par A' et B'. Pour les tangentes intérieures, utiliser le cercle de centre O' et de rayon $r'+r$.

Correction de l'exercice 142 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Tracer le lieu des points à distance R des cercles et droites en présence. Leurs éventuels points d'intersection fournissent des solutions.

Correction de l'exercice 145 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Commencer par tracer la bissectrice, puis (OA). Ensuite, tracer un cercle quelconque tangent aux deux droites (dans le même secteur angulaire), et utiliser une homothétie.

Note : les exercices faisant intervenir des homothéties se résolvent plus facilement en « partant de la fin », c'est-à-dire en procédant par analyse-synthèse et en faisant une figure approximative de ce que sera la solution.

Correction de l'exercice 146 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Deuxième indication : un des angles du triangle a une mesure $\geq \pi/3$, et un autre a une mesure $\leq \pi/3$.

Correction de l'exercice 147 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Soit A' le point d'intersection de (AD) avec (BC). Alors (BD) est à la fois une bissectrice et une hauteur de BAA', donc BAA' est isocèle en B.

On en déduit par le théorème des milieux (ou Thalès) que la droite passant par D et le milieu de $[AB]$ est parallèle à (BC).

Le même raisonnement pour le triangle ACE montre que $(DE)//(BC)$, et que (DE) passe par les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

Correction de l'exercice 148 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Par le théorème de l'angle inscrit, c'est un arc de cercle, dont le centre est sur la médiatrice de $[AB]$.

Par le cas limite du théorème de l'angle inscrit, on sait aussi que si $\mathcal{T}$ est la tangente à ce cercle en A, alors $(\mathcal{T}, AB) = \alpha$.

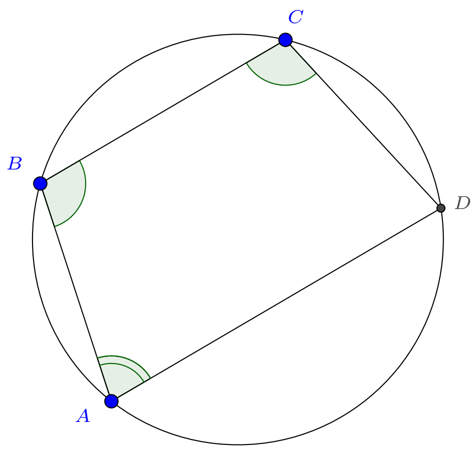
On trace donc la droite $\mathcal{T}$ faisant un angle α avec (AB) en A, puis la perpendiculaire à $\mathcal{T}$ passant par A. Cette droite coupe la médiatrice en un point O qui est donc le centre du cercle recherché.

Correction de l'exercice 149 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Construisons un triangle AIB isocèle rectangle en I et le cercle de centre I et de rayon IA. Ce cercle intersecte la médiatrice de $[AB]$ en un point O qui vérifie $\widehat{AOB} = \pm\pi/4$, par le théorème de l'angle au centre. C'est donc le centre d'un octogone appuyé sur $[AB]$. En traçant le cercle de centre O et de rayon OA, on peut terminer la construction de cet octogone.

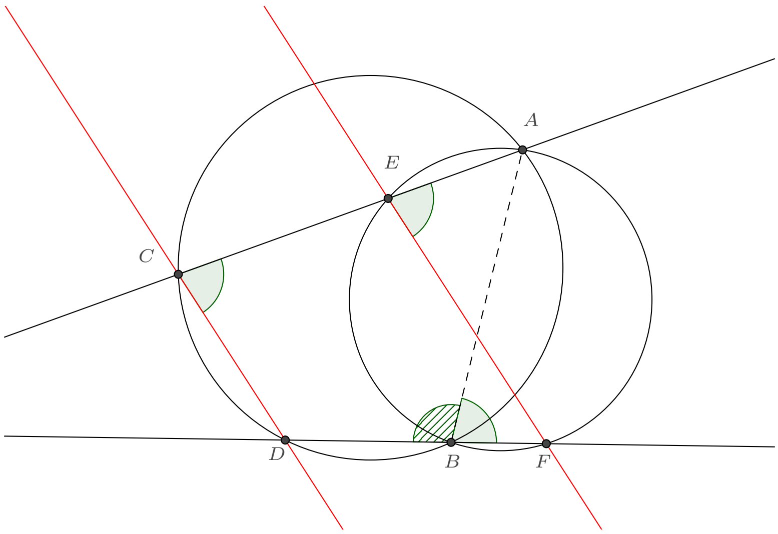
Correction de l'exercice 150 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Commençons par rappeler deux points :

1. dans un trapèze, deux angles non adjacents à une même base sont supplémentaires, puisque les deux bases sont parallèles.
2. un quadrilatère non croisé est inscriptible ssi les angles opposés sont supplémentaires.

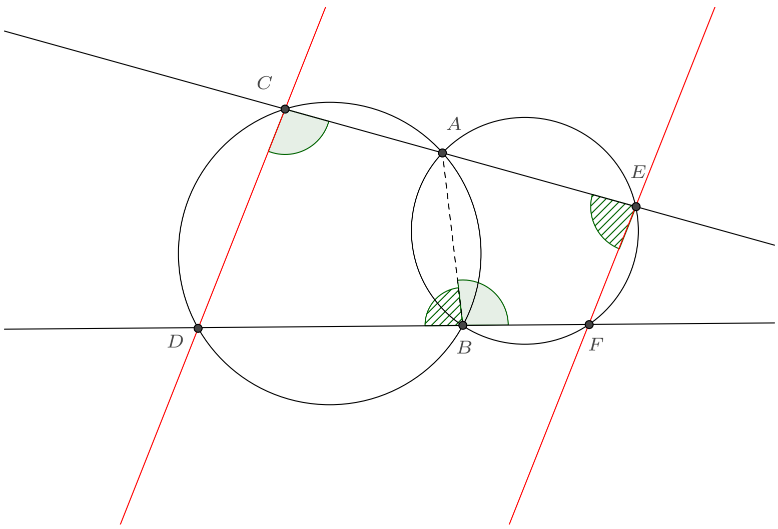
Un trapèze est isocèle ssi les angles adjacents à une même base sont égaux, donc (par le premier point ci-dessus) ssi les angles opposés sont supplémentaires, donc (par le deuxième point) ssi il est inscriptible.



Correction de l'exercice 152 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Traçons une figure. *On marque dès à présent quelques égalités d'angles obtenues par le théorème de l'angle inscrit :*



Les égalités d'angles repérées sur la figure permettent de voir la solution, au moins dans la configuration particulière dessinée. On voit en effet que les angles $\widehat{ECD}$ et $\widehat{AEF}$ sont égaux. Attention toutefois, les angles géométriques sont trompeurs et les égalités que l'on voit sur une figure peuvent dépendre de la façon de tracer la figure. Sur la figure ci-dessous par exemple, les angles en question ne sont pas égaux mais supplémentaires.



Il ne reste plus qu'à rédiger rigoureusement la solution avec des angles de droites, en s'appuyant sur l'intuition donnée par la figure.

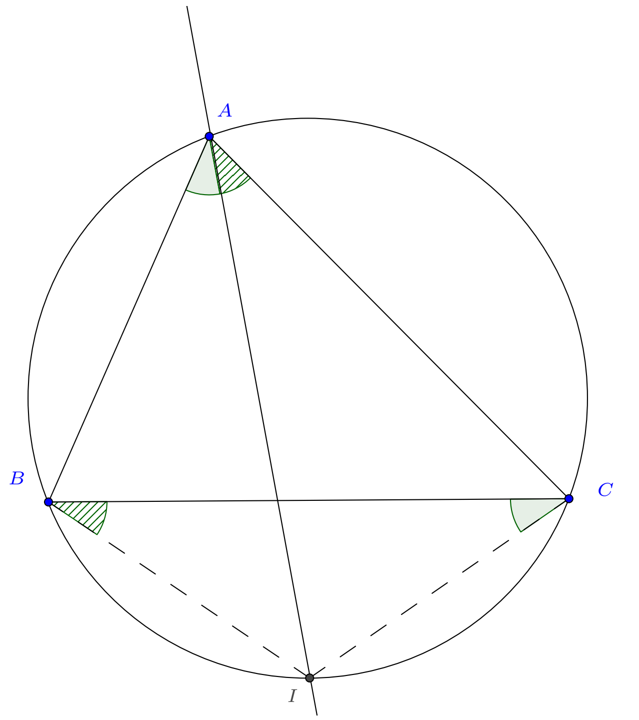
Pour montrer que (CD) et (EF) sont parallèles, il suffit par exemple de montrer qu'elles forment le même angle avec la droite (CA). Or on a la suite d'égalités d'angles de droites :

$$\begin{aligned}(CD, CA) &= (BD, BA) \text{ car } CDAB \text{ est inscriptible}\\ &= (BF, BA) \text{ car } (BD) = (BF)\\ &= (EF, EA) \text{ car } BFAE \text{ est inscriptible}\\ &= (EF, CA) \text{ car } (EA) = (CA).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 153 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que IBC et JBC sont isocèles en I et J.

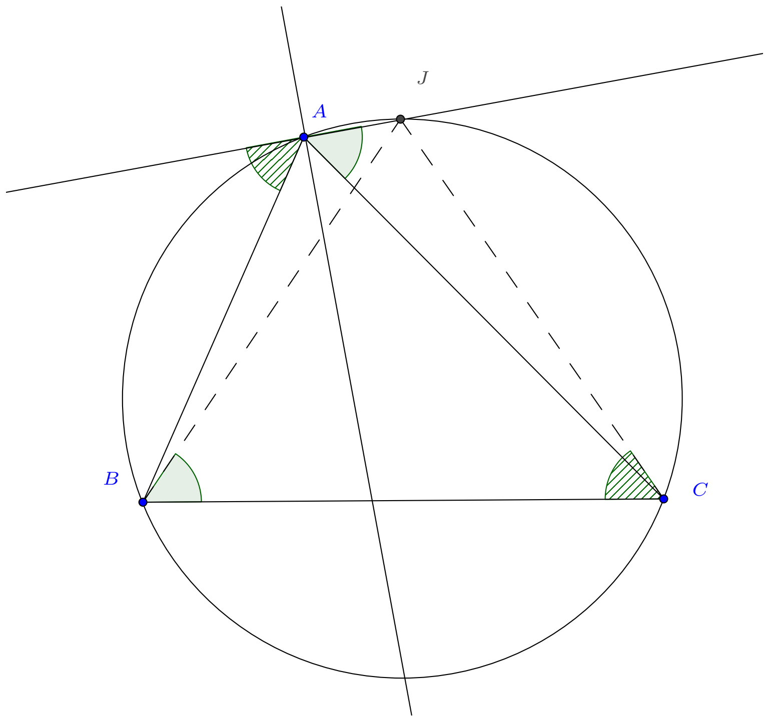
On commence par prouver le résultat pour I :



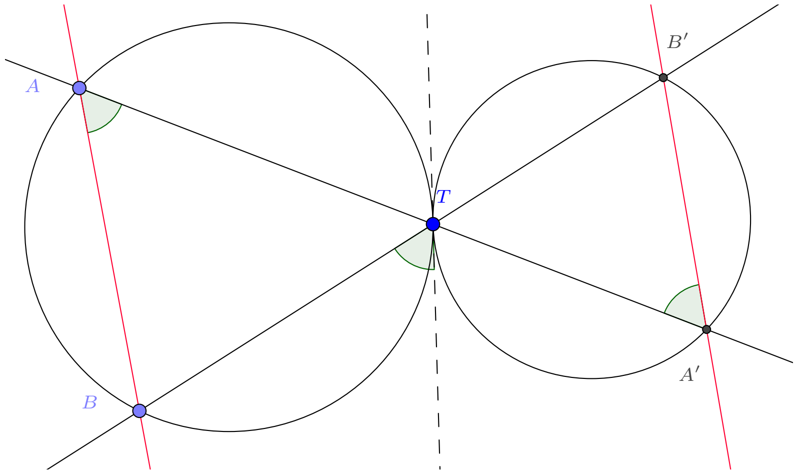
Pour montrer que BCI est isocèle en I, il suffit de montrer que $(BC, BI) = (CI, CB)$. Or, on a

$$\begin{aligned}(BC, BI) &= (AC, AI) \text{ car } ABIC \text{ est inscriptible}\\ &= (AI, AB) \text{ car } (AI) \text{ est une bissectrice de } (AC) \text{ et } (AB)\\ &= (CI, CB) \text{ car } ABIC \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

On remarque qu'en rédigeant avec des angles de droites, on n'a pas eu besoin (ni en fait la possibilité) de préciser si la bissectrice était intérieure ou extérieure, ce qui implique que la preuve sera la même pour J. Traçons juste une figure pour visualiser la deuxième situation.



Correction de l'exercice 154 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Soit $\mathscr{T}$ la tangente commune aux deux cercles.



Par le cas limite du théorème des angles inscrits, on a

$$(AB, AT) = (BT, \mathscr{T}) = (B'T, \mathscr{T}) = (A'B', A'T)$$

Comme $(AT) = (A'T)$, on en déduit que

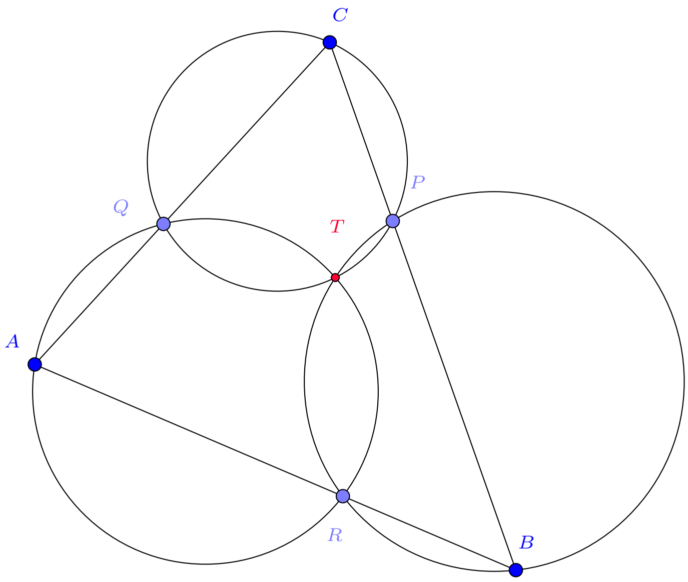
$$(AB, AT) = (A'B', AT),$$

et donc que $(AB)//(A'B')$.

Autre preuve : considérer une homothétie de centre T qui envoie un cercle sur l'autre.

Correction de l'exercice 155 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits à ARQ et BPR. Ils se coupent en R et en un deuxième point T.

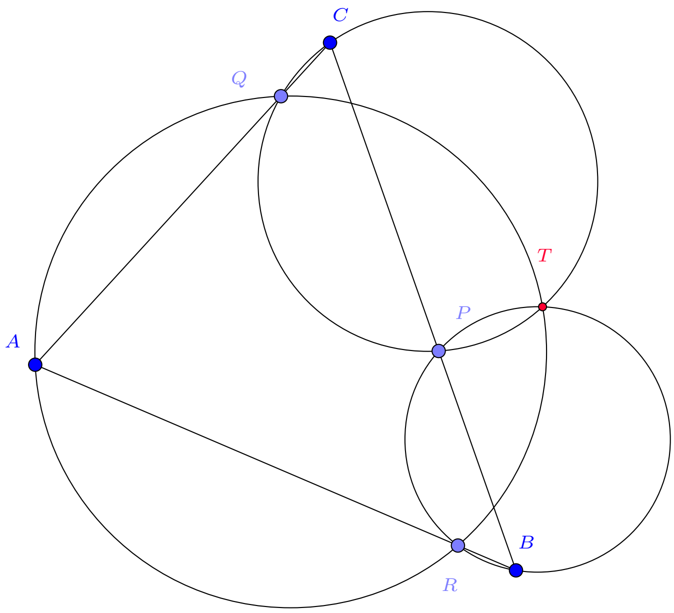


Il s'agit de montrer que T, P, C, Q sont cocycliques.

Par le cours, il suffit de montrer l'égalité d'angles de droites $(QT, QC) = (PT, PC)$. Or on a :

$$\begin{aligned}
(QT, QC) &= (QT, QA) \text{ car } (QC) = (QA)\\
&= (RT, RA) \text{ car } AQTR \text{ est inscriptible}\\
&= (RT, RB) \text{ car } (RA) = (RB)\\
&= (PT, PB) \text{ car } PTRB \text{ est inscriptible}\\
&= (PT, PC) \text{ car } (PB) = (PC).
\end{aligned}$$

Attention, si on utilise des angles géométriques au lieu des angles de droites pour rédiger la solution, on peut être amené à distinguer plusieurs configurations possibles, par exemple celle-ci :

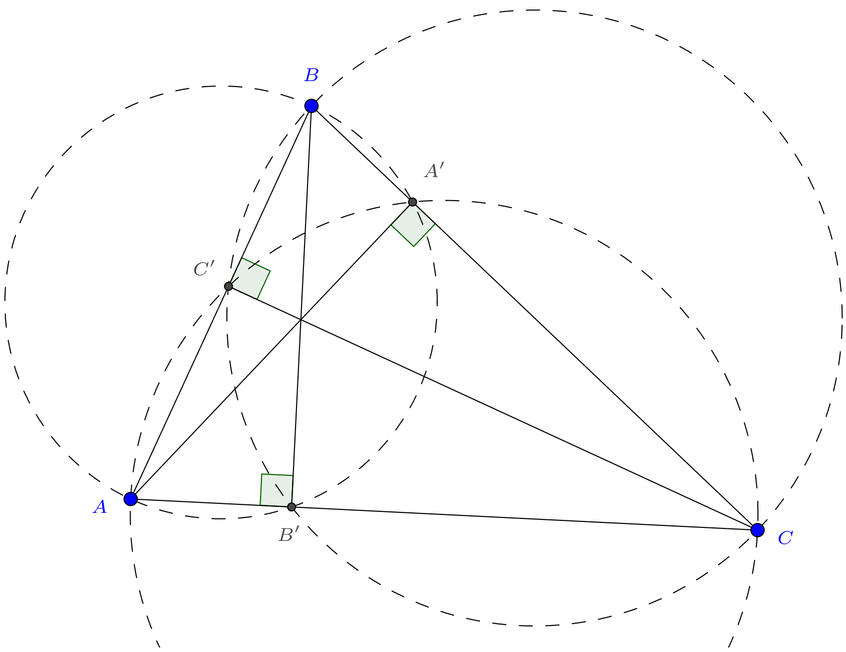


(Les angles $\widehat{BRT}$ et $\widehat{BPT}$ sont supplémentaires dans la première figure, et égaux dans la seconde.)

Correction de l'exercice 156 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Le quadrilatère $ABA'B'$ est inscriptible dans un cercle de diamètre $[AB]$. En effet, les triangles ABA' et ABB' sont par définition rectangles en A' et B', et ont même hypoténuse $[AB]$.

De même, les quadrilatères $BCB'C'$ et $CAC'A'$ sont inscriptibles dans des cercles de diamètre $[BC]$ et $[CA]$.

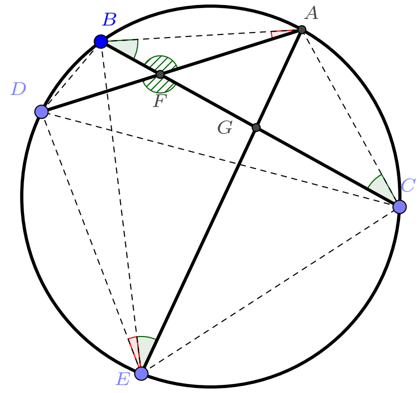


Montrons que la hauteur (BB') est une bissectrice des droites $(B'C')$ et $(B'A')$. Pour cela, on montre que $(B'C', B'B) = (B'B, B'A')$.

On a :

$$\begin{aligned}(B'C', B'B) &= (CC', CB) \text{ (car } BCB'C' \text{ est inscriptible)}\\ &= (CC', CA') \text{ (mêmes droites)}\\ &= (AC'AA') \text{ (car } ACA'C' \text{ est inscriptible)}\\ &= (AB, AA') \text{ (mêmes droites)}\\ &= (B'B, B'A') \text{ (car } ABA'B' \text{ est inscriptible)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 157 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Traçons une figure :



[Sur la figure, on voit que les angles $\widehat{GFD}$ et $\widehat{GED}$ sont supplémentaires, car $\widehat{GFD} = \widehat{BFA}$ et $\widehat{GED} = \widehat{GEB} + \widehat{BED} = \widehat{FBA} + \widehat{BAF}$. Il ne reste plus qu'à rédiger cette preuve un peu plus rigoureusement avec des angles de droites.]

Montrons que $(FD, FG) = (ED, EG)$, ce qui prouve que $EDFG$ est inscriptible.

Tout d'abord, comme $(FD) = (FA)$ et $(FG) = (FB)$, on a

$$(FD, FG) = (FA, FB).$$

Ensuite, la somme des angles du triangle ABF vaut π, donc en termes d'angles de droites on a la relation $(FA, FB) + (AB, AF) + (BF, BA) = 0$, c'est-à-dire :

$$(FA, FB) = (AF, AB) + (BA, BF).$$

Calculons chacun de ces deux angles. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}(AF, AB) &= (AD, AB) \text{ car } (AD) = (AF)\\ &= (ED, EB) \text{ car } ABDE \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

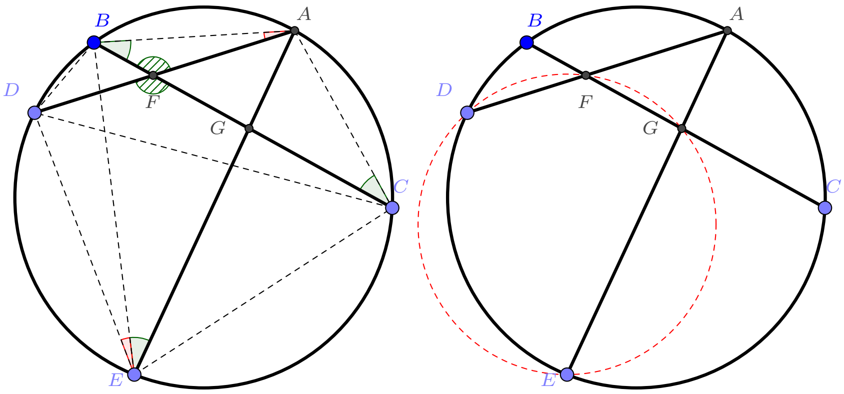
Et d'autre part :

$$\begin{aligned}(BA, BF) &= (BA, BC) \text{ car } (BF) = (BC)\\ &= (CB, CA) \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A\\ &= (EB, EA) \text{ car } ABCE \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

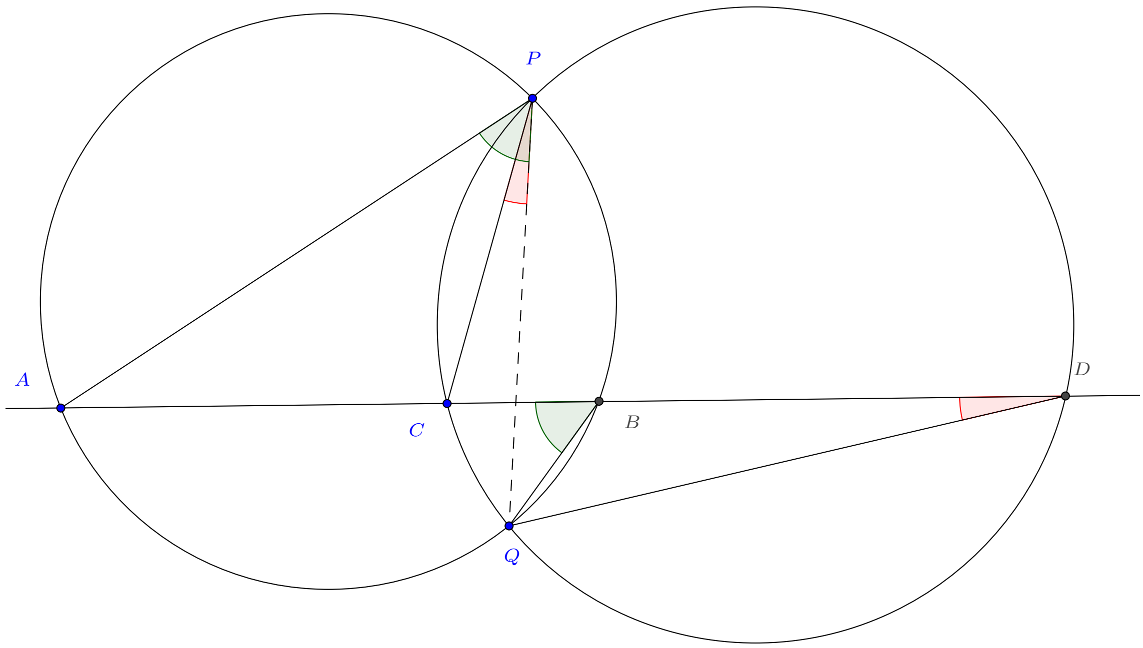
Finalement, on obtient donc :

$$\begin{aligned}(FD, FG) &= (FA, FB)\\ &= (AF, AB) + (BA, BF)\\ &= (ED, EB) + (EB, EA)\\ &= (ED, EA)\\ &= (ED, EG) \text{ car } (EG) = (EA),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.



Correction de l'exercice 158 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Traçons une figure. *[Le fait de marquer toutes les égalités d'angles disponibles donne le résultat. Sur la figure, on ne marque que celles utilisées dans la rédaction proposée.]*



Montrons que $(PA, PC) = (DQ, BQ)$. On a :

$$\begin{aligned}(PA, PC) &= (PA, PQ) + (PQ, PC) \\ &= (BA, BQ) + (DQ, DC) \text{ par cocyclicité dans chaque cercle} \\ &= (BA, BQ) + (DQ, BA) \text{ car } (DC) = (BA) \\ &= (DQ, BQ).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 162 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π :

$$\begin{aligned}2\pi &= \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} \\ &= 2\widehat{ABI} + 2\widehat{KCD} + 2\widehat{CDK} + 2\widehat{IAB}\end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{ABI} + \widehat{KCD} + \widehat{CDK} + \widehat{IAB} = \pi,$$

autrement dit la somme des demi-angles vaut π.

On termine alors la preuve en utilisant le critère de cocyclicité.

Correction de l'exercice 163 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) On trouve un parallélogramme dont les angles sont les supplémentaires de ceux de $ABCD$.

Correction de l'exercice 165 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Si ABC est rectangle, l'orthocentre coïncide avec un des sommets et la vérification de l'assertion est relativement facile. Dans la suite on suppose qu'on n'est pas dans ce cas.

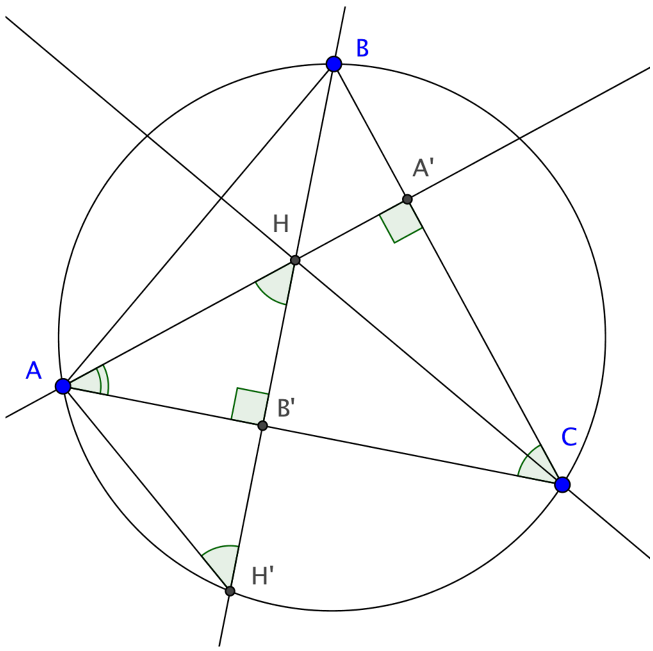
Par définition, H' est le symétrique de H par rapport à (AC) si (AC) est la médiatrice de $[HH']$. C'est cela qu'on doit montrer.

D'autre part, par définition, on a $(AC)\perp(HH')$, donc (AC) est la hauteur de AHH' issue de A.

Donc si AHH' est isocèle en A, alors cette hauteur de AHH' est aussi la médiane issue de A et c'est encore la médiatrice du côté opposé à A c'est-à-dire $[HH']$.

Il suffit donc de montrer que AHH' est isocèle en A. Pour cela, il suffit de montrer que les angles adjacents à la base sont égaux, autrement dit $\widehat{AHH'} = \widehat{AH'H}$ avec des angles géométriques non orientés, ou plus précisément avec des angles orientés $(H'A, H'H) = (HH', AH)$.

Suivant la méthodologie habituelle, on marque de façon systématique les angles égaux (ou complémentaires, supplémentaires etc) sur la figure. Ceci indique la marche à suivre pour la preuve.

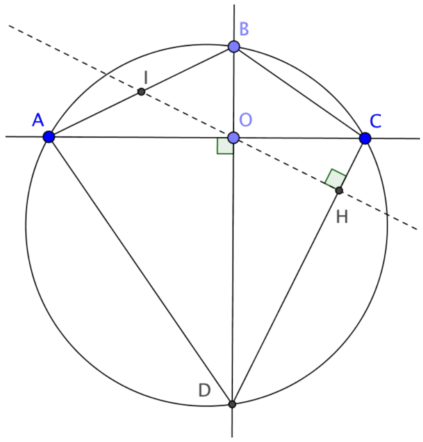


Montrons que $(H'A, H'H) = (HH', AH)$. On a :

$$\begin{aligned}(H'A, H'H) &= (H'A, H'B) \text{ (car } (H'H) = (HB)\text{)}\\ &= (CA, CB) \text{ (car } ABCH' \text{ est inscriptible)}\\ &= (CA, AH) + (AH, CB) \text{ (par Chasles)}\\ &= (CA, AH) + \pi/2 \text{ (car } (AH) \text{ est une hauteur de } ABC\text{)}\\ &= (CA, AH) + (HH', CA)\\ &= (HH', AH) \text{ (par Chasles)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 166 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

Rappelons la figure :



1. On rappelle que le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le centre de son cercle circonscrit (une autre façon de le dire est que l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit).

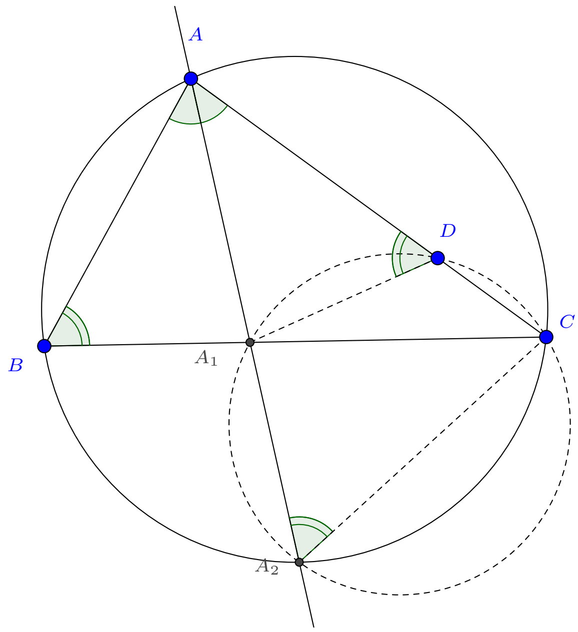
   Si $IO = IA$, cela signifie que I est sur la médiatrice de $[OA]$. D'autre part, AOB est rectangle en O et I est par définition sur l'hypoténuse $[AB]$. Donc I est l'intersection de l'hypoténuse et d'une médiatrice d'un autre côté, c'est donc le milieu de l'hypoténuse par la propriété rappelée plus haut. Il est donc suffisant de montrer que $IO = IA$.
2. Pour montrer que $IO = IA$, il suffit de montrer que IOA est isocèle en I, c'est-à-dire que $(AI, AO) = (OA, OI)$. Or, on a :

$$\begin{aligned}(AI, AO) &= (AB, AC) \text{ (mêmes droites)}\\ &= (DB, DC) \text{ (car } ABCD \text{ est inscriptible}\\ &= (DO, DH) \text{ (mêmes droites)}\\ &= (DO, OH) + (OH, DH) \text{ (par Chasles)}\\ &= (DO, OH) + \pi/2 \text{ (par définition de } H)\\ &= (OB, OI) + \pi/2 \text{ (mêmes droites)}\\ &= (OB, OI) + (OA, OB) \text{ (car } (OA)\perp(OB) \text{ d'après l'énoncé)}\\ &= (OA, OI) \text{ (par Chasles)}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 167 (retour à l'énoncé, retour à l'indication) Il suffit de montrer que $\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}$. C'est le cas car PAB' et PBA' sont semblables.

Correction de l'exercice 168 (retour à l'énoncé, retour à l'indication)

1. Par construction, la droite Δ est la hauteur et la médiane de ABD. Le triangle est donc isocèle en A et Δ est également sa bissectrice, ce qui montre que $\widehat{BAA_1} = \widehat{A_1AD}$ et donc que $D \in (AC)$.
2. Il suffit de prouver que $(A_2A_1, A_2C) = (DA_1, DC)$.



Or on a :

$$\begin{aligned}(A_2A_1, A_2C) &= (A_2A, A_2C)\\ &= (BA, BC) \text{ (car } ABCA_2 \text{ est inscriptible)}\\ &= (BA, BA_1) \text{ (mêmes droites)}\\ &= (DA, DA_1) \text{ (par réflexion suivant } \Delta)\\ &= (DC, DA_1) \text{ (mêmes droites)},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. Remarquons déjà que $AB = AD$. D'autre part, il suffit de montrer que

$$\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{AA_2}.$$

La question précédente montre que les triangles ADA_1 et AA_2C sont (inversement) semblables, puisqu'ils ont deux (et donc trois) angles en commun. Les rapports entre les côtés sont donc égaux, c'est-à-dire précisément

$$\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{AA_2}.$$

Remarque : si on connaît la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle, on peut conclure plus vite : les deux produits égaux sont la puissance de A par rapport au cercle A_1A_2CD.