Analysis Script

RWTH Aachen

Melkonian Dmytro

14 October 2018

Contents

Chapter 1

Die reelen Zahlen

1.1 Die Axiome der reellen Zahlen

1.1.1 Körperaxiome

Definition 1.1. Eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit einer Abbildung

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y, \tag{1.1}$$

die wir **Addition** nennen, einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y, \tag{1.2}$$

die wir **Multiplikation** nennen, und einer Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$, die wir **kleiner gleich** nennen, wird als Menge der **reellen Zahlen** bezeichnet, falls Axiomen, die wird weiter eingegeben, erfüllt sind.

Remark. Die Addition erfüllt folgende Eigenschaften:

1. (Nullelement) $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$.

2. (Additives Inverses) $\forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$.

3. (Assoziativgesetz) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$.

4. (Kommutativgesetz) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.

Remark. Wir sagen, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gemeinsam mit der Abbildung (Verknüpfung) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine **kommutative** oder **abelsche Gruppe** bilden, da die Axiome **??**-**??** gerade die Axiome einer kommutativen Gruppe bilden

Remark. Die Multiplikation erfüllt folgende Eigenschaften:

1. (Einselement) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0 \cdot x = x$.

2. (Multiplikative Inverse) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists (x^{-1}) \in \mathbb{R} : x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$.

3. (Assoziativgesetz) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

4. (Kommutativgesetz) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$.

Des Weiteren muss bei Kombination der Addition und der Multiplikation folgendes Gesetz gelten.

5. (Distributivgesetz) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

1.1.2 Angeordnete Körper

Axiom 1.2. (Anordnung) Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ erfüllt die folgenden vier Axiome

1. (Reflexivität) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$

2. (Antisymmetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big((x \leq y \land y \leq x) \implies x = y\big)$

3. (Transitivität) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \big((x \leq y \land y \leq z) \implies x \leq z\big)$

4. (Linearität) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big(x \leq y \lor y \leq x\big)$

Die Axiome **??** - **??** sind die Axiome einer **Ordnung** und zusammen mit Axiome **??** bilden sie die Axiome einer **linearen** (oder auch **totalen**) **Ordnung**. Damit die Relation $\leq$ auf dem Körper $\mathbb{R}$ nützlich ist, benötigen wir die folgende Axiome, die die Relation mit der Körperstruktur koppeln

Axiom 1.3. (Kompatibilität von $\leq$) Wir verlangen

1. $(\leq \mathit{und} +) \forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y \implies x + z \leq y + z)$

2. $(\leq \mathit{und} \cdot) \forall x, y \in \mathbb{R} : ((0 \leq x \land 0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y)$

1.1.3 Das Volständigkeitsaxiom

Axiom 1.4. (Vollständigkeit) Falls X, Y zwei nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ sind und für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, das zwischen X und Y liegt in dem Sinn, als dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq c \leq y$ gilt. Formal:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \subseteq \mathbb{R} : ((X \neq \emptyset \land Y \neq \emptyset \land \forall x \in X \forall y \in Y : x \leq y) \\ \implies (\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in X \forall y \in Y : x \leq c \leq y)) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Wenn $\mathbb{R}$ die Axiome **??** - **??** erfüllt, dann sprechen wir auch von einem **vollständig angeordneten Körper**. Wir werden uns die reelen Zahlen häufig als die Punkte auf einer Geraden vorstellen, wobei wir deswegen die Gerade auch die **Zahlengerade** nennen.

1.1.4 Verwendung der reellen Zahlen und der Axiome

1.2 Die natürlichen Zahlen

1.2.1 Definition der naturälichen Zahlen und vollständige Induktion

Definition 1.5. (Induktive Teilemenge) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist **induktiv**, falls folgende Eigenschaften gelten:

1. $1 \in M$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : x \in M \implies x + 1 \in M$

Definition 1.6. (Natürliche Zahlen) Wir definieren die Teilmenge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt aller iduktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M. \tag{1.4}$$

Lemma 1.7. (Kleinste induktive Menge) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine induktive und somit die kleinste induktive Teilmenge der reellen Zahlen.

Proof. Wir haben oben bereits gesehen, dass $1 \in \mathbb{N}$ ist. Falls nun $n \in \mathbb{N}$ ist und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine belibiege induktive Teilmenge ist, dann gilt auch $n \in M$

(wegen der Definition von $\mathbb{N}$). Da M induktiv ist, gilt $n+1 \in M$. Da M aber eine belibiege induktive Teilmenge war, liegt $n+1$ in jeder induktiven Teilmenge und somit auch in $\mathbb{N}$ per Definition von $\mathbb{N}$. Wir haben für $\mathbb{N}$ also beide Eigenschaften einer induktiven Teilmenge nachgewiesen und das Lemma folgt. ■

Satz 1.8. (Vollständige Induktion) Falls für eine Aussage $A(n)$ über natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$

- (Induktionsanfang) $A(1)$
- (Induktionsschritt) $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \implies A(n+1))$

gelten, dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Proof. Wir definieren $E = \{n \in \mathbb{N} | A(n)\}$, womit folgenden Aussagen gelten.

- $1 \in E$, da $A(1)$ auf Grund des Induktionsanfanges gilt.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x \in E$ nach Definition $x \in \mathbb{N}$ und auf Grund des Induktionsschrittes auch $x+1 \in E$ impliziert.

Dacher ist E eine induktive Menge und es folgt, dass $\mathbb{N} \subseteq E$ nach Definition von $\mathbb{N}$. Also gilt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. ■

Lemma 1.9. (Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n+m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

Proof. Sei $A(n)$ die Aussage $\forall m \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A(1)$, denn falls $m \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $m+1 \in \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv ist wegen Lemma **??**. Dies ist der Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt nehmen wir also an, dass $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt oder in anderen Worten, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $m+n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen Lemma **??** impliziert letzteres aber auch $m+n+1 \in \mathbb{N}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und wir erhalten die Aussage $A(n+1)$. Vollständige Induktion zeigt daher $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$, was gerade die Aussage $\forall n, m \in \mathbb{N} : n+m \in \mathbb{N}$ ist.

Für Multiplikation definieren wir $B(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ als die Aussage $\forall m \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B(1)$, da für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$. Falls nun $B(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt aus $m \in \mathbb{N}$ auch $m \cdot n \in \mathbb{N}$ und aus ersten Teil des Lemmas auch

$$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

Da m biliebig war, gilt also $B(n) \implies B(n+1)$ und das Lemma folgt mittels vollständiger Induktion. ■

Lemma 1.10. (Anordnung von $\mathbb{N}$)

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \in \mathbb{N}$ oder $n-1 \in \mathbb{N}$.
- Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n \leq m+1$ gilt $n = m$ oder $n = m+1$.

Proof. Für die erste Aussage zeigen wir, dass die Menge $M = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} | n-1 \in \mathbb{N}\}$ die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthält. In der Tat ist die Menge M induktiv, da $1 \in M$ und da für $n \in M$ auch $(n+1)-1 = n \in \mathbb{N}$ und damit $n+1 \in M$ gilt. Nach Definition von $\mathbb{N}$ ist also $N \subseteq M$ wie gewünscht.

Für die zweite Behauptung definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ durch

$$\forall m \in \mathbb{N} : ((m \leq n \leq m+1) \implies n \in \{m, m+1\}) \tag{1.6}$$

Dann gitl $A(1)$, denn falls $m \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $m \leq 1 \leq m+1$ erfüllt, dann gilt wegen $m \geq 1$ auch $m = 1 = n$.

Angenommen es gilt nun $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und wir wollen $A(n+1)$ zeigen. Sei also $m \in \mathbb{N}$ so dass $m \leq n \leq m+1$ gilt. Falls $m = 1$ ist, dann gilt $1 \leq n+1 \leq 2 = 1+1$ und damit $n \leq 2-1 = 1$. Wegen $n \geq 1$ folgt $n = 1 = m$ und somit $n+1 = m+1$. Falls aber $m \neq 1$ ist, dann ist wegen der ersten Behauptung $m-1 \in \mathbb{N}$ und $m-1 \leq n \leq m$. Da wir aber $A(n)$ angenommen haben, gilt $n \in \{m-1, m\}$ und daher $n+1 \in \{m, m+1\}$.

Wir haben also den Iduktionsanfang $A(1)$ und den Induktionsschritt $A(n) \implies A(n+1)$ für eine beliebiges n gezeigt. Daher gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und das Lemma folgt. ■

Satz 1.11. (Vollständige Induktion) Falls für eine Aussage $A(n)$ über natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\text{(Induktion)} \forall n \in \mathbb{N} : ((\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \implies A(k))) \implies A(n)) \tag{1.7}$$

erfüllt ist, dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Proof. Wir definieren $B(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \implies A(k) \tag{1.8}$$

Mit vollständige Induktion (**??**) und Anordnung von $\mathbb{N}$ (**??**) möchten wir nun zeigen, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Inbesondere folgt damit, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, was den Beweis des Satzes abschliessen wird.

Wir zeigen zuerst den Induktionsanfang, also dass $B(1)$ gilt. Da aber $k = 1$ die einzige natürliche Zahl mit $k \leq 1$ ist, genügt es, die Aussage $A(1)$ zu verifizieren. Hierfür verwenden wir die Annahme im Satz für $n = 1$, also die Aussage

$$(\forall k \in \mathbb{N} : (k < 1 \implies A(k))) \implies A(1) \tag{1.9}$$

Da es keine natürliche Zahlen kleiner 1 gibt, ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $k < 1$ falsch, womit $(k < 1 \implies A(k))$ richtig ist. Also gilt die Voraussetzung der im Satz angenommenen Implikaion für $n = 1$, und es folgt $A(1)$ (und damit $B(1)$ wie gewünscht).

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wollen Induktionsschritt $B(n) \implies B(n+1)$ beweisen. Also nehmen wir an, dass $B(n)$ bereits gilt. Die Aussage $B(n+1)$ ist durch

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + 1 \implies A(k) \tag{1.10}$$

gegeben. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k < n + 1$ auf Grund von Lemma **??** äquivalent zu $k \leq nwedgek = n$. Die Aussage $B(n)$ ist damit zu

$$\forall k \in \mathbb{N} : k < n + 1 \implies A(k) \tag{1.11}$$

äquivalent. Wegen der Annahme im Satz angewenadt auf $n + 1$ impliziert dies aber $A(n + 1)$, was auf Grund obiger Äquivalenz gemeinsam mit $B(n)$ die Aussage $B(n + 1)$ zeigt. Dies schliesst den Induktionsschritt und damit den Beweis des Satzes ab. ■

Satz 1.12. (Wohlordnung der natürlichen Zahlen) Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichrleere Teilmenge. Dann hat M eindeutig bestimmtes kleinstes Element, das heisst

$$\exists! n_0 \in M \forall n \in M : n \geq n_0 \tag{1.12}$$

Proof. Die Eindeutigkeit eines solches kleinsten Elements folgt direkt: Sind $n_0, n_0' \in M$ zwei kleinste Elemente, dann gilt $n_0' \geq n_0$, da n_0 ein kleinstes Element ist und $n_0 \geq n_0'$ da n_0' ein kleinstes Element ist. Also gilt $n_0' = n_0$.

Um die Existenz eines kleinsten Element zu zeigen, verwenden wir die Kontraposition. Wir nehmen also an, dass M kein kleinstes Element hat, und wollen zeigen, dass M leer ist. Hierzu definieren wir für alle n eine Aussage $A(n)$ durch $n \notin M$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bedeutet die Aussage $\forall k \in \mathbb{N} : k < n \implies A(n)$ genau, dass es unterhalb von n keine Elemente in M gibt. Da wir angenommen haben, dass M kein kleinstes Element hat, sehen wir, dass n nicht in M liegen kann. Also gilt

$$(\forall k \in \mathbb{N} : k < n \implies A(k)) \implies A(n) \tag{1.13}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die vollständige Induktion in Satz **??** zeigt nun, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist M die leere Menge. ∎

Lemma 1.13. (Subtraktion von $\mathbb{N}$) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$.

Proof. Sei A(n) für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\forall m \in \mathbb{N} : m < n \implies n - m \in \mathbb{N} \tag{1.14}$$

Dann gilt $A(1)$, denn es existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $m < 1$. Angenommen $A(n)$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ und sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n + 1$. Nach Lemma **??** ist entweder $m = n$ oder $m < n$. Im ersten Fall gilt $(n + 1) - m = 1 \in \mathbb{N}$. Im zweiten Fall gilt $(n + 1) - m = (n - m) + 1 \in \mathbb{N}$ nach $A(n)$. Also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach vollständiger Induktion. ∎

1.2.2 Die ganzen Zahlen

Die **ganzen Zahlen** sind als Teilmenge von $\mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup \{-n | n \in \mathbb{N}\} = mathbbN_0 \sqcup -\mathbb{N} \tag{1.15}$$

definiert.

Lemma 1.14. (Addition und Multplikation auf $\mathbb{Z}$) Die ganzen Zahlen sind unter Addition und Multiplikation abgeschlossen, das heisst, für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt $m + n \in \mathbb{Z}$ und $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

Proof. Für Multiplikation sieht man dies sehr direkt: Falls $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt offenbar $m \cdot n = (-m) \cdot (-n) \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(-m) \cdot n = m \cdot (-n) = -m \cdot n \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ nach Lemma **??**. Falls m oder n Null ist, gilt ebenso $m \cdot n = 0 \in \mathbb{Z}$.

Für die Addition verwenden wir die Eigenschaften von $\mathbb{N}$ in Lemma 2.19 und Lemma 2.25. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Falls m oder n Null sind, gibt es nichts zu zeigen. Seien also $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $m + n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $-m - n = -(m + n) \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Falls $n > m$, dann ist $n - m \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $-n + m = -(n - m) \in \mathbb{Z}$. Analoges gilt falls $n < m$. Falls $n = m$, ist $n - m = 0 \in \mathbb{Z}$. Dies deckt alle Möglichkeiten ab und das Lemma folgt. ∎

1.2.3 Die rationalen Zahlen

Die **rationalen Zahlen** sind definiert als die Teilmange von Quotienten

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R} \tag{1.16}$$

Lemma 1.15. (Rationale Zahlen) Die rationalen Zahlen bilden einen Unterkörper von $\mathbb{R}$, das heisst, für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $-r, r+s, r \cdot s \in \mathbb{Q}$ und auch $r^{-1} \in \mathbb{Q}$, falls $r \neq 0$.

Lemma 1.16. (Quadratwurzel aus 2) Die reele Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Insbesondere erfüllen die rationalen Zahnlen nicht das Vollständigkeitsaxiom.

Proof. Wir nehmen per Wiederspruch an, dass $\sqrt{2}$ rational ist und schreiben $2 = (\frac{m}{n})^2$ für $m \in \mathbb{N}$ und kleinste mögliche $n \in \mathbb{N}$ (es ist nach Satz **??** möglich). Insbesondere gilt also $2n^2 = m^2$ und flglich

$$2(m-n)^2 = 2m^2 - 4mn + 2n^2 = 4n^2 - 4mn + m^2 = (2n-m)^2 \tag{1.17}$$

Also gilt $\left(\frac{2n-m}{m-n}\right)^2 = 2$. Da $0 < m - n < n$, erhalten wir einen kleineren Nenner, den der verwendet werden kann, um $\sqrt{2}$ darzustellen. Dies widerspricht der minimalen Wahl von n. Somit ist $\sqrt{2}$ irrational. ∎

1.2.4 Division mit Rest und Anfänge der Zahlentheorie

Satz 1.17. (Division mit Rest) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $d \in \mathbb{N}$ gibt es ein $q \in \mathbb{N}_0$ und ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r < d$, welches wir den Rest nennen, so dass $n = qd + r$.

Proof. Für $n < d$ stimmt die Behauptung, da wir dann $q = 0$ und $r = n$ wählen können. Genauso stimmt sie für $n = d$, da wir dann $q = 1$ und $r = 0$ wählen können. Nehmen wir nun an, dass der Satz nicht zutrifft. Dann gibt es nach der Wohlordnung von $\mathbb{N}$ in Satz **??** ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$, für das die Division durch ein $d \in \mathbb{N}_0$ nich funktioniert. Nach obigem muss $n_0 > d \geq 1$ und damit auch $n_0 \geq 2$ gelten.

Insbesondere ist $n = n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ und es gibt ein Rest $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r < d$, so dass $n_0 - 1 = n = qd + r$ für $q \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt $n_0 = qd + r + 1$. Falls $r < d - 1$, dann ist $r + 1 < d$ und n_0 erfüllt doch Division durch d mit Rest. Falls $r = d - 1$, dann ist $d = r + 1$ und $n_0 = qd + r + 1 = qd + d = (q+1)d + 0$

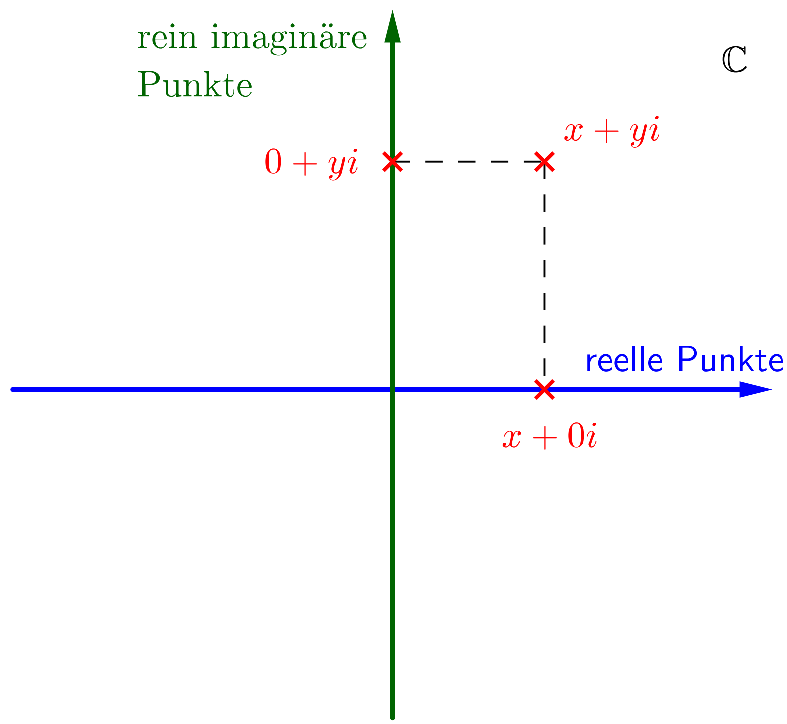
und n_0 erfüllt Division durch q mit Rest 0. Nach der Anordnung von $\mathbb{N}$ im Lemma **??** erfüllt r entweder $r < d-1$ oder $r = d-1$ und daher wurden alle Möglichkeiten für r abgedeckt. Für n_0 ist Division durch d mit Rest daher möglich, was ein Widerspruch darstellt. Also gilt der Satz. ■

1.3 Die komplexen Zahlen

Unter Verwendung der reellen Zahlen können wir die Menge der komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1.18}$$

definieren. Wir schreiben ein Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ viel häufiger in der Form $z = x + y\mathrm{i}$, wobei das Symbol i als die **imaginäre Einheit** bezeichnet wird. Man beachte, dass bei dieser Identifikation + vorerst als Ersatz für das Komma zu verstehen ist. Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird als der **Realteil** von z bezeichnet und man schreibt $x = \mathrm{Re}(z)$; die Zahl $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ ist der **Imaginärteil** von z. Die Elemente von $\mathbb{C}$ mit Imaginärteil 0 bezeichnet man auch als **reell** und die Elemente mit Realteil 0 als **rein imaginär**. Via der injektiven Abbildung $x \in \mathbb{R} \mapsto x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge der reellen Elemente von $\mathbb{C}$ (der "x-Achse").



Die Menge $\mathbb{C}$ (inklusive deren graphische Darstellung wie oben) wird ganz im Sinne der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ auch **komplexe Ebene** (alternativ **Gausssche Zahlenebene** oder auch **Argand-Ebene**) genannt. In der geometrischen Denkweise wird die Menge der reellen Punkte als die **reelle Achse** und die Menge der rein imaginären Punkte als die **imaginäre Achse** bezeichnet.

Wie Sie vielleicht schon erwartet haben, soll i eine Wurzel von -1 sein. Formal ausgedrückt, wollen wir, dass $\mathbb{C}$ einen Körper darstellt, in dem die Rechenoperationen von $\mathbb{R}$ "verallgemeinert" werden, und dass $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ gilt. Die Addition auf $\mathbb{C}$ definieren wir "komponentenweise" durch

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i} \tag{1.19}$$

für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ definieren wir hingegen durch

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i} \tag{1.20}$$

für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $(0 + 1\mathrm{i})^2 = -1 + 0\mathrm{i}$ und die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ erweitern die entsprechenden Operationen auf $\mathbb{R}$.

Satz 1.18. (Komplexe Zahlen) Mit den oben definierten Verknüpfungen definiert $\mathbb{C}$ einen Körper, den **Körper der komplexen Zahlen**. Hierbei ist die Null gleich $0 + 0\mathrm{i}$ und die Eins gleich $1 + 0\mathrm{i}$.

Proof. Wir verifizieren die Körperaxiome. Wie wir sehen werden, folgen die Eigenschaften der Addition auf $\mathbb{C}$ aus den Eigenschaften der Addition auf $\mathbb{R}$. Die Addition ist kommutativ: Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i} \\ &= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)\mathrm{i} \\ &= (x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_1 + y_1\mathrm{i}).\end{aligned} \tag{1.21}$$

Das Element $0 + 0\mathrm{i}$ ist ein (und schlussendlich also das) Nullelement der Addition, denn

$$(0 + 0i) + (x + y\mathrm{i}) = (0 + x) + (0 + y)\mathrm{i} = x + y\mathrm{i} \tag{1.22}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die additive Inverse eines Elements $x + y\mathrm{i}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $(-x) + (-y)\mathrm{i}$, denn

$$\begin{aligned}(x + y\mathrm{i}) + ((-x) + (-y)\mathrm{i}) &= ((-x) + (-y)\mathrm{i}) + (x + y\mathrm{i}) \\ &= (x + (-x)) + (y + (-y))\mathrm{i} = 0 + 0\mathrm{i}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

Die Addition ist assoziativ: Seien $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}((x_1 + y_1\mathrm{i}) &+ (x_2 + y_2\mathrm{i})) + (x_3 + y_3\mathrm{i}) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}) + (x_3 + y_3\mathrm{i}) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)\mathrm{i} \\ &= \ldots = (x_1 + y_1\mathrm{i}) + ((x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_3 + y_3\mathrm{i})).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Das Element $1 + 0\mathrm{i}$ ist ein Einselement, denn $1 + 0\mathrm{i} \neq 0 + 0i$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(1 + 0\mathrm{i}) \cdot (x + y\mathrm{i}) &= (x + y\mathrm{i}) \cdot (1 + 0\mathrm{i}) \\ &= (x \cdot 1 - y \cdot 0) + (x \cdot 0 + y \cdot 1)\mathrm{i} = x + y\mathrm{i}.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Wir geben nun die multiplikative Inverse eines Elements $x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $x + y\mathrm{i} \neq 0 + 0i$ (das heisst $x \neq 0$ oder $y \neq 0$), an. Wir bemerken zuerst, dass $x^2 + y^2 > 0$: Nehmen wir vorerst an, dass $x \neq 0$, dann ist $x^2 > 0$

und $y^2 \geq 0$ und damit $x^2 + y^2 > 0$. Für $y \neq 0$ gilt ebenso $x^2 \geq 0$ und $y^2 > 0$ und damit $x^2 + y^2 > 0$. Die multiplikative Inverse ist gegeben durch $\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$, denn

$$\begin{aligned}(x + y\mathrm{i}) \cdot &\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{i}\right)\\ &= \left(x \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - y \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}\right) + \left(y \cdot \frac{x}{x^2+y^2} + x \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{i}\\ &= 1 + 0\mathrm{i}\end{aligned} \tag{1.26}$$

Die verbleibenden beiden Axiome (Assoziativität der Multiplikation und Distributivität) lassen sich durch abstraktere Argumente beweisen, die aber auch etwas mehr Wissen benötigen. Wir bestätigen diese Axiome deswegen durch zwei konkrete Rechnungen.

Die Multiplikation ist assoziativ: Seien $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Nun berechnet man

$$\begin{aligned}((x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot &(x_2 + y_2\mathrm{i})) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i})\\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i}) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i})\\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3)\\ &\quad + (x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3)\mathrm{i}\\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot ((x_2x_3 - y_2y_3) + (y_2x_3 + x_2y_3)\mathrm{i})\\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot ((x_2 + y_2\mathrm{i}) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i}))\end{aligned} \tag{1.27}$$

Es bleibt nur noch die Distributivität: Seien also $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot &((x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_3 + y_3\mathrm{i}))\\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\mathrm{i})\\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (y_1x_2 + y_1x_3 + x_1y_2 + x_1y_3)\mathrm{i}\\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (y_1x_2 + x_1y_2)\mathrm{i}) + ((x_1x_3 - y_1y_3) + (y_1x_3 + x_1y_3)\mathrm{i})\\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i}),\end{aligned} \tag{1.28}$$

womit gezeigt wäre, dass $\mathbb{C}$ zusammen mit der oben definierten Addition und der oben definierten Multiplikation ein Körper ist. ■

Definition 1.19. (Konjugation) Die **komplexe Konjugation** ist die Abbildung

$$\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z = x + y\mathrm{i} \mapsto \bar{z} = x - y\mathrm{i}. \tag{1.29}$$

Lemma 1.20. (Eigenschaften der Konjugation) Die komplexe Konjugation erfüllt folgende Eigenschaften:

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ und $z\bar{z} \geq 0$. Des Weiteren gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $z\bar{z} = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.

2. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

3. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Proof. 1. Seien $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z\bar{z} = (x + y\mathrm{i}) \cdot (x - y\mathrm{i}) &= x^2 + xy\mathrm{i} - xy\mathrm{i} - y^2 \\ = x^2 - y^2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$z\bar{z} = 0 \implies x^2 - y^2 = 0 \implies x = 0 \wedge y = 0 \implies z = 0 \tag{1.31}$$

2. Seien $z = x_1 + y_1\mathrm{i}$ und $w = x_2 + y_2\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ für $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\overline{z + w} = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\mathrm{i} = (x_1 - y_1\mathrm{i}) + (x_2 - y_2\mathrm{i}) = \overline{z} + \overline{w} \tag{1.32}$$

3.

$$\overline{z \cdot w} = (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i} = (x_1 - y_1\mathrm{i}) \cdot (x_2 - y_2\mathrm{i}) = \overline{z} \cdot \overline{w}, \tag{1.33}$$

■

1.4 Intervalle und der Absolutbetrag

1.4.1 Intervalle

Definition 1.21. (Intervalle) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist die **abgeschlossene Intervall** $[a, b]$ durch

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

das **offene Intervall** (a, b) durch

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

das **(rechts) halboffene Intervall** $[a, b)$ durch

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

und das **(links) halboffene Intervall** $(a, b]$ durch

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

definiert. Wenn das Intervall nicht-leer ist, dann wird a der **linke Endpunkt**, b der **rechte Endpunkt**, und $b - a$ die **Länge des Intervalls** gennant.

Die Intervalle $(a, b), (a, b], [a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ nicht-leer sind genau dann, wenn $a < b$, und $[a, b]$ nicht-leer ist genau dann, wenn $a \leq b$. Intervalle der Art $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$ werden auch **endliche** oder **beschränkte Intervalle** genant.

Definition 1.22. (Unbeschränkte Intervalle) Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die **unbeschränkte abgeschlossenen Intervalle**

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \mathbb{R}_{\geq a} = x \in \mathbb{R} | x \geq a \\ (-\infty, b] &= \mathbb{R}_{\leq b} = x \in \mathbb{R} | x \leq b \end{aligned}$$

und **undeschränkte offenen Intervalle**

$$\begin{aligned} (a, \infty) &= \mathbb{R}_{>a} = x \in \mathbb{R} | x > a \\ (-\infty, b) &= \mathbb{R}_{<b} = x \in \mathbb{R} | x < b \\ (-\infty, \infty) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Definition 1.23. (Umgebung eines Punktes) Sei $x \in \mathbb{R}$. Eine Menge, die ein offenes Intervall enthält, in dem x liegt, wird auch **Umgebung** von x gennan. Für ein $\delta > 0$ wird das offene Intervall $(x-\delta, x+\delta)$ die δ-**Umgebung** genannt.

1.4.2 Der Absolutbetrag auf den reellen Zahlen

Definition 1.24. (Der Absolutbetrag) Der **Absolutbetrag** ist die Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Wir betrachten zuerst einige Konsequenzen dieser Definition.

Folgerung 1.24.1. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Dies folgt aus der Trichotomie von reellen Zahlen: Für $x = 0$ gilt $|x| = 0$, für $x > 0$ gilt $|x| = x > 0$ und für $x < 0$ folgt $|x| = -x > 0$.

Folgerung 1.24.2. Es ist $|x| = |-x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Folgerung 1.24.3. Die Absolutbetrag ist multiplikativ: $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x||y|$

Folgerung 1.24.4. $\forall x \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} : |\frac{1}{x}| = \frac{1}{|x|}$. Deis folgt aus **??** wegen $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |\frac{1}{x}||x| = 1$

Folgerung 1.24.5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$. Denn angenommen $|x| \leq y$. Falls $x \geq 0$ dann gilt $-y \leq 0 \leq x = |x| \leq y$. Falls $x < 0$, dann ist $-y \leq -|x| = x < 0 \leq y$ und damit wiederum $-y \leq x \leq y$. Für die Umkehrung bemerken wir, dass $-y \leq x \leq y$ auch $-y \leq -x \leq y$ und somit in jedem Fall $|x| \leq y$ impliziert.

Folgerung 1.24.6. Ananlog ist $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| < y \iff -y < x < y$

Folgerung 1.24.7. (Dreiecksungleichung)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Diese Ungleichung wird auch die **Dreiecksungleichung** gennant. Sie folgt, in dem wir $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$ und anschliessend auf

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

anwenden.

Folgerung 1.24.8. (umgekehrte Dreiecksungleichung)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

Denn Dreiecksungleichung zeigt:

$$|x| \leq |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

was zu $|x| - |y| \leq |x - y|$ führt. Durch Vertauschen von x, y erhalten wir $|y| - |x| \leq |x - y|$. Also $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ wie gewunscht.

Definition 1.25. (Offene und abgeschlossene Teilmenge) Ein Teilmanege $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst **offen** (in $\mathbb{R}$), wenn

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$$

Ein Teilmaenge heisst **abgeschlossen** (in $\mathbb{R}$), wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

1.4.3 Der Absolutbetrag auf den komplexen Zahlen

Definition 1.26. (Der Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$) Der **Absolutbetrag** $|\cdot|$ **auf** $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$|x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für $x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$

An dieser Stelle bemerken wir, dass für $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die Summe der Quadrate $x^2 + y^2$ gerade gleich $z\bar{z}$ ist, denn

$$(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i}) = x^2 + y^2 + (xy - xy)\mathrm{i} = x^2 + y^2$$

Somit gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|z| = z\bar{z}$$

Eigenschaften des Absolutbetrags auf $\mathbb{C}$

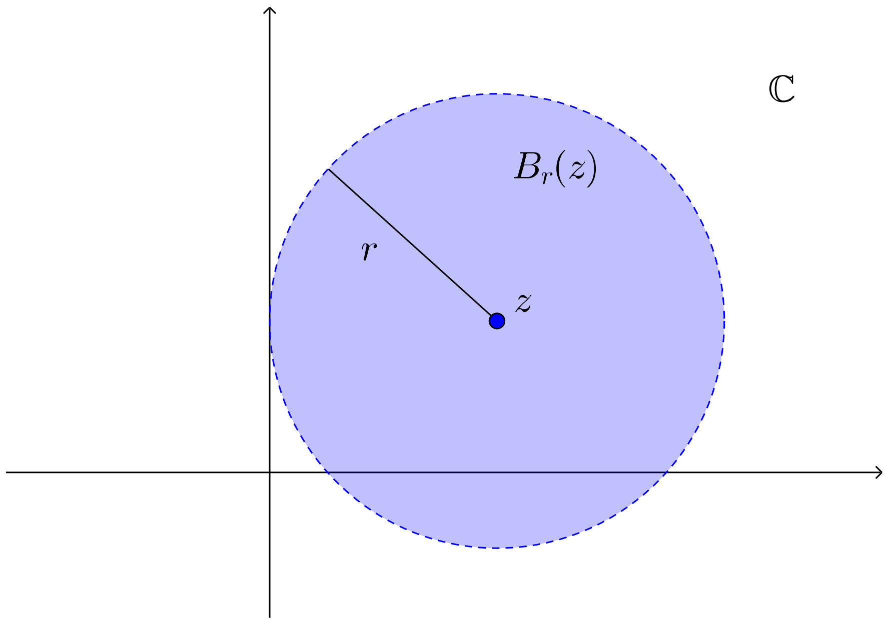
1. (Definitheit) $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq 0 \wedge |z| = 0 \iff z = 0$
2. (Multiplikativität) $\forall z, w \in \mathbb{C} : |zw| = |z||w|$
3. (Dreiecksgleichung) $\forall z, w \in \mathbb{C} : |z + w| \leq |z| + |w|$
4. (Umgekehrte Dreiecksgleichung) $\forall z, w \in \mathbb{C} : \big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$

***** Hier muss Beweis sein ******

Definition 1.27. (Offene Bälle) Der **offene Ball** mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge

$$B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \big| |z - w| < r\}$$

Der offene Ball $B_r(z)$ zu $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ besteht also aus jeden Punkten, die Abstand (strikt) kleiner als r von z haben. Offene Bälle in $\mathbb{C}$ und offene Intervalle in $\mathbb{R}$ sind in folgendem Sinne kompatibelt: Ist $x \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, so ist der Schnitt des offenes Balles $B_r(z) \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}$ gerade das offene, symmetrisch um x liegende Itervall $(x - r, x + r)$.



Definition 1.28. (Offene und abgeschlossene Teilmanege von $\mathbb{C}$) Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heisst $offen$ (in $\mathbb{C}$), wenn zu jedem Punkt in U ein offene Ball um diesen Punkt exestiert, der in U enthalten ist. Formaler:

$$\forall z \in U \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq U$$

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heisst **abgeschlossen** (in $\mathbb{C}$), falls ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

1.5 Maximum und Supremum

1.5.1 Maximum und Minimum

Definition 1.29. (Maximum) Wir sagen, dass $x_0 = \max(X) \in \mathbb{R}$ das **Maximum** einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist, falls $\forall x \in X : x \leq x_0$.

Das Maximum einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt. Denn falls x_0, x_0' beide die Eigenschaften eines Maximums erfüllen, so folgt $x_0 \leq x_0'$ (weil $x_0 \in X$ und x_0' ein Maximum ist) und $x_0' \leq x_0$ (weil $x_0' \in X$ und x_0 ein Maximum ist) und damit $x_0 = x_0'$

Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit Endpunkte $a < b$ in $\mathbb{R}$ hat $b = max([a, b])$ als Maximum. Auch nicht-leere endliche Teilmengen und viele weitere Mengen besitzen ein Maximum. Es gibt jedoch auch Mengen, die kein Maximum bestizt. Beispielweise hat das offene Intervall (a, b) mit Endpunkte $a < b$ in $\mathbb{R}$ kein Maximum.

***** Hier muss Beweis sein*****

Des Weiteren kann $\mathbb{R}$ (oder acuh Intervale der Form $[a, \infty), (a, \infty)$ für $a \in \mathbb{R}$) kein Maximum besitzen, da für beliebige $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x < x + 1$ gilt und damit x kein Maximum sein kann.

Definition 1.30. (Minimum) Wir sagen, dass $x_0 = \min(X)$ das **Minimum** einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist, falls $\forall x \in X : x \geq x_0$.

Die obige Diskussion lässt sich auf analoge Weise für das Minimum anwenden. Dieses ist also eindeutig bestimmt, muss aber nicht unbedingt existieren.

1.5.2 Supremum und Infimum

Definition 1.31. (Beschränkheit und Schranken) Eine Teilemenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst **von oben beschränkt**, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq s$ für alle $x \in X$. Ein solches $s \in \mathbb{R}$ nennt man in diesem Fall eine **obere Schranke** von X. Die Begriffe "**von unter beschränkt**" und "**untere Schranke**" sind analog definiert. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst **beschränkt**, falls sie von oben und von unter beschränkt ist.

Satz 1.32. (Supremum) Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge. Dann gibt es eine **kleinste obere Schranke** von X, die auch das **Supremum** $\sup(X)$ gennant wird. Formal gelten also für $s_0 = \sup(X)$ folgende Eigenschaften:

1. (s_0 ist eine obere Scharnke) $\forall x \in X : x \leq s_0$
2. (s_0 ist kleiner gleich jeder oberen Schranke) $\forall s \in \mathbb{R} : ((\forall x \in X : x \leq s) \implies s_0 \leq s)$

Äquivalenterweise kann $s_0 = \sup(X)$ auch durch (1) und die folgende Bedingung definiert werden:

3. (Kleinere Zahlen sind keine oberen Schranken)$\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in X : x > s_0 - \varepsilon$

Ein paar wichtige Bemerkungen dazu:

- Falls das Maximum $x_0 = \max(X)$ existiert, dann ist x_0 eine obere Schranke von X und ist vielmehr auch die kleinste obere Schranke, also $\max(X) = \sup(X)$. Denn aus $x_0 \in X$ folgt $x_0 \leq s$ für jede obere Schranke s von X.

- Wenn das Supremum $\sup(X) \in X$, dann ist $\sup(X) = \max(X)$, da das Supremum eine obere Schranke ist. Also ist das Supremum eine Verallgemeinerung des Maximums einer Menge.

- Die Formulierung "kleinste obere Schranke" ist natürlich ein Synonym für das Minimum der oberen Schranken und ist dadurch eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Proof. Nach Annahme ist X nicht-leer und die Menge der oberen Schranken $Y = \{s \in \mathbb{R} | \forall x \in X : x \leq s\}$ ist ebenfalls nict-leer. Das Weiteren gilt für alle $x \in X, s \in Y$, die Ungleichung $x \leq s$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom folg daher, dass es $\forall x \in X, s \in Y \, \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq s$. Aus der ersten Unglecihung folgt, dass c eine obere Schranke von X ist. Aus der zweiten Unglecihung folgt, dass c kleinste obere Schranke von X ist, und daher erfüllt c sowohl (1) als auch (2).

Wir zeigen nun, dass das Supremum auch durch (1) und (3) charakterisiert wird. Also angenommen $s_0 = \sup(X)$ und $\varepsilon > 0$, dann ist $s_0 - \varepsilon < s_0$. Daher kann $s_0 - \varepsilon$ keine obere Schranke sein und $\exists x \in X : x > s_0 - \varepsilon$. Daher erfüllt s_0 auch (3).

Erfüllt $t_0 \in \mathbb{R}$ nun (1) und (3), so ist t_0 eine obere Schranke und daher ist $s_0 \leq t_0$ nach Definition von $s_0 = \sup(X)$. Falls $s_0 < t_0$ wäre, dann wäre $s_0 = t_0 - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Nach der zweiten Eigenschaft von t_0 gäbe es ein $x \in X$ mit $x > s_0$, was der Definition von s_0 als (kleinste) obere Schranke widerspricht. Deswegen muss $t_0 = s_0$ gelten und s_0 ist eindeutig durch die Bedingungen (1) und (3) bestimmt. ∎

Satz 1.33. (Supremum unter Streckung) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge und sei $c > 0$. Dann ist cA nach oben beschränkt und es gilt

$$\sup(cA) = c \sup(A)$$

Proof. Sei $s = \sup(A)$. Dann gitl $\forall a \in A, c > 0 : a \leq s \implies ca \leq cs$. Da aber jedes Element von cA von der Form ca für ein $a \in A$ ist. erhalten wir, dass cs eine obere Schranke von cA ist und dass cA nach oben beschränkt ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists a \in A : a > s - \frac{\varepsilon}{c}$, für welches die Ungleichung $ca > cs - \varepsilon$ gilt. Dies zeigt die zweite charakterisierende Eigenschaft des Supremums und wir erhalten $\sup(cA) = cs = c\sup(A)$. ∎

Satz 1.34. (Supremum unter Summen) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nicht-leere, von oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann ist $A + B$ von oben beschränkt und es gilt

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Proof. Wir definiere $s_A = \sup(A)$ und $s_B = \sup(B)$. Dann gilt $\forall a \in A : a \leq s_A$ und $\forall binB : b \leq s_B$, was $\forall a \in A, b \in B : a + b \leq s_A + s_B$ impliziert. Da aber jedes Element von $A + B$ dieser Form ist, erhalten wir, dass $s_A + s_B$ eine obere schranke von $A + B$ ist und dass $A + B$ nach oben beschränkt ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $a > s_A - \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $b \in B$ mit $b > s_B - \frac{\varepsilon}{2}$, was wiederum $a + b > s_A + s_B - \varepsilon$ impliziert. Dies zeigt die zweite charakterisierende Eigenschaft von $\sup(A + B)$ und wir erhalten

$$\sup(A + B) = s_A + s_B = \sup(A) + \sup(B)$$

∎

1.5.3 Uneigentliche Werte, Suprema und Infime

In diesem Abschnitt wollen wir die Begrieffe "Infimum" und "Supremum" auf belibiege Teilmenge von $\mathbb{R}$ erweitern (ohne die in Abschnitt **??** getroffenen Annahmen). Dazu verwenden wir die Symbole "$+\infty$" und "$-\infty$", die keine reellen Zahlen darstellen. Wir definieren die **erweiterte Zahlengerade** (die auch **Zweipunktkompaktifizierung** von $\mathbb{R}$ genannt wird) durch

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$$

und stellen uns diese als die Zahlengerade

vor. Hier haben wir den Punkt $-\infty$ links von $\mathbb{R}$ und den Punkt $+\infty$ rechts von $\mathbb{R}$ zu der Gerade hinzugefügt. Froramler fromuliert: wir erweitern Relation (Ordnung) $\leq$ auf $\bar{\mathbb{R}}$, so dass $\forall x \in \bar{\mathbb{R}} : -\infty \leq x \leq +\infty$ gilt, aber keine weiteren $\leq$-Relation für die Symbole $-\infty, +\infty$ erfüllt sin. Insbesondere schreiben wir auch $-\infty < x < +\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Das Maximum und das Minimum einer Teilmenge $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist nun wie in Abschnitt **??** definiert (falls es existiert).

Falls $X \subseteq \mathbb{R}$ nicht von oben beschränkt ist, dann definieren wir $\sup(X) = +\infty$. Falls X leer ist, setzen wir $\sup(\emptyset) = -\infty$ (da jedes $x \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von $\emptyset$ darstellt). Analog definieren wir $\inf(\emptyset) = +\infty$ und $\inf(X) = -\infty$, falls $X \subseteq \mathbb{R}$ nicht von unten beschränkt ist.

Weiter definieren wir für die Übungen die "Rechenregeln"

$$\begin{array}{cc} \infty + x = x + \infty = \infty & -\infty + x = x - \infty = -\infty \\ \infty + \infty = \infty & -\infty - \infty = -\infty \end{array}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{array}{cc} \infty \cdot \infty = \infty & (-\infty) \cdot \infty = -\infty \\ y \cdot \infty = \infty \cdot y = \infty & (-y) \cdot \infty = \infty \cdot (-y) = -\infty \\ \infty \cdot (-\infty) = -\infty & (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty \\ y \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot y = -\infty & (-y) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (-y) = \infty \end{array}$$

für alle $y > 0$, wovon wir einen Teil verwenden werden. Die Ausdrücke $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty$ oder ähnliche bleiben wohlgemerkt aber undefiniert.

1.5.4 Verwendung des Supremums und Infimums

Das Supremum ist eine natürliche und notwendige Verallgemeinerung des Maximums einer Menge, da letzteres sogar für beschränkte Intervalle nicht existieren muss. Das Supremum kann aber auch hilfreich sein in Situationen, wo das Maximum existiert. Denn falls man beweisen will, dass ein Maximum existiert, dann hat man mit dem Supremum den richtigen Kandidaten und kann den Beweis mit der Existenz des Supremums beginnen. Auf die gleiche Weise ist das Infimum einer Menge eine Verallgemeinerung des Minimums.

1.6 Konsequnezen der Vollständigkeit

1.6.1 Der Archimedische Prinzip

Mit Hilfe der Existenz des Supremums können wir nun das Archimedische Prinzip beweisen.

Satz 1.35. (Das Archimedische Prinzip Es gelten folgende Aussagen:

1. Jede nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum.

2. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists! n \in \mathbb{Z} : n \leq x \leq n+1$

3. $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Wir können das Archimedische Prinzip beispielsweise verwenden, um folgende Funktionen zu definieren.

- Der **ganzzahlige Anteil** $\lfloor x \rfloor$ einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die eindeutig bestimmte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$. Wir erhalten also die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, die auch **Abrundungsfunktion** genannt wird.

- Der **gebrochene Anteil** (oder auch **Nachkommaanteil**) ist $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$ und wir erhalten eine Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto \{x\} \in [0,1)$ mit $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Proof. Zu (i): Sei $E \subseteq \mathbb{Z}$ eine nicht-leere und (als Teilmenge von $\mathbb{R}$) von oben beschränkte Teilmenge. Dann existiert das Supremum $s_0 = \sup(E)$ (nach Definition von Supremum). Da s_0 die kleinste obere Schranke von E ist, $\exists n_0 \in E : s_0 - 1 < n_0 \leq s_0$. Es folgt $s_0 < n_0 + 1$ und $\forall m \in E : m \leq s_0 < n_0 + 1$, woraus $m \leq n_0$ folgt. Daher ist n_0 das Maximum von E wie in (i) behauptet.

Zu (ii): Sei $x \geq 0$ eine reelle Zahl. Dann ist $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ eine von oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ (nicht-leer, da $0 \in E$ — hier verwenden wir $x \geq 0$). Nach obigem hat E ein Maximum, das heisst, es gibt ein maximales $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x$. Daraus folgt $x < n+1$ wie in (ii).

Falls $x < 0$ ist, dann können wir obigen Fall auf $-x$ anwenden und finden ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $\ell \leq -x < \ell + 1$. Daraus folgt, dass es auch ein $k \in \{\ell, \ell+1\} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $k - 1 < -x \leq k$ gibt. Für $n = -k \in \mathbb{Z}$ erhalten wir schliesslich $n \leq x < n+1$. Damit ist die Existenz in (ii) bewiesen.

Für den Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ die Ungleichungen $n_1 \leq x < n_1 + 1$ und $n_2 \leq x < n_2 + 1$ gelten. Daraus folgt $n_1 \leq x < n_2 + 1$ und damit $n_1 \leq n_2$. Analog folgt $n_2 \leq n_1$, was $n_1 = n_2$ impliziert.

Zu (iii): Sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt auch $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ und es gibt nach Teil (ii) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Für dieses n gilt aber auch $\frac{1}{n} < \varepsilon$, wie in (iii) behauptet wurde. ■

Folgerung 1.35.1. (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) Zwischen je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.

Proof. Nach dem Archimedischen Prinzip existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < b - a$. Ebenso gibt es nach dem Archimedischen Prinzip ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n - 1 \leq ma < n$ oder äquivalenterweise $\frac{n-1}{m} \leq a < \frac{n}{m}$. Insbesondere gilt $\frac{n}{m} \leq a + \frac{1}{m}$, was mit $\frac{1}{m} < b - a$ gerade

$$a < \frac{n}{m} \leq a + \frac{1}{m} < a + b - a = b$$

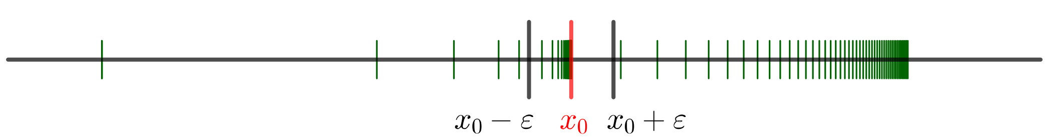
und damit das Korollar impliziert, wobei $r = \frac{n}{m}$ gewählt wird. ■

Anders formuliert zeigt obiges Korollar, dass $\mathbb{Q}$ jede Umgebung I einer reellen Zahl schneidet (das heisst, $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$), oder auch, dass wir jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren können. Die Eigenschaft wird auch als $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ bezeichnet

1.6.2 Häufungspunkte einer Menge

Definition 1.36. (Häufungspunkte von Menge) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir sagen, dass x_0 ein **Häufungspunkte der Menge** A ist, falls $\forall \varepsilon > 0\, \exists a \in A : 0 < |a - x_0| < \varepsilon$.

Satz 1.37. (Existenz von Häufungspunkten) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte unendliche Teilmenge. Dann existiert ein Häufungspunkt von A in $\mathbb{R}$.



Proof. Angennomen $m, M \in \mathbb{R}$ erfüllen $A \subseteq [m, M]$. Wir definieren

$$X = \{x \in \mathbb{R} \big| |A \cap (-\infty, x]| < \infty\}$$

Dann ist $m \in X$ da $|A \cap (-\infty, m]| \leq 1$. Des Weiteren gilt $x < M$ für jedes $x \in X$, denn für $x \geq M$ ist $A \cap (-\infty, x] = A \cap (-\infty, M] = A$ eine unendliche

Menge nahc Annahme im Stazt. Daher ist X eine beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, womit das Supremum $x_0 = \sup(X)$ existiert.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $x > x_0 - \varepsilon$, was zeigt, dass $A \cap (-\infty, x_0 - \varepsilon]$ eine endliche Menge ist, da

$$A \cap (-\infty, x_0 - \varepsilon] \subseteq A \cap (-\infty, x]$$

gilt. Des weiteren gilt $x_0 + \varepsilon \notin X$ auf Grund der Definition von x_0. Damit ist Kardinalität von $A \cap (-\infty, x + \varepsilon]$ unendlich. Es folgt, dass

$$A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = (A \cap (-\infty, x_0 + \varepsilon]) \setminus (A \cap (-\infty, x_0 - \varepsilon])$$

eine unendliche Menge ist und abgesehen von möglicherweise $x_0, x_0 + \varepsilon$ noch weitere Punkte besitzen muss. Da $\varepsilon > 0$ belibieg war, sehen wir, dass x_0 ein Häufungspunkt der Menge A ist. ■

1.6.3 Intervallschachtelungsprinzip

Der Durchschnitt von ineinander geschachtelten, nicht-leeren Intervallen, das heisst, Intervallen $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \subseteq \cdots$ in $\mathbb{R}$, die kleiner werden, muss nicht unbedingt nicht-leer sein. Zum Beispiel gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \big[n, \infty\big) = \emptyset,$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

auf Grund des Archimedischen Prinzip. Für abgeschlossene und beschränkte Intervalle ist die Situation aber deutlich besser. Dies ist nochmals eine Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms.

Satz 1.38. (Intervallschachtelungsprinzip) Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein nicht-leeres, abgeschlossenes, beschränktes Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben, so dass für alle natürlichen Zahlen $m \leq n$ die Inklusion $I_m \supseteq I_n$ oder äquivalenzerweise die Ungleichungen $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$ gelten. Dann ist die Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \big[\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big]$$

nicht-leer.

Proof. Nach Annahme gilt für natüurlichen Zahlen ℓ, m, n mit $\ell \leq m \leq n$ die Ungleichung

$$a_\ell \leq a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m \leq b_\ell$$

Insbesondere ist b_m eine obere Schranke von $\{a_k | k \in \mathbb{N}\}$, woraus

$$\sup\{a_k | k \in \mathbb{N}\} = b_m$$

folgt. Da m bilibieg war, sehen wir nun, dass $\bar{a} = \sup\{a_k | k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ eine untere Schrank von $\{b_m | m \in \mathbb{N}\}$ ist. Daher hat die letztere Menge ein Infimum $\bar{b} \in \mathbb{R}$ und wir erhalten

$$\overline{a} = \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\} = \overline{b}.$$

Insbesondere ist der Schnitt $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ nicht-leer, da er zum Beispiel $\bar{a}$ enthält. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt nun die Abfolge von Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n] &\iff \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq x \leq b_n \\ &\iff \big(\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq x\big) \wedge \big(\forall n \in \mathbb{N} : x \leq b_n\big) \\ &\iff \overline{a} \leq x \wedge x \leq \overline{b}, \end{aligned}$$

womit $\bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n] = [\bar{a}, \bar{b}]$ gilt und der Satz folgt. ■

1.6.4 Überzählbarkeit

Folgerung 1.38.1. (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$) Die Teilmenge $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ (und daher auch $\mathbb{R}$) ist überabzählbar.

Proof. ***** Hier muss Beweis sein ***** ■

1.6.5 Die Cantor-Menge

1.7 Modelle und Eindeutigkeit der Menge der reellen Zahlen

Chapter 2

Funktionen und die reellen Zahlen

2.1 Summen und Produkte

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ oder $a_1, \ldots, a_n$ Elemente eines Vektorraums V (wie zum Beispiel $\mathbb{R}^d$ für ein $d \geq 1$). Wir wollen hier für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Summe von a_1 bis a_n, also

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \ldots + a_n,$$

besprechen und formal korrekt definieren.

Vom formalen Standpunkt her gesehen ist $j \mapsto a_j \in V$ eine Funktion, (die oft auch durch eine konkrete Formel gegeben sein wird und) deren Definitionsbereich die Menge

$$\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n\}$$

enthalten muss. Wir können $\sum_{i=1}^{n} a_j$ rekursiv definieren durch

$$\sum_{j=1}^{1} a_j = a_1 \text{ und } \sum_{j=1}^{k+1} a_j = \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \right) + a_{k+1}$$

für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Diese Definition entspricht einem einfachen rekursiven Algorithmus, um die Summe $\sum_{i=1}^{n} a_j$ zu berechnen. Allgemeiner ist die Summe $\sum_{i=m}^{n} a_j$ für ganze Zahlen m, n ebenso rekursiv durch

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } m > n, \\ a_m & \text{falls } m = n \text{ und} \\ \left(\sum_{j=m}^{n-1} a_j \right) + a_n & \text{falls } m < n \end{cases}$$

definiert. Wir werden a_j als die **Summanden** und j als den **Index** der Summe $\sum_{j=1}^{n} a_j$ bezeichnen.

Falls nun m, n ganze Zahlen und $a_m, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ sind, dann können wir auch das **Produkt** $\prod_{j=m}^{n} a_j$ von a_m bis a_n rekursiv durch

$$\prod_{j=m}^{n} a_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } m > n, \\ a_m & \text{falls } m = n \text{ und} \\ \left(\prod_{j=m}^{n-1} a_j \right) \cdot a_n & \text{falls } m < n \end{cases}$$

definieren. Wir werden a_j als die **Faktoren** und j als den **Index** des Produkts $\prod_{j=m}^{n} a_j$ bezeichnen.

2.1.1 Rechenregeln für die Summe

Die Summe erfüllt für gegebene ganze Zahlen m, n mit $m \leq n$ die Gleichungen

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

und

$$\sum_{k=m}^{n} (c a_k) = c \sum_{k=m}^{n} a_k,$$

wobei $a_m, \ldots, a_n, b_m, \ldots, b_n$ in einem reellen (respektive komplexen) Vektorraum V liegen und $c \in \mathbb{R}$ (respektive $c \in \mathbb{C}$) ein Skalar ist. (Die erste Eigenschaft ist eine Mischung aus Assoziativgesetz und Kommutativgesetz für die Addition, und die zweite Eigenschaft ist eine Verallgemeinerung des Distributivgesetzes.)

Diese beiden Eigenschaften (die Summe wird auf die Summe und das skalare Vielfache auf das skalare Vielfache abgebildet) werden auch als **Linearität der Abbildung** $\sum$ bezeichnet, wobei $\sum$ auf dem Vektorraum $V^{\{m,\ldots,n\}}$ der Funktionen von $\{m, \ldots, n\}$ nach V definiert ist, den Vektorraum

V als Zielbereich besitzt, und $(a_m, \ldots, a_n) \in V^{\{m,\ldots,n\}}$ auf $\sum_{k=m}^n a_k$ abbildet. Wie der Name sagt, wird Linearität ausführlicher in der Linearen Algebra besprochen. Es handelt sich dabei aber auch um eine wichtige Eigenschaft für die Analysis, welche also häufig auftreten.

Des Weiteren gilt die Formel für die **Teleskopsumme**

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1} - a_k) &= (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)\\ &= a_{n+1} - a_m\end{aligned}$$

wobei $a_m, \ldots, a_{n+1}$ in einem reellen oder einem komplexen Vektorraum liegen. Formaler argumentiert gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j - \sum_{k=m}^{n} a_k\\ &= \left(a_{n+1} + \sum_{j=m+1}^{n} a_j\right) - \left(a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k\right) = a_{n+1} - a_m\end{aligned}$$

wie bereits behauptet. Die Formel für die Teleskopsumme lässt sich zur Abel-Summationsformel verallgemeinern, welche überraschend viele Anwendungen in der Analysis und Zahlentheorie findet.

2.1.2 Rechenregeln für die Produkt

Für ganze Zahlen $m \leq n$ und $a_m, \ldots, a_n, b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\prod_{k=m}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right).$$

Insbesondere ist für alle $c \in \mathbb{C}$

$$\prod_{k=m}^{n}(c a_k) = c^{n-m+1}\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right).$$

Des Weiteren gilt für alle $a_m, \ldots, a_n$ die Formel für das **Teleskopprodukt**

$$\begin{aligned}\prod_{k=m}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \left(\prod_{k=m}^{n} a_{k+1}\right)\left(\prod_{k=m}^{n}\frac{1}{a_k}\right) = \left(\prod_{k=m+1}^{n+1} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\\ &= a_{n+1}\left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m+1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\frac{1}{a_m} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.\end{aligned}$$

Lemma 2.1. (Bernoulli'sche Ungleichnug) Für alle reellen Zahlen $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Proof. Wir verwänden vollständige Induktion. Für $n = 0$ haben wir $(1 + a)^n = 1 = 1 + na$. Angenommen die Ungleichung $(1+a)^n \geq 1 + na$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Annahme an a ist $a \geq -1$, was in Kombination mit Annahme an n

$$\begin{aligned} (1+a)^n &= (1+a)^n(1+a) \\ &\geq (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2 \\ &\geq 1 + (n+1)a \end{aligned}$$

ergibt und damit Induktionsschritt zeigt. Das Lemma folgt. ■

2.1.3 Die geometrische Summe

Satz 2.2. (Geometrische Summenformel) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{falls } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{falls } q \neq 1 \end{cases} .$$

Der direkte (aber sicher nicht eleganteste) Beweis verwendet vollständige Induktion:

Proof. Für $q = 1$ ist $q^k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und die Aussage folgt aus den Eigenschaften der Summe. Sei nun $q \neq 1$. Für $n = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}$, was also den Induktionsanfang zeigt. Angenommen die Formel in der Proposition gilt bereits für n. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + \frac{q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1},$$

womit der Induktionsschritt gezeigt ist und die Proposition folgt. ■

2.2 Polynome

Definition 2.3. (Polynomfunktionen) Eine **Polynomfunktion** auf $\mathbb{C}$ ist ein Funktion der Form

$$f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Die Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ heissen die **Koeffizienten** von f. Das grösste $k \in \{0, \ldots, n\}$ mit $a_k \neq 0$ ist der **Grad** $\deg(f)$ der Polynomfunktion f und $a_{\deg(f)}$ ist der **Leitkoeffizient** oder **führende Koeffizient** von f. Falls keine solche k existiert, das heisst, falls f Polynomfunktion $z \in \mathbb{C} \mapsto 0z^0 = 0 \in \mathbb{C}$ ist, so nennt man die Polynomfunktion die **Null** und setzt den Grad auf $-\infty$. Eine Polynomfunktion der Form $z \in \mathbb{C} \mapsto 0z^0 = 0 \in \mathbb{C}$ für $a_0 \in \mathbb{C}$ wird auch **konstant** gennant und kurz mit a_0 bezeichnet. Eine Polynomfunktion mit Grad ≤ 1 wird **affin** oder **linear** gennant. Eine Polynomfunktion der Form $z \in \mathbb{C} \mapsto a_k z^k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ heisst ein **Monom**. Wir sagen, dass ein Polynomfunktion **reell** ist, wenn die Koeffizienten reellt gewählt werden können. Wir werden eine reelle Polynomfunktion auch mit der zugehörigen Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ identifizieren.

Definition 2.4. (Polynome) Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Ein **Polynome** f über $\mathbb{K}$ ist ein formaler Ausdruck der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k T^k$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Hierbei ist T ein Symbol, das man auch als **Variable** bezeichnet und das verwendet wird, um die Koeffizienten von einander zu trennen. Wir schreiben auch $T^1 = T$ und $aT^0 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Weiter darf ein Summand der Form $0T^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ aus der Summe entfernt werden. Wir definieren den **Polynomring** $\mathbb{K}[T]$ als die Menge der Polynome über $\mathbb{K}$ in der Variablen T mit Addition und Multiplikation gegeben und verwenden ebenso die Begriffe Grad, Koeffizient, etc.

Beispliel 2.4.1. (Polynome auf endliche Körpern) Wir betrachten für den Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen die Polynomfunktionen

$$f : a \in \mathbb{F}_2 \mapsto a^3 + a + 1 \in \mathbb{F}_2, \quad g : a \in \mathbb{F}_2 \mapsto 1 \in \mathbb{F}_2.$$

Bei $0 \in \mathbb{F}_2$ gilt $f(0) = 1 = g(0)$ und an der Stelle $1 \in \mathbb{F}_2 gilt f(1) = 1+1+1 = 1$ und $g(1) = 1$. Insbesondere gilt $f = g$, obwohl f und g nicht durch die gleichen Koeffizienten gegeben sind. Wir unterscheiden die Polynome $T^3 + T + 1 \in \mathbb{F}_2[T]$ (mit Grad 3) und $1 \in \mathbb{F}_2[T]$ (mit Grad 0), obwohl die zugehörigen Polynomfunktionen identisch sind (womit es für diese Polynomfunktion keinen wohldefinierten Grad gibt).

Satz 2.5. (Wachstum von Polynomfunktionen und Eindeutigkeit der Koeffizienten) Sei $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl $M > 0$ eine reelle Zahl $R \geq 1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ auch $|f(z)| \geq M$ gilt. Insbesondere ist die

Zuordnung, die jedem Polynom $f(T) \in \mathbb{C}[T]$ die zugehörige Polynomfunktion $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ zuweist, bijektiv. Dies gilt analog ebenso für reelle Polynome $f(T) \in \mathbb{R}[T]$ und reelle Polynomfunktionen $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$

Proof. Sei $f(T) = a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$ mit $a_0 \neq 0$ und $n \geq 1$. Wir definieren $q(T) \in \mathbb{C}[T]$ durch $q(T) = a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0$, womit $f(T) = a^n T_n + q(T)$. Nun behaupten wir, dass die Polynomfunktion $q(z)$ "langsamer wächst als" $a_n z^n$ und schätzen also $|q(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ nach oben ab:

$$\begin{aligned} |q(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\ &\leq |a_{n-1}z^{n-1}| + \ldots + |a_1 z| + |a_0| \\ &= |a_{n-1}||z^{n-1}| + \ldots + |a_1||z| + |a_0| \\ &\leq (|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)|z|^{n-1} = A|z|^{n-1}, \end{aligned}$$

wobei wir $A = |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ gestzt haben und $|z| \geq 1$ in der Form $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ verwendet haben. Mit der umgekehrten Dreiecksgleichung und $f(z) = a_n z^n + q(z)$ gilt somit

$$\begin{aligned} |f(z)| \geq |a_n z^n| - |q(z)| &\geq |a_n||z|^n - A|z|^{n-1} \\ &= (|a_n||z| - A)|z|^{n-1} \geq |a_n||z| - A, \end{aligned}$$

falls $|a_n||z| - A \geq 0$ oder äquivalenterweise $|z| \geq \frac{A}{|a_n|}$. Sei nun $M > 0$ beliebig. Dann wählen wir

$$R = \max\left\{1, \frac{A}{|a_n|}, \frac{A+M}{|a_n|}\right\}.$$

Falls nun $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung $|z| \geq R$ erfüllt, dann gilt $|z| \geq 1$ und $|z| \geq \frac{A}{|a_n|}$, wonach obige Unglecihungen ergeben

$$|f(z)| \geq |a_n||z| - A \geq |a_n|\frac{A+M}{|a_n|} - A = M,$$

was die erste Behauptung der Proposition beweist.

Angenommen $f_1(T), f_2(T) \in \mathbb{C}[T]$ sind zwei Polynome, die $f_1(z) = f_2(z)$ für alle $zin\mathbb{C}$ erfüllen. Dann hat das Polynom $g(T) = f_1(T) - f_2(T)$ die Eigenschaft, dass $g(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Falls der Grad des Polynoms $g(T)$ grösser gleich Eins ist, widerspricht dies dem ersten Teil der Proposition. Also ist $g(T)$ konstant, womit $g(T) = 0$ gelten muss und daher sind die Polynome $f_1(T)$ und $f_2(T)$ identisch (d.h. sie haben denselben Grad und dieselben Koeffizienten). Diesen Beweis kann man ebenso für reelle Polynome und die zugehörigen Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ durchführen. ∎

2.2.1 Polynomdivision

Wie wir gesehen haben, existiert auf $\mathbb{N}$ eine Division von n durch d mit Rest gegeben durch $n = qd + r$. Dabei ist der Rest r strikt kleiner (bezüglich $\leq$) als d. Division mit Rest gibt es auch für Polynome. Hier hat der Rest bei der Divison von f durch d einen kleineren Grad als d. Wir illustrieren dies an einem Beispiel.

Beispliėl 2.5.1. Seien f, d die durch $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5, d(x) = x^2 + 1$ für alle $x \in \mathbb{C}$ gegebenen Polynome. Wir behaupten, dass Polynome q und r existieren, so dass $f = q \cdot d + e$ mit $\deg(r) < \deg(d) = 2$. Dazu wählen wit zuerst ein Polynome q_1 von der Form $q_1(x) = 3x^2$ für alle $x \in \mathbb{C}$, denn dann ist der Grad von $q \cdot d$ vier und $r_1(x) = f(x) - q_1(x)d(x) = -5x^2 + 5$ hat einen strikt kleiner Grad als f. Wir wenden das gleiche Prinzip nochmals auf r_1 an und betrachten das Polynom q_2 gegeben durch $q_2(x) = -5$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Dann gilt $r_1(x) - q_2(x)d(x) = 10$ für alle $x \in \mathbb{C}$. Insbesondere hat das Polynom $r_1 - q_2 \cdot d$ einen strikt kleineren Grad als das Polynom d (nämlich Null); wir setzen somit $r = r_1 - q_2 \cdot d$. Dann gilt

$$r = r_1 - q_2 \cdot d = f - q_1 \cdot d - q_2 \cdot d = f - (q_1 + q_2) \cdot d.$$

Wenn wir $q = q_1 + q_2$ setzen, haben wir also $f = q \cdot d + r$ mit $\deg(r) = 0 < 2 = \deg(d)$ wie gewünscht. Im Gymnasium wurde das Vorgehen vielleicht durch folgendes Diagramm dargestellt:

$$\begin{array}{l}
(3x^4 - 2x^2 + 5) : (x^2 + 1) = 3x^2 - 5 \\
-\underline{3x^4 - 3x^2} \\
\qquad\quad - 5x^2 + 5 \\
\qquad\qquad \underline{5x^2 + 5} \\
\qquad\qquad\qquad 10
\end{array}$$

2.2.2 Nullstellen und Interpolation

Beim Betrachten eines expliziten Polynoms (und auch sonst) interessiert man sich oft für sehr spezifische Punkte, die Nullstellen des Polynoms. Eine Nullstelle eines Polynoms f ist eine Zahl $z_1 \in \mathbb{C} mit f(z_1) = 0$.

2.2.3 Algebraische und tranzendente Zahlen

Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ heisst algebraisch, falls es ein von Null verschiedenes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ gibt mit $f(\alpha) = 0$. Beispielsweise sind i und $\sqrt{2}$ algebraisch, denn x^2+1 hat i als Nullstelle und x^2-2 hat $\sqrt{2}$ als Nullstelle. Des Weiteren ist jede rationale Zahl algebraisch. Die Menge $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraischen Zahlen wird auch der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ genannt und ist (wie wir hier nicht zeigen wollen) ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

2.3 Der Fakultät und der Binomialsatz

2.3.1 Fakultät

Definition 2.6. (Fakultät) Die Funktion $n \in \mathbb{N}_0 \mapsto n! \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$0! = 1, \; n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Die Zahl $n!$ wird als n–**Fakultät** oder n–**Faktorielle** bezeichnet.

Insbesondere (nämlich per Definition des Produkts) gilt also die rekursive Formel

$$(n+1)! = (n!) \cdot (n+1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir werden dieser Funktion in vielen weiteren Funktionen und Ausdrücken begegnen. Sie hat jedoch auch für sich gesehen eine (kombinatorische) Bedeutung.

Lemma 2.7. (Kordinalität der Menge der Permutation einer endlichen Menge) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ die Kardinalität der Menge $\mathcal{S}_n$ der bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ (auch Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ genannt).

Intuitiv ausgedrückt gibt es also genau $n!$ verschiedene Möglichkeiten die Menge $\{1, \ldots, n\}$ zu sortieren oder auch $n!$ Möglichkeiten für die verschiedenen Reihenfolgen, wenn alle n nummerierte Bälle zufällig aus einer Urne gezogen werden.

Remark. Zu $n \in \mathbb{N}$ bildet die Menge $\mathcal{S}_n$ zusammen mit der Verknüpfung von Elementen $(\sigma, \tau) \in \mathcal{S}_n^2 \mapsto \sigma \circ \tau \in \mathcal{S}_n$ eine Gruppe (die **symmetrische Gruppe**).

Proof. Wir beweisen die Aussage per Induktion. Für $n = 1$ gibt es genau eine (bijektive) Abbildung $\{1\} \to \{1\}$, was den Induktionsanfang darstellt.

Angenommen die Aussage des Lemmas gilt bereits für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun eine Permutation σ von $\{1, \ldots, n+1\}$. Falls $\sigma(n+1) = n+1$ gilt, so erhalten wir mittels Einschränkung auf $\{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung $\sigma' : k \in \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ in $\mathcal{S}_n$. Umgekehrt können wir für jedes $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ eine Fortsetzung $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ mit $\sigma(n+1) = n+1$ definieren. Daher wissen wir also per Induktionsannahme, dass es n! Abbildungen $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ mit $\sigma(n+1) = n+1$ gibt. Wir bezeichnen die Menge aller solcher Permutation in $\mathcal{S}_{n+1}$ mit

$$H = \{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1} \mid \sigma(n+1) = n+1\},$$

so dass $|H| = n!$ Die Menge $\mathcal{S}_{n+1}$ lässt sich wie folgt partitionieren:

$$\mathcal{S}_{n+1} = \bigsqcup_{k=1}^{n+1} P_k \text{ mit } P_k = \{\tau \in \mathcal{S}_{n+1} \mid \tau(n+1) = k\}$$

für $k = 1, \ldots, n+1$. Wir behaupten nun, dass die Mengen P_k auf der rechten Seite alle Kardinalität $n!$ haben (für $k = n+1$ ist dies bereits bekannt, da $P_{n+1} = H$). Dies impliziert

$$|\mathcal{S}_{n+1}| = (n!) \cdot (n+1) = (n+1)!$$

und damit nach vollständiger Induktion das Lemma. ■

2.3.2 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ definieren wir den **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$, als "n über k" ausgesprochen, durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ersetzen wir k bei gleichbleibendem n im Binomialkoeffizienten durch $n-k$, so vertauschen sich bloss die beiden Ausdrücke im Nenner und wir erhalten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

Satz 2.8. (Additioneigneschaft der Binomialkoeffizienten) Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Proof. Wir verwenden die Definition der Binomialkoeffizienten und erhalten

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

sowie

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(k+1+n-k)n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

durch Erweiterung mit $k+1$ bzw. $n-k$. ■

2.3.3 Der binomische Lehrsatz

Satz 2.9. (Binomischer Lehrsatz) Für $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k$$

Proof. Wir verwenden vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ gilt die Aussage, da

$$(w+z)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} 1 w^{0-k} z^k$$

Aungenommen die Aussage des Satzes gilt für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(w+z)^{n+1} &= (w+z)^n (w+z) = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k)(w+z) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n+1-k} z^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^{k+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} w^{n+1-j} z^j + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{n-k} z^{k+1} + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} w^{n-k} z^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} w^{n-k} z^{k+1} + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} w^{(n+1)-(k+1)} z^{k+1} + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} w^{n+1-\ell} z^{\ell} + z^{n+1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} w^{n+1-\ell} z^{\ell}
\end{aligned}$$

unter Verwnedung von (zwei) Indexverschiebungen und der Aditionsformel. ∎

2.3.4 Eine Summe von Binomialkoeffizienten

Satz 2.10. (Summe von Potenzen) Für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ gibt es rationle Konstanten $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Q}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{1}{d+1} n^{d+1} + c_d n^d + \ldots + c_1 n + c_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.11. (Summe von Binomialkoeffizienten) Für jedes $d \in \mathbb{N}$ ist $p_d(x)$ ein Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad d, welches Leitkoeffizient $\frac{1}{d!}$ und Nullstellen $0, \ldots, d-1$ besitzt. Für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ gilt des Weiteren $p_d(n) = \binom{n}{d}$ für alle $n \geq d$ und wir haben die Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} p_d(k) = p_{d+1}(n+1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Proof. **??** Seien $d, n \in \mathbb{N}_0$. Falls $n \in \{0, \ldots, d-1\}$ liegt, gilt $p_d(k) = 0$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ und damit auch

$$p_{d+1}(n+1) = 0 = \sum_{k=0}^{n} p_d(k)$$

Wir dürfen also $d \leq n$ annehmen. Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller $(d+1)$-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$. Da $A \in \mathcal{P}$ genau $d+1$ Elementen und nur natürliche Zahlen enthält, gilt $\max(A) \geq d+1$. Wir verwenden dies um

$$\mathcal{P} = \bigsqcup_{\ell=d+1}^{n+1} \mathcal{P}_\ell$$

in die Teilmengen $\mathcal{P}_\ell = \{A \in \mathcal{P} \,|\, \max(A) = \ell\}$ für $\ell \in \{d+1, \ldots, n+1\}$ zu partitionieren, so dass

$$\binom{n+1}{d+1} = |\mathcal{P}| = \sum_{\ell=d+1}^{n+1} |\mathcal{P}_\ell|$$

Für $\ell \in \{d+1, \dots, n+1\}$ und eine Teilmenge $A \in \mathcal{P}_\ell$ gilt nach Definition $\ell \in A$ und $A \subseteq \{1, \dots, \ell\}$. Entfernen wir von diesem A das Element ℓ, so erhalten wir eine d-elementige Teilmenge $A \setminus \{\ell\}$ von $\{1, \dots, \ell - 1\}$, welche eindeutig von A bestimmt. Zusammenfassend bildet die Abbildung $A \mapsto A \setminus \{\ell\}$ also eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}_\ell$ und den d-elementige Teilmenge von $\{1, \dots, \ell-1\}$. Ergibt sich sommit $|\mathcal{P}_\ell| = \binom{\ell-1}{d} = p_d(\ell - 1)$ für alle $\ell = d+1, \dots, n+1$ und daher

$$p_{d+1}(n+1) = \binom{n+1}{d+1} = \sum_{\ell=d+1}^{n+1} \binom{\ell-1}{d} = \sum_{k=d}^{n} \binom{k}{d} = \sum_{k=0}^{n} p_d(k)$$

da $p_d(0) = \dots = p_d(d-1) = 0$ ■

Proof. **??** Wir beweisen mittels vollständiger Induktion nach $d \in \mathbb{N}_0$, dass es rationale Zahlen $c_d, \dots, c_0 \in \mathbb{Q}$ gibt, für die

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{1}{d+1} n^{d+1} + c_d n^d + \dots + c_0 n^0$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei also $d \in \mathbb{N}_0$. so dass bereits für alle $d' \in \mathbb{N}_0$ mit $d' \leq d$ beweisen wurde, und sei $n \in \mathbb{N}$. Per Definition von $p_{d+1}(T)$, $p_{d+1}(T)$ ist ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und Leitkoeffizient $\frac{1}{(d+1)!}$ und es gilt

$$p_{d+1}(n+1) = \frac{1}{(d+1)!}(n+1)n(n-1)\dots(n-d)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir multiplizieren dies mit $d!$ und erhalten nach Ausmultiplizieren sowie nach Proposition **??**, dass

$$d! \sum_{k=0}^{n} p_d(k) = \frac{1}{d+1} n^{d+1} + c'_d n^d + \dots + c'_0 n^0$$

für gewisse $c'_d, \dots, c'_0 \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ebenso können wir aber p_d ausmultiplizieren und erhalten analog

$$d! p_d(k) = k^d + c''_{d-1} k^{d-1} + \dots c''_0 k^0$$

für gewisse Konstanten $c''_{d-1}, \dots, c''_0 \in \mathbb{Q}$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ergibt

$$\sum_{k=0}^{n} k^d = \frac{1}{d+1} n^{d+1} + c'_d n^d + \dots + c'_0 n^0 - \sum_{j=0}^{d-1} c''_j \sum_{k=0}^{n} k^j$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $\sum_{k=0}^{n} k^j$ gleich $f_j(n)$ für ein Polynom $f_i(T)$ mit Grad $j+1 \leq d$ und mit rationalen Koeffizienten. Daher ist auch

$$c'_d n^d + \cdots + c'_0 n^0 - \sum_{j=0}^{d-1} c''_j \sum_{k=0}^{n} k^j$$

gleich $g(n)$ für ein Polynom $g(T)$ mit Grad kleiner gleich d mit rationalen Koeffizienten. Dies beweist den Induktionsschrit und damit die Proposition.

■

2.4 Reelerwertige Funktionen

2.4.1 Beschränktheit

Definition 2.12. (Beschränktheit von Funktionen) Sei D eine nicht-leere Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass die Funktion f

- **von oben beschränkt** ist, falls die Wertemenge $f(D)$ von oben beschränkt ist,
- **von unten beschränkt** ist, falls die Wertemenge $f(D)$ von unten beschränkt ist,
- **beschränkt** ist, falls f von oben und von unten beschränkt ist.

2.4.2 Monotonie

Definition 2.13. (Monotonieeigenschaften) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist

- **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$,
- **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) < f(y)$,
- **monoton fallsend**, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$,
- **strend monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) > f(y)$,
- **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist,
- **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

2.5 Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge

Definition 2.14. (Stetigkeit) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **stetig bei einem Punkt** $x_0 \in D$ ist, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Die Funktion f ist **stetig**, falls sie bei jedem Punkt in D stetig ist. Formal ist Stetigkeit von f also durch

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

definiert.

Satz 2.15. (Stetigkeit unter Addition und Multiplikation von Funktionen) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ Funktionen sind, die beid einem Punkt x_0 stetig sind, dann sind auch $f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2, af_1$ für $a \in \mathbb{R}$ stetig bei x_0. Insbesonders bildet die Menge der stetigen Funktionen

$$C(D) = \{f \in \mathcal{F}(D) | f \text{ist stetig}\}$$

einen Unterraum des Vektorraums $\mathcal{F}(D)$.

Proof. Angenommen $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(D)$ sind bei $x_0 \in D$ stetig und sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\delta_1, \delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in D$ gilt

$$|x - x_0| < \delta_1 \implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|x - x_0| < \delta_2 \implies |f_2(x) - f_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Wir setzen $\delta = \min(\{\delta_1, \delta_2\}) > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \implies |(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(x_0)| \\ &\leq |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_2(x) - f_2(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir, dass $f_1 + f_2$ bei $x_0 \in D$ stetig ist.

Das Argument für $f_1 \cdot f_2$ ist änlich, aber etwas komplizierter. Wir beginnen mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} |f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| &= |f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x) + f_1(x_0)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| \\ &\leq |f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x)| + |f_1(x_0)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| \\ &= |f_1(x) - f_1(x_0)||f_2(x)| + |f_1(x_0)||f_2(x) - f_2(x_0)| \end{aligned}$$

für $x \in D$ unter Verwendung der Dreiecksungleichung. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$, so dass für $x \in D$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta_1 &\implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(|f_2(x_0)| + 1)} \\ |x - x_0| < \delta_2 &\implies |f_2(x) - f_2(x_0)| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(|f_1(x)| + 1)}\right\} \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dann gilt für ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dass

$$|f_2(x)| = |f_2(x) - f_2(x_0) + f_2(x_0)| \leq |f_2(x) - f_2(x_0)| + |f_2(x_0)| < 1 + |f_2(x_0)|$$

und damit

$$f_1(x) - f_1(x_0)||f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2(|f_2(x_0)| + 1)}(1 + |f_2(x_0)|) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Für das zweite Argument gilt ebenso

$$|f_1(x_0)||f_2(x) - f_2(x_0)| \leq |f_1(x_0)| \frac{\varepsilon}{2(|f_1(x_0)| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Gemeinsam erhalten wir $|f_1(x)f_2(x) - f_1(x_0)f_2(x_0)| < \varepsilon$ wie gewünscht. Die Aussage über af_1 für $a \in \mathbb{R}$ folgt mit Obigem und der Tatsache, dass die konstante Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto a \in \mathbb{R}$ stetig ist. Insbesondere ist $C(D)$ auch nicht leer, da die konstant Nullfunktion in $C(D)$ liegt, und somit ist $C(D)$ ein Unterraum von $\mathcal{F}(D)$. ■

Folgerung 2.15.1. Polynome sind stetig, das heisst $\mathbb{R}[x] \subseteq C(\mathbb{R})$.

Satz 2.16. (Stetigkeit unter Verknüpfung) Sei $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen und sei $x_0 \in D_1$. Angenommen $f_1 : D_1 \to D_2$ ist eine bei x_0 stetige Funktion und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ ist eine bei $f(x_0)$ stetige Funktion. Dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ bei x_0 stetig. Insbesondere ist die Verknüpfung von stetigen Funktionen wieder stetig.

Proof. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen der Stetigkeit von g bei $f(x_0)$ ein $\eta > 0$, so dass für alle $y \in D_2$

$$|y - f(x_0)| < \eta \implies |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Da $\eta > 0$ ist und f bei x_0 stetig ist, gibt es aber auch ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D_1$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta$$

Zusammen ergibt sich (für $y = f(x) \in f(D_1) \subseteq D_2$), dass für alle $x \in D_1$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

gilt. Dies beweist auch die letzte Aussage, da x_0 ein beliebiger Punkt in D_1 war. ∎

2.5.1 Komplex-wertige Funktionen

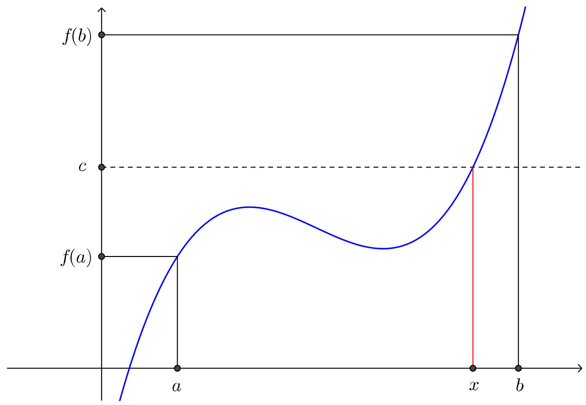
Für eine Menge D können wir in Analog zum reelle Vektorraum $\mathcal{F}(D)$ auch den komplexen Vektorraum

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(D) = \{f | f : D \to \mathbb{C}\}$$

der **$\mathbb{C}$-wertige Funktionen** oder **komplex-wertige Funktionen** auf D definieren. Weiter sagen wir, dass Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ **beschränkt** ist, falls die reellwertige Funktion $x \in D \mapsto |f(x)|$ beschränkt ist. Ein Punkt $x \in D$ ist eine **Nullstelle** einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, falls $f(x) = 0$ gilt.

2.6 Der Zwischenwertsatz

Satz 2.17. (Zwischenwertsatz) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig Funktion und $a, b \in I$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ zwischen a und b, so dass $f(x) = c$ gilt.



Proof. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $a < b$ und $f(a) \leq f(b)$ gilt (falls $f(a) > f(b)$ ist, betrachtet man zuerst $-f$ und bemerkt, dass die Aussage des Satzes für $-f$ die Aussage des Satzes für f impliziert).

Sei nun $c \in [f(a), f(b)]$. Falls $c = f(a)$ oder $c = f(b)$ gilt, sind wir fertig. Also angenommen $c \in (f(a), f(b))$. Wir definieren

$$X = \{x \in [a,b] | f(x) \leq c\}$$

und bemerken, dass $a \in X$ und $X \subseteq [a,b]$, wodurch X nicht-leer und von oben beschränkt ist. Dacher exestiert $x_0 = \sup(X) \in [a,b]$. Wir werden nun die Stätigkeit von f bei x_0 verwenden, um zu zeigen, dass $f(x_0) = c$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $x \in [a,b]$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Angenommen $f(x_0) < c$. Dann folgt $x_0 < b$ wegen $f(b) > c$ und $x_0 \in [a,b]$. Wir wenden nun die Stetigkeit von f bei x_0 an und finden für $\varepsilon = c - f(x_0) > 0$ ein $\delta > 0$. Da $x_0 < b$ ist, exestiert ein $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap [a,b]$. Für dieses x gilt dann

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) < f(x_0) + c - f(x_0) = c$$

Also muss x in X liegen, was aber $\sup(X) = x_0 < x$ wiederspricht.

Angenommen $f(x_0) > c$. Dann folgt $x_0 > a$ wegen $f(a) < c$. Wir verwenden wieder die Stätigkeit von f bei x_0 und finden zu $\varepsilon = f(x_0) - c$ ein $\delta > 0$. Für $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap [a,b]$ gilt dadurch

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > f(x_0) - (f(x_0) - c) = c$$

wodurch $x \notin X$ und daher $(x_0 - \delta, x_0) \cap [a,b] \cap X = \emptyset$. Also ist $x_0 - \delta$ eine obere Schränke von X, was aber $x_0 = \sup(X)$ wiederspricht. Daher gilt $f(x_0) = c$ und der Satz folgt. ∎

2.7 Der Satz über die Umkehrabbildung

Satz 2.18. (Umkehrsatz) Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall und die Abbildung $f : I \to f(I)$ hat eine stetige, streng monotone inverse Abbildug $f^{-1} : f(I) \to I$. Falls $I = [a,b]$ für reelle Zahlen $a < b$, dann gilt des Weiteren, dass $f(I)$ die Endpunkte $f(a)$ und $f(b)$ hat.

Beispliel 2.18.1. (Existenz von Wureln höherer Ordnung) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion $x \in [0,\infty) \mapsto x^n \in [0,\infty)$ streng monoton wachsend und surjektiv. Um Surjektivität zu sehen betrachten wir ein biliebiges $c \in [0,\infty)$. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt $(c+1)^n > nc \geq c$, womit c zwischen $0 = 0^n$ und $(c+1)^n$ liegt. Aus dem Zwischenwertsatz folgt nun, dass es ein x zwischen 0 und $c+1$ gibt, für das $x^n = c$ ist.

Nach dem Umkehrsatz exestiert eine stetige, streng monoton wachsend Umkehrabbildung

$$x \in [0,\infty) \mapsto \sqrt[n]{x} \in [0,\infty)$$

die die **n-te Wurzel** genannt wird. Des Weiteren definieren wir für $x \in [0,\infty)$ und $m,n \in \mathbb{N}$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

und für $x \in (0,\infty)$ und $m,n \in \mathbb{N}$ auch $x^{-\frac{m}{n}} = (x^{\frac{m}{n}})^{-1}$

Proof. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass f streng monoton wachsend ist (sonst ersetz man f mit $-f$). Wir bemerken zuerst, dass die Funktion $f : I \to f(I)$ bijecktiv ist, da sie (per Definition) surjektiv ist und auf Grund der strengen Monotonie auch injektiv ist. Somit existriert eine (eindeutig bestimmte) Umkehrabbildung $g = f^{-1} : f(I) \to I$, welche auch streng monoton wachsend sein muss: Da f streng monoton wachsend ist, gilt

$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in I$, was zu

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \iff y_1 < y_2$$

für alle $y_1, y_2 \in f(I)$ äquivalent ist.

Wir möchten nun zeigen, dass $f(I)$ auch ein Intervall ist und nehmen dazu vorerst an, dass $I = [a, b]$ ein abgeschlossenenes, beschränkten Intervall für zwei reelle Zahlen $a < b$ ist. Auf Grund der Monotonieannahme gilt $f(x) \in [f(a), f(b)]$ für alle $x \in [a, b]$. Nach dem Zwischenwertsatz ist auch $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ und damit ist $f(I)$ insbesondere ein Intervall.

Sei nun I ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ mit Endpunkten $a < b$ in $\bar{\mathbb{R}}$. Wir definieren nun die Punkte $c = \inf f(I) \in \bar{\mathbb{R}}$ und $d = \sup f(I) \in \bar{\mathbb{R}}$ und behaupten, dass (c, d) und $f(I)$ enthalten ist. Sei $y \in (c, d)$. Dann gibt es nach Definition von $c = \inf f(I)$ und wegen $c < y$ ein $x_- \in I$ mit $c \leq f(x_-) < y$. Ebenso gibt es nach Definition von $d = \sup f(I)$ und wegen $y < d$ ein $x_+ \in I$ mit $y < f(x_+) \leq d$. Nacg dem Zwischenwertsatz ist also $y \in f(I)$ und die Behauptung folgt. Wir haben damit insbesondere gezeigt, dass $f(I)$ ein Intervall ist.

Falls der linke Endpunkte a von I zu I gehört, dann ist $c = f(a) = \inf f(I) = \min f(I)$. Falls a nicht zu I gehört, dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein Element $x_- \in I$ mit $x_< x$, was wiederum wegen der strengen Monotonie impliziert, dass $f(I)$ kein Minimum besitzt (da es zu jedem $y \in f(I)$ ein Element $y_- \in f(I)$ mit $y_- < y$ gibt). Das heisst, der linke Endpunkte von I gehört zu I genau dann, wenn c zum Intervall $f(I)$ gehört. Dasselbe gilt auch für den rechten Endpunkt.

Wir wollen nun zeigen, dass $g = f^{-1}$ stetig ist. Sei also $y_0 \in f(I)$ und $\varepsilon > 0$. Wir definieren den Punkt $x_0 = g(y_0)$.

Falls $y_0 < d$ und damit auch $x_0 < b$ ist, dann gibt es einen Punkt x_+ in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ mit $x_+ < b$. Wir definieren $y_+ = f(x_+) > y_0$ und erhalten für alle $y \in f(I)$

$$y_0 \leq y < y_+ \implies f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_+) = x_+ < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

oder auch

$$y_0 \leq y \leq y_+ \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

Falls $a \in I$ und $y_0 = c = f(a)$ gilt, ist dies bereits die Stetigkeitsbedingung bei y_0 für ε und die Wahl $\delta = y_+ - y_0$. In der Tat falls $y \in f(I)$ und $|y - y_0| < \delta$ sit, so folgt $y \geq c = f(a) = y_0$ aus $c = \min f(I)$ und damit $y_0 \leq y < y_+$ aus der Definition von δ

Falls $y_0 > c$ und damit acuh $x_0 > a$ ist, dann gibt es einen Punkt $x_- \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ mit $x_- > a$. Wir definieren $y_- = f(x_-) < y_0$ ud erhalten wie zuvor für alle

$$y_- < y \leq y_0 \implies f^{-1}(y_0) - \varepsilon < x_- = f^{-1}(y_-) < f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0)$$

oder auch

$$y_- < y \leq y_0 \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

Falls $b \in I$ und $y_0 = f(b)$ ist dies wiederum die Stetigkeitsbedingung bei y_0 für ε und $\delta = y_0 - y_-$.

Für einen beliebigen Punkte $y_0 \in (a, b)$ setzen wir $\delta = \min y_+ - y_0, y_0 - y_-$ und können die Gleichungen kombinieren zu

$$|y - y_0| < \delta \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

für alle $y \in f(I)$, was zu beweisen war. ■

2.7.1 Wurzeln aus natürlichen Zahlen

Lemma 2.19. Seien $m, k \in \mathbb{N}$. Die m-te Wurzel $\sqrt[m]{k}$ ist genau dann rational, wenn sie eine ganze Zahl ist.

Proof. Angenommen $\sqrt[m]{k} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ für zwei natürlichen Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$. Nach Kürzen mit dem grössten gemeinsamen Teiler können wir annehmen, dass $\frac{p}{q}$ durchgekürzt ist oder äquivalent dazu, dass p und q teilerfremd sind. Dann ist aber auch $k = \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$ ein durchgekürzter Bruch, denn jeder Primfaktor von p^m (resp. q^m) ist ein Primfactor von p (resp. q) und somit sind p^m und q^m teilerfremd. Nach Annahme ist aber $\frac{p^m}{q^m} = k \in \mathbb{Z}$, was $q^m \mid p^m, q^m = 1$ und also $q = 1$ impliziert. Dann ist $k = p^m$ und $\frac{[}{m}]k = p \in \mathbb{Z}$. Die Umkehrung folgt aus $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. ■