Analysis Script

RWTH Aachen

Melkonian Dmytro

14 October 2018

Contents

Chapter 1

Die reelen Zahlen

1.1 Die Axiome der reellen Zahlen

1.1.1 Körperaxiome

Definition 1.1. Eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit einer Abbildung

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y, \tag{1.1}$$

die wir **Addition** nennen, einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y, \tag{1.2}$$

die wir **Multiplikation** nennen, und einer Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$, die wir **kleiner gleich** nennen, wird als Menge der **reellen Zahlen** bezeichnet, falls Axiomen, die wird weiter eingegeben, erfüllt sind.

Remark. Die Addition erfüllt folgende Eigenschaften:

1. (Nullelement) $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$.
2. (Additives Inverses) $\forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$.
3. (Assoziativgesetz) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$.
4. (Kommutativgesetz) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$.

Remark. Wir sagen, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gemeinsam mit der Abbildung (Verknüpfung) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine **kommutative** oder **abelsche Gruppe** bilden, da die Axiome 1-4 gerade die Axiome einer kommutativen Gruppe bilden

Remark. Die Multiplikation erfüllt folgende Eigenschaften:

1. (Einselement) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0 \cdot x = x$.
2. (Multiplikative Inverse) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists (x^{-1}) \in \mathbb{R} : x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$.
3. (Assoziativgesetz) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
4. (Kommutativgesetz) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$.

Des Weiteren muss bei Kombination der Addition und der Multiplikation folgendes Gesetz gelten.

5. (Distributivgesetz) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

1.1.2 Angeordnete Körper

Axiom 1.2. (Anordnung) Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ erfüllt die folgenden vier Axiome

1. (Reflexivität) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$
2. (Antisymmetrie) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big((x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y\big)$
3. (Transitivität) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \big((x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z\big)$
4. (Linearität) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \big(x \leq y \vee y \leq x\big)$

Die Axiome 1 - **??** sind die Axiome einer **Ordnung** und zusammen mit Axiome 4 bilden sie die Axiome einer **linearen** (oder auch **totalen**) **Ordnung**. Damit die Relation $\leq$ auf dem Körper $\mathbb{R}$ nützlich ist, benötigen wir die folgende Axiome, die die Relation mit der Körperstruktur koppeln

Axiom 1.3. (Kompatibilität von $\leq$) Wir verlangen

1. ($\leq$ *und*$+$)$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y \implies x + z \leq y + z)$
2. ($\leq$ *und*$\cdot$)$\forall x, y \in \mathbb{R} : ((0 \leq x \wedge 0 \leq y) \implies 0 \leq x \cdot y)$

1.1.3 Das Volständigkeitsaxiom

Axiom 1.4. (Vollständigkeit) Falls X, Y zwei nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ sind und für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, das zwischen X und Y liegt in dem Sinn, als dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ die Ungleichung $x \leq c \leq y$ gilt. Formal:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \subseteq \mathbb{R} : ((X \neq \emptyset \land Y \neq \emptyset \land \forall x \in X \forall y \in Y : x \leq y) \\ \implies (\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in X \forall y \in Y : x \leq c \leq y)) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Wenn $\mathbb{R}$ die Axiome 1 - 1.4 erfüllt, dann sprechen wir auch von einem **vollständig angeordneten Körper**. Wir werden uns die reelen Zahlen häufig als die Punkte auf einer Geraden vorstellen, wobei wir deswegen die Gerade auch die **Zahlengerade** nennen.

1.1.4 Verwendung der reellen Zahlen und der Axiome

1.2 Die natürlichen Zahlen

1.2.1 Definition der naturälichen Zahlen und vollständige Induktion

Definition 1.5. (Induktive Teilemenge) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist **induktiv**, falls folgende Eigenschaften gelten:

1. $1 \in M$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : x \in M \implies x + 1 \in M$

Definition 1.6. (Natürliche Zahlen) Wir definieren die Teilmenge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt aller iduktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M. \tag{1.4}$$

Lemma 1.7. (Kleinste induktive Menge) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine induktive und somit die kleinste induktive Teilmenge der reellen Zahlen.

Proof. Wir haben oben bereits gesehen, dass $1 \in \mathbb{N}$ ist. Falls nun $n \in \mathbb{N}$ ist und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine belibiege induktive Teilmenge ist, dann gilt auch $n \in M$

(wegen der Definition von $\mathbb{N}$). Da M induktiv ist, gilt $n+1 \in M$. Da M aber eine belibiege induktive Teilmenge war, liegt $n+1$ in jeder induktiven Teilmenge und somit auch in $\mathbb{N}$ per Definition von $\mathbb{N}$. Wir haben für $\mathbb{N}$ also beide Eigenschaften einer induktiven Teilmenge nachgewiesen und das Lemma folgt. ■

Satz 1.8. (Vollständige Induktion) Falls für eine Aussage $A(n)$ über natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$

- (Induktionsanfang) $A(1)$
- (Induktionsschritt) $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \implies A(n+1))$

gelten, dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Proof. Wir definieren $E = \{n \in \mathbb{N} | A(n)\}$, womit folgenden Aussagen gelten.

- $1 \in E$, da $A(1)$ auf Grund des Induktionsanfanges gilt.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x \in E$ nach Definition $x \in \mathbb{N}$ und auf Grund des Induktionsschrittes auch $x+1 \in E$ impliziert.

Dacher ist E eine induktive Menge und es folgt, dass $\mathbb{N} \subseteq E$ nach Definition von $\mathbb{N}$. Also gilt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$. ■

Lemma 1.9. (Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n+m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

Proof. Sei $A(n)$ die Aussage $\forall m \in \mathbb{N} : m+n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A(1)$, denn falls $m \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $m+1 \in \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv ist wegen Lemma 1.7. Dies ist der Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt nehmen wir also an, dass $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt oder in anderen Worten, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $m+n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen Lemma 1.7 impliziert letzteres aber auch $m+n+1 \in \mathbb{N}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und wir erhalten die Aussage $A(n+1)$. Vollständige Induktion zeigt daher $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$, was gerade die Aussage $\forall n, m \in \mathbb{N} : n+m \in \mathbb{N}$ ist.

Für Multiplikation definieren wir $B(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ als die Aussage $\forall m \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B(1)$, da für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$. Falls nun $B(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt aus $m \in \mathbb{N}$ auch $m \cdot n \in \mathbb{N}$ und aus ersten Teil des Lemmas auch

$$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

Da m biliebig war, gilt also $B(n) \implies B(n+1)$ und das Lemma folgt mittels vollständiger Induktion. ■

Lemma 1.10. (Anordnung von $\mathbb{N}$)

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \in \mathbb{N}$ oder $n-1 \in \mathbb{N}$.
- Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n \leq m+1$ gilt $n = m$ oder $n = m+1$.

Proof. Für die erste Aussage zeigen wir, dass die Menge $M = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} | n-1 \in \mathbb{N}\}$ die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthält. In der Tat ist die Menge M induktiv, da $1 \in M$ und da für $n \in M$ auch $(n+1)-1 = n \in \mathbb{N}$ und damit $n+1 \in M$ gilt. Nach Definition von $\mathbb{N}$ ist also $N \subseteq M$ wie gewünscht.

Für die zweite Behauptung definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ durch

$$\forall m \in \mathbb{N} : ((m \leq n \leq m+1) \implies n \in \{m, m+1\}) \tag{1.6}$$

Dann gitl $A(1)$, denn falls $m \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $m \leq 1 \leq m+1$ erfüllt, dann gilt wegen $m \geq 1$ auch $m = 1 = n$.

Angenommen es gilt nun $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und wir wollen $A(n+1)$ zeigen. Sei also $m \in \mathbb{N}$ so dass $m \leq n \leq m+1$ gilt. Falls $m = 1$ ist, dann gilt $1 \leq n+1 \leq 2 = 1+1$ und damit $n \leq 2-1 = 1$. Wegen $n \geq 1$ folgt $n = 1 = m$ und somit $n+1 = m+1$. Falls aber $m \neq 1$ ist, dann ist wegen der ersten Behauptung $m-1 \in \mathbb{N}$ und $m-1 \leq n \leq m$. Da wir aber $A(n)$ angenommen haben, gilt $n \in \{m-1, m\}$ und daher $n+1 \in \{m, m+1\}$.

Wir haben also den Iduktionsanfang $A(1)$ und den Induktionsschritt $A(n) \implies A(n+1)$ für eine beliebiges n gezeigt. Daher gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und das Lemma folgt. ■

Satz 1.11. (Vollständige Induktion) Falls für eine Aussage $A(n)$ über natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$(\text{Induktion}) \forall n \in \mathbb{N} : ((\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \implies A(k))) \implies A(n)) \tag{1.7}$$

erfüllt ist, dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Proof. Wir definieren $B(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \implies A(k) \tag{1.8}$$

Mit vollständige Induktion (1.11) und Anordnung von $\mathbb{N}$ (1.10) möchten wir nun zeigen, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Inbesondere folgt damit, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, was den Beweis des Satzes abschliessen wird.

Wir zeigen zuerst den Induktionsanfang, also dass $B(1)$ gilt. Da aber $k = 1$ die einzige natürliche Zahl mit $k \leq 1$ ist, genügt es, die Aussage $A(1)$ zu verifizieren. Hierfür verwenden wir die Annahme im Satz für $n = 1$, also die Aussage

$$(\forall k \in \mathbb{N} : (k < 1 \implies A(k))) \implies A(1) \tag{1.9}$$

Da es keine natürliche Zahlen kleiner 1 gibt, ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $k < 1$ falsch, womit $(k < 1 \implies A(k))$ richtig ist. Also gilt die Voraussetzung der im Satz angenommenen Implikaion für $n = 1$, und es folgt $A(1)$ (und damit $B(1)$ wie gewünscht).

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wollen Induktionsschritt $B(n) \implies B(n+1)$ beweisen. Also nehmen wir an, dass $B(n)$ bereits gilt. Die Aussage $B(n+1)$ ist durch

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n + 1 \implies A(k) \tag{1.10}$$

gegeben. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k < n + 1$ auf Grund von Lemma 1.10 äquivalent zu $k \leq nwedgek = n$. Die Aussage $B(n)$ ist damit zu

$$\forall k \in \mathbb{N} : k < n + 1 \implies A(k) \tag{1.11}$$

äquivalent. Wegen der Annahme im Satz angewenadt auf $n + 1$ impliziert dies aber $A(n + 1)$, was auf Grund obiger Äquivalenz gemeinsam mit $B(n)$ die Aussage $B(n + 1)$ zeigt. Dies schliesst den Induktionsschritt und damit den Beweis des Satzes ab. ∎

Satz 1.12. (Wohlordnung der natürlichen Zahlen) Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichrleere Teilmenge. Dann hat M eindeutig bestimmtes kleinstes Element, das heisst

$$\exists! n_0 \in M \forall n \in M : n \geq n_0 \tag{1.12}$$

Proof. Die Eindeutigkeit eines solches kleinsten Elements folgt direkt: Sind $n_0, n_0' \in M$ zwei kleinste Elemente, dann gilt $n_0' \geq n_0$, da n_0 ein kleinstes Element ist und $n_0 \geq n_0'$ da n_0' ein kleinstes Element ist. Also gilt $n_0' = n_0$.

Um die Existenz eines kleinsten Element zu zeigen, verwenden wir die Kontraposition. Wir nehmen also an, dass M kein kleinstes Element hat, und wollen zeigen, dass M leer ist. Hierzu definieren wir für alle n eine Aussage $A(n)$ durch $n \notin M$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bedeutet die Aussage $\forall k \in \mathbb{N} : k < n \implies A(n)$ genau, dass es unterhalb von n keine Elemente in M gibt. Da wir angenommen haben, dass M kein kleinstes Element hat, sehen wir, dass n nicht in M liegen kann. Also gilt

$$(\forall k \in \mathbb{N} : k < n \implies A(k)) \implies A(n) \tag{1.13}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die vollständige Induktion in Satz 1.11 zeigt nun, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist M die leere Menge. ■

Lemma 1.13. (Subtraktion von $\mathbb{N}$) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$.

Proof. Sei A(n) für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\forall m \in \mathbb{N} : m < n \implies n - m \in \mathbb{N} \tag{1.14}$$

Dann gilt $A(1)$, denn es existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $m < 1$. Angenommen $A(n)$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ und sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n + 1$. Nach Lemma 1.10 ist entweder $m = n$ oder $m < n$. Im ersten Fall gilt $(n + 1) - m = 1 \in \mathbb{N}$. Im zweiten Fall gilt $(n + 1) - m = (n - m) + 1 \in \mathbb{N}$ nach $A(n)$. Also gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach vollständiger Induktion. ■

1.2.2 Die ganzen Zahlen

Die **ganzen Zahlen** sind als Teilmenge von $\mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup \{-n | n \in \mathbb{N}\} = mathbbN_0 \sqcup -\mathbb{N} \tag{1.15}$$

definiert.

Lemma 1.14. (Addition und Multplikation auf $\mathbb{Z}$) Die ganzen Zahlen sind unter Addition und Multiplikation abgeschlossen, das heisst, für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt $m + n \in \mathbb{Z}$ und $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

Proof. Für Multiplikation sieht man dies sehr direkt: Falls $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt offenbar $m \cdot n = (-m) \cdot (-n) \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $(-m) \cdot n = m \cdot (-n) = -m \cdot n \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ nach Lemma 1.9. Falls m oder n Null ist, gilt ebenso $m \cdot n = 0 \in \mathbb{Z}$.

Für die Addition verwenden wir die Eigenschaften von $\mathbb{N}$ in Lemma 2.19 und Lemma 2.25. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Falls m oder n Null sind, gibt es nichts zu zeigen. Seien also $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $m + n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $-m - n = -(m + n) \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Falls $n > m$, dann ist $n - m \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $-n + m = -(n - m) \in \mathbb{Z}$. Analoges gilt falls $n < m$. Falls $n = m$, ist $n - m = 0 \in \mathbb{Z}$. Dies deckt alle Möglichkeiten ab und das Lemma folgt. ■

1.2.3 Die rationalen Zahlen

Die **rationalen Zahlen** sind definiert als die Teilmange von Quotienten

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R} \tag{1.16}$$

Lemma 1.15. (Rationale Zahlen) Die rationalen Zahlen bilden einen Unterkörper von $\mathbb{R}$, das heisst, für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $-r, r+s, r \cdot s \in \mathbb{Q}$ und auch $r^{-1} \in \mathbb{Q}$, falls $r \neq 0$.

Lemma 1.16. (Quadratwurzel aus 2) Die reele Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Insbesondere erfüllen die rationalen Zahnlen nicht das Vollständigkeitsaxiom.

Proof. Wir nehmen per Wiederspruch an, dass $\sqrt{2}$ rational ist und schreiben $2 = (\frac{m}{n})^2$ für $m \in \mathbb{N}$ und kleinste mögliche $n \in \mathbb{N}$ (es ist nach Satz 1.12 möglich). Insbesondere gilt also $2n^2 = m^2$ und flglich

$$2(m-n)^2 = 2m^2 - 4mn + 2n^2 = 4n^2 - 4mn + m^2 = (2n-m)^2 \tag{1.17}$$

Also gilt $\left(\frac{2n-m}{m-n}\right)^2 = 2$. Da $0 < m-n < n$, erhalten wir einen kleineren Nenner, den der verwendet werden kann, um $\sqrt{2}$ darzustellen. Dies widerspricht der minimalen Wahl von n. Somit ist $\sqrt{2}$ irrational. ∎

1.2.4 Division mit Rest und Anfänge der Zahlentheorie

Satz 1.17. (Division mit Rest) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $d \in \mathbb{N}$ gibt es ein $q \in \mathbb{N}_0$ und ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r < d$, welches wir den Rest nennen, so dass $n = qd + r$.

Proof. Für $n < d$ stimmt die Behauptung, da wir dann $q = 0$ und $r = n$ wählen können. Genauso stimmt sie für $n = d$, da wir dann $q = 1$ und $r = 0$ wählen können. Nehmen wir nun an, dass der Satz nicht zutrifft. Dann gibt es nach der Wohlordnung von $\mathbb{N}$ in Satz 1.12 ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$, für das die Division durch ein $d \in \mathbb{N}_0$ nich funktioniert. Nach obigem muss $n_0 > d \geq 1$ und damit auch $n_0 \geq 2$ gelten.

Insbesondere ist $n = n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ und es gibt ein Rest $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r < d$, so dass $n_0 - 1 = n = qd + r$ für $q \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt $n_0 = qd + r + 1$. Falls $r < d - 1$, dann ist $r + 1 < d$ und n_0 erfüllt doch Division durch d mit Rest. Falls $r = d - 1$, dann ist $d = r + 1$ und $n_0 = qd + r + 1 = qd + d = (q+1)d + 0$

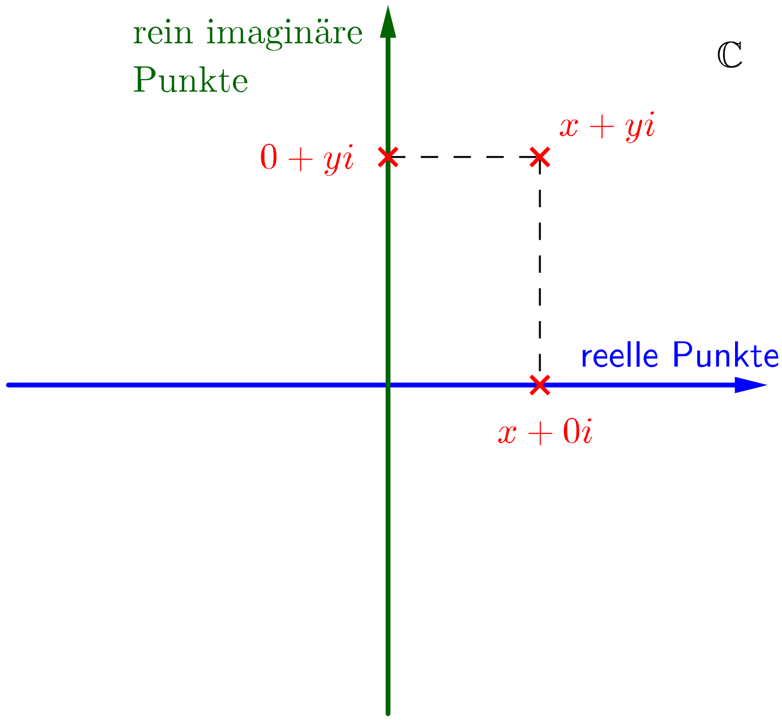
und n_0 erfüllt Division durch q mit Rest 0. Nach der Anordnung von $\mathbb{N}$ im Lemma 1.10 erfüllt r entweder $r < d-1$ oder $r = d-1$ und daher wurden alle Möglichkeiten für r abgedeckt. Für n_0 ist Division durch d mit Rest daher möglich, was ein Widerspruch darstellt. Also gilt der Satz. ■

1.3 Die komplexen Zahlen

Unter Verwendung der reellen Zahlen können wir die Menge der komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1.18}$$

definieren. Wir schreiben ein Element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ viel häufiger in der Form $z = x + y\mathrm{i}$, wobei das Symbol i als die **imaginäre Einheit** bezeichnet wird. Man beachte, dass bei dieser Identifikation + vorerst als Ersatz für das Komma zu verstehen ist. Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ wird als der **Realteil** von z bezeichnet und man schreibt $x = \mathrm{Re}(z)$; die Zahl $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ ist der **Imaginärteil** von z. Die Elemente von $\mathbb{C}$ mit Imaginärteil 0 bezeichnet man auch als **reell** und die Elemente mit Realteil 0 als **rein imaginär**. Via der injektiven Abbildung $x \in \mathbb{R} \mapsto x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge der reellen Elemente von $\mathbb{C}$ (der "x-Achse").



Die Menge $\mathbb{C}$ (inklusive deren graphische Darstellung wie oben) wird ganz im Sinne der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ auch **komplexe Ebene** (alternativ **Gausssche Zahlenebene** oder auch **Argand-Ebene**) genannt. In der geometrischen Denkweise wird die Menge der reellen Punkte als die **reelle Achse** und die Menge der rein imaginären Punkte als die **imaginäre Achse** bezeichnet.

Wie Sie vielleicht schon erwartet haben, soll i eine Wurzel von -1 sein. Formal ausgedrückt, wollen wir, dass $\mathbb{C}$ einen Körper darstellt, in dem die Rechenoperationen von $\mathbb{R}$ "verallgemeinert" werden, und dass $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ gilt. Die Addition auf $\mathbb{C}$ definieren wir "komponentenweise" durch

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i} \tag{1.19}$$

für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ definieren wir hingegen durch

$$(x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathrm{i}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i} \tag{1.20}$$

für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $(0 + 1\mathrm{i})^2 = -1 + 0\mathrm{i}$ und die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ erweitern die entsprechenden Operationen auf $\mathbb{R}$.

Satz 1.18. (Komplexe Zahlen) Mit den oben definierten Verknüpfungen definiert $\mathbb{C}$ einen Körper, den **Körper der komplexen Zahlen**. Hierbei ist die Null gleich $0 + 0\mathrm{i}$ und die Eins gleich $1 + 0\mathrm{i}$.

Proof. Wir verifizieren die Körperaxiome. Wie wir sehen werden, folgen die Eigenschaften der Addition auf $\mathbb{C}$ aus den Eigenschaften der Addition auf $\mathbb{R}$. Die Addition ist kommutativ: Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i} \\ &= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)\mathrm{i} \\ &= (x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_1 + y_1\mathrm{i}).\end{aligned} \tag{1.21}$$

Das Element $0 + 0\mathrm{i}$ ist ein (und schlussendlich also das) Nullelement der Addition, denn

$$(0 + 0i) + (x + y\mathrm{i}) = (0 + x) + (0 + y)\mathrm{i} = x + y\mathrm{i} \tag{1.22}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die additive Inverse eines Elements $x + y\mathrm{i}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $(-x) + (-y)\mathrm{i}$, denn

$$\begin{aligned}(x + y\mathrm{i}) + ((-x) + (-y)\mathrm{i}) &= ((-x) + (-y)\mathrm{i}) + (x + y\mathrm{i}) \\ &= (x + (-x)) + (y + (-y))\mathrm{i} = 0 + 0\mathrm{i}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

Die Addition ist assoziativ: Seien $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}((x_1 + y_1\mathrm{i})+&(x_2 + y_2\mathrm{i})) + (x_3 + y_3\mathrm{i}) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}) + (x_3 + y_3\mathrm{i}) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)\mathrm{i} \\ &= \ldots = (x_1 + y_1\mathrm{i}) + ((x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_3 + y_3\mathrm{i})).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Das Element $1 + 0\mathrm{i}$ ist ein Einselement, denn $1 + 0\mathrm{i} \neq 0 + 0i$ und für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(1 + 0\mathrm{i}) \cdot (x + y\mathrm{i}) &= (x + y\mathrm{i}) \cdot (1 + 0\mathrm{i}) \\ &= (x \cdot 1 - y \cdot 0) + (x \cdot 0 + y \cdot 1)\mathrm{i} = x + y\mathrm{i}.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Wir geben nun die multiplikative Inverse eines Elements $x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $x + y\mathrm{i} \neq 0 + 0i$ (das heisst $x \neq 0$ oder $y \neq 0$), an. Wir bemerken zuerst, dass $x^2 + y^2 > 0$: Nehmen wir vorerst an, dass $x \neq 0$, dann ist $x^2 > 0$

und $y^2 \geq 0$ und damit $x^2 + y^2 > 0$. Für $y \neq 0$ gilt ebenso $x^2 \geq 0$ und $y^2 > 0$ und damit $x^2 + y^2 > 0$. Die multiplikative Inverse ist gegeben durch $\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$, denn

$$\begin{aligned}(x + y\mathrm{i}) &\cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(x \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - y \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}\right) + \left(y \cdot \frac{x}{x^2+y^2} + x \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{i} \\ &= 1 + 0\mathrm{i}\end{aligned} \tag{1.26}$$

Die verbleibenden beiden Axiome (Assoziativität der Multiplikation und Distributivität) lassen sich durch abstraktere Argumente beweisen, die aber auch etwas mehr Wissen benötigen. Wir bestätigen diese Axiome deswegen durch zwei konkrete Rechnungen.

Die Multiplikation ist assoziativ: Seien $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Nun berechnet man

$$\begin{aligned}((x_1 &+ y_1\mathrm{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathrm{i})) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i}) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i}) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i}) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3) \\ &\qquad + (x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3)\mathrm{i} \\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot ((x_2x_3 - y_2y_3) + (y_2x_3 + x_2y_3)\mathrm{i}) \\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot ((x_2 + y_2\mathrm{i}) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i}))\end{aligned} \tag{1.27}$$

Es bleibt nur noch die Distributivität: Seien also $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x_1 &+ y_1\mathrm{i}) \cdot ((x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_3 + y_3\mathrm{i})) \\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\mathrm{i}) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (y_1x_2 + y_1x_3 + x_1y_2 + x_1y_3)\mathrm{i} \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (y_1x_2 + x_1y_2)\mathrm{i}) + ((x_1x_3 - y_1y_3) + (y_1x_3 + x_1y_3)\mathrm{i}) \\ &= (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathrm{i}) + (x_1 + y_1\mathrm{i}) \cdot (x_3 + y_3\mathrm{i}),\end{aligned} \tag{1.28}$$

womit gezeigt wäre, dass $\mathbb{C}$ zusammen mit der oben definierten Addition und der oben definierten Multiplikation ein Körper ist. ■