Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра ФН1 «Высшая математика»

Отчет

по учебной практике за 5 семестр

Преподаватель ____________________ Кравченко О. В.
подпись, инициалы

Студент группы ФН1–51Б ____________________ Меситов Д. М.
подпись, инициалы

Москва
2020

Содержание

1 Задание

Решить сингулярную двуточечную краевую задачу методом конечных разностей

$$\varepsilon y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) + f(x) = 0, \quad x \in [0,\, 1],$$

со смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned} -\alpha_1 y'(0) + \alpha_2 y(0) &= \gamma_1, \quad \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \gamma_1 = 5 \\ \beta_1 y'(1) + \beta_2 y(1) &= \gamma_2, \quad \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_2 = 8 \end{aligned}$$

при различных значениях параметра

$$\varepsilon = 1,\ 0.1,\ 0.01,\ 0.001.$$

и функциях

$$p(x) = x^2 + x, \quad q(x) = x - x^2, \quad f(x) = x^3 - \sqrt{x^2 + x}$$

2 Описание метода

Поставленная краевая задача решается с помощью перехода от исходной задачи к новой, записанной в конечно-разностной форме. Тогда решение новой задачи будет являться приближенным решением исходной задачи. В силу того, что первая и вторая производные, входящие в уравнение и в краевые условия, будут заменены приближенными конечно-разностными формулами, решения с применением метода конечных разностей получается не в виде непрерывной функции $y(x)$, а виде таблицы ее значений в отдельных точках. Для этого разобьем отрезок $[0, 1]$ на n частей так, чтобы $x_0 = 0, x_n = 1, x_{i+1} = x_i + h, h = (b - a)/n$. Наша задача – найти значения функции $y(x)$ в точках $x_k, k = 0...n$. Для того, чтобы перейти от исходной задачи к конечно-разностной, надо получить формулы для представления первой и второй производных в конечно-разностном виде. Они получаются, если применить разложение функции $y(x)$ в окрестности некоторой точки x_k в ряд Тейлора, ограничиваясь вторыми производными:

$$y(x_i + h) \approx y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i)$$

$$y(x_i - h) \approx y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i)$$

Складывая (вычитая) эти выражения, получим приближенные выражения для второй (первой) производных:

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2}$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h}$$

Обозначим $y(x_i) = y_i,\ y(x_i + h) = y_{i+1},\ y(x_i - h) = y_{i-1}$, а также $p(x_i) = p_i,\ q(x_i) = q_i,\ f(x_i) = f_i$.
В итоге, получим для узловых точек сетки:

$$\varepsilon \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = -f_i, \quad i = 1...n-1 \qquad (1)$$

И, для краевых условий:

$$-\alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} + \alpha_2 y_0 = \gamma_1 \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \beta_2 y_n = \gamma_2 \quad (3)$$

Мы получили СЛАУ с неизвестными $y_0 ... y_n$, матрица которой имеет трёхдиагональный вид. Такую систему можено решить, например, методом прогонки.

3 Листинг кода

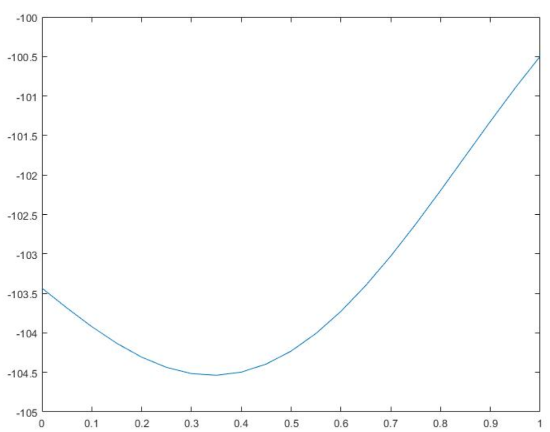
3.1 Метод конечных разностей

```
clc;
eps = 1;
a1 = 1;
a2 = 0;
b1 = 1;
b2 = 0;
g1 = 5;
g2 = 8;
h = 0.05;

p = @(x)(x * x + x);
q = @(x)(x - x * x);
f = @(x)(x * x * x - sqrt(x * x + x));

x0 = 0;
x1 = 1;

n = round(abs(x1 - x0) / h);
X = zeros(n + 1, 1);
F = zeros(n + 1, 1);
A = zeros(n + 1, n + 1);

for i = 1:n+1
    X(i) = x0 + (i - 1) * h;
end
for i = 2:n
    A(i, i)   = ((-2*eps) / (h * h)) + q(X(i));
    A(i, i-1) = (eps / (h * h)) - p(X(i)) / (2 * h);
    A(i, i+1) = (eps / (h * h)) + p(X(i)) / (2 * h);
    F(i)      = -f(X(i));
end

F(1)   = g1;
F(n+1) = g2;
A(1, 1) = (a1 / h) + a2;
A(1, 2) = -a1 / h;
A(n + 1, n + 1) = (b1 / h) + b2;
A(n + 1, n)     = -b1 / h;

Y = shuttleNew(A, F);
plot(X, Y);
```

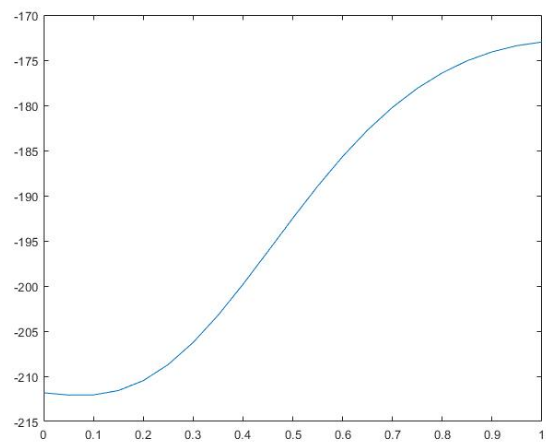
3.2 Метод прогонки

```
function X = shuttleNew(A, B)

n = size(A,1);
a=diag(A);
b=diag(A,1);
c=diag(A,-1);
P=zeros(n,1);
Q=zeros(n+1,1);
X=zeros(n,1);

P(2)= b(1)/(-a(1));
Q(2)= B(1)/(a(1));

for i = 2:(n-1)
    P(i+1)=b(i)/(-a(i)-c(i-1)*P(i));
    Q(i+1)=(-B(i)+c(i-1)*Q(i))/(-a(i)-c(i-1)*P(i));
end

Q(n+1)=(-B(n)+c(n-1)*Q(n))/(-a(n)-c(n-1)*P(n));
X(n)=Q(n+1);

for i = (n-1):-1:1
    X(i) = P(i+1)*X(i+1)+ Q(i+1);
end

end
```

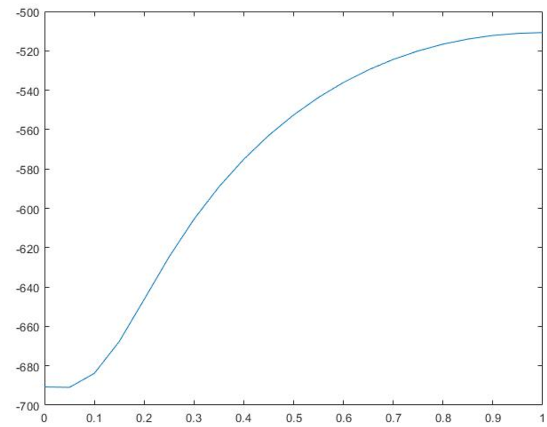
4 Результаты работы программы



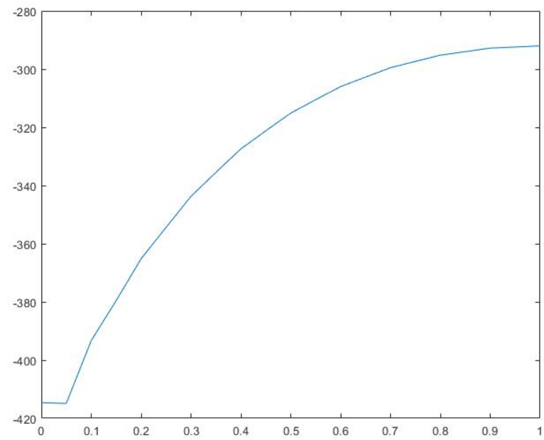
(a) $\varepsilon = 1, \quad h = 0.05$



(b) $\varepsilon = 0.1, \quad h = 0.05$



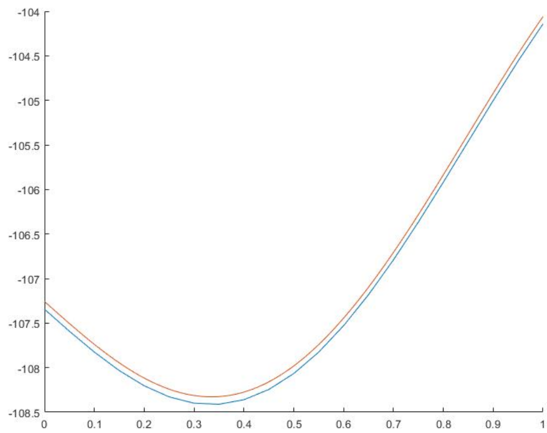
(c) $\varepsilon = 0.01, \quad h = 0.05$



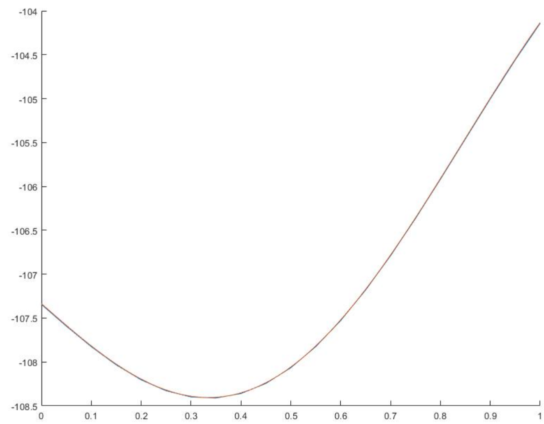
(d) $\varepsilon = 0.001, \quad h = 0.05$

Заметим, однако, что с уменьшением параметра ε матрица СЛАУ становится всё хуже обусловленной, а это в свою очередь приводит к большим погрешностям в ответе. Для сингулярных задач используются особые модифицированные алгоритмы, в том числе модифицированные методы конечных разностей.

С помощью комманды dsolve пакета MATLAB можно найти точное решение для задачи при значении параметра $\varepsilon = 1$. Изобразим его на одном графике с решением, полученным методом конечных разностей.

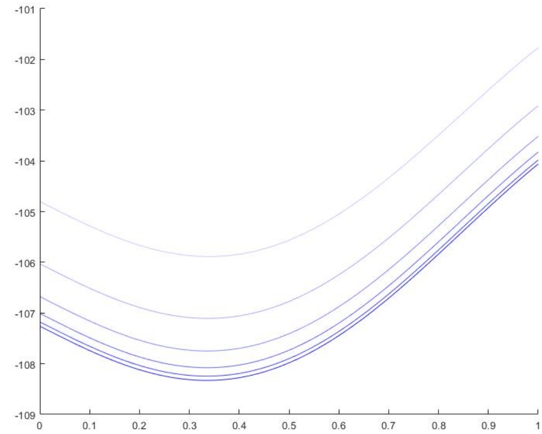


(a) Синим – точное решение, оранжевым – МКЭ с $\varepsilon = 1, \quad h = 0.001$

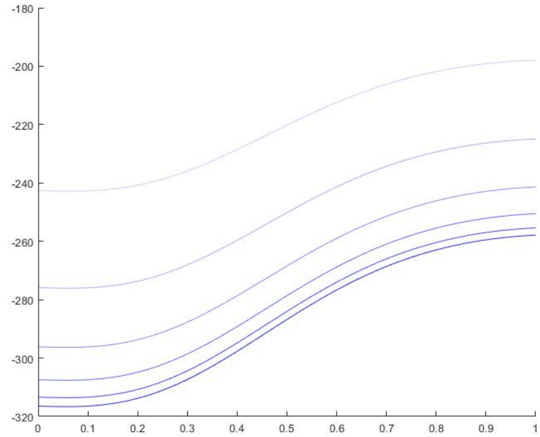


(b) Синим – точное решение, оранжевым – МКЭ с $\varepsilon = 1, \quad h = 0.0001$

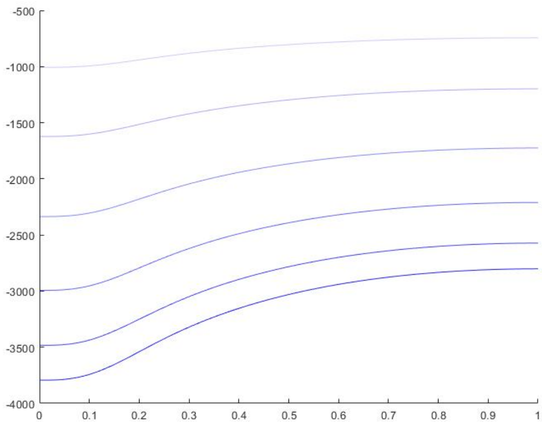
Для других значений ε точное решение найти не удаётся. Для них только проанализируем, как меняется решение в зависимости от шага сетки: $h = \frac{1}{2}^k, \quad k = 5...10$. (Чем линии менее прозрачные, тем меньше шаг сетки)



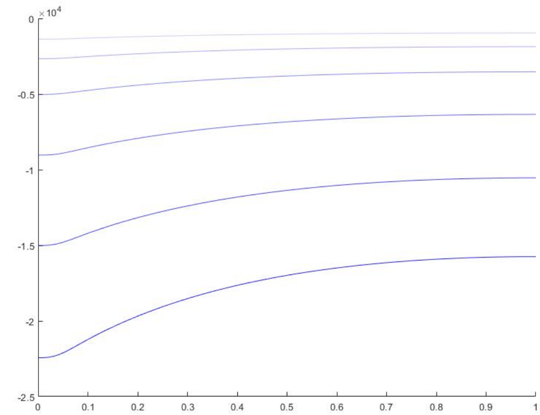
(a) $\varepsilon = 1$



(b) $\varepsilon = 0.1$



(c) $\varepsilon = 0.01$



(d) $\varepsilon = 0.001$

Можно заметить, что уменьшение шага также значительно влияет на полученный результат. Это тоже можно объяснить плохой обусловленностью полученной матрицы.