Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 8 / 4 / 1

Выполнил:
студент 104 группы
Каратыщев Д. И.

Преподаватель:
Гуляев Д. А.

Москва
2022

Содержание

Постановка задачи

Требовалось реализовать численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ с заданной точностью $\varepsilon = 0.001$.

Для вычисления абсцисс точек пересечения кривых, нужных для нахождения вершин фигуры, использовался комбинированный метод (хорд и касательных) приближённого решения уравнения $F(x) = 0$.

Площадь плоской фигуры вычислялась с использованием квадратурной формулы - формулы прямоугольников. Отрезок, на котором применялся метод нахождения корней необходимо было вычислить аналитически.

Математическое обоснование

Приведём требования на сходимость методов и оценки точности [1] и обоснуем выбор значений ε_1, ε_2, а также отрезков для поиска точек пересечения кривых.

Анализируя графики всех трёх кривых, легко заметить, в каком диапазоне значений лежит каждый из корней. Для простоты вычислений были выбраны следующие диапазоны: $[-3.0, -2.0]$, $[-2.0, -0.25]$, $[1.0, 2.0]$.

Площадь плоской фигуры вычисляется как интеграл, равный сумме определённого интеграла Римана функции $F_1(x) = -\dfrac{5}{x} - e^x - 2$ на отрезке от самой крайней точки пересечения кривых слева до средней и определённого интеграла Римана функции $F_2(x) = -2x + 6 - e^x$ на отрезке от средней точки пересечения до самой крайней точки пересечения справа.

Обозначим интеграл на первом отрезке как I_1, а интеграл на втором отрезке как I_2. Тогда площадь плоской фигуры - это $I := I_1 + I_2$. Пусть I_1 вычислен без погрешности, $I_1^{'}$ с погрешностью вычисления точек пересечения ς, а $I_1^{''}$ с погрешностью вычисления точек пересечения ς и погрешностью метода прямоугольников вычисления определённого интеграла ε_2. Тогда, используя неравенство треугольника, получим: $|I_1 - I_1^{''}| \leq |I_1 - I_1^{'} - I_1^{''} + I_1^{'}| \leq |I_1 - I_1^{'}| + |I_1^{'} - I_1^{''}| \leq \varsigma + \varepsilon_2$

Аналогично показывается, что $|I_2 - I_2^{''}| \leq \varsigma + \varepsilon_2$, а также что $|I - I^{'}| \leq 2\varsigma + 2\varepsilon_2$, где $I^{'}$ - это интеграл, посчитаный с погрешностью $\varepsilon = 2\varsigma + 2\varepsilon_2 = 0.001$ Положим $\varepsilon_2 = 0.0001$, $\varepsilon_1 = 0.000001$ и покажем, что при таких значениях погрешности достигается заданная точность $\varepsilon = 0.001$.

$$\int_a^b \left(-\frac{5}{x} - e^x - 2 \right) dx = (-ln(|x|) - e^x - 2x)\Big|_a^b = 5ln\left|\frac{a}{b}\right| + e^a - e^b - 2(b-a)$$

Теперь учтём, что мы ищем корни с погрешностью ε_1, запишем каждый полученный корень как $a + \varepsilon_1$ и $b + \varepsilon_1$ и путём несложных преобразований получим:

$$\int_a^b \left(-\frac{5}{x} - e^x - 2 \right) dx - \int_{a+\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} \left(-\frac{5}{x} - e^x - 2 \right) dx = 5ln\left|\frac{ab + a\varepsilon_1}{ab + b\varepsilon_1}\right| + (e^{\varepsilon_1} - 1)(e^b - e^a)$$

Аналогично получаем формулу для разности интеграла функции $F_2(x)$ без погрешности корней и интеграла функции $F_2(x)$ с погрешностью корней:

$$\int_a^b \left(-2x + 8 + \frac{5}{x} \right) dx - \int_{a+\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} \left(-2x + 8 + \frac{5}{x} \right) dx = 5ln\left|\frac{ab + b\varepsilon_1}{ab + a\varepsilon_1}\right| + 2\varepsilon_1(b-a)$$

Теперь обозначим $\varsigma_1 := 5ln\left|\dfrac{ab + a\varepsilon_1}{ab + b\varepsilon_1}\right| + (e^{\varepsilon_1} - 1)(e^b - e^a)$ и $\varsigma_2 := 5ln\left|\dfrac{ab + b\varepsilon_1}{ab + a\varepsilon_1}\right| + 2\varepsilon_1(b-a)$. Тогда $\varsigma = min\{\varsigma_1, \varsigma_2\}$. Таким образом, для $\varsigma_1, a = -3, b = -0.25, \varepsilon_1 = 0.000001$ и для $\varsigma_2, a = -0.25, b = 2, \varepsilon_1 = 0.000001$ получим, соответственно, $\varsigma_1 \approx 0.00002$ и $\varsigma_2 \approx 0.00002 \Rightarrow \varsigma \approx 0.00004$

Итак, получили, что $\varepsilon = 0.001 \geq 0.00008 + 0.0002 = 0.00028 \Rightarrow$ значения ε_1 и ε_2 выбраны верно.

Требования на сходимость методов:

1. Метод хорд и касательных. Функция F(x) должна удовлетворять следующим условиям на рассматриваемом сегменте $[a,b]$: $F(x) \in C^1[a,b], F^{'}(x)$ монотонна на $[a,b]$ и сохраняет знак на этом сегменте.

2. Метод прямоугольников. Требование: $F(x) \in C^2[a,b]$

Очевидно, что функции $g_1(x) := f_3(x) - f_1(x) = -\dfrac{5}{x} - e^x - 2, g_3(x) := f_2(x) - f_1(x) = -2x + 6 - e^x$ удовлетворяют требованиям метода прямоугольников, так как $g_1(x) \in C^\infty[-3.0, -0.25]$, $g_3(x) \in C^\infty[0.25, 2.0]$. Покажем теперь, что функции $g_1(x), g_2(x) := f_3(x) - f_2(x) = -\dfrac{5}{x} + 2x - 8, g_3(x)$ удовлетворяют требованиям метода хорд и касательных. Видно, что $g_1(x) \in C^\infty[-3.0, -2.0]$, $g_2(x) \in C^\infty[-2.0, -0.25]$, $g_3(x) \in C^\infty[1.0, 2.0]$, то есть данные фукнции являются бесконечно гладкими на соответствующих сегментах. Проверим монотонность и сохранение знака их производных:

$$g_3^{'}(x) = -2 - e^x \Rightarrow g_3^{'}(x) < 0, \forall x < 0.$$

$$g_3^{''}(x) = -e^x < 0, \forall x < 0$$

Следовательно, производная функции $g_3(x)$ сохраняет знак (меньше нуля ∀x < 0), а также по следствию теоремы Лагранжа монотонно убывает (отрицательность второй производной) ∀x < 0.

$$g_2^{'}(x) = \frac{5}{x^2} + 2 \Rightarrow g_2^{'}(x) > 0, \forall x < 0.$$

$$g_2^{''}(x) = -\frac{10}{x^3} > 0, \forall x < 0$$

Следовательно, производная функции $g_2(x)$ сохраняет знак (больше нуля ∀x < 0), а также по следствию теоремы Лагранжа монотонно возрастает (положительность второй производной) ∀x < 0.

Докажем, что $g_1^{'}(x) = \dfrac{5}{x^2} - e^x$ монотонна и сохраняет знак.

$$g_1^{''}(x) = -\frac{10}{x^3} - e^x$$

$g_1^{''}(x) = 0 \Leftrightarrow ln\left(-\dfrac{10}{x^3}\right) - x = 0$. Рассмотрим $\left(ln\left(-\dfrac{10}{x^3}\right) - x\right)^{'} = \dfrac{-3-x}{x}$. Заметим, что $\dfrac{-3-x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -3$ При этом в этой точке достигается минимум функции $ln\left(-\dfrac{10}{x^3}\right) - x, \forall x < 0$, приблизительно равный 2. Следовательно, $g_1^{''}(x) \neq 0, \forall x < 0 \Rightarrow$ в силу непрерывности $g_1^{''}(x)$ получаем, что либо $g_1^{''}(x) < 0$, либо $g_1^{''}(x) > 0$ $\forall x < 0$. Несложно убедиться, что $g_1^{''}(x) > 0$ $\forall x < 0$. Получаем по следствию теоремы Лагранжа, что $g_1^{'}(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[-3.0, -2.0]$, и при этом легко проверить, что она сохраняет на нём знак.

Таким образом, все функции удовлетворяют требованиям методов, использовавшихся при решении поставленной задачи. Ниже приведены графики функций.

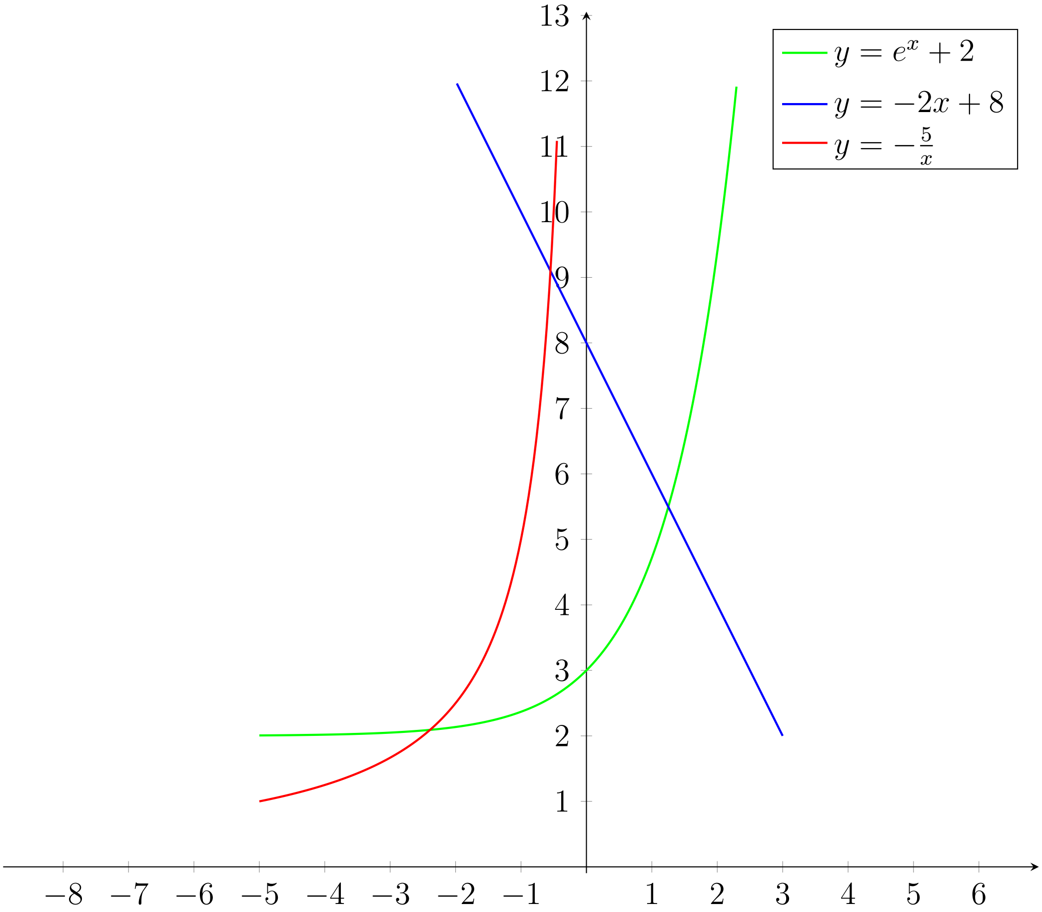


Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Результаты экспериментов

Приведём результаты вычислений - координаты точек пересечения (таблица 1) и площадь полученной фигуры (рис. 2).

Кривые	x	y
1 и 3	-2.3905	2.0916
2 и 3	-0.5495	9.0990
1 и 2	1.2518	5.4965

Таблица 1: Координаты точек пересечения

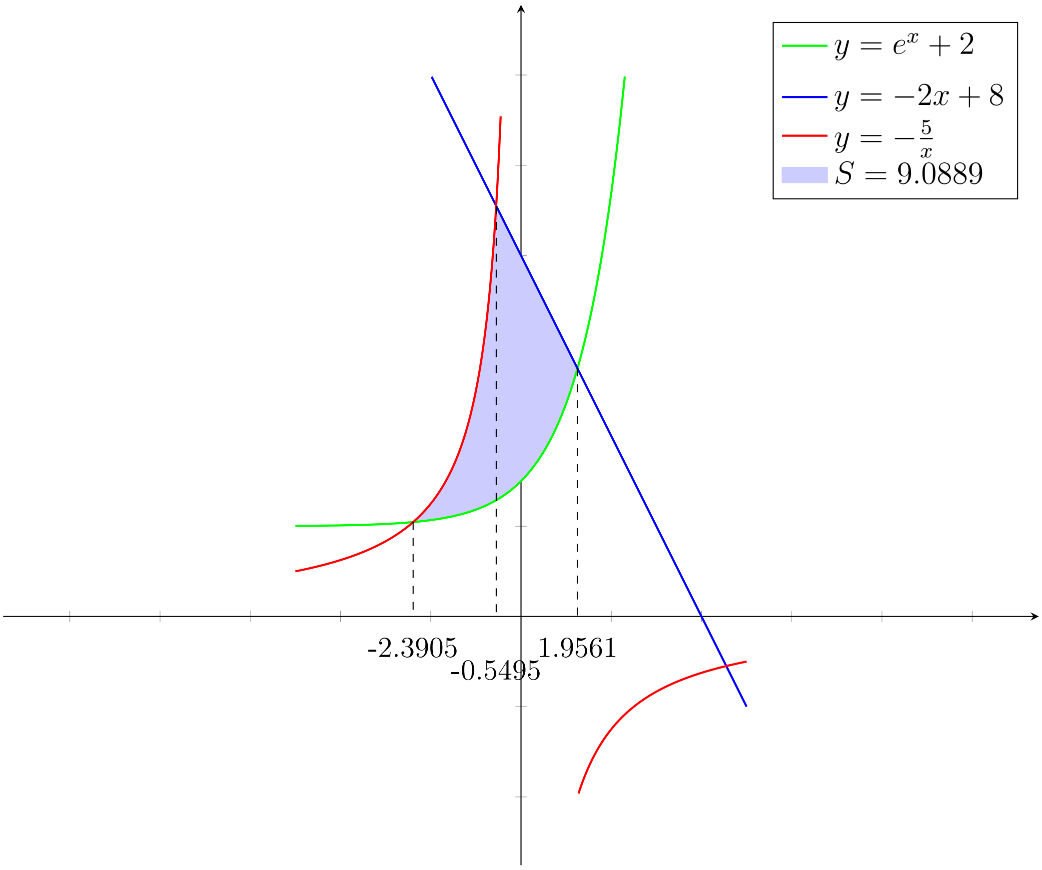
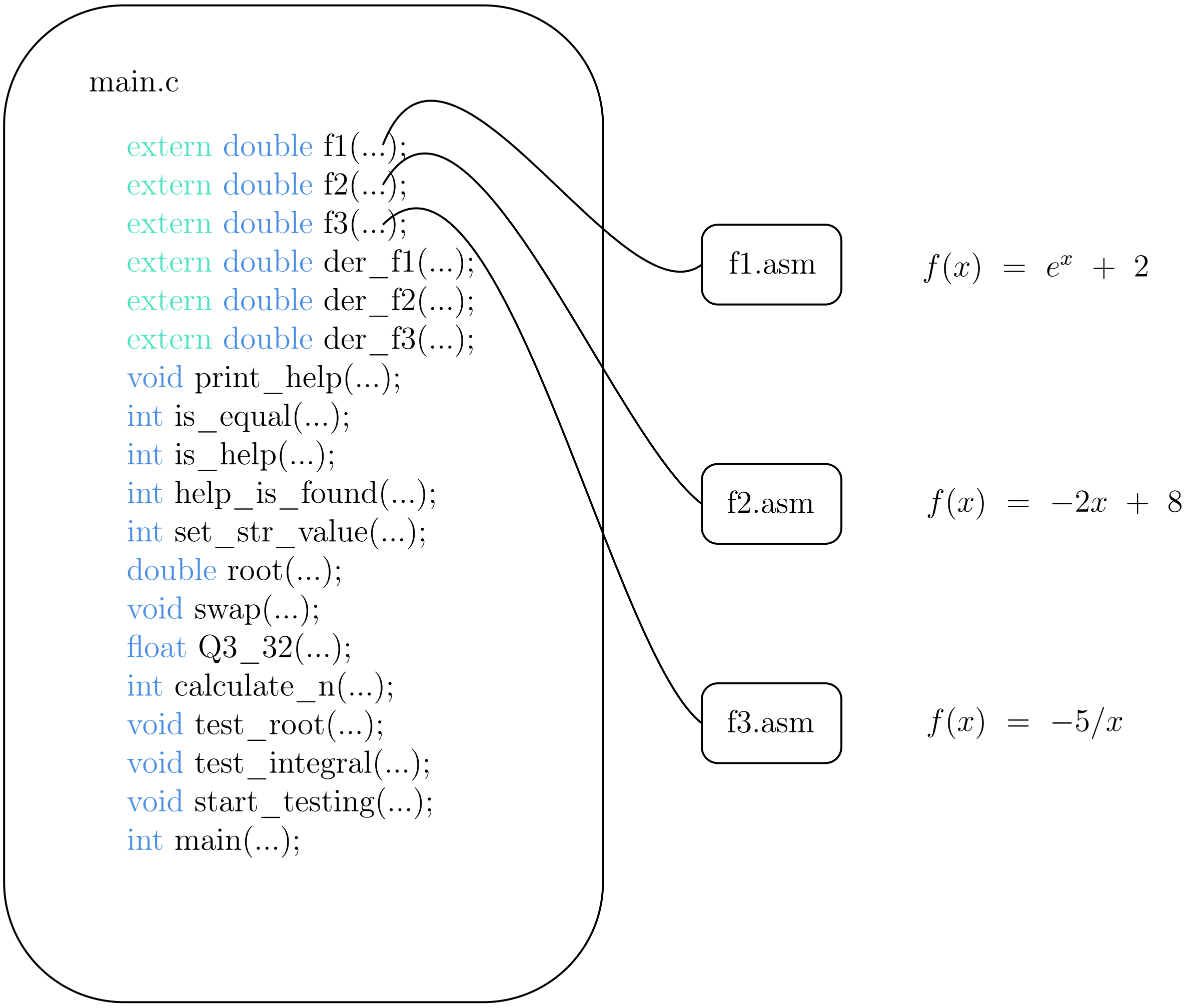


Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

Приведём полный список модулей и функций, изобразив его графически. Функциональность каждого модуля описана в документации к коду.



Сборка программы (Make-файл)

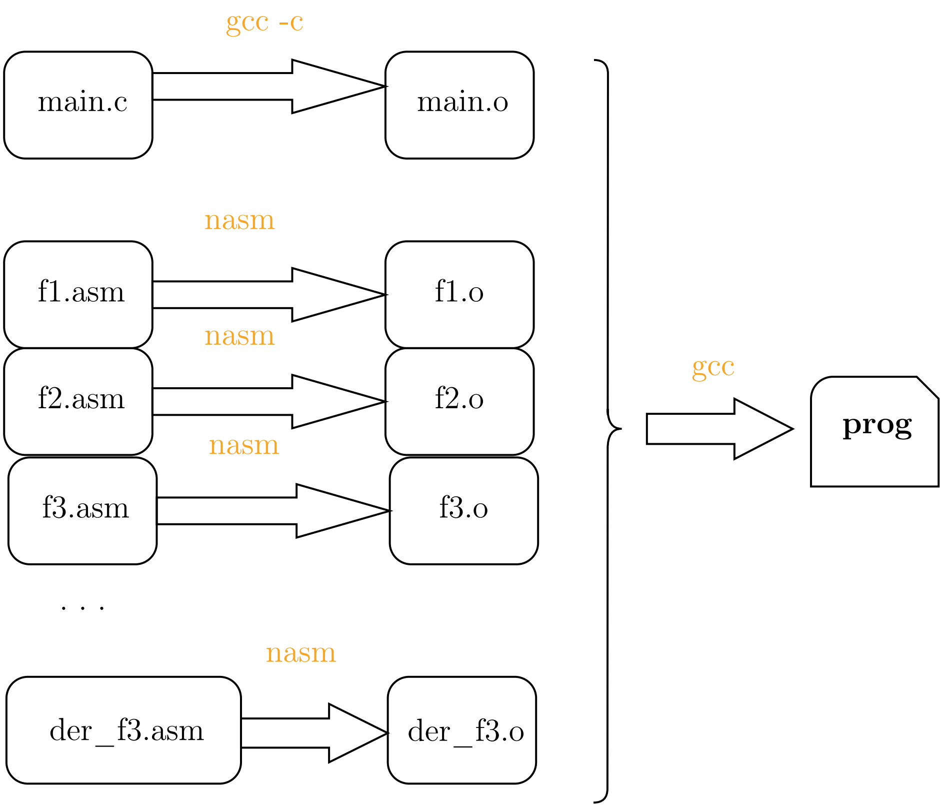
Приведём зависимости между модулями программы, а также текст Make-файла.

Makefile

```
all: main clean.o
main: main.o f1.o f2.o f3.o der_f1.o der_f2.o der_f3.o
	gcc -lm -m32 *.o -o main

main.o: main.c
	gcc -c -m32 main.c

f1.o: f1.asm
	nasm -f elf32 f1.asm

f2.o: f2.asm
	nasm -f elf32 f2.asm

f3.o: f3.asm
	nasm -f elf32 f3.asm

der_f1.o: der_f1.asm
	nasm -f elf32 der_f1.asm

der_f2.o: der_f2.asm
	nasm -f elf32 der_f2.asm

der_f3.o: der_f3.asm
	nasm -f elf32 der_f3.asm

clean.o:
	rm -rf *.o

clean:
	rm -rf *.o main
```

Зависимость между модулями программы

Ниже приведены зависимости между модулями программы. Каждая зависимость указана стрелкой, над которой написан компилятор и его опции, используемые для получения выходного файла программы.



Отладка программы, тестирование функций

Рассмотрим результаты отладки программы и тестирования функций. Было проведено по 3 теста для функции root и integral для разных кривых. В программе реализовывалась соответствующая функция, а затем проводилось тестирование. Приведём результаты в виде списка, вычисления корней и отрезков применения методов проводились с помощью анализов соответствующих графиков функций.

1. Функция root.

   (a) Уравнения кривых: $f_1(x) = ln(\dfrac{1+x^2}{5}), f_2(x) \equiv 0$. Уравнения их производных: $f_1^{'}(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}, f_2^{'}(x) \equiv 0$. Отрезок для вычисления корня: $[1, 4]$. Результат аналитических вычислений - корень уравнения равен 2.0000. Результат работы численного метода - корень: 2.00000.

   (b) Уравнения кривых: $f_1(x) = sin(x), f_2(x) = cos(x^2)$. Уравнения их производных: $f_1^{'}(x) = cos(x), f_2^{'}(x) = -2xsin(x^2)$. Отрезок для вычисления корня: $[0, 2]$. Результат аналитических вычислений - корень уравнения равен 0.849369. Результат работы численного метода - корень: 0.84937.

   (c) Уравнения кривых: $f_1(x) = e^x, f_2(x) = \dfrac{9}{x^3}$. Уравнения их производных: $f_1^{'}(x) = e^x, f_2^{'}(x) = -\dfrac{27}{x^4}$. Отрезок для вычисления корня: $[0.25, 4]$. Результат аналитических вычислений - корень уравнения равен 1.33359. Результат работы численного метода - корень: 1.33359.

2. Функция integral.

   (a) Уравнение кривой: $f(x) = ln(\dfrac{1+x^2}{5}) - 0$. Уравнение её производной: $f^{'}(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Отрезок для вычисления интеграла: $[2, 4]$. Результат аналитических вычислений - интеграл равен 1.3324. Результат работы численного метода - интеграл: 1.33245

   (b) Уравнение кривой: $f(x) = sin(x) - cos(x^2)$. Уравнение её производной: $f^{'}(x) = cos(x) + 2xsin(x^2)$. Отрезок для вычисления интеграла: $[2, 4]$. Результат аналитических вычислений - интеграл равен 0.104498. Результат работы численного метода - интеграл: 0.10450

   (c) Уравнение кривой: $f(x) = e^x - \dfrac{9}{x^3}$. Уравнение её производной: $f^{'}(x) = e^x + \dfrac{27}{x^4}$. Отрезок для вычисления интеграла: $[2, 6]$. Результат аналитических вычислений - интеграл равен 395.04. Результат работы численного метода - интеграл: 395.03971

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, который приложен к этому отчету.

Анализ допущенных ошибок

Было изменено значение ε_2 с 0.0001 на 0.000001, а также исправлен вывод точек пересечения кривых.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.