Inteiros

Inteiros.

Congruência.

Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006

Capítulo: 4

Números reais

- A relação binária $\leq$ em $\mathbb{R}$ é uma ordem parcial
  - Reflexiva, antissimétrica, transitiva
- Propriedades da adição e multiplicação de reais ($a,b,c \in \mathbb{R}$)
  - (**fecho**) a+b e ab são números reais
  - (**comutatividade**) $a+b = b+a$ e $ab = ba$
  - (**associatividade**) $(a+b)+c = a+(b+c)$ e $(ab)c = a(bc)$
  - (**elemento neutro**) $a+0 = a$ e $a.1 = a$
  - (**distributividade**) $a(b+c) = ab+ac$ e $(a+b)c = ac+bc$
  - (**inverso aditivo**) $a+(-a) = 0$
  - (**inverso multiplicativo**) $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$ se $a \neq 0$
  - $a \leq b$ implica $a+c \leq b+c$
  - $a \leq b$ e $c \geq 0$ implica que $ac \leq bc$
  - $a \leq b$ e $c \leq 0$ implica que $ac \geq bc$

A subtração define-se como
$a-b = a+(-b)$

Princípio da boa ordenação

- Muitos conjuntos de reais não têm mínimo
  - Não existe o menor real positivo
  - $\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = ?$
- Este problema não ocorre nos naturais

> **Princípio da boa ordenação**. Todo o conjunto não vazio de números naturais tem um elemento mínimo.

- As propriedades dos reais podem ser transpostas para os inteiros
  - O conjunto dos naturais é fechado para a adição? Multiplicação? Subtração?
  - O conjunto dos inteiros ímpares é fechado para a adição?

Algoritmo da divisão

- Divisão
- $\frac{58}{17} = 3 + \frac{7}{17}$ $\qquad$ $\frac{58}{17} = 2 + \frac{\cancel{24}}{17}$
- $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ $\qquad$ $a = qb + r$

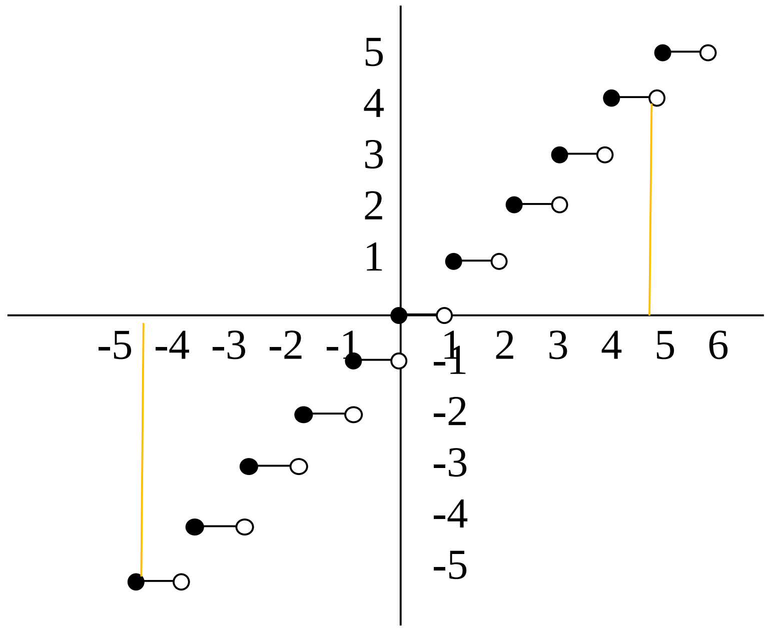
Menor dos múltiplos de b maiores que a (existe!)
$0 \leq r = a - qb < b$

- **Teorema**: sejam a,b $\in$ Z, b $\neq$ 0. Então existem inteiros únicos q e r, com $0 \leq r < |b|$, tal que a = qb + r.
  - q – quociente
  - r – resto

Exemplo

- $a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b|$

- $19 = 4(4) + 3$
- -$19 = -5(4) + 1$
- $19 = -4(-4) + 3$
- $-19 = 5(-4) + 1$



Função chão.

- Proposição: $q = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor & se\ b > 0 \\ \left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil & se\ b < 0 \end{cases}$

$$\frac{19}{4} = 4.75$$

Representação de naturais

- Representação habitual é base 10
  - $2159 = 2 * 10^3 + 1 * 10^2 + 5 * 10^1 + 9 * 10^0 = (2159)_{10}$

$$\boxed{(a_{n-1}a_{n-2} \dots a_o)_b = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_1 b + a_o}$$

- $N = (\underbrace{(a_{n-1}b + a_{n-2})b + \cdots + a_1}_{q_0})b + a_o$

N | b
a_0 q_0 | b
a_1 q_1 … | b
a_{n-2} a_{n-1}

2159 | 8
7 269 | 8
5 33 | 8
1 **4**

$(4157)_8$

Numeração binária e hexadecimal

- Representação base 2 ou binária
  - $(2159)_{10} = 1 * 2^{11} + 0 * 2^{10} + 0 * 2^9 + 0 * 2^8 + 0 * 2^7 + 1 * 2^6 + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0 =$
    $= (100001101111)_2$
- Base 16 ou hexadecimal necessita de 16 símbolos
  - 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
  - $(2159)_{10} = 8 * 16^2 + 6 * 16^1 + 15 * 16^0 = (86F)_{16}$
- Passar da binária para a hexadecimal
  - 1000 0110 1111
  - 8 6 F

Divisibilidade

- **Definição**: dados a e b inteiros com $b \neq 0$, diz-se que b é um divisor ou um fator de a e que a é divisível por b se e só se $a = qb$ para algum inteiro q.
  - Escreve-se $b|a$ e lê-se "b divide a"
- Para todo o n, $1|n$ e para $n \neq 0$, $n|0$
- **Proposição**: Sejam a, b, c inteiros tais que $c|a$ e $c|b$. Então $c|(xa + yb)$ para quaisquer inteiros x e y.
- **Prova**: dado que $c|a, a = q_1 c, q_1$ inteiro, e dado que $c|\, b, b = q_2 c, q_2$ inteiro. Então $xa + yb = xq_1 c + yq_2 c = (q_1 x + q_2 y)c$. Como $(q_1 x + q_2 y)$ é um inteiro então $c|(xa + yb)$
- A relação binária em $\mathbb{N}$ a|b é ordem parcial e $(\mathbb{N},|)$ um cpo

Máximo divisor comum

- **Definição**: Sejam a e b inteiros não simultaneamente iguais a 0. Um inteiro g é o máximo divisor comum de a e b, $g = mdc(a,b)$, se $g|a$ e $g|b$ e qualquer c tal que $c|a$ e $c|b$ implica $c \leq g$.

- Ex: Considere os números 238 e 68

$$divisores238 = \{1,2,7,14,17,34,119,238\}$$
$$divisores68 = \{1,2,4,17,34,68\}$$
$$divisoresComuns = \{1,2,17,34\}$$
$$mdc(238,68) = 34$$

Lema

- **Lema**: se $a = qb + r$ para inteiros a, b, q, r então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$
  - Como $238 = 3(68) + 34, mdc(238,68) = mdc(68,34) = 34$ porque $68 = 2(34) + 0$
- **Prova**: Seja $g_1 = mdc(a, b)$ e $g_2 = mdc(b, r)$.

Como $g_2|b$ e $g_2|r$ então $g_2|(qb + r)$, isto é, $g_2|a$. Então g_2 é um divisor comum de a e de b e, como g_1é o maior divisor comum de a e de b, $g_2 \leq g_1$.

Por outro lado, como $g_1|a$ e $g_1|b$ temos que $g_1|(a - qb)$, isto é, $g_1|r$. Então g_1 é um divisor comum de b e de r e, como g_2 é o maior divisor comum de b e de r, $g_1 \leq g_2$. Portanto, $g_1 = g_2$ e $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.

Algoritmo de Euclides

- Sejam a e b números naturais com b<a. Para calcular mdc(a,b) fazer
- $a = q_1 b + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$
- Se $r_1 \neq 0 \;\; b = q_2 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$
- Se $r_2 \neq 0 \;\; r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$
- Se $r_k \neq 0 \;\; r_{k-1} = q_{k+1} r_k + r_{k+1}, \quad 0 \leq r_{k+1} < r_k$
- Se $r_{k+1} = 0, \;\; mdc(r_{k-1}, r_k) = r_k = mdc(a, b).$
  - Ex: mdc(630,196) **=14**
  - 630=3(196)+42   42=630-3(196) = a-3b
  - 196=4(42)+28   28=196-4(42) = b-4r_1=b-4(a-3b)=-4a+13b
  - 42=1(28)+14   14=42-28 = r_1-r_2=(a-3b)-(-4a+13b)=5a-16b
  - 28=2(14)+0

Obtenção de mdc(a,b)=ma+nb

Apresentando as três equações anteriores r = ma+nb em forma tabular, antecedidas das duas linhas para a e para b

	r	a	b	q
a	630	1	0	
b	196	0	1	3
r_1	42	1	-3	4
r_2	28	-4	13	1
r_3	14	5	-16	2
r_4	0			

q_k= quotient(r_{k-1},r_k)

3= quotient(630,196)

(42, 1, -3) = (630, 1, 0) – 3(196, 0, 1)

linha_k= linha_{k-2},- q_{k-1} linha_{k-1}

Como r_4=0,

mdc(630,196) = r_3 = 14 = 5(630)+(-16)(196)

Propriedades do mdc

- **Definição**: Dois inteiros a e b, $a \neq 0$ $b \neq 0$, são primos entre si se $mdc(a,b)=1$
- **Teorema**: O máximo divisor comum dos inteiros a e b é uma combinação linear inteira de a e b, $g=mdc(a,b) =ma+nb$.
  - $mdc(630,196)=14=5a-16b=5(630)-16(196)$
- **Corolário**: Sejam x,a,b inteiros tais que $x|ab$. Se x e a forem primos entre si, então $x|b$.
- **Corolário**: o mdc(a,b) é divisível por qualquer divisor comum de a e b.
- Recordando que $(\mathbb{N},|)$ é um cpo, verifica-se que
  - $a \wedge b=mdc(a,b)$ ínfimo

Mínimo múltiplo comum

- **Definição**: Se a e b forem inteiros não nulos, dizemos que l é o mínimo múltiplo comum de a e b, $l = mmc(a, b)$, se e só se l for um inteiro positivo que satisfaça
  - $a|l$, $b|l$ e,
  - Se m for um inteiro positivo tal que $a|m$ e $b|m$ então $l \leq m$.
  - Ex: $mmc(630, -196) = 630 * 196/14 = 8820$
- Ainda no cpo (ℕ,|), verifica-se que
  - a∨b=mmc(a,b)   supremo
- O cpo (ℕ,|) é um reticulado
- O conjunto dos divisores de um número natural é um reticulado
  - Ex: A= {d ∈ ℕ | d|30} = {1,2,3,5,6,10,15,30}

Números primos

- **Definição**: um número natural p ≥ 2 é um **primo** se e só se os únicos números naturais que dividem p forem p e 1. Um número natural $n>1$ que não seja primo é **composto**.
  - n é composto se $n=ab$, com $1<a,b<n$
  - 1 não é primo nem composto
  - Há ¼ de números primos de 1 a 100
    - 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97
  - Alguns primos grandes: $2^{756839}-1$, $2^{859433}-1$
- **Lema**: Dado qualquer número natural $n>1$, existe um primo p tal que $p|n$.

Primos

- **Teorema**: há um número infinito de primos.
  - Prova por contradição: se o número de primos for finito $p_1, p_2, \ldots, p_t$, seja $n = (p_1 p_2 \ldots p_t) + 1$. Pelo lema, n é divisível por um primo, p_i. Como $p_1 p_2 \ldots p_t$ também é divisível por p_i, $n - p_1 p_2 \ldots p_t = 1$ é divisível por p_i, o que é uma contradição.
- Como determinar se um número é primo?
  - Os pares são múltiplos de 2
  - Os números cujos algarismos somados são múltiplos de 3 são divisíveis por 3
  - Os números terminados em 0 ou 5 são múltiplos de 5
- **Lema**: se um número natural $n>1$ não é primo, então é divisível por um primo $p \leq \sqrt{n}$

Crivo de Eratóstenes

- Para encontrar todos os primos até n
  - Listar todos os inteiros de 2 a n
  - Marcar 2 e cortar todos os múltiplos de 2; idem para 3, 5, …
  - Marcar o próximo número não marcado ou cortado e cortar os múltiplos até todos os números até $\sqrt{n}$ estarem marcados ou cortados

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11
~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31
~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41
~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~
~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61
~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71
~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~
~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~
~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~	

Decomposição em números primos

- **Teorema Fundamental da Aritmética**: cada número natural n≥2 pode ser escrito $n = p_1 p_2 \dots p_r$ como um produto único de números primos ou, agrupando os primos iguais, na forma $n = {q_1}^{\alpha_1} {q_2}^{\alpha_2} \dots {q_s}^{\alpha_s}$ do produto de potências de s primos distintos, em que os primos e as potências são únicos.
- Ex: $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 5^2$
- $1176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 3^1 7^2$
- **Definição**: os fatores primos de um inteiro n≥2 são os números primos que dividem n; a multiplicidade de um fator primo p de n é o maior α tal que $p^{\alpha} | n$.

Divisibilidade

- $a = 9$ $b = 77$ $ab = 693$
- $c = 21$
- $c \nmid a$ $c \nmid b$ $c \mid ab$ $21 \mid 693$ $693=33*21$
- Esta situação de um número não dividir nenhum dos fatores mas dividir o produto não pode acontecer se o número for primo!
  - Fica evidente se se explicitar a decomposição em números primos

- $a = 3*3$ $b = 7*11$ $c = 3*7$
- $ab = (3*3)(7*11) = 3(3*7)11 = 3*c*11$
- Se c fosse um número primo tinha que dividir a ou b

Unicidade da decomposição

- **Proposição**: se um primo p divide o produto $a_1 a_2 \ldots a_k$ de inteiros, então p divide um dos a_i.
- **Unicidade da decomposição em fatores primos**
  - Prova: Assuma-se que um número natural n>1 pode ser fatorizado em números primos de duas maneiras diferentes

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_l$$

  - Cancelem-se os fatores iguais nas duas expressões; obtém-se um produto de primos igual a 1 (absurdo) ou uma equação da mesma forma sem fatores repetidos nas duas expressões
  - Como $p_1 | p_1 p_2 \ldots p_k$ então $p_1 | q_1 q_2 \ldots q_l$. Pela proposição acima, $p_1 | q_j$ para um dos primos q_j. Como tanto p_1 como q_j são primos, isto força $p_1 = q_j$
  - Mas isso contradiz a não existência de primos comuns, pelo que não podem existir duas fatorizações diferentes

Decomposição do mdc

- Exercício: qual a decomposição em números primos do mdc(a,b)?
- Resposta
  - Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, a e b podem exprimir-se na forma

$$a = \pm {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \dots {p_r}^{\alpha_r} \qquad b = \pm {p_1}^{\beta_1} {p_2}^{\beta_2} \dots {p_r}^{\beta_r}$$

  - Sendo assim

$$mdc(a,b) = {p_1}^{\min(\alpha_1,\beta_1)} {p_2}^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots {p_r}^{\min(\alpha_r,\beta_r)}$$

Casos especiais

- **Primos de Mersenne**
  - São números da forma 2^p-1
  - Verificar com p até 16
  - Mersenne indicou a lista: 2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257
  - Mais tarde corrigiu-se: 2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127.
  - Conjetura-se que haja relação entre p ser primo e 2^p-1 ser primo
    - Se p não for primo 2^p-1 também não é; o inverso não é sempre verdade
  - O 39º primo de Mersenne (p=13466917) foi encontrado em 2001, após dois anos e meio a testar 100000 candidatos numa rede de 200000 PCs
  - Não se sabe se há um número infinito de primos de Mersenne

Mais casos especiais

- **Primos de Fermat**
  - $2^{2^n} + 1$
  - São primos para n=0, 1, 2, 3, 4 (para n=5 é divisível por 641)
  - Há mais do que cinco destes primos?

- **Qual a regra para obter o número primo seguinte**?
  - Não há regra conhecida
  - Os números primos são muito rebeldes… e essenciais!
  - É possível encontrar dois primos consecutivos com um intervalo arbitrariamente grande.
    - D!+2 é divisível por 2, D!+3 por 3, ..., D!+D por D.
    - Entre D!+1 e D!+D não há primos

Qual a densidade de primos?

- Teorema dos **números primos**
  - Seja $\pi(x)$ o número de primos p ≤ x
  - Valor aproximado: $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$
  - $\pi(100) \sim \frac{100}{\ln 100} = 21.7$ De facto, 25

- Observação
  - Todos estes cálculos usam números que ultrapassam a gama de inteiros das unidades aritméticas
  - É necessário recorrer a bibliotecas de operações aritméticas sobre cadeias de algarismos de comprimento variável e elevado

Mais casos em aberto

- **Último Teorema de Fermat**. Para qualquer inteiro n>2 a equação $a^n + b^n = c^n$ não tem solução inteira
  - Prova realizada só em 1994 por Andrew Wiles
- **Conjetura dos primos gémeos**. Existe um número infinito de números x tais que x e x+2 são primos?
  - 11 e 13, 41 e 43
  - não se sabe
- **Conjetura de Goldbach**. Podem todos os inteiros pares maiores que 2 ser escritos como a soma de dois primos?