

EXERCÍCIOS DE LÓGICA DE 1ª ORDEM

QUANTIFICADORES

- 1 {9.3} **Tornar as frases verdadeiras.** Abra Bozo's Sentences e Leibniz's World. Algumas das expressões não são wffs, algumas são wffs mas não são frases e uma é frase mas é falsa. Avalie-as. Modifique cada uma para a tornar uma frase verdadeira com o mínimo de alterações possível.
- 2 {9.10} **Erro comum.** Abra Edgar's Sentences e avalie as frases em Edgar's World. Analise cuidadosamente cada uma. Qual delas é que seria uma boa tradução de *Existe um tetraedro grande*? E de *Há um cubo entre a e b*? Explique o significado de cada frase.
- 3 {9.16} **Frases nominais existenciais.** Abra um novo ficheiro de frases e escreva a tradução para FOL de cada uma das seguintes frases. Verifique se os resultados são fórmulas bem formadas.

- 1) Algo é grande.
- 2) Algum objeto é um cubo.
- 3) Alguma coisa é um cubo grande.
- 4) Algum cubo é grande.
- 5) Algum cubo grande está à esquerda de b.
- 6) Um cubo grande está à esquerda de b.
- 7) b tem um cubo grande à sua esquerda.
- 8) b está à direita de um cubo grande.
- 9) Alguma coisa à esquerda de b está atrás de c.
- 10) Um cubo grande à esquerda de b está atrás de c.
- 11) Algum cubo grande está à esquerda de b e atrás de c.
- 12) Algum dodecaedro não é grande.
- 13) Alguma coisa não é um dodecaedro grande.
- 14) Não se dá o caso de alguma coisa ser um dodecaedro grande.
- 15) b não está à esquerda de um cubo.

Abra Montague's World. Todas as frases devem ser verdadeiras neste mundo. Desloque o cubo grande para o canto posterior direito; as frases 5, 6, 7, 8, 10, 11 e 15 ficam falsas. Será que o mesmo acontece com as suas traduções? Mude o tamanho do cubo grande para pequeno; as frases 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 e 15 ficam falsas e as restantes verdadeiras. Verifique-o nas suas traduções.

- 4 {9.17} **Frases nominais universais.** Escreva num ficheiro de frases as traduções das seguintes:
 - 1) Todos os cubos são pequenos.
 - 2) Cada cubo pequeno está à direita de a.
 - 3) a está à esquerda de cada dodecaedro.

- 4) Cada dodecaedro médio está à frente de b.
- 5) Cada cubo está à frente de b ou atrás de a.
- 6) Cada cubo está à direita de a e à esquerda de b.
- 7) Tudo entre a e b é cubo.
- 8) Tudo o que é menor que a é cubo.
- 9) Todos os dodecaedros não são pequenos (muitas pessoas consideram esta frase ambígua; consegue encontrar as duas leituras? Use a que significa que os dodecaedros são médios ou grandes).
- 10) Nenhum dodecaedro é pequeno.
- 11) a não é adjacente a tudo (esta frase é ambígua; interprete-a como a negação da frase *a é adjacente a tudo*).
- 12) a não é adjacente a coisa alguma.
- 13) a não está à direita de nenhum cubo.
- 14) Se alguma coisa é um cubo, então não está na mesma coluna de a ou de b.
- 15) Alguma coisa é um cubo se e só se não está na mesma coluna de a ou de b.

Verifique se todas as suas traduções são verdadeiras em Claire's World. Em Wittgenstein's World apenas as frases 2, 3, 7, 8, 11, 12 e 13 devem resultar verdadeiras.

- 5 {10.20} **Leis de DeMorgan.** Use uma cadeia de equivalências para mostrar que a negação de *Alguns Ps são Qs* é logicamente equivalente a *Nenhum P é um Q*.
- 6 {10.21} **Leis de DeMorgan.** Abra DeMorgan's Sentences 2; esta contém seis frases das quais cada uma das 4, 5 e 6 é logicamente equivalente a uma das três primeiras. Diga qual é equivalente a qual abrindo vários mundos e avaliando-as (use os mundos Ackermann's, Bolzano's e Claire's). Escreva cadeias de equivalências para provar as equivalências entre as frases.
- 7 {10.22} **\forall versus \wedge e \exists versus \vee .** Foi referida a semelhança entre \forall e \wedge , bem como entre \exists e \vee . Teve-se o cuidado de não afirmar que a frase universalmente quantificada fosse logicamente equivalente à conjunção análoga. Mostra-se aqui porquê.

Abra Church's Sentences e Ramsey's World. Avalie as frases neste mundo. Repare que as duas primeiras frases têm o mesmo valor de verdade, tal como o segundo par.

Modifique Ramsey's World de qualquer forma, mas não acrescente nem apague objetos e não altere os nomes usados. Verifique que os valores de verdade das frases em cada par são sempre iguais.

Agora acrescente um objeto ao mundo. Ajuste os objetos de forma a que a primeira frase seja falsa, a segunda e a terceira verdadeira e a última falsa.

Isto mostra que as duas primeiras frases não são logicamente equivalentes. Nem o são as duas últimas. Os quantificadores acrescentam de facto potência à linguagem, ou são meras abreviaturas de conjunções e disjunções iteradas?

8 {11.17} Tradução com múltiplos quantificadores. Traduza para FOL, seguindo o procedimento passo-a-passo e usando um ficheiro de frases novo:

- a) Todos os tetraedros estão à frente de todos os dodecaedros.
- b) Nenhum dodecaedro tem outro objeto atrás de si.
- c) Nenhum tetraedro é do mesmo tamanho que algum cubo.
- d) Todos os dodecaedros são do mesmo tamanho que algum cubo.
- e) Qualquer coisa entre dois dodecaedros é um cubo.
- f) Todos os cubos se encontram entre dois objetos.
- g) Todos os cubos com algo atrás de si são pequenos.
- h) Todos os dodecaedros sem nada à sua direita são pequenos.
- i) Todos os dodecaedros sem nada à sua direita têm alguma coisa à sua esquerda.
- j) Qualquer dodecaedro à esquerda de um cubo é grande.

Abra o mundo Bolzano. Todas as frases acima em Português são verdadeiras neste mundo. Verifique que as traduções também são verdadeiras. Abra o mundo Ron. As frases d), e), h), i) e j) são verdadeiras, mas o resto é falso. Abra o mundo Claire. Verifique se frases a), c), e), g), i) e j) são verdadeiras e as restantes falsas. Finalmente abra o mundo Peano. Só as frases h) e i) são verdadeiras.

9 {11.18-11.19} Tradução com paráfrase. Traduza para FOL, seguindo o procedimento passo-a-passo e usando um ficheiro de frases novo:

- a) Só os objetos grandes nada têm à sua frente.
- b) Se um cubo tiver algo à sua frente, então é pequeno.
- c) Todos os cubos atrás de um dodecaedro são mais pequenos que este.
- d) Se e estiver entre dois objetos então são ambos pequenos.
- e) Se um tetraedro estiver entre dois objetos então são ambos pequenos.
- f) Todos os dodecaedros são, pelo menos, tão grandes como todos os cubos.
- g) Se um cubo estiver à direita de um dodecaedro, mas não atrás dele, então ele é tão grande como o dodecaedro.
- h) Nenhum cubo sem nada à sua esquerda está entre dois cubos
- i) Os únicos cubos grandes são b e c
- j) No máximo, b e c são cubos grandes.

Abra o mundo Ron, o qual tem muitos objetos escondidos. Todas as frases acima em Português são verdadeiras neste mundo. Abra o mundo Bolzano. Só as frases c), h), j) são verdadeiras, mas o resto é falso. Abra o mundo Wittgenstein. Só as frases e), g) e h) são verdadeiras.

10 {11.5} Construir um mundo. Abra Ramsey's Sentences. Construa um mundo no qual as frases 1-10 sejam simultaneamente verdadeiras. Estas 10 frases fazem afirmações particulares (sem quantificadores) ou existenciais (acerca da existência de objetos de algum tipo). É portanto possível torná-las verdadeiras adicionando sucessivos objetos ao mundo. Pretende-se no entanto tornar estas frases verdadeiras com tão poucos objetos quanto possível (deve poder fazê-lo com 6 objetos).

- 11 {11.6} Modificar um mundo.** As frases 11-20 de Ramsey's Sentences fazem afirmações universais. Verifique se o mundo que construiu no problema anterior satisfaz estas afirmações. Se não, modifique-o de modo a tornar as 20 frases simultaneamente verdadeiras.
- 12 {11.30} Tradução com símbolos de função.** Traduza as frases seguintes para uma linguagem de LPO que use os símbolos de função *altura*, *mae* e *pai*, o predicado $>$ e nomes para os indivíduos referidos.
- a) O pai da Maria é mais alto que a Maria mas não mais alto que o pai da Clara.
 - b) Alguém é mais alto que o pai da Clara.
 - c) A mãe de alguém é maior que o seu pai.
 - d) Toda a gente é mais alta que alguém.
 - e) Uma pessoa não é mais alta que ela própria.
 - f) Todos, excepto o Juca, que são mais altos que a Clara são mais altos que o Juca.
 - g) Todos os que são mais baixos que a Clara são mais baixos que alguém que é mais baixo que o pai da Mariana.
 - h) Alguém é mais alto que a avó paterna do Jonas mas mais baixo que o seu avô materno.
- 13 {11.26} Ambiguidade.** No Tarski's World, crie um novo ficheiro de frases e traduza as seguintes frases para LPO. Cada uma destas frases é ambígua e deve escrever duas traduções por frase. A seguir abra Carrol's World e teste aí as suas traduções. Deve verificar que exatamente uma tradução de cada frase é verdadeira neste mundo. (Note que, se tivesse este mundo em vista quando fez as traduções, teria tido mais dificuldade em detetar a ambiguidade; o mundo fornece um contexto que torna umas interpretações mais naturais que outras.)
- 1. Cada cubo está entre um par de dodecaedros.
 - 3. Todo o cubo à direita de um dodecaedro é mais pequeno que ele.
 - 5. O cubo a não é maior que cada dodecaedro.
 - 7. Nenhum cubo está à esquerda de algum dodecaedro.
 - 9. (Pelo menos) dois cubos estão entre (pelo menos) dois dodecaedros.
- 14 {11.28} Ambiguidade e inferência.** A validade de um argumento depende por vezes da forma de interpretar afirmações ambíguas. Aqui estão algumas premissas e a respetiva conclusão. Faça uma análise da tentativa de prova seguinte. As premissas são:
- 1. All that glitters is not gold.
 - 2. This ring glitters.
- E a conclusão pretendida: This ring is not gold.
- Traduza este argumento para LPO duas vezes, atendendo à ambiguidade na primeira premissa. Num dos casos a conclusão pretendida é de facto uma consequência. Prove-o. No outro, não. Descreva, para esta tradução, um contraexemplo, ou seja uma situação em que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa.

15 {11.33, 11.34, 11.35, 11.36} **Manipulações válidas de quantificadores.** Verifique as equivalências seguintes, recorrendo à substituição de \rightarrow pela sua definição em termos de \vee e \neg .

1. $\forall x P \rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \exists x [P \rightarrow Q]$ se x não for livre em Q
2. $\exists x P \rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \forall x [P \rightarrow Q]$ se x não for livre em Q
3. $P \rightarrow \forall x Q \quad \Leftrightarrow \quad \forall x [P \rightarrow Q]$ se x não for livre em P
4. $P \rightarrow \exists x Q \quad \Leftrightarrow \quad \exists x [P \rightarrow Q]$ se x não for livre em P

16 {11.38} **Manipulações inválidas de quantificadores.** Algumas manipulações inválidas de quantificadores são superficialmente semelhantes a outras que são válidas. Construa um mundo em que as frases 1 e 3 sejam verdadeiras e as 2 e 4 falsas. Quais as implicações verdadeiras entre elas?

1. $\forall x [\text{Cube}(x) \vee \text{Tet}(x)]$
2. $\forall x \text{Cube}(x) \vee \forall x \text{Tet}(x)$
3. $\exists x \text{Cube}(x) \wedge \exists x \text{Small}(x)$
4. $\exists x [\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)]$.