

# INDUÇÃO

- 1 {16.1} No país da Euforia, verificam-se os seguintes dois princípios
1. Se estiver Sol num dia, estará Sol no dia seguinte.
  2. Hoje está Sol.

Mostre que estará Sol de hoje em diante.

- 2 Uma determinada loja vende envelopes em pacotes de 5 e de 12 unidades. Mostre que para todo  $n \geq 45$  a loja consegue satisfazer exatamente encomendas de  $n$  envelopes.
- 3 Prove que, para qualquer número natural  $n \geq 1$ ,  $2^{2n} - 1$  é divisível por 3.
- 4 Considere um tabuleiro de xadrez ( $8 \times 8$  quadrados). Exatamente um quadrado predeterminado do tabuleiro deve ficar visível. É possível cobrir todos os outros quadrados, sem sobreposições e sem ultrapassar os limites do tabuleiro, usando apenas peças em L que cobrem 3 quadrados cada uma?



Fig1: peça.

- 5 {16.7} Um palíndromo é uma cadeia de caracteres que se lê da mesma forma da frente para trás e de trás para a frente. Considere a seguinte definição indutiva do conceito relacionado pal:
1. Cada letra do alfabeto é um pal.
  2. Se  $\alpha$  é um pal também o é o resultado de concatenar uma letra qualquer antes e depois de  $\alpha$ .
  3. Nada é um pal exceto se obtido por via de 1. e 2.

Prove por indução que todo o *pal* é um palíndromo. O converso é verdadeiro? Se for, prove-o. Se não for, corrija a definição de forma que passe a sê-lo.

- 6 {16.16} Prove que, para todos os números naturais  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ .
- 7 {16.17} Prove que, para todos os números naturais  $n \geq 2$ ,  $(1-1/2)(1-1/3)\dots(1-1/n) = 1/n$ .
- 8 {16.8} Definição indutiva de wff existencial.
1. Cada wff atômica ou atômica negada é uma wff existencial.
  2. Se  $P_1, \dots, P_n$  forem wff existenciais, também o são  $(P_1 \vee \dots \vee P_n)$  e  $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n)$ .
  3. Se  $P$  for uma wff existencial, também o é  $\exists v P$ , para qualquer variável  $v$ .
  4. Nada é uma wff existencial exceto se obtida por via de 1., 2. e 3.

Prove por indução os seguintes factos:

- a) Se  $P$  for uma wff existencial então é logicamente equivalente a uma wff prenex sem quantificadores universais.
- b) Se  $P$  for uma frase existencial verdadeira nalgum mundo, permanecerá verdadeira se se adicionarem objetos a esse mundo. (Necessita de provar algo mais forte para conseguir sustentar a indução.)

- 9 {16.18} Repare que  $1^3+2^3+3^3=36=6^2$  e que  $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225=15^2$ . Mostre que a soma dos primeiros  $n$  cubos perfeitos é um quadrado. NOTA: este exercício é uma instância do Paradoxo do Inventor – tem que provar algo mais forte do que o pedido.