Lógica de Primeira Ordem -3

Métodos de Prova com Quantificadores

Provas Formais com Quantificadores

Formas Especiais de Quantificação

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011
Capítulos: 12, 13, 14

Passos de prova com $\forall$ e $\exists$

- De uma condição universal, inferir que se verifica para um objeto específico: **eliminação do universal**
  - De $\forall x\ P(x)$ inferir $P(c)$
- Da verificação de uma condição para um objeto particular, inferir uma condição existencial: **introdução do existencial**
  - De $P(c)$ inferir $\exists x\ P(x)$
- Validade destes passos: depende de convenção da LPO
  - um nome denota sempre um objeto

Método da instanciação existencial

- Partindo de asserção existencial:
  - criar um nome para o objeto a que se refere a quantificação
  - remover a quantificação
- Uso no raciocínio comum
  - criar alcunha para objeto que se procura
  - raciocinar como se este fosse conhecido
- Efeito: **eliminação do existencial**

- Essencial: nome introduzido *não pode estar a ser usado* para outro objeto

Prova condicional geral

- Raciocinar acerca de um objeto arbitrário de certo tipo
- Provar uma afirmação universal sobre objetos desse tipo
- Exemplo:

  Todos os alunos com boa nota a Programação sabem programar

  Todos os alunos do 3º ano tiveram boa nota a Programação

  Como concluir que todos os alunos do 3º ano sabem programar?

Escolhe-se um aluno do 3º ano qualquer, chamemos-lhe Zé. Pela 2ª premissa, o Zé teve boa nota a programação. Então pela 1ª premissa o Zé sabe programar. Como o Zé é um aluno arbitrário do 3º ano, conclui-se que todos estes sabem programar.

Métodos de prova com quantificadores

S(x), P(x) e Q(x): wff's

1. Instanciação Existencial

Tendo provado $\exists x\ S(x)$, pode escolher-se um <u>novo</u> símbolo de constante c e assumir $S(c)$

2. Condicional geral

Para provar $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$, pode escolher-se um <u>novo</u> símbolo de constante c, assumir $P(c)$ e provar $Q(c)$

3. Generalização universal

Para provar $\forall x\ S(x)$, pode escolher-se um <u>novo</u> símbolo de constante c, e provar $S(c)$

Regras de inferência para ∀

Eliminação do universal

$\forall x\ P(x)$

⋮

▷ $P(c)$

Introdução do universal

$\boxed{c}$

⋮

$P(c)$

▷ $\forall x\ P(x)$

Instanciação universal

Generalização universal

x: qualquer variável
c: qualquer constante
P(c): resultado de substituir x por c em P(x)

c: constante que não ocorre fora da prova em que é introduzida

Prova condicional geral

Prova condicional geral

		$\boxed{c}\ P(c)$
		$\vdots$
		$Q(c)$
$\triangleright$		$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

Interesse: tornar provas formais mais semelhantes às informais

- Equivalente a prova com introdução de universal:

$\boxed{c}$

$P(c)$

$\vdots$

$Q(c)$

$P(c) \rightarrow Q(c)$

$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

Exemplo

1.	$\forall x\,(R(x) \rightarrow S(x))$	
2.	$\forall x\,R(x)$	
3.	$\boxed{d}$	
4.	$R(d) \rightarrow S(d)$	$\forall$ Elim: 1
5.	$R(d)$	$\forall$ Elim: 2
6.	$S(d)$	$\rightarrow$ Elim: 4,5
7.	$\forall x\,S(x)$	$\forall$ Intro: 3-6

Qualquer prova condicional geral (método efetivamente usado em provas informais) pode ser vista como a combinação de uma prova condicional com uma generalização universal

Regras de inferência para ∃

Introdução do existencial

$$\begin{array}{l|l} & P(c) \\ & \vdots \\ \triangleright & \exists x\, P(x) \end{array}$$

Eliminação do existencial

$$\begin{array}{l|l} & \exists x\, P(x) \\ & \begin{array}{|l} \boxed{c}\quad P(c) \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ \triangleright & Q \end{array}$$

x: qualquer variável

c: qualquer constante

P(c): resultado de substituir x por c em P(x)

c: constante que não ocorre fora da prova em que é introduzida, em particular em Q

(Semelhante a eliminação da disjunção)

Exemplo

1. $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow Large(x))$
2. $\forall x\ (Large(x) \rightarrow LeftOf(x,c))$
3. $\exists x\ Cube(x)$

Subprova por eliminação do existencial 3.

4. $\boxed{e}$ $Cube(e)$
5. $Cube(e) \rightarrow Large(e)$ — $\forall$ Elim: 1
6. $Large(e)$ — $\rightarrow$ Elim: 5,4
7. $Large(e) \rightarrow LeftOf(e,c)$ — $\forall$ Elim: 2
8. $LeftOf(e,c)$ — $\rightarrow$ Elim: 7,6
9. $Large(e) \wedge LeftOf(e,c)$ — $\wedge$ Intro: 6,8
10. $\exists x\ (Large(x) \wedge LeftOf(x,c))$ — $\exists$ Intro: 9

11. $\exists x\ (Large(x) \wedge LeftOf(x,c))$ — $\exists$ Elim: 3, 4-10

O facto de a conclusão 10 ser existencial é coincidência (embora comum); não pode é conter a constante “e” introduzida na premissa 4.

Exemplo elaborado

1. $\neg\forall x\, P(x)$	
2. $\neg\exists x\, \neg P(x)$	Subprova por contradição
3. $\boxed{c}$	Subprova por generalização universal
4. $\neg P(c)$	Subprova por contradição
5. $\exists x\, \neg P(x)$	$\exists$ Intro: 4
6. $\perp$	$\perp$ Intro: 5, 2
7. $\neg\neg P(c)$	$\neg$ Intro: 4-6
8. $P(c)$	$\neg$ Elim: 7
9. $\forall x\, P(x)$	$\forall$ Intro: 3-8
10. $\perp$	$\perp$ Intro: 9, 1
11. $\neg\neg\exists x\, \neg P(x)$	$\neg$ Intro: 2-10
12. $\exists x\, \neg P(x)$	$\neg$ Elim: 11

$\exists x\, \neg P(x)$

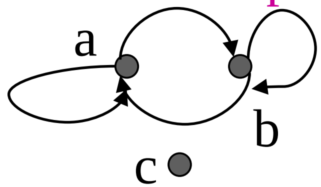
Nota: $\exists$-Intro como estratégia geral: não funciona pq 1. não permite obter diretamente $\neg P(c)$. Usar contradição com 1., via generalização universal; para provar P(c) usa-se a contradição

Exemplo

- Premissas:

1. $\forall x \forall y \forall z\ ((Blabla(x,y) \wedge Blabla(y,z)) \rightarrow Blabla(x,z))$
2. $\forall x \forall y\ (Blabla(x,y) \rightarrow Blabla(y,x))$
3. $\exists x \exists y\ Blabla(x,y)$

contraexemplo



- Conclusão:

$\forall x\ Blabla(x,x)$

- "Prova":
  - Instanciação existencial de 3: b e c arbitrários tais que Blabla(b,c)
  - De 2: Blabla(c,b)
  - Aplicando 1, com x=z=b e y=c: Blabla(b,b)
  - Sendo b arbitrário, por generalização universal: $\forall x\ Blabla(x,x)$

Onde está errada?

Não se pode usar para generalização universal um nome introduzido para instanciação existencial

Métodos de prova

- Nos métodos de prova para quantificadores
  - rever interações entre métodos que introduzem novos nomes

$$1.\ \forall x(\mathrm{Rapaz}(x) \rightarrow \exists y(\mathrm{Menina}(y) \wedge \mathrm{Gosta}(x, y)))$$
$$2.\ \exists y(\mathrm{Menina}(y) \wedge \forall x(\mathrm{Rapaz}(x) \rightarrow \mathrm{Gosta}(x, y)))$$

1. é consequência lógica de 2.

- assumir 2; nome c para menina
- Prova condicional geral para 1:
  - Assumir d: rapaz qualquer
  - todos os rapazes gostam de c, d gosta de c
  - generalização existencial, d gosta de alguém
  - d é arbitrário, 1 é verdadeiro

2. é consequência lógica de 1. ???

- assumir 1; prova condicional geral:
  - Assumir e: rapaz qualquer
  - por 1., e gosta de alguma menina; seja f uma menina de quem e gosta
  - e escolhido arbitrariamente, todos os rapazes gostam de f
- generalização existencial, existe alguém de quem todos gostam

Prova formal: exemplo

Provas no sistema F: facilitam a verificação das restrições no uso dos nomes nas provas com quantificadores

1. ∀x∃y R(x,y)	
2. $\boxed{c}$	
3. ∃y R(c,y)	∀ Elim: 1
4. $\boxed{d}$ R(c,d)	
5. R(c,d)	Reit: 4
6. R(c,d)	∃ Elim: 3, 4- 5
7. ∀x R(x,d)	∀ Intro: 2 -6
8. ∃y∀x R(x,y)	∃ Intro: 7

<u>Erro</u>:

No passo 6, d é usado fora da subprova onde foi introduzido

Exemplo

1. $\exists y \forall x\, R(x,y)$	
2. $\boxed{d}$ $\forall x\, R(x,d)$	
3. $\boxed{c}$	
4. $R(c,d)$	$\forall$ Elim: 2
5. $\exists y\, R(c,y)$	$\exists$ Intro: 4
6. $\forall x \exists y\, R(x,y)$	$\forall$ Intro: 3-5
7. $\forall x \exists y\, R(x,y)$	$\exists$ Elim: 1, 2-6

- Constantes novas

  $\boxed{d}$ $\boxed{c}$

  usadas só dentro das provas onde estão definidas

Restrição aos métodos de prova

- Prova condicional geral de $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
  - Assume-se c e P(c) e prova-se Q(c)
  - Problema surge quando Q(c) menciona algum objeto cuja escolha depende do objeto c
- Como garantir correção?
  - Exigir que Q(c) não mencione nenhum nome que tenha sido introduzido por instanciação existencial <u>após</u> a suposição de P(c)
- Generalização universal: $\forall x P(x)$
  - Assumindo a e provando P(a)
  - Exigir que P(a) não mencione nenhum nome que tenha sido introduzido por instanciação existencial <u>após</u> a

Revisão dos métodos de prova com quantificadores

S(x), P(x) e Q(x) são wff's

1. Instanciação Existencial

- Tendo provado $\exists x\ S(x)$, pode escolher-se um <u>novo</u> símbolo de constante c e assumir $S(c)$

2. Prova condicional geral

- Para provar $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$, pode escolher-se um <u>novo</u> símbolo de constante c, assumir $P(c)$ e provar $Q(c)$
- Garantir que Q não contém qualquer nome introduzido por instanciação existencial após a suposição de $P(c)$

3. Generalização universal

- Para provar $\forall x\ S(x)$, pode escolher-se um <u>novo</u> símbolo de constante c, e provar $S(c)$
- Garantir que S não contém qualquer nome introduzido por instanciação existencial após a suposição de c

Exemplo

Provar: *Há um número infinito de primos (teorema de Euclides)*

$\forall x \exists y\, (y \geq x \wedge Prime(y))$

<u>Assumir</u>: n arbitrário   <u>Provar</u>: Existe um primo maior ou igual a n

k: produto de todos os primos menores que n

Todos os primos menores que n dividem k com resto 0

m = k+1

Todos os primos menores que n dividem m com resto 1

m, como todos os inteiros, pode ser fatorizado em primos

p: fator primo de m

p tem de ser maior ou igual a n

Por generalização existencial: existe um primo que é maior ou igual a n

Por generalização universal: como n é arbitrário, para todo o n existe um primo maior ou igual a n

$\exists!$

- Quantificador de existência e unicidade

  Existe 1 e 1 só objeto que satisfaz P

  $\exists x[P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y=x)]$

  Abreviatura: $\exists!x\ P(x)$
- Variante para n objetos

Existem exatamente n objetos que satisfazem P

  $\exists^{!n}x\ P(x)$
- São abreviaturas, não quantificadores novos
  - LPO: expressões para quantificadores numéricos pouco sugestivas
- Tarski's World: não tem quantificadores numéricos

Problema

- Dar expressões em LN para as fórmulas seguintes.

  (Ver quais das expressões são logicamente equivalentes)

  1. $\exists! x Blop(x)$
  2. $\exists x \forall y [Blop(y) \rightarrow y=x]$
  3. $\exists x \forall y [Blop(y) \leftrightarrow y=x]$
  4. $\forall x \forall y [(Blop(x) \wedge Blop(y)) \rightarrow x=y]$
  5. $\forall x \forall y [(Blop(x) \wedge Blop(y)) \leftrightarrow x=y]$

Métodos de prova com afirmações numéricas

- Métodos e regras básicas para quantificadores: suficientes
- Afirmações numéricas: pouco sugestivas em LPO
  - Regras específicas clarificam significado
- Exemplo:

  Há exatamente 2 salas de aula, e cada uma tem exatamente 3 computadores. Todo o computador está numa sala de aula. Provar que existem exatamente 6 computadores

Existem no máximo 6:

- Todo o computador tem de estar numa sala de aula
- Cada sala tem no máximo 3
- Existem no máximo 6 nas duas salas

Existem pelo menos 6:

- Cada sala tem pelo menos 3 (Suposição: nenhum computador pode estar em 2 salas)
- Há pelo menos 6 nas duas salas

Existem exatamente 6

Provar $\exists^{!n} x\ P(x)$

Existem pelo menos n objetos que satisfazem P(x)
Existem no máximo n objetos que satisfazem P(x)

- $\exists! x[Par(x) \wedge Primo(x)]$

Existência:
2 é par e é primo
Por generalização existencial:
$\exists x[Par(x) \wedge Primo(x)]$

Unicidade:
Provar que para todo o x, se x é par e é primo então x=2
(Prova condicional geral)
Supor que x é primo e par
Como x é par, é divisível por 2
Como x é primo, só é divisível por si e pela unidade
Então x =2

LPO: Limites da expressividade

- Construções de LN que não se captam em LPO
  - *se… então* tem usos que não são funcionais na verdade
- Quantificações diversas
  - As expressáveis: requerem circunlóquios
  - Não expressáveis: *a maioria…, muitas…, poucos…, bastantes…,*
    - significado vago
    - precisando o significado: ainda não é expressável
- Formas singulares e plurais

  Todos os alunos podem ter 18 a MDIS

  Qualquer aluno pode ter 18 a MDIS
- Uso do tempo verbal e da referência no espaço
  - Em LPO: domínio intemporal de relações imutáveis

LPO: Limites da expressividade

- Modalidades:
  - *pode ser…, deve ser…, poderia ter sido…,*
- Extensões da LPO: têm soluções para as limitações
- Exemplo(14.33):

  Do facto *Poucos cubos são grandes*

  pode concluir-se *Poucos cubos são cubos grandes*?
- Exemplo(14.34):

  Do facto *Poucos cubos são grandes*

  pode concluir-se *Poucos objetos grandes são cubos*?
- Exemplo(14.56):

  Serão equivalentes *Sou capaz de comer cada uma das maçãs da taça*

  e *Sou capaz de comer todas as maçãs da taça*?

Sintaxe versus semântica

- Noções **semânticas**
  - indivíduo
  - relação
  - mundo, modelo, estrutura
  - verdade
  - satisfação
  - consequência lógica
  - fórmula válida

- Noções **sintáticas**
  - símbolo de indivíduo
  - predicado
  - conetiva
  - quantificador
  - frase
  - fórmula bem formada
  - variável livre e ligada
  - regra de inferência
  - fórmula provável

Propriedades do sistema de inferência

- **Consequência lógica**

pressupostos

$P_1, P_2, \ldots, P_n$

$\models$ consequência

Q

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$

consequências

- **Sistema de inferência**
  - Fitch ou outro

premissas

$P_1, P_2, \ldots, P_n$

$\vdash$ derivação

Q’

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$

conclusões

- Sistema de inferência é
  - **Completo** $Q \subseteq Q'$ produz todas as consequências
  - **Correto** $Q' \subseteq Q$ tudo o que produz é consequência
  - Correto e completo $Q = Q'$