Representação de operadores a partir da tabela de verdade

Considere a conetiva * definida pela seguinte tabela de verdade.

P	Q	P * Q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

a) Exprima essa conetiva na forma normal disjuntiva.

b) Exprima a mesma conetiva utilizando apenas os operadores $\neg$ e $\rightarrow$.

c) O conjunto de operadores $\neg$ e $\rightarrow$ é completo? E o conjunto $\wedge$ e $\vee$? E o operador *?

---

a) $P * Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

b) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

$P * Q \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$

c) Como a tabela de verdade é completa para a representação das conetivas Booleanas e pode ser representada na DNF, bastam as conetivas $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ para representar qualquer outra conetiva. Para estudar se algum outro conjunto de conetivas é completo, basta implementar aquelas três nesse outro conjunto. Por exemplo, $\neg$ e $\wedge$ é completo porque é possível representar o $\vee$ à custa de $\neg$ e de $\wedge$ usando as leis de De Morgan. De onde se conclui que basta implementar estas duas conetivas para provar a completude. Mas o conjunto $\wedge$ e $\vee$ não é completo, porque não é possível representar a negação, e o * sozinho não é completo, embora $\neg$ e * seja.

$P \wedge Q \Leftrightarrow P * \neg Q$

$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow \neg(P * \neg P) \Leftrightarrow \neg\bot \wedge \neg P \Leftrightarrow \neg\bot * P \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg P) * P \Leftrightarrow \neg(P * P) * P$

$P*P \Leftrightarrow P \wedge \neg P \Leftrightarrow \bot$

$(P*P)*P \Leftrightarrow \bot \wedge \neg P \Leftrightarrow \bot$

$P*(P*P) \Leftrightarrow P \wedge \neg\bot \Leftrightarrow P$

Só com * não se consegue representar a negação.