Funções

Funções.

Cardinalidade de conjuntos.

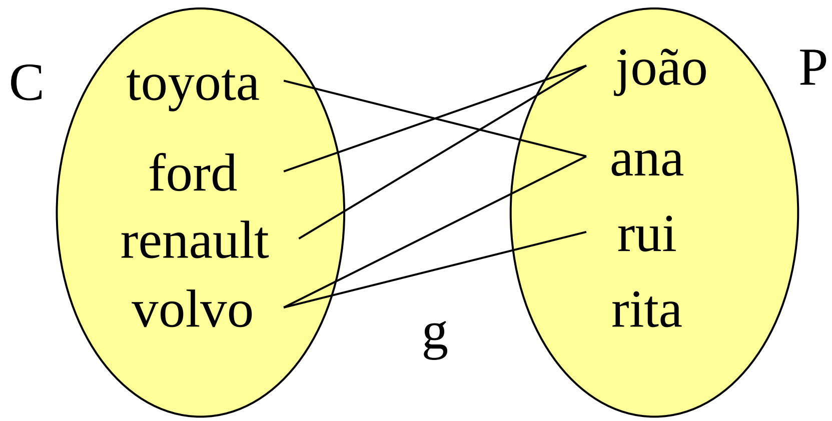
Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006

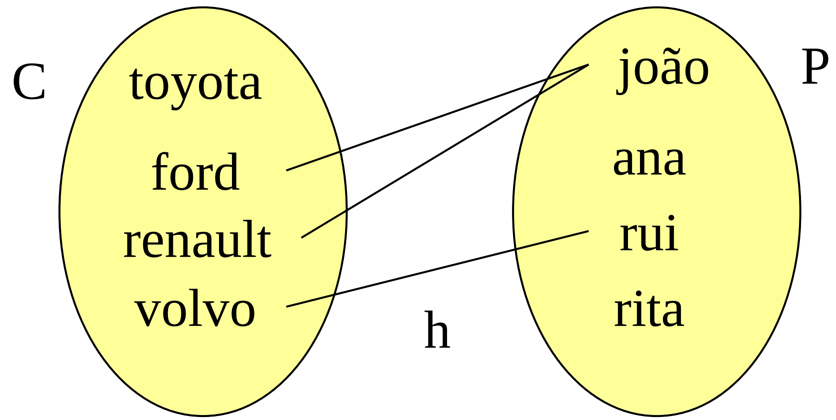
Capítulo: 3

FUNÇÕES

Definição de função

- Uma **função** de um conjunto A para um conjunto B é uma relação binária f de A para B com a propriedade de que, para cada $a \in A$, existe exatamente um $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$
  - Portanto f é um subconjunto do produto cartesiano
  - f está definida em **todos** os elementos do domínio A
  - Cada a está associado a um único b





g não é função: {…, (volvo,ana), (volvo,rui), …}

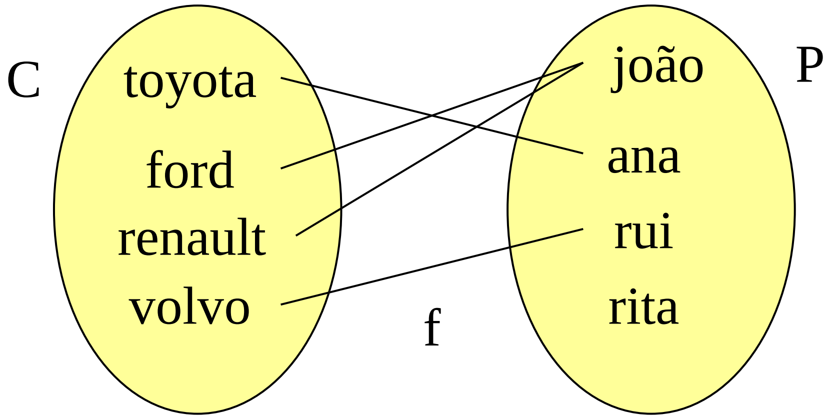
h não é função: (toyota,?)

Exemplo de função

- f={(toyota,ana), (ford,joão), (renault,joão), (volvo,rui)}
- f: C $\rightarrow$ P
- f: a $\mapsto$ b sse b=f(a)

b é a imagem de a

- f: toyota $\mapsto$ ana
  - ford $\mapsto$ joão
  - renault $\mapsto$ joão
  - volvo $\mapsto$ rui

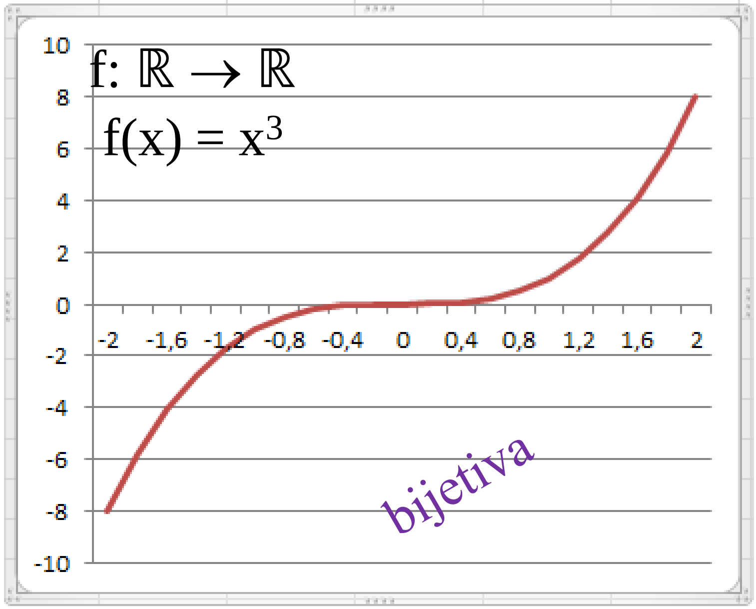


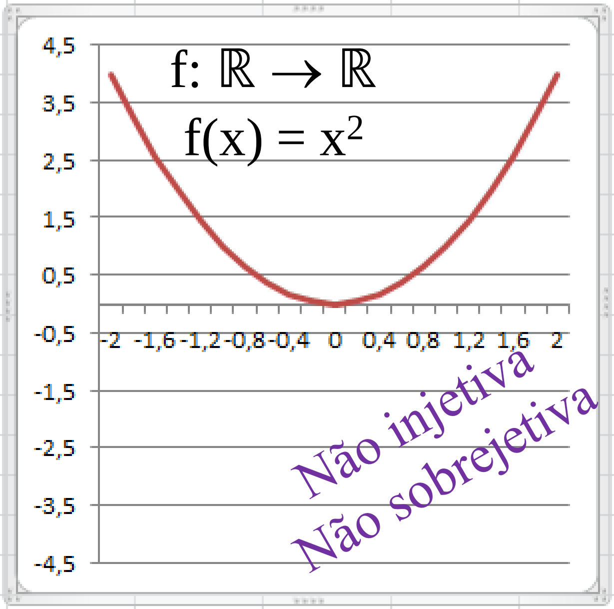
- **Domínio** de f: dom f = C
- **Conjunto de chegada**: P
- **Contradomínio ou imagem** de f:

$$\text{rng } f = \{b \in P \mid (a,b) \in f \text{ para algum } a \in C\}$$
$$= \{b \in P \mid b=f(a) \text{ para algum } a \in C\}$$

Propriedades de uma função

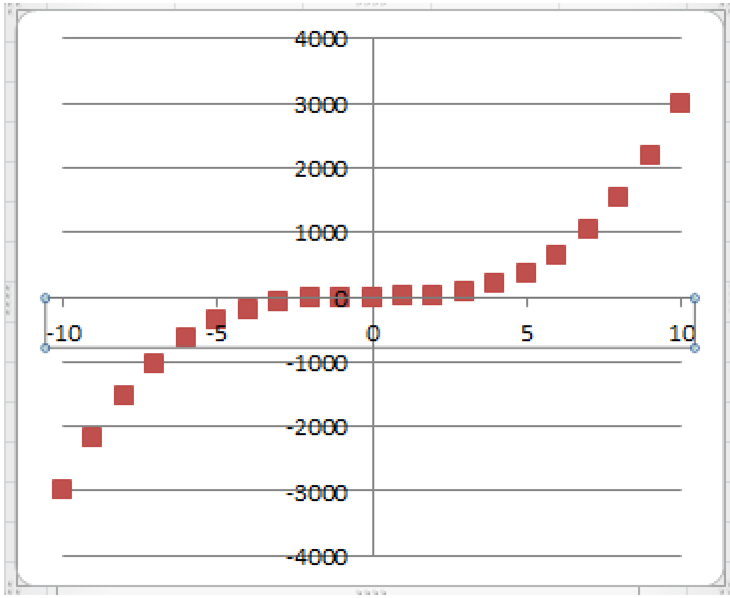
- Função f: A $\rightarrow$ B é **sobrejetiva** sse rng f = B
  - Contradomínio coincide com o conjunto de chegada
  - Todo o b $\in$ B é imagem de pelo menos um a $\in$ A
- Função é **injetiva** ou um-para-um sse $f(a_1)=f(a_2) \rightarrow a_1=a_2$
  - Elementos diferentes de A têm imagens diferentes
- Função é **bijetiva** sse for sobrejetiva e injetiva





Exemplo

- Seja f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x^3-x$. Determine se f é injetiva ou sobrejetiva.
- Resolução:
  - **Injetiva**: uma linha horizontal só pode intersetar o gráfico uma vez
  - Aparentemente isso acontece mas na zona da origem pode haver dúvidas
  - Por contradição, supor $f(x_1)=f(x_2)$
  - $3x_1^3-x_1=3x_2^3-x_2$
  - $3(x_1^3-x_2^3)=x_1-x_2$
  - $3(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=x_1-x_2$
  - Se $x_1 \neq x_2$ então $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=1/3$
  - Impossível pois x_1 e $x_2 \in Z$

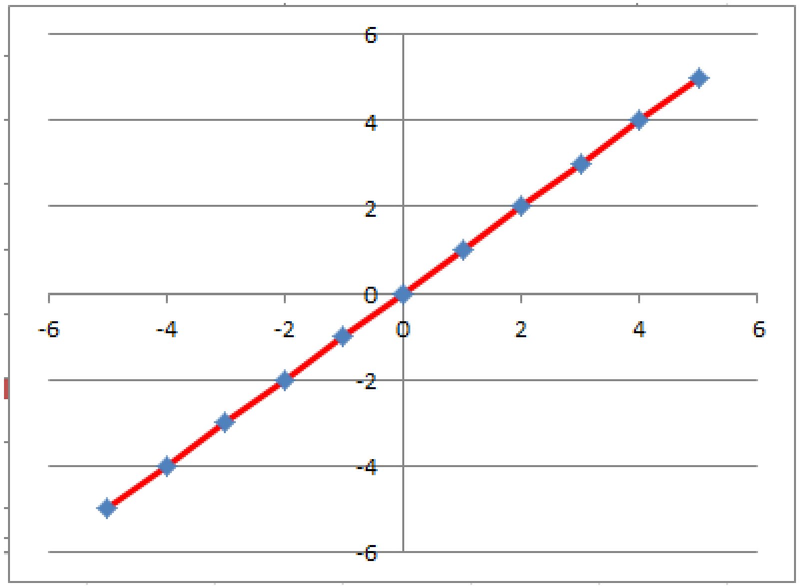


Exemplo (cont.)

- **Sobrejetiva**: todos os elementos do conjunto de chegada têm que ser imagens
  - Testando para o caso de b=1
  - $1=3x^3-x = x(3x^2-1)=1$
  - Não tem solução, pelo que 1 não é imagem e portanto a função não é sobrejetiva

Função identidade

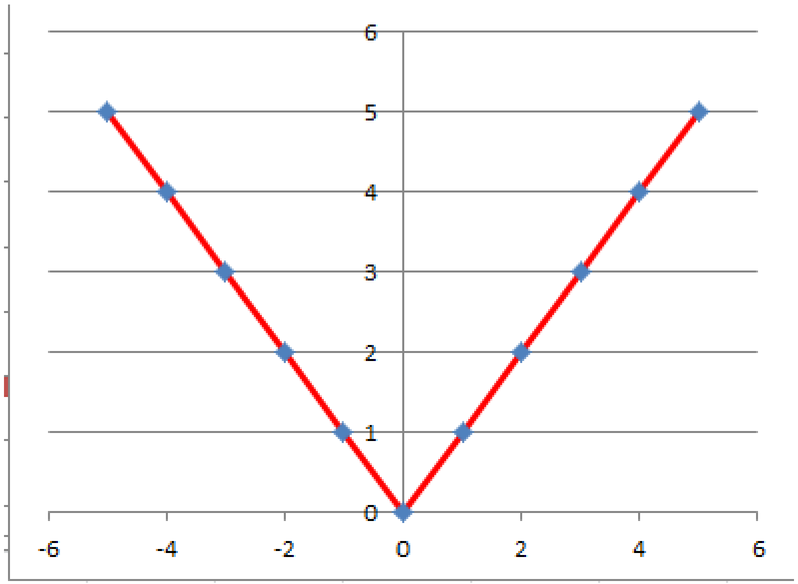
- A função identidade num conjunto A é a função ι_A: A $\rightarrow$ A definida por $\iota_A(a)=a$
- Em termos de pares ordenados, $\iota_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$



- A azul A=$\mathbb{Z}$
- A vermelho A=$\mathbb{R}$
- Não é só a regra de cálculo da imagem que interessa, também os conjuntos de partida e chegada

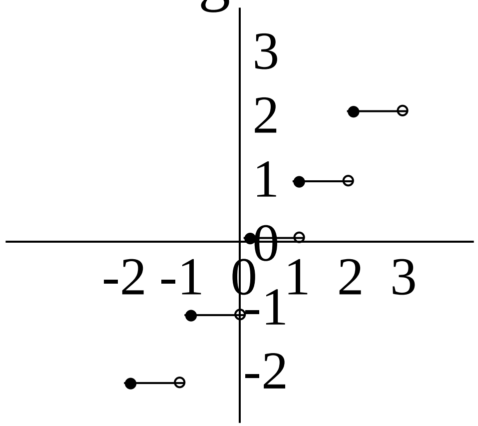
Função valor absoluto

- O valor absoluto de um número x, denotado |x| é definido
- $$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

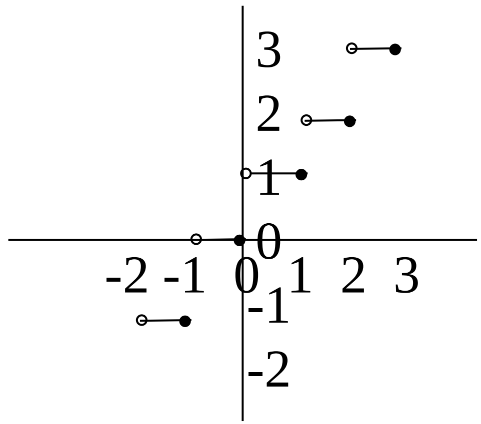


Funções chão e teto

- Para qualquer número real x, o **chão de x**, escrito $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro inferior ou igual a x.
- A função chão f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define-se $f(x) = \lfloor x \rfloor$
  - A imagem de f é $\mathbb{Z}$



- Para qualquer número real x, o **teto de x**, escrito $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro superior ou igual a x.
- A função teto f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define-se $f(x) = \lceil x \rceil$
  - A imagem de f é $\mathbb{Z}$



Funções com vários argumentos

- Da mesma forma que uma função (de um argumento) é uma relação binária em que existe um e um só par para cada valor do primeiro elemento (domínio da função), uma função de n-1 argumentos é uma relação de ordem n em que existe uma e uma só sequência de ordem n para cada sequência dos primeiros n-1 elementos
  - Diz-se que a relação é funcional no último argumento
- Visão relacional
  - Resultados(aluno, disciplina, ano, nota)
- Visão funcional
  - nota = resultado(aluno, disciplina, ano)
  - É esta a visão das funções na lógica, em que cada termo denota um objeto, a imagem da função

Inversa de uma função

- Dada uma função f: A $\to$ B, define-se a função inversa, se existir, como $f^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b) \in f\}$, f^{-1}: B $\to$ A.
- É sempre possível inverter a ordem dos pares de uma relação binária. Porque se salvaguarda na definição a possibilidade de não existir a função?
- Uma função f: A $\to$ B tem inversa se e só se for bijetiva

$$a = f^{-1}(b) \text{ sse } b=f(a)$$

- Exemplo: Dada f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = 2x-3, verifique se f tem inversa e, em caso afirmativo, obtenha essa inversa
- Para obter $y= f^{-1}(x)$ fazer $x=f(y)$: $x=2y-3$; $y = \frac{x+3}{2}$
- $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

Composição de funções

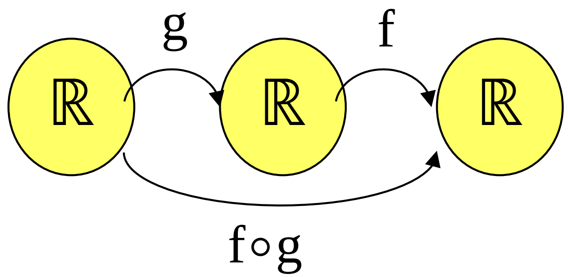
- Sejam as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$. A composição de g e f é a função $g \circ f: A \rightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para todo o $a \in A$.
  - Atenção à ordem da composição: em geral $g \circ f \neq f \circ g$ (ler g após f é diferente de f após g).

- Duas funções f e g são iguais sse tiverem o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e $f(a)=g(a)$ para todo o a no domínio comum.
- A composição de funções é associativa

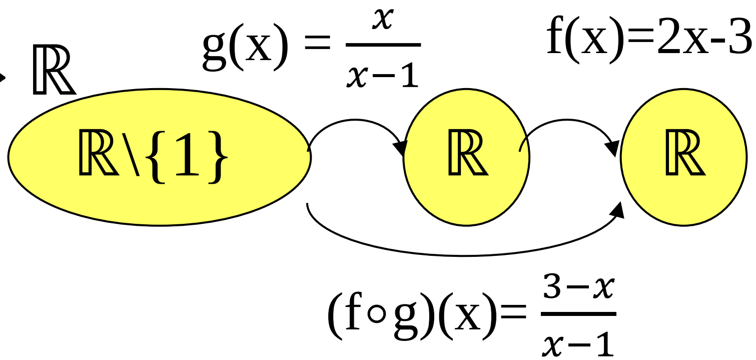
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Exemplo de composição

- **Exemplo 1**: f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $f(x) = 2x-3 \qquad g(x) = x^2+1$
- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = 2(x^2+1)-3$
- $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = (2x-3)^2+1$



- **Exemplo 2**: f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ g: $\mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$
- $f(x) = 2x-3 \qquad g(x) = \frac{x}{x-1}$
- Para g∘f existir rng f $\subseteq$ dom g
  - Como rng f = $\mathbb{R}$ não está contido no dom g = $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ a função não está definida



- Já f∘g está definida $(f\circ g)(x) = 2\frac{x}{x-1} - 3 = \frac{3-x}{x-1}$

Composição com a inversa

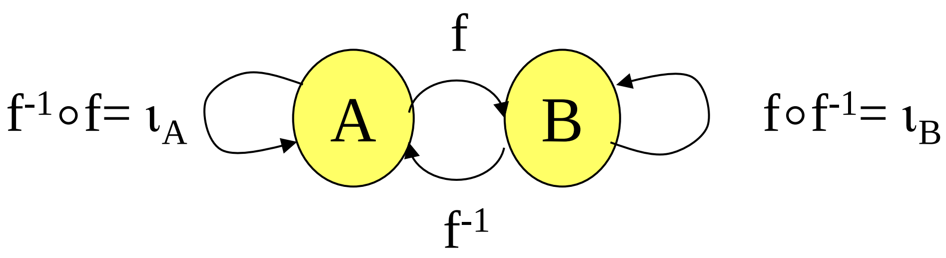
- Se f: A $\rightarrow$ B tiver inversa f^{-1}: B $\rightarrow$ A

  $f^{-1}(b)=a$ sse $b=f(a)$

- Então, para todo o $a \in A$

  $a = f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = (f^{-1} \circ f)(a)$

- Portanto $f^{-1} \circ f = \iota_A$ (função identidade em A)
- E também $f \circ f^{-1} = \iota_B$ (função identidade em B)



Inversa da composta

- Dadas g: A→B e f: B→C, exprima a inversa da composta $(f \circ g)^{-1}$ em termos das inversas das componentes f^{-1} e g^{-1}.
- R: $(f \circ g) \circ (f \circ g)^{-1} = \iota_C$

$$f^{-1} \circ (f \circ g) \circ (f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ \iota_C$$

$$(f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f \circ g)^{-1} = f^{-1}$$

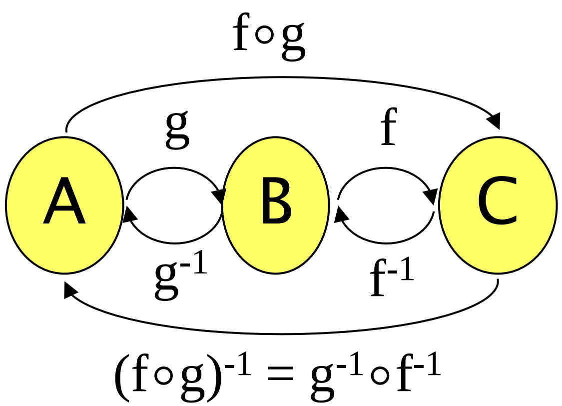
$$\iota_B \circ g \circ (f \circ g)^{-1} = f^{-1}$$

$$g \circ (f \circ g)^{-1} = f^{-1}$$

$$g^{-1} \circ g \circ (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$\iota_A \circ (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$



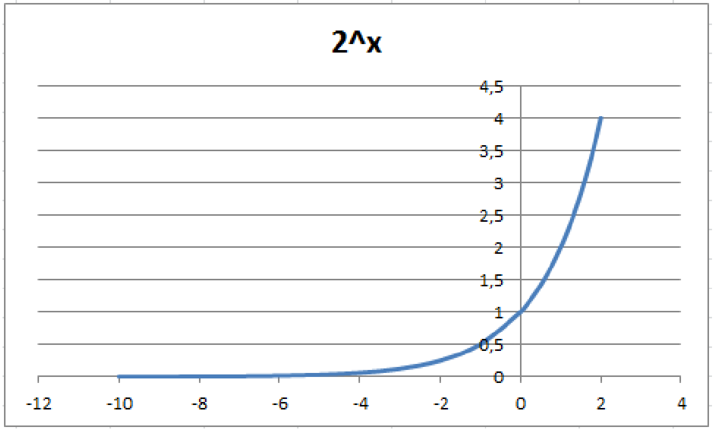
CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

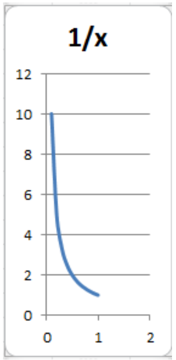
Conjuntos finitos e infinitos

- A cardinalidade de um conjunto A é o número de elementos desse conjunto, $|A|$
- $|\varnothing| = 0$
- Um conjunto A é **finito** se for vazio ou se se conseguir estabelecer uma correspondência biunívoca (função bijetiva) com $\{1,2,3,\ldots,n\}$, para um $n \in \mathbb{N}$. Define-se **cardinalidade** de A como n, $|A|=n$. Se A não for finito, é **infinito**.
- Exemplos:
  - $a \mapsto x$, $b \mapsto y$ é uma correspondência biunívoca entre $\{a,b\}$ e $\{x,y\}$
  - A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida por $f(n)= n-1$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \cup \{0\}$
  - A função $f: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ definida por $f(n)= 2n$ é uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ e o dos inteiros pares $2\mathbb{Z}$

Cardinalidade de conjuntos

- Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade $|A|=|B|$ sse existir uma correspondência biunívoca entre ambos.
  - $|\{a,b\}| = |\{x,y\}|$
    - $a \mapsto x$, $b \mapsto y$
  - $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{0\}|$
    - $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, …, $n \mapsto n-1$, …
  - $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}|$
    - $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 2$, $-1 \mapsto -2$,
    - $2 \mapsto 4$, $-2 \mapsto -4$, …, $n \mapsto 2n$, …
  - $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^+|$
    - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $f(x) = 2^x$
  - $|]0,1]| = |[1,+\infty[|$
    - $f:]0,1] \to [1,+\infty[$ $f(x) = 1/x$





- Quaisquer dois intervalos de números reais têm a mesma cardinalidade

Cardinalidade de $\mathbb{Z}$

- $\aleph_0$ (aleph zero) denota a cardinalidade dos números naturais
- Mostre que $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$
- Para responder basta conseguir enumerar os elementos de $\mathbb{Z}$, isto é, estabelecer uma correspondência biunívoca com os naturais
  - 0,1,-1,2,-2,3,-3,…
  - $f(n) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}n & se\ n\ par \\ -\frac{1}{2}(n-1) & se\ n\ ímpar \end{Bmatrix}$
  - ou
  - $f(n) = \frac{1}{4}[1 + (-1)^n(2n - 1)]$

Cardinalidade de $\mathbb{N}^2$

- Mostre que $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$
- Enumere os pares da figura pela ordem das setas

(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	…
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	…
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	…
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1) …

- Esta mesma construção serve para mostrar que $|\mathbb{Q}|= \aleph_0$

Cardinalidade de $\mathbb{R}$

- Mostre que]0,1[é não enumerável.
- Prova por contradição: suponhamos que o conjunto é enumerável. Então existe uma lista de **todos** os reais entre 0 e 1, a_1, a_2, a_3, a_4, … que se pode escrever na forma decimal

$$a_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$$
$$a_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$$
$$a_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$$
$$\ldots$$

Argumento diagonal
George Cantor

  - Construir um número $b=0.b_1b_2b_3\ldots$: $b_i = \begin{Bmatrix} 2 & se\ a_{ii} = 1 \\ 1 & se\ a_{ii} \neq 1 \end{Bmatrix}$
  - O número b está entre 0 e 1 mas é diferente de cada a_i precisamente no dígito a_{ii} e portanto não está na lista, contradizendo a hipótese. Então o conjunto]0,1[é não enumerável e $\mathbb{R}$ também não.

Hipótese do contínuo

- Conclui-se que há conjuntos com a cardinalidade dos naturais e conjuntos muito maiores com a cardinalidade dos reais
- **Hipótese do contínuo**: não existe nenhum conjunto A tal que $\aleph_0 < |A| < |\mathbb{R}|$
  - Esta afirmação não se consegue provar a partir dos axiomas normais da teoria de conjuntos de forma que é adicionada como axioma
- Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável
- O conceito de "mesma cardinalidade" estabelece uma relação de equivalência nos conjuntos, a qual é, em particular, transitiva.

Conjuntos infinitos

- A noção de cardinalidade particiona os conjuntos finitos em classes (de conjuntos com o mesmo número de elementos) e também particiona os conjuntos infinitos em classes (de conjuntos com a mesma cardinalidade)
  - $E_0 = \{C \mid |C| = 0\} = \{\varnothing\}$ classe de equivalência cardinalidade 0
  - $E_1 = \{C \mid |C| = 1\} = \{\{a\}, \{1\}, \{(a,b)\}, \ldots\}$ cl. eq. card. 1
  - $E_2 = \{C \mid |C| = 2\} = \{\{a,b\}, \{1,2\}, \{(a,b),(c,d)\}, \ldots\}$ cl. eq. card. 2
  - $E_{\aleph 0}=\{C \mid |C| = \aleph_0\} = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^2, \ldots\}$ cl. eq. card. $\aleph_0$
  - $E_{\aleph 1}=\{C \mid |C| = |\mathbb{R}|\} = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^+,]0,1[, \ldots\}$ cl. eq. card. $|\mathbb{R}|$
- Um conjunto A é **infinito enumerável** sse $|A| = |\mathbb{N}|= \aleph_0$. Um conjunto é **enumerável** sse for finito ou infinito enumerável. Caso contrário é **não enumerável** (como $\mathbb{R}$ e qualquer seu intervalo).