Conjuntos

Conjuntos.

Relações binárias.

Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006

Capítulo: 2

CONJUNTOS

Conjuntos

- **Conjunto** é uma coleção de objetos chamados elementos ou membros
  - Definição ingénua
  - Base da linguagem da matemática
- Descrição em extensão
  - {minho, douro, mondego, tejo, sado, guadiana} – principais rios
  - $\{x\}$ – conjunto com um elemento
  - $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ – números naturais, sem 0
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ – números inteiros
- Descrição em compreensão
  - $\{x \mid P(x)\}$ – conjunto dos elementos x tais que P(x) é verdade
  - {r | r é um dos rios principais}

Mais definições

- Definições alternativas de conjunto dos ímpares positivos
  - {n | n é um inteiro ímpar, n>0} {2k-1 | k= 1,2,3,…} {2k-1 | k $\in \mathbb{N}$}
- Predicado de pertença a um conjunto
  - k $\in \mathbb{N}$ – verdade se k for um **elemento** do conjunto $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$= { $\frac{m}{n}$ | m, n $\in \mathbb{Z}$, n $\neq$ 0} – números racionais
  - Dízimas finitas ou infinitas periódicas
- $\mathbb{R}$ – números reais
  - Da forma $a.a_1a_2\ldots$ em que a $\in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \{0,1,..,9\}$
  - Contém racionais e irracionais (qual o maior?)
    - Irracionais não representáveis como fração, dízimas infinitas não periódicas
    - π = 3.14159… e = 2.71 ... $\sqrt{3}$ = 1.732 …
    - Não se sabe se $\pi - e$ é um irracional ou não
- $\mathbb{C}$= {a+bi | a,b $\in \mathbb{R}$, i^2=-1} – números complexos

Subconjuntos

- **Igualdade** A=B – dois conjuntos A e B são iguais se e só se ambos contiverem os mesmos elementos ou nenhum tiver elementos
- **Conjunto vazio** $\emptyset$ – é o conjunto sem elementos { }
- **Subconjunto** $A \subseteq B$ – A é um subconjunto de B se e só se cada elemento de A for elemento de B $\forall a\, (a \in A \rightarrow a \in B)$
  - A está contido em B, B é um superconjunto de A
  - $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ – A é um subconjunto próprio de B

Teorema. Para cada conjunto A, $A \subseteq A$ e $\emptyset \subseteq A$.

- **Prova**. Se $a \in A$ então $a \in A$, pelo que $A \subseteq A$. Assumindo, por contradição, que $\emptyset \subseteq A$ é falso então tem que existir um $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas isto é absurdo pois não existe $x \in \emptyset$. Logo $\emptyset \subseteq A$.

Igualdade e subconjuntos

- Teorema. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

- Para provar a equivalência é necessário prová-la nos dois sentidos
  - $A = B \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
  - $A = B \Leftarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
    - Esta última implicação obriga a provar que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$ para concluir a identidade

Verdade ou falso?

– $S = \{\{a\},b,c\}$

1. $a \notin S$ – V
2. $\{a\} \in S$ – V
3. $\{a,b,a\} = \{a,b\} = \{b,a\}$ – V
4. $\{a,b,c\} = S$ – F
5. $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$ – V
6. $\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$ – V
7. $\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{a,b\}\}$ – V
8. $\{a,b\} \in \{a,b,\{a,b\}\}$ – V
9. $\{b,\{a,b\}\} \in \{a,b,\{a,b\}\}$ – F
10. $\{\varnothing\} = \varnothing$ – F
11. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ – V
12. $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$ – V
13. $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$ – F
14. $\{a,b\} \subseteq \{a,b\}$ – V
15. $\varnothing \in \{x,y,\varnothing\}$ – V
16. $\varnothing \subseteq \{x,y,\varnothing\}$ – V
17. $\{\varnothing\} \notin \{x,y,\varnothing\}$ – V
18. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – V
19. $\{x \in Z \mid xy=10 \wedge y \in Z\} = \{1,2,5,10\}$ – F

Conjunto das partes

- O conjunto das partes de A, designado $\wp(A)$, é o conjunto de todos os subconjuntos de A. (Power set de A)
  - $\wp(A) = \{ B \mid B \subseteq A\}$
  - A= {a,b,c}
  - $\wp(A) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$
- Cardinalidade de A $|A|$
  - Número de elementos de A, se A for finito
  - Se $|A| = n$ então $|\wp(A)| = 2^n$

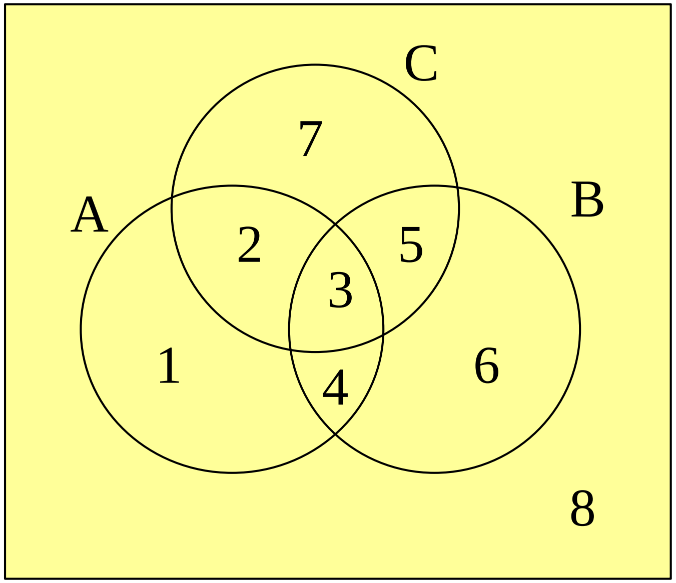
Operações sobre conjuntos

- **Reunião** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém os elementos em A e os elementos em B
  - $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto que contém os elementos que pertencem tanto a A como a B
  - $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- A reunião e a interseção são **associativas**
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- e **comutativas**
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- Podem ser generalizadas sem ambiguidade

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Diagramas de Venn



Ambiguidade

$(A \cap B) \cup C =? A \cap (B \cup C)$

$3+4 \cup 2+3+5+7 =?$

$1+2+3+4 \cap 2+3+4+5+6+7$

$2+3+4+5+7 \neq 2+3+4$

Parênteses imprescindíveis.

- Propriedade **distributiva**
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    - $1+2+3+4 \cup 3+5 = 1+2+3+4+5+6 \cap 1+2+3+4+5+7$
    - $1+2+3+4+5 = 1+2+3+4+5$

Mais operações sobre conjuntos

- A **diferença** de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos de A que não estão em B
  - $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- O **complemento** de um conjunto A é o conjunto dos elementos de um conjunto universal U que não estão em A
  - $A^c = U \setminus A = \{ x \mid x \notin A \wedge x \in U\}$
  - O conjunto universal U depende do contexto
- Exemplo do diagrama de Venn
  - $A \setminus B = 1+2$
  - $A^c = 5+6+7+8$ (U é todo o diagrama)

Verdadeiro ou falso?

- $A \cup \emptyset = A$ — Elemento neutro da reunião
- $A \cap \emptyset = A$ — Falso
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ — Elemento absorvente da interseção
- $A \cup U = U$ — Elemento absorvente da reunião
- $A \cap U = U$ — Falso
- $A \cap U = A$ — Elemento neutro da interseção
- $A \setminus B = A^c \cap B$ — Falso
- $(A^c)^c = A$ — Dupla complementação
- $A \setminus B = A \cap B^c$ — Diferença e interseção complementar
- $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ — Interseção e diferença
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ — Leis de De Morgan
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Diferença simétrica

- A **diferença simétrica** de dois conjuntos A e B é o conjunto de elementos que estão em A ou em B mas não nos dois
  - $A \oplus B = \{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
  - $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- $\{a,b,c\} \oplus \{x,y,a\} =$
- $= \{b,c,x,y\}$
- $\{a,b,c\} \oplus \varnothing =$
- $= \{a,b,c\}$
- $\{a,b,c\} \oplus \{\varnothing\} =$
- $= \{a,b,c, \varnothing\}$