## PROVA COM CONETIVAS BOOLEANAS

#### Passos válidos usando ¬, ∧ e ∨

Para cada conetiva: padrões de inferência

- □ A P pode seguir-se qualquer fórmula que seja sua consequência
  - Ex: (dupla negação) ¬¬P dá origem a P, e vice-versa
  - eliminação da negação
- Q é verdade lógica: pode introduzir-se em qualquer ponto
- $\square$  De P  $\wedge$  Q infere-se P e infere-se Q
  - eliminação da conjunção
- □ Tendo provado P e Q pode inferir-se P ∧ Q
  - introdução da conjunção
- □ Tendo provado P pode inferir-se P ∨ Q ∨ ... R
  - introdução da disjunção

#### Métodos de prova

- □ Prova por casos (eliminação da disjunção)
  - Fórmula a provar: S
  - Disjunção já provada: P v Q
  - Mostra-se que se obtém S se se assumir P, e que se obtém S se se assumir Q; como um deles tem de verificar-se, conclui-se S
  - Generaliza-se a qualquer número de elementos na disjunção
- □ Prova por contradição (introdução da negação)
  - Fórmula a provar: ¬S
  - Premissas: P, Q, R, ...
  - Assumir S e mostrar que se obtém uma contradição
  - −S é consequência lógica das premissas

#### Prova por casos

- Mostrar que existem números irracionais b e c tais que b<sup>c</sup> é racional
- $\square$  Considera-se  $\sqrt{2^{1/2}}$ : é racional ou é irracional
  - Se é racional: temos b = c =  $\sqrt{2}$
  - Se é irracional: fazemos b=  $\sqrt{2^{1/2}}$  e c =  $\sqrt{2}$

o bc = 
$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$$
  
=  $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}.\sqrt{2})}$   
=  $\sqrt{2^2}$  = 2

Quer  $\sqrt{2^{\sqrt{2}}}$  seja racional ou irracional, existem b e c irracionais tais que b<sup>c</sup> é racional

#### Prova por casos 2

```
Provar que Small(c) é consequência de
(Cube(c) \land Small(c)) \lor (Tet(c) \land Small(c)) :
Prova:
(Cube(c) \land Small(c)) \lor (Tet(c) \land Small(c)) \notin premissa
Vamos analisar 2 casos, para os 2 componentes da disjunção
I- Assume-se Cube(c) ∧ Small(c)
  Então Small(c) (por eliminação da conjunção)
II- Assume-se Tet(c) \wedge Small(c)
  Então Small(c) (por eliminação da conjunção)
```

□ Em qualquer dos casos: obtém-se Small(c)

#### Prova por casos 3

```
De (NaSala(rita) \( \triangle \) Feliz(rui)) \( \triangle \) (NaSala(ana) \( \triangle \) Feliz(luis)) pretendemos provar Feliz(rui) \( \triangle \) Feliz(luis)
```

- Assumindo a disjunção da premissa temos que
  - (NaSala(rita) ∧ Feliz(rui))ou
  - (NaSala(ana) ∧ Feliz(luis))

No primeiro caso temos Feliz(rui) e portanto

Feliz(rui) V Feliz(luis) por introdução de disjunção

No segundo caso temos Feliz(luis) e portanto

Feliz(rui) v Feliz(luis) por introdução de disjunção

□ Em qualquer dos casos, tem-se a conclusão pretendida

#### Prova indireta

- □ Exemplo:
  - Premissas: BackOf(a,b)
  - BackOf(b,c)
  - i) se assumir Cube(a)
    - Não se consegue extrair mais informação
  - ii) se assumir  $\neg BackOf(a,b)$ 
    - Contradição direta com uma premissa
    - Pode-se concluir o contrário, embora sem valor acrescentado
  - iii) se assumir BackOf(c,a)
    - o De BackOf(a,b) e BackOf(b,c) conclui-se BackOf(a,c) e daí ¬BackOf(c,a)
    - Contradição indireta com uma conclusão das premissas
    - Em geral, se há contradição é porque de algum modo a conclusão contrária já está implícita nas premissas e portanto pode ser explicitada

#### Prova por contradição

- □ Premissas: Cube(c) ∨ Dodec(c) e Tet(b)
- □ Concluir: b≠c
- Prova:
  - Supondo b=c
  - Da 1ª premissa: Cube(c) ou Dodec(c)
     Se Cube(c), então Cube(b) (indiscernibilidade dos idênticos)
     o que contradiz Tet(b)
     Se Dodec(c) então Dodec(b) (indiscernibilidade dos idênticos)
     o que contradiz Tet(b)
- □ Obtemos contradição nos 2 casos, logo a suposição b=c conduz a contradição
- Então, conclui-se b≠c

## Prova por contradição 2

- □ Provar: √2 é irracional
  - Factos acerca dos racionais
    - o nº racional pode ser expresso como p/q, com pelo menos 1 de p e q ímpar
    - elevando ao quadrado um número ímpar, obtém-se outro ímpar; se n² é par, n é par e n² é divisível por 4

#### □ Prova:

– Suposição: √2 é racional √2= p/q (um de p e q é ímpar) p² / q² =2 ou p² = 2 q²: p² é par e p² é divisível por 4 p² é divisível por 4, q² é divisível por 2; q é par p e q ambos pares: contradiz a afirmação inicial

□ Então √2 não é racional

## O que é contradição?

☐ Afirmação que não pode ser verdadeira

```
NaSala(rita) ∧ ¬NaSala(rita)
b ≠ b
```

□ Conjunto de afirmações que não podem ser verdadeiras simultaneamente

```
Cube(c) e Tet(c)
```

- □ Conjunto de frases é contraditório se não puder ser satisfeito
- □ Para provar F usando contradição:

```
Assume-se ¬ F

Constrói-se ¬ ¬ F

Conclui-se ¬ ¬ F e portanto F
```

#### Premissas inconsistentes

- □ Conjunto de frases é inconsistente: não existe um mundo no qual possam ser satisfeitas simultaneamente
- □ Consequência lógica: qualquer fórmula é consequência de um conjunto inconsistente de premissas
  - Argumento é válido trivialmente por não haver nenhuma circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras

NaSala(rita) v NaSala(luis)

¬NaSala(rita)

¬NaSala(luis)

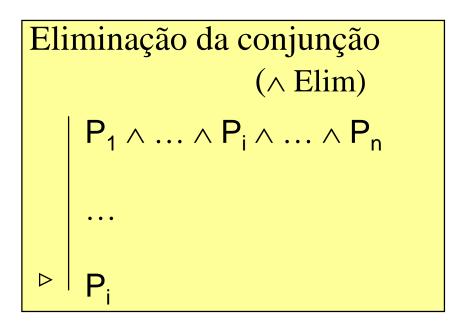
- Argumentos com premissas inconsistentes: pouco úteis
  - se não há circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras, não temos indicação quanto ao valor lógico da conclusão – argumento não é sólido

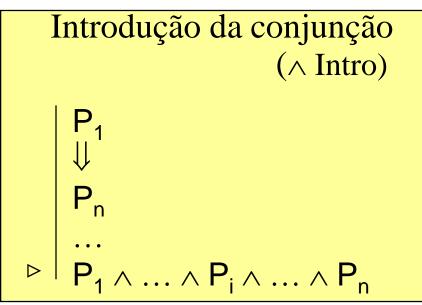
#### **Estilo**

- □ Nas provas informais, os passos mencionados devem ser
  - Relevantes, para não aborrecer nem distrair o leitor
  - De fácil compreensão, para serem convincentes
- □ Significa que as provas devem levar em consideração a quem se destinam

#### **PROVAS FORMAIS**

#### Regras de inferência para ^





P<sub>1</sub> ↓

significa que todos os elementos  $P_1$  a  $P_n$  têm de aparecer na prova antes de se introduzir a conjunção

 $P_n$ 

#### nas provas formais

```
      1. A ∧ B ∧ C

      2. B
      ∧ Elim: 1

      3. C
      ∧ Elim: 1

      4. C ∧ B ∧ C
      ∧ Intro: 3,2,3
```

Parêntesis: introduzir quando puder haver ambiguidade

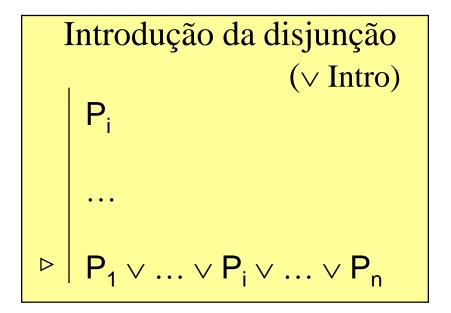
```
      1. P ∨ Q

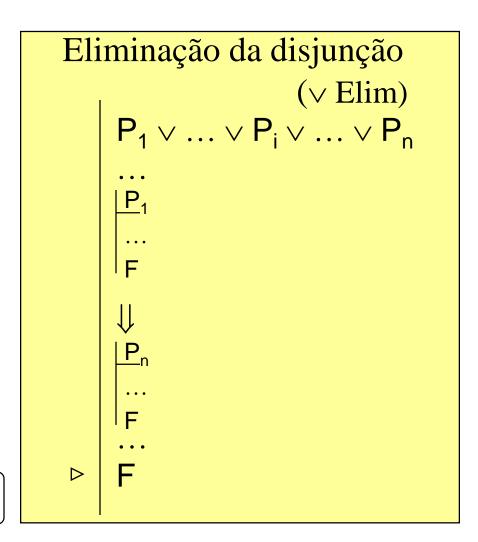
      2. R

      3. (P ∨ Q) ∧ R
      ∧ Intro: 1,2

      3. P ∨ Q ∧ R
      ∧ Intro: 1,2
```

#### Regras de inferência para v





Prova por casos

## v nas provas formais

```
1. (A \lambda B) \lor (C \lambda D)

2. (A \lambda B)

3. B \lambda Elim: 2

4. B \lor D \lor Intro: 3

5. (C \lambda D)

6. D \lambda Elim: 5

7. B \lor D \lor Intro: 6

8. B \lor D \lor VElim: 1, 2-4, 5-7
```

Objetivo: B \leq D

## Exemplo

Propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção

```
8. P \ Q \quad \text{Intro: 7}
9. R \quad \text{Pelim: 6}
10. \text{ \quad \text{Intro: 9}}
11. \quad \text{(P \ Q) \ \land (P \ R)} \quad \text{Intro: 8,10}
```

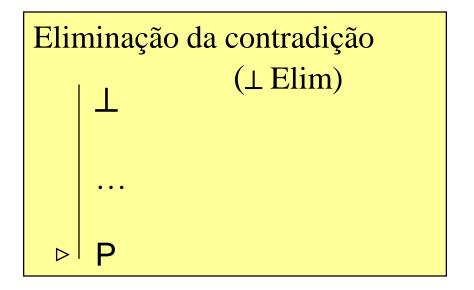
12. 
$$(P \lor Q) \land (P \lor R) \lor Elim: ?, 2-5, 6-?$$

#### Regras de Inferência para -

Prova por contradição

## 

# 



#### Teorema 3

\_1. ¬P ∨ ¬Q
 Lei de DeMorgan

 \_2. P ∧ Q
 \_3. ¬P

 \_4. P
 ^ Elim: 2

 \_5. 
$$\bot$$
 \_ Intro: 4,3

 \_6. ¬Q
 ^ Elim: 2

 \_7. Q
 ^ Elim: 2

 \_8.  $\bot$ 
 \_ Intro: 7,6

 \_9.  $\bot$ 
 ∨ Elim: 1, 3-5, 6-8

 \_10. ¬(P ∧ Q)
 ¬ Intro: 2-9

$$\neg (P \land Q)$$

Estratégia geral de prova por contradição com prova por casos lá dentro

#### – nas provas formais

 $\perp$  Intro: 1,2

¬ Intro: 2-3

#### **Teorema 1**

 $A \Leftrightarrow \neg \neg A$ 

com a eliminação da —

 $\perp$  Intro: 1,2

¬ Intro: 3-4

¬ Elim: 5

Prova-se fórmula arbitrária a partir de premissas inconsistentes

#### Exemplo

Prova de verdade lógica: não tem premissas

#### Uso de subprovas

```
      1. (B ∧ A) ∨ (A ∧ C)

      2. B ∧ A

      3. B
      ∧ Elim: 2

      4. A
      ∧ Elim: 2

      8: usa passo 3

      de subprova

      6. A
      ∧ Elim: 5

      7. A
      ∨ Elim: 1, 2-4, 5-6

      8. A ∧ B
      ∧ Intro: 7,3
```

- Quando uma subprova é <u>fechada</u>:
- Suposições são descarregadas
- Subprova pode ser usada como um todo para justificar outros passos

## Exemplo

```
\neg P \lor \neg R
```

#### **Teorema 2**

Lei de DeMorgan

- ∨ Intro: 3
- $\perp$  Intro: 4,2
- ¬ Intro: 3-5
- ¬ Elim: 6
- ∨ Intro: 8
- $\perp$  Intro: 9,2
- ¬ Intro: 8-10
- ¬ Elim: 11
- ∧ Intro: 7,12
- Reit: 1
- ⊥ Intro: 13,14
- ¬ Intro: 2-15
- ¬ Elim: 16

#### Exercício

#### 1. P $\vee$ Q

10. Q

#### **Teorema do Cancelamento**

 $\perp$  Intro: 3,2

¬ Intro: 4-5

¬ Elim: 6

Reit: 8

∨ Elim: 1,3-7,8-9

Q Estratégia seguida:

 prova por casos incluindo uma prova por contradição no 1º caso

Experimentar:

- prova por contradição com prova por casos

#### Citar teoremas

□ Para encurtar a prova em F : usar resultados prévios

```
    1. ¬(P ∧ Q)
    2. P
    3. ¬P ∨ ¬Q Teor Prev (Teorema 2): 1
    4. ¬¬P Teor Prev (Teorema 1): 2
    5. ¬Q Teor Prev (Cancelamento): 3,4
```

- Símbolos usados nas provas: podem ser substituídos
  - por outros símbolos
  - por fórmulas arbitrárias

#### Completude para as funções da verdade

- □ Uma conetiva arbitrária pode ser expressa com  $\neg$ ,  $\land$  e  $\lor$ ?
- □ Conetivas binárias: tabela de verdade tem 4 linhas
  - cada linha pode ter V ou F
  - número de conetivas possíveis: 2<sup>4</sup>

<u>P</u>	Q	P * Q	0 0
V	V	valor1	$C_1 = P \wedge Q$
V	F	valor2	$C_2 = P \wedge \neg Q$
F	V	valor3	$C_3 = \neg P \wedge Q$
F	F	valor4	$C_4 = \neg P \wedge \neg Q$

Representação de \*:
disjunção dos C<sub>i</sub>
correspondentes a
linhas com valor V

Todas as funções binárias funcionais da verdade podem ser descritas com ¬, ∧ e ∨

#### Exemplo do NAND

□ NAND é a conjunção seguida de negação

<u>P</u>	Q	$P \otimes Q$
V	V	F
V	F	Т
F	V	Т
F	F	т

$$\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land (Q \lor \neg Q))$$

$$\Rightarrow (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$$

$$\Rightarrow \neg (P \land Q)$$

#### Completude para as funções da verdade

Conetivas unárias

Ambos os valores  $F: P \land \neg P$ 

Outros casos: disjunção de

$$C_1 = P$$
 e  $C_2 = \neg P$ 

Conetivas de outras aridades

Р	Q	R	@(P,Q,R)	Exprimir conetiva em DNF:
V	V	V	F	1
V	V	F	V -	$(P \land Q \land \neg R) \lor$
:	:	÷	:	

Bastam, e.g.,  $\neg e \land : P \lor Q \Leftrightarrow \neg (\neg P \land \neg Q)$