T2013-3a-P7

- Define-se g: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ $g(x)=3x^2+14x+51$. Determine justificadamente se g é injetiva ou sobrejetiva.
- R: Verificar se é não injetiva, isto é, se existem duas abcissas diferentes com a mesma ordenada:
  - $3x_1^2 + 14x_1 + 51 = 3x_2^2 + 14x_2 + 51$
  - $3(x_1^2 - x_2^2) = -14(x_1 - x_2)$
  - $3(x_1 + x_2) = -14$
  - $x_1 + x_2 = -\frac{14}{3}$
  - O que é impossível pois ambos são inteiros. Logo a função é injetiva.

T2013-3-P9

- A é o conjunto $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. Dadas as funções definidas em A→A, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$, $h(x) = \frac{x}{x-1}$ calcule as funções f∘g e $(g∘h)^{-1}$.
- $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - (1 - x) = x = \iota_{\mathrm{A}}(x)$
- $(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} = 1 - x$
- $x = 1 - y$
- $y = 1 - x$
- $(g \circ h)^{-1}(x) = 1 - x$ a inversa é igual à própria função

Composição e inversa

- Seja f: $A \rightarrow B$ e g: $B \rightarrow A$. Mostre que, se $f \circ g = \iota_B$ então $f = g^{-1}$

- R: Considere-se $f \circ g \circ g^{-1}$. Como a composição é associativa

$$f \circ g \circ g^{-1} = f \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ \iota_A = f$$
$$= (f \circ g) \circ g^{-1} = \iota_B \circ g^{-1} = g^{-1}$$