Recorrência-7 Empréstimo

- Suponha que obtém num banco um crédito pessoal no valor de C=3500€, a uma taxa de juro anual nominal de TAN=26%, por um período de 12 meses, a pagar em prestações mensais de valor constante P.
- Portanto, no mês 0 recebe 3500€ e depois, em cada mês de 1 a 12 paga um valor constante P. A prestação paga os juros correspondentes ao mês findo, sendo o resto o valor da amortização do capital em dívida. O capital em dívida vai assim diminuindo até se anular, na última prestação.

Empréstimo 2

- Apresente uma relação de recorrência para a evolução do capital em dívida c(n) ao longo dos meses, que constitua um modelo para a situação descrita, em termos abstratos, isto é, função do capital inicial (C), da taxa de juro nominal mensal (J), da prestação P e do mês n.

- R: $P = Jc_{n-1} + a_n$ c_n – capital em dívida, a_n – amortização
- $c_n = c_{n-1} - a_n$
- $c_n = c_{n-1} - P + Jc_{n-1}$
- $c_n = (1+J)c_{n-1} - P,\quad n \geq 1,\quad c_0 = C$

Empréstimo 3

- Apresente uma solução explícita para a relação de recorrência da alínea anterior.
- R: $c_n = rc_{n-1} + f(n) = (1+J)c_{n-1} - P$, $n \geq 1$, $c_0 = C$
- Solução particular $p_n = b$, dado $f(n)$ constante.
- Substituindo p_n na equação: $b = (1+J)b - P \rightarrow b = P/J$
- Polinómio caraterístico: $x = 1+J$
- Solução da equação homogénea $q_n = d_1(1+J)^n$
- $c_n = d_1(1+J)^n + P/J$
- $c_0 = d_1(1+J)^0 + P/J = C \rightarrow d_1 = C - P/J$
- $c_n = (C-P/J)(1+J)^n + P/J$

Empréstimo 4

- Derive uma expressão para o valor da prestação constante P que anula o capital em dívida ao fim de N meses. Qual o valor de P nas condições da situação descrita (N=12)?
- R: Forçar o capital em dívida a ser 0 ao fim de N meses
- $c_N = (C-P/J)(1+J)^N + P/J = 0$
- $C(1+J)^N = (P/J)\ ((1+J)^N-1)$
- $P = C\dfrac{J(1+J)^N}{(1+J)^N-1}$
- $J = 0.26/12 = 0.021667$
- $P = 3500\dfrac{0.021667(1+0.021667)^{12}}{(1+0.021667)^{12}-1} = 334.36$

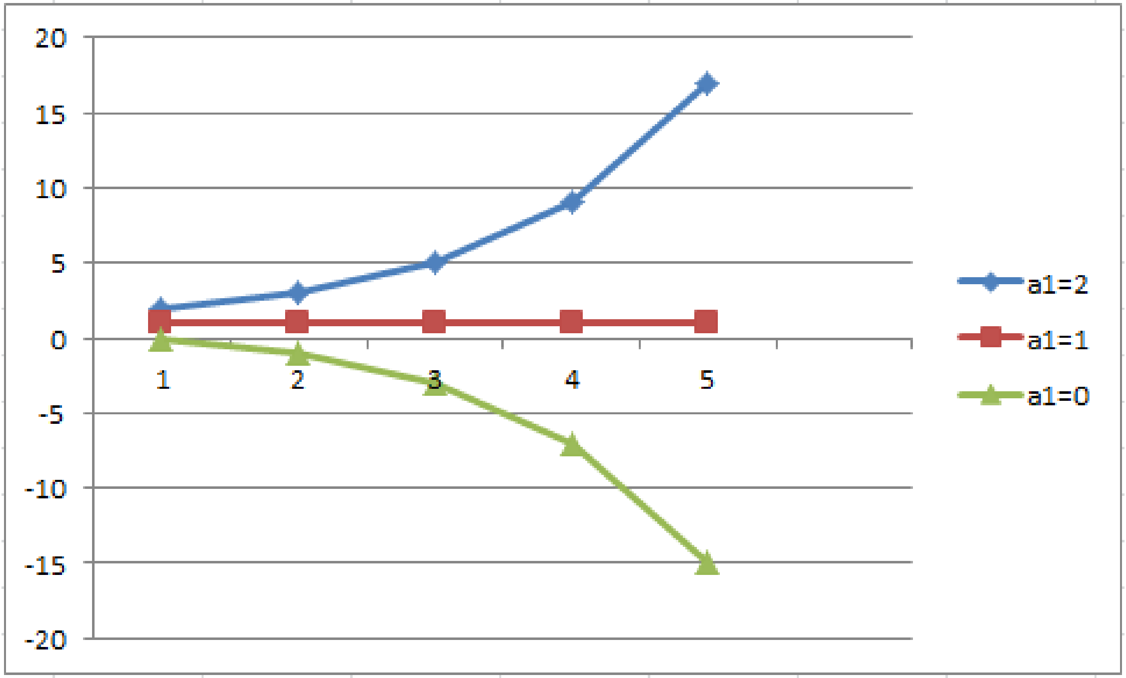
Paga no final do ano T=12*334.36= 4012.32

Recorrência 8 – Condições iniciais

- Resolva a relação de recorrência $a_n=2a_{n-1}-1$, independentemente da condição inicial:
- R: solução particular da mesma forma do termo independente
- $p_n = b$
- $b = 2b - 1$
- $b = 1$
- Solução homogénea: a equação caraterística fica x-2=0, x=2, a que corresponde uma solução da forma $a_n=c2^n$
- Solução geral = solução particular + homogénea: $a_n=c2^n+1$
- A constante c é determinada a partir da condição inicial.

Condições iniciais 2

- $a_1=2$
- $a_1=c2^1+1=2, \quad c= ½$
- $a_n= ½\, 2^n +1 = 2^{n-1} +1$
- $a_1=1$
- $a_1=c2^1+1=1, \quad c= 0$
- $a_n= 1$
- $a_1=0$
- $a_1=c2^1+1=0, \quad c= -½$
- $a_n= -½\, 2^n +1 = -2^{n-1} +1$



Recorrência 9

- Resolva a relação de recorrência $a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}+16n$, $n>=2$, dado $a_0=5$, $a_1=1$.

- R: Solução particular: $p_n=b_0+b_1n$
- $b_0+b_1n=7(b_0+b_1(n-1))-10(b_0+b_1(n-2))+16n$
- $b_0=13$ $b_1=4$
- $p_n=13+4n$

Recorrência 9 – 2

- Solução homogénea
- Polinómio caraterístico: $x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$
- $q_n= c_1 5^n+c_2 2^n$

- Solução: $a_n=q_n+p_n= c_1 5^n+c_2 2^n+13+4n$
- $a_0= c_1 5^0+c_2 2^0+13+4(0)=5$
- $a_1= c_1 5^1+c_2 2^1+13+4(1)=1$
- $c_1+c_2+13=5 \quad 5c_1+2c_2+17=1$
- $c_1=0 \quad c_2=-8$
- $a_n=-8(2^n)+13+4n$

T2014-P12

- Considere o problema da reprodução de coelhos numa ilha, mas agora com um predador. No instante 0, coloca-se um casal de coelhos recém-nascidos na ilha. Cada casal de coelhos dá origem a um novo casal de coelhos todos os meses a partir do segundo mês após o nascimento. No mês 4, chega à ilha um lobo que come 2 casais de coelhos recém-nascidos por mês.
- a) Qual a relação de recorrência que exprime esta nova situação?
- b) Qual o termo geral da sequência do número de casais de coelhos na ilha?
- c) Quantos coelhos há no mês 15?

Coelhos e lobo

- R: a)
- $$\begin{cases} a_2 = 2, a_3 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - 2 \end{cases}$$
- b)
- $p_n = b$
- $b = b + b - 2$
- $b = 2$
- $a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2$

Continua

- $$\begin{cases} a_2 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2 = 2 \\ a_3 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + 2 = 3 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} c_1 = -\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} c_2 \\ -\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 1 \end{cases}$$

Continua

- $$\begin{cases} - \\ -\dfrac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{1} c_2 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 1 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} - \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_2 \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} - \\ \left(\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)^1 c_2(-\sqrt{5}) = 1 \end{cases}$$

Continua

- $\begin{cases} c_1 = \frac{2}{3\sqrt{5}+5} = 0{,}170820393 \\ c_2 = -\frac{2}{3\sqrt{5}-5} = 1{,}170820393 \end{cases}$
- Solução:
- $a_n = \frac{2}{3\sqrt{5}+5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{2}{3\sqrt{5}-5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2$
- c) (2, 3,) 3, 4, 5, 7, 10, 15, 23, 36, 57, 91, 146, 235 (n=15)

P11 - oscilatório

- Dada a relação de recorrência a_n=-a_{n-1}-0.5$a_{n\text{-}2}$+1, $n \geq 2$, a_0=0, a_1=0, desenhe os primeiros 20 termos da sequência a_n.
- R: solução particular p_n=b
- b=-b-0.5b+1
- b=0.4
- Solução geral
- Polinómio caraterístico:
- $x^2+x+0.5=0$
- x_1=-0.5-j0.5, x_2=-0.5+j0.5
- x_1=sqrt(1/2) fase: -3π/4