T2013-4-P5

- Resolva a congruência $743x \equiv 25 \pmod{9991}$.
- R:

		m	n	q
a	9991	1	0	
b	743	0	1	13
r1	332	1	-13	2
r2	79	-2	27	4
r3	16	9	-121	4
r4	15	-38	511	1
r5	1	47	-632	15
r6	0	-743	9991	#DIV/0!

- Euclides: $1=47(9991)-632(743)$
- $743^{-1} \pmod{9991} \equiv 9991-632 \equiv 9359$
- $x \equiv (9359)(25) \equiv 4182 \pmod{9991}$

T2014-4-P6

- Resolva a congruência $7033x \equiv 1323 \pmod{11639}$.

		a	b	q
a	11639	1	0	
b	7033	0	1	1
r1	4606	1	-1	1
r2	2427	-1	2	1
r3	2179	2	-3	1
r4	248	-3	5	8
r5	195	26	-43	1
r6	53	-29	48	3
r7	36	113	-187	1
r8	17	-142	235	2
r9	2	397	-657	8
r10	1	-3318	5491	2
r11	0	7033	-11639	#DIV/0!

- R: Euclides:
- $1=-3318(11639)+5491(7033)$
- $7033^{-1} \pmod{11639} \equiv 5491$
- $x \equiv (5491)(1323)$
- $\equiv 1857 \pmod{11639}$

T2013-4-P6

- O número de identificação fiscal em Portugal é constituído por 9 dígitos NIF=(a_1, a_2, …, a_9), sendo que o último é calculado de modo a que NIF.w (mod 11) = 0, em que w=(9,8,7,6,5,4,3,2,1), isto é

$$9a_1 + 8a_2 + 7a_3 + \cdots + 2a_8 + a_9 \equiv 0\ (mod\ 11)$$

- No caso de a_9=10 escreve-se 0.

- Verifique se o seguinte NIF está correto: 511413190.

NIF	**5**	**1**	**1**	**4**	**1**	**3**	**1**	**9**	**0**	
Pesos	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	
									10	**1**

- R: está correto mas a_9=10.
- Qual o dígito de verificação do NIF 16174816C?
- R: C=3. C=11-MOD(SUMPRODUCT(B3:I3;B4:I4);11)

T2014-4-P7

- O número de identificação bancária (NIB) em Portugal é constituído por 21 dígitos com o seguinte formato BBBBAAAACCCCCCCCCCCVV.
  - BBBB – banco
  - AAAA – agência
  - CCCCCCCCCCC – conta
  - VV – dígitos de verificação.
- Um NIB é válido se for congruente com 1 módulo 97.
- a) Dado o banco 0018, agência 0249, conta 00200011528, determine os dígitos de verificação.

NIB

- R:
- $a_{20}a_{19}\ldots a_2a_1a_0 \equiv a_{20}a_{19}\ldots a_2*100 + a_1a_0 \pmod{97} \equiv$
- $\equiv a_{20}a_{19}\ldots a_2 \pmod{97}*100 \pmod{97} + a_1a_0 \equiv$
- $\equiv a_{20}a_{19}\ldots a_2 \pmod{97}*3 + a_1a_0 \equiv 1 \pmod{97}$

- $a_1a_0 \equiv - a_{20}a_{19}\ldots a_2 \pmod{97}*3 +1 \pmod{97}$
- $a_1a_0 = 98 - a_{20}a_{19}\ldots a_2 \pmod{97}*3 \pmod{97}$
- $a_1a_0 = 98 - 1802490020001 1528 \pmod{97}*3 \pmod{97}$
- $a_1a_0 = 98 - 68*3 \pmod{97} = 98 – 204 \pmod{97} = 98 – 10 = 88$

T2013-4-P8

- Um grupo de 10 piratas encontra um saco de moedas de ouro. Um deles é encarregado de dividir igualmente as moedas por todos os piratas. Ao terminar verifica que ficou uma moeda no saco. Incapaz de cumprir a tarefa rigorosamente, deixa ficar todas as moedas no saco e abandona o grupo. Intrigado, o chefe dos piratas manda então dois homens proceder à divisão completa das moedas pelos homens restantes. Desta vez, sobram duas moedas. Os dois piratas abandonam tudo e desaparecem ainda mais depressa que o anterior. O chefe dos piratas vai então ele próprio dividir as moedas pelos piratas restantes e no final verifica que o saco ficou vazio! Quantas moedas tinha o saco, assumindo a solução menor possível?

Teorema chinês dos restos

- R:
- $x \equiv 1 \pmod{10}$
- $x \equiv 2 \pmod{9}$
- $x \equiv 0 \pmod{7}$
- Começando com as duas primeiras congruências e usando o algoritmo de Euclides
- $1 = 1(10)-1(9)$
- $y \equiv 2(10)-1(9) \equiv 11 \pmod{90}$
- $1= -1(90)+13(7)$
- $x \equiv 0(-1)(90)+11(13)(7) \equiv 1001 \equiv 371 \pmod{630}$
- O número de moedas é 371.

T2014-4-P9

- Três crianças de uma família decidem medir o perímetro do seu jardim usando unicamente os seus pés e uma régua de 10 cm. Sabendo que as crianças têm pés de comprimento de 23, 25 e 27 cm, e que a cada uma delas ficou a faltar respectivamente 5, 9 e 8 cm no final da medição, calcule o menor perímetro do jardim. Justifique a sua resposta.

Teorema chinês dos restos

- R:
- $x \equiv 5 \pmod{23}$
- $x \equiv 9 \pmod{25}$
- $x \equiv 8 \pmod{27}$
- Do algoritmo de Euclides, $1 = 12(23)-11(25)$
- $y \equiv 9(12)(23)+5(-11)(25) \equiv 574 \pmod{575}$
- Do algoritmo de Euclides, $1= -10(575)+213(27)$
- $x \equiv 8(-10)(575)+574(213)(27) \equiv 325507410 \equiv 10260 \pmod{15525}$
- O menor perímetro do jardim é de 102,60 metros

T2013-4-P9

- Obtenha todas as soluções no espaço modular que satisfazem o seguinte sistema de congruências módulo 28:
- $\begin{cases} 3x + 5y \equiv 14 \ (mod\ 28) \\ \qquad\quad 5x + 9y \equiv 6 \end{cases}$
- R: Vamos resolver por adição ordenada. Para isso, multiplica-se a primeira congruência por 5 e a segunda por 3. Isto é possível porque 5 e 3 são primos com 28.
- $\begin{cases} 15x + 25y \equiv 14 \\ 15x + 27y \equiv 18 \end{cases} (mod\ 28)$

Adição ordenada

- Subtraindo a primeira congruência da segunda
- $\begin{cases} 2y \equiv 4 \\ 15x + 27y \equiv 18 \end{cases} (mod\ 28)$
- Aqui já não é possível dividir a primeira congruência por 2 porque 2 e 28 não são primos entre si: d = mdc(2,28) = 2
- Mas podemos dividir a congruência, incluindo o módulo, pelo máximo divisor comum d e resolver o problema de solução única $y \equiv 2\ (mod\ 14)$.
- Esta congruência tem a solução $y \equiv 2\ (mod\ 14)$
- A congruência $2y \equiv 4\ (mod\ 28)$ tem assim as soluções $y \equiv 2 + k\frac{m}{d}\ (k = 0..d-1)$, isto é, $y \equiv 2$ ou $y \equiv 2 + 14 \equiv 16$

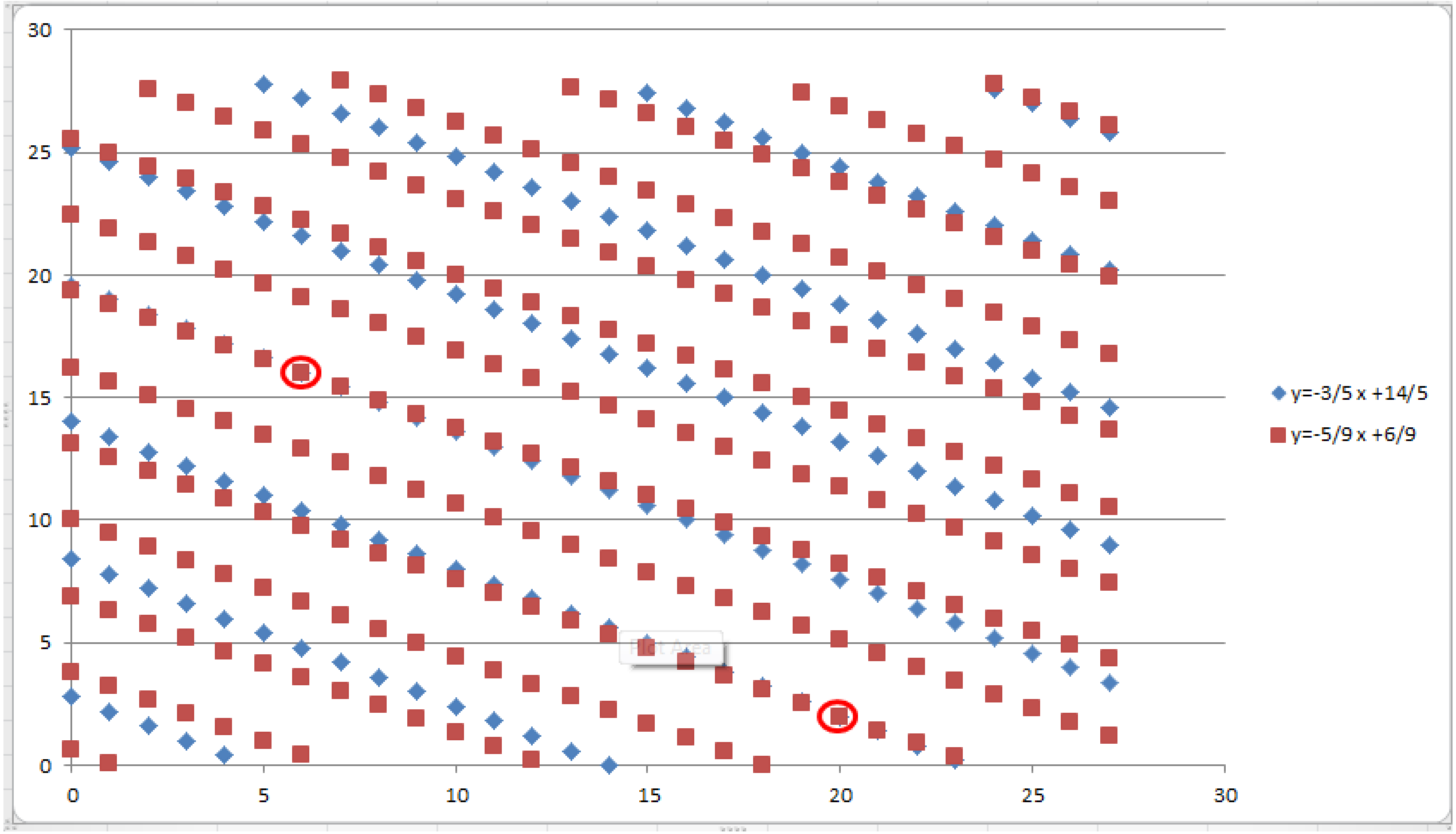
Adição ordenada

- $\begin{cases} y \equiv 2 \\ 3x + 5(2) \equiv 14 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y \equiv 16 \\ 3x + 5(16) \equiv 14 \end{cases}$ $(mod\ 28)$
- $\begin{cases} y \equiv 2 \\ 3x \equiv 4 \end{cases}$ $(mod\ 28)$ ou $\begin{cases} y \equiv 16 \\ 3x \equiv 18 \end{cases}$ $(mod\ 28)$

Inverso

- Para resolver a equação em x pode-se calcular o inverso de 3, que existe porque 3 e 28 são primos entre si. Com o algoritmo de Euclides mdc(3,28)=1=1(28)-9(3). Reduzindo o -9 ao espaço modular, obtém-se que 3^{-1} (mod 28)=19
- $\begin{cases} y \equiv 2 \\ x \equiv 4(19) \equiv 20 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y \equiv 16 \\ x \equiv 18(19) \equiv 6 \end{cases}$
- Há duas soluções, (20,2) e (6,16).
-

Resolução gráfica



T2014-4-P10

- Obtenha todas as soluções no espaço modular que satisfazem o seguinte sistema de congruências módulo 103:
- $61x+54y \equiv 14$
- $75x+9y \equiv 37$
-
- $61x+54y \equiv 14$
- $38x+54y \equiv 16$
-
- $23x \equiv 101$
- $38x+54y \equiv 16$

Continuação

- Euclides: $1 = -2(103)+9(23)$
- $x \equiv 9(101) \equiv 85$
- $38(85)+54y \equiv 16$
-
- $x \equiv 85$
- $37+54y \equiv 16$
-
- $x \equiv 85$
- $54y \equiv 82$
- Euclides: $1=-11(103) + 21(54)$
- $x \equiv 85$
- $y \equiv 21(82) \equiv 74$