RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

1 A **sequência aritmética** com primeiro termo a e diferença comum d define-se como

1. $a_1 = a$
2. $a_{k+1} = a_k + d, \quad k \geq 1$.

a) Qual a solução a_n da relação de recorrência?

b) Mostre que $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ é o valor da soma dos primeiros n termos da sequência aritmética com primeiro termo a e diferença comum d.

2 A **sequência geométrica** com primeiro termo a e razão comum r define-se como

1. $a_1 = a$
2. $a_{k+1} = ra_k, \quad k \geq 1$.

a) Qual a solução a_n da relação de recorrência?

b) Mostre que $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ é o valor da soma dos primeiros n termos da sequência geométrica com primeiro termo a e razão comum r, se $r \neq 1$.

3 Considere a **sequência geométrica** com 1º termo 3^{10} e razão comum -1/3. Qual o 33º termo da sequência? Qual o valor da soma dos primeiros 12 termos?

4 **Depósito com capitalização**. Um banco tem um depósito com juros de 4% ao ano, automaticamente acumulados ao capital inicial. Se depositar, em 2012-01-01, 1000€, ao fim de quanto tempo tem mais do que 1400€ na conta? E se o cálculo e a capitalização dos juros for mensal?

5 **Sequência de Fibonacci**. Suponha que numa ilha sem coelhos nem predadores se coloca à nascença um casal coelhos e se pretende estudar a evolução da população.

Cada casal de coelhos começa a reproduzir-se ao fim de dois meses de vida e a partir daí produz um novo casal todos os meses.

a) Formalize o problema com uma relação de recorrência.

b) Qual a população de coelhos ao fim de 8 meses?

c) Escreva um algoritmo recursivo para calcular a população ao fim de n meses.

d) Qual o termo geral da sequência de Fibonacci?

6 Sejam u_k e vk sequências mutuamente recursivas definidas por

1. $u_1 = 0$, $v_1=1$
2. $u_{k+1} = ½(u_k+v_k)$ $v_{k+1}=1/4(u_k+3v_k)$, $k \geq 1$.

a) Mostre que $v_k - u_k = \frac{1}{4^{k-1}}$ para $k \geq 1$.

b) Mostre que u_k é uma sequência crescente e v_k decrescente.

7 **Empréstimo**

Suponha que obtém num banco um crédito pessoal no valor de C=3500€, a uma taxa de juro anual nominal de TAN=26%, por um período de 12 meses, a pagar em prestações mensais de valor constante P. Portanto, no mês 0 recebe 3500€ e depois, em cada mês de 1 a 12 paga um valor constante P. A prestação paga os juros correspondentes ao mês findo, sendo o resto o valor da amortização do capital em dívida. O capital em dívida vai assim diminuindo até se anular, na última prestação

a) Apresente uma relação de recorrência para a evolução do capital em dívida cn ao longo dos meses, que constitua um modelo para a situação descrita, em termos abstratos, isto é, função do capital inicial (C), da taxa de juro nominal mensal (J), da prestação P e do mês n.

b) Apresente uma solução explícita para a relação de recorrência da alínea anterior.

c) Derive uma expressão para o valor da prestação constante P que anula o capital em dívida ao fim de N meses. Qual o valor de P nas condições da situação descrita (N=12)?

8 Resolva a relação de recorrência $a_n=2a_{n-1}-1$, nas seguintes situações:

a) $a_1=2$

b) $a_1=1$

c) $a_1=0$

d) Esboce o gráfico comparativo das sequências obtidas para as três condições iniciais.

9 Resolva a relação de recorrência $a_n=7a_{n-1}-10a_{n-2}+16n$, $n>=2$, dado $a_0=5$, $a_1=1$.

10 Dada a relação de recorrência $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2n,\ n \geq 1, a_0 = 0$, encontre uma forma explícita para a sequência a_n.