Lógica de Primeira Ordem -2

Lógica dos Quantificadores

Múltiplos Quantificadores

Tradução

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011

Capítulos: 10, 11

LÓGICA DOS QUANTIFICADORES

Tautologias e quantificação

- Tautologia, consequência tautológica e equivalência tautológica - rever noções para frases com quantificadores

$\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Small}(x))$
$\forall x\ \mathrm{Cube}(x)$
$\forall x\ \mathrm{Small}(x)$ ✓

$\forall x\ \mathrm{Cube}(x)$
$\forall x\ \mathrm{Small}(x)$
$\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Small}(x))$ ✓

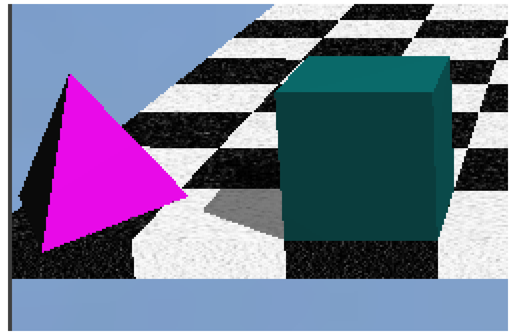
- Argumentos válidos
- Validade independente dos quantificadores presentes?

Tautologias e quantificação

$\exists x\,(Cube(x) \rightarrow Small(x))$

$\exists x\, Cube(x)$

$\exists x\, Small(x)$

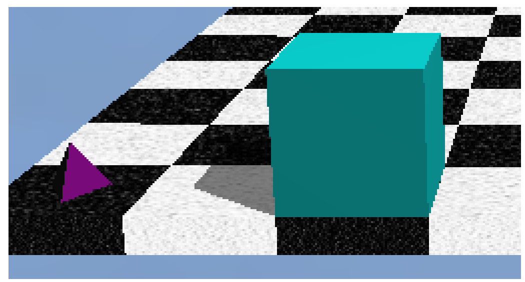


contra-exemplo
argumento inválido

$\exists x\, Cube(x)$

$\exists x\, Small(x)$

$\exists x\,(Cube(x) \land Small(x))$



- Validade dos argumentos depende dos quantificadores presentes

$\exists x\, Cube(x) \lor \exists x\, \neg Cube(x)$ — é verdade lógica

$\forall x\, Cube(x) \lor \forall x\, \neg Cube(x)$ — não é verdade lógica

não são tautologias

$\underbrace{\forall x\, Cube(x)}_{P} \lor \neg \underbrace{\forall x\, Cube(x)}_{P}$ — é tautologia

Tautologias e substituição

- Tautologia - substituindo uma frase atómica por uma frase arbitrária, continua a ser uma tautologia

- Exemplo

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ é tautologia

$(\exists y\ (P(y) \vee R(y)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow$
$(\neg \forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg \exists y\ (P(y) \vee R(y)))$ é tautologia

- A mesma frase poderia ter sido obtida por substituição em

$A \rightarrow B$ ou em $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ que não são tautologias

Como saber se uma frase arbitrária pode ser obtida por substituição a partir de uma tautologia?

Forma funcional e tautologia

- Para frase arbitrária: pode determinar-se sistematicamente uma *forma funcional*, em que as partes quantificadas são substituídas por símbolos

  - Algoritmo

  - progredir da esquerda para a direita na frase
  - ao encontrar uma frase atómica, substituí-la por uma letra
  - ao encontrar um quantificador, identificar a frase a que se aplica e substituí-la por uma letra
  - nas substituições, usar a mesma letra para frases iguais

- Frase de 1ª ordem é tautologia se a sua forma funcional o é
- Fitch: Taut Con usa a forma funcional para testar se frase é tautologia ou consequência tautológica de outras

Obtenção de forma funcional

$(\exists y\,(P(y) \vee R(y)) \rightarrow \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow$
$(\neg\, \forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg\, \exists y\,(P(y) \vee R(y)))$

$(A \rightarrow \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow$
$(\neg\, \forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg\, A)$

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\, A)$ é tautologia

Verdade, consequência e equivalência

- **Argumento válido**: a conclusão é verdadeira em todas as circunstâncias possíveis em que as premissas o forem
- **Na lógica proposicional**: tabelas de verdade capturam a noção de circunstâncias possíveis e significado das conetivas
- **Em 1ª ordem**: necessário atender às conetivas, aos quantificadores e ao símbolo de igualdade

Proposicional	**1ª Ordem**	**Conceito geral**
Tautologia	Validade FO	Verdade lógica
Consequência tautológica	Consequência FO	Consequência lógica
Equivalência tautológica	Equivalência FO	Equivalência lógica

Verdade, consequência e equivalência

- Validade FO, Consequência FO e Equivalência FO
  - Verdades lógicas, consequências lógicas e equivalências lógicas que se verificam devido ao significado das conetivas, dos quantificadores e do símbolo de identidade
- Inclusão da identidade
  - quase todas as linguagens a incluem
  - é essencial na tradução de frases de linguagem natural
- Validade FO
  - Verdade lógica que não depende do significado dos predicados, para além da identidade

1. $\forall x$ SameSize(x, x)
2. $\forall x$ Cube(x) $\rightarrow$ Cube(b)
3. (Cube(b) $\wedge$ b=c) $\rightarrow$ Cube(c)
4. (Small(b) $\wedge$ SameSize(b, c)) $\rightarrow$ Small(c)

Todas são verdades lógicas

Só 2 e 3 são válidas FO

Como se reconhece: substituindo predicados por nomes sem significado

Consequência FO

- Consequência FO
  - Consequência lógica que não depende do significado dos predicados, para além da identidade

$$
\begin{array}{|l}
\forall x\,(\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Large}(x)) \\
\neg\,\text{Large}(b) \\
\hline
\neg\,\text{Tet}(b)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|l}
\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \\
\neg\,Q(b) \\
\hline
\neg\,P(b)
\end{array}
$$

- Provar não consequência FO
  - Elaborar contra-exemplo de 1ª ordem

$$
\begin{array}{|l}
\neg\,\exists x\,\text{Larger}(x,a) \\
\neg\,\exists x\,\text{Larger}(b, x) \\
\text{Larger}(c,d) \\
\hline
\text{Larger}(a,b)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|l}
\neg\,\exists x\,P(x,a) \\
\neg\,\exists x\,P(b, x) \\
P(c,d) \\
\hline
P(a,b)
\end{array}
$$

Outra interpretação:

P é Gosta

c e d gostam um do outro

a e b não gostam de ninguém e ninguém gosta deles

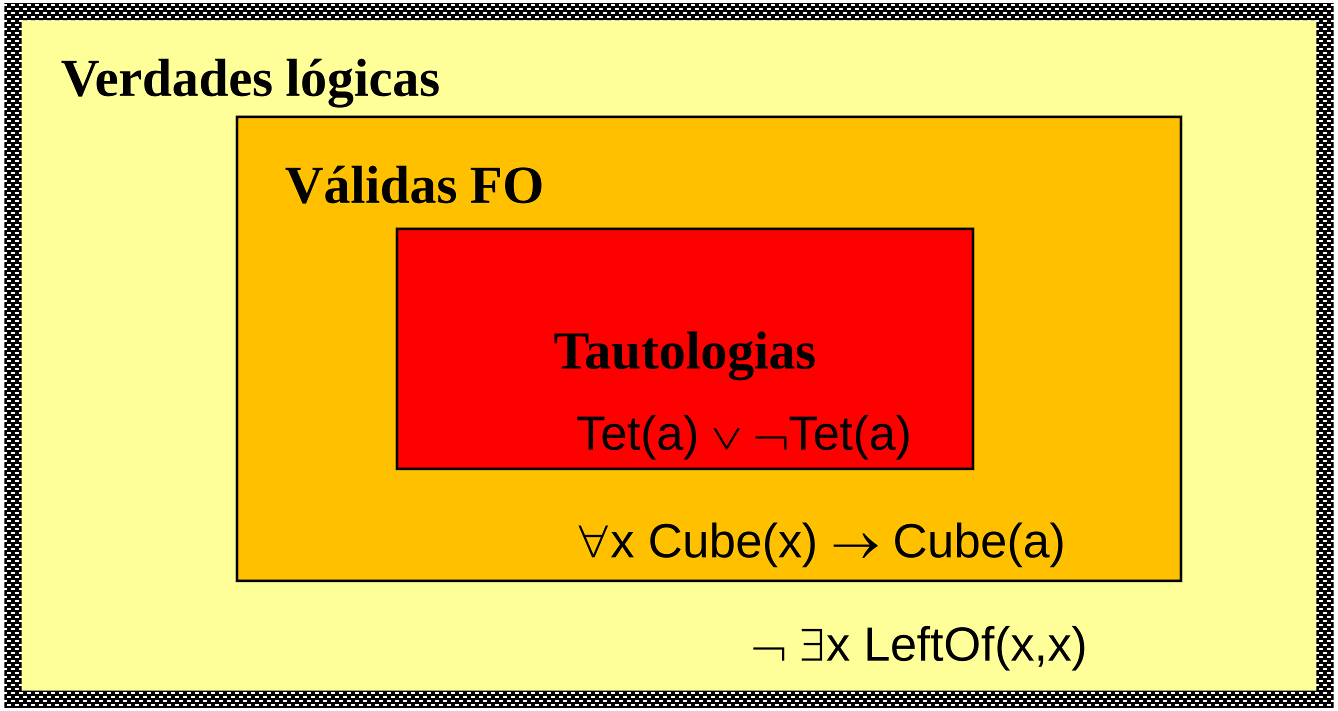
Testar Validade e Consequência FO

- Método de substituição

1. Substituir todos os símbolos de predicado para além da identidade, bem como todos os símbolos de função, por símbolos sem significado
2. Para testar **validade FO** da frase S descrever uma situação, com intrepretação dos nomes, predicados e funções, em que S seja falsa
3. Para verificar se S é uma **consequência FO** de P1, …, Pn tentar encontrar uma situação, com intrepretação dos nomes, predicados e funções, em que S seja falsa com P1, …, Pn verdadeiros; se não existe tal situação S é uma consequência FO de P1, …, Pn

- Fitch: FO Con testa se frase é consequência FO de outras

Tautologia, Validade FO e Verdade



- Toda a tautologia é válida FO
- Toda a frase válida FO é verdade lógica

Equivalências FO

- Equivalência lógica de wff's com variáveis livres
  - duas wff's são logicamente equivalentes se as frases resultantes da substituição das suas variáveis livres por nomes são logicamente equivalentes
  - útil para usar equivalências proposicionais dentro de frases de 1ª ordem
- Generalizar princípio da substituição
  - P e Q são wff's e S(P) é frase que contém P como componente
  - Se P e Q são logicamente equivalentes,

    $P \Leftrightarrow Q$

    também o são S(P) e S(Q):

    $S(P) \Leftrightarrow S(Q)$

Equivalências FO

- $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \quad \Leftrightarrow \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
- $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \quad \not\Leftrightarrow \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$

- $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \quad \Leftrightarrow \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$
- $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \quad \not\Leftrightarrow \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$

- Há casos em que o quantificador universal pode passar para dentro da disjunção ou o existencial para fora da conjunção: *quantificação nula*
- Se x não é livre na wff P, tem-se
  - $\forall x\, P \quad \Leftrightarrow P$
  - $\exists x\, P \quad \Leftrightarrow P$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x\,(P \vee Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad P \vee \forall x\, Q(x) \\ \exists x\,(P \wedge Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad P \wedge \exists x\, Q(x) \end{array}\right\} \quad \text{Se x não é livre em P}$$

MÚLTIPLOS QUANTIFICADORES

Frases com múltiplos quantificadores

- Várias ocorrências do mesmo quantificador à cabeça

  $\exists y \exists z\ (Cube(y) \wedge Tet(z) \wedge LeftOf(y,z))$

  $\forall x \forall y\ ((Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow LeftOf(x,y))$

- Quantificadores como prefixos de subfrases

  $\exists y\ (Cube(y) \wedge \exists z\ (Tet(z) \wedge LeftOf(y,z)))$

  $\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \forall y\ (Tet(y) \rightarrow LeftOf(x,y)))$

- Relação entre variáveis quantificadas

  Todo o cubo está ou à esquerda ou à direita de qualquer outro cubo

  $\forall x \forall y\ ((Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow (LeftOf(x,y) \vee RightOf(x,y)))$

  é afirmação falsa em qualquer mundo com pelo menos 1 cubo:

  $\forall y\ ((Cube(b) \wedge Cube(y)) \rightarrow (LeftOf(b,y) \vee RightOf(b,y)))$

  $(Cube(b) \wedge Cube(b)) \rightarrow (LeftOf(b,b) \vee RightOf(b,b))$

  $\forall x \forall y\ ((Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \rightarrow (LeftOf(x,y) \vee RightOf(x,y)))$

Quantificadores misturados

$\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \exists y\ (Tet(y) \wedge LeftOf(x,y)))$

Todo o cubo está à esquerda de um tetraedro

- Outra forma (Prenex):

$\forall x \exists y\ (Cube(x) \rightarrow (Tet(y) \wedge LeftOf(x,y)))$

- Ordem entre quantificadores iguais: indiferente

$\forall x \forall y\ Gosta(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \forall x\ Gosta(x,y)$

$\exists x \exists y\ Gosta(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \exists x\ Gosta(x,y)$

- Ordem entre quantificadores diferentes: é importante

$\forall x \exists y\ Gosta(x,y)$ o y varia para cada x

$\exists y \forall x\ Gosta(x,y)$ o y é o mesmo para todos os x

Tradução passo a passo

- Problema: frases em LN com várias frases nominais quantificadas
- Solução: traduzir parcialmente
  Todo o cubo está à esquerda de um tetraedro
  - Todo o cubo verifica uma propriedade
    $\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow$ x está-à-esquerda-de-um-tetraedro$)$
  - x está-à-esquerda-de-um-tetraedro:
    usando x como um nome, dá a frase quantificada
    $\exists y\ (\mathrm{Tet}(y) \wedge \mathrm{LeftOf}(x,y))$
  - Compondo as duas
    $\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{Tet}(y) \wedge \mathrm{LeftOf}(x,y)))$

Parafrasear LN

- Tradução passo a passo, usando a estrutura da frase em LN
  - pode induzir traduções que não são frases em LPO

  Se uma pessoa pratica um desporto radical, então tem de ser corajosa

  ✗ $\exists x(\text{Pessoa}(x) \wedge \exists y\ (\text{Desporto}(y) \wedge \text{Radical}(y) \wedge \text{Pratica}(x,y))) \rightarrow \text{Corajosa}(x)$

- Parafraseando:

  Toda a pessoa que pratica um desporto radical tem de ser corajosa

  $\forall x((\text{Pessoa}(x) \wedge \exists y\ (\text{Desporto}(y) \wedge \text{Radical}(y) \wedge \text{Pratica}(x,y))) \rightarrow \text{Corajosa}(x))$

> Ao traduzir de LN para LPO:
> objetivo é obter frase com o significado da original
> pode ser necessário alterar a forma superficial da frase

Ambiguidade e sensibilidade ao contexto

- Problemas com a tradução LN-LPO
  - poucos conceitos primitivos na LPO
    - algumas afirmações resultam pouco naturais
    - para resolver fazem-se circunlóquios
  - LN é ambígua e LPO não
    - necessário escolher entre diversas interpretações e usar o contexto

      De hora a hora uma pessoa é assaltada na cidade do Porto;

      vamos agora entrevistá-la...
    - Tradução da 1ª frase

    $\forall x(\text{Hora}(x) \rightarrow \exists y\ (\text{Pessoa}(y) \wedge \text{AssaltadoDurante}(y,x)))$
    - Tradução revista atendendo à 2ª frase

    $\exists y(\text{Pessoa}(y) \wedge \forall x\ (\text{Hora}(x) \rightarrow \text{AssaltadoDurante}(y,x)))$
    - Tradução mais natural não é determinada pela forma da frase:

    De hora a hora alguém da secretaria tem tentado ligar-te;

Tradução com símbolos de função

- Funções: expressam relação entre objetos
  - Tudo o que se exprime com símbolos funcionais pode ser expresso com símbolos de relação

mãe	MãeDe
Símbolo de função unária	*Predicado binário*
mãe(rui) = fernanda	MãeDe(fernanda, rui)

Com função: $\forall x\ MaisVelha(mãe(x),x)$

Com predicado: $\forall x \exists y(MãeDe(y, x) \wedge MaisVelha(y,x))$

só diz que cada pessoa tem pelo menos 1 mãe que é mais velha que o próprio

$$\forall x \forall y(MãeDe(y, x) \rightarrow MaisVelha(y,x))$$

só diz que todas as mães de todas as pessoas são mais velhas que elas

Captar dependência funcional

- Captar que a relação MãeDe é funcional:
  - cada pessoa tem pelo menos 1 mãe e, no máximo, 1 mãe

  $\forall x \exists y\ \text{MãeDe}(y, x)$ pelo menos 1 mãe

  $\forall x \forall y \forall z((\text{MãeDe}(y, x) \wedge \text{MãeDe}(z, x)) \rightarrow y=z)$ no máximo 1 mãe

- Frase que capta as duas afirmações

  $\forall x \exists y(\text{MãeDe}(y, x) \wedge \forall z(\text{MãeDe}(z, x) \rightarrow y=z))$

- Para exprimir $\forall x\ \text{MaisVelha}(\text{mãe}(x),x)$

  $\forall x \exists y(\text{MãeDe}(y, x) \wedge \text{MaisVelha}(y, x) \wedge \forall z(\text{MãeDe}(z, x)) \rightarrow y=z))$

Tudo o que se pode exprimir com um símbolo de função n-ário pode ser expresso com um predicado de aridade n+1 mais o predicado identidade, a expensas da complexidade da frase resultante

Forma Prenex

Todo o cubo à esquerda de um tetraedro está atrás de um dodecaedro

$\forall x[(\mathrm{Cube}(x) \wedge \exists y(\mathrm{Tet}(y) \wedge \mathrm{LeftOf}(x,y))) \rightarrow \exists y(\mathrm{Dodec}(y) \wedge \mathrm{BackOf}(x,y))]$

- Tradução mais natural tem quantificações dentro de subexpressões

Forma normal Prenex

$Q_1 v_1 Q_2 v_{2\ldots} Q_n v_n \ P$

Q_i : $\forall$ ou $\exists$

v_i : variável

P : wff sem quantificadores

Uso da forma normal:

- Medida da complexidade da fórmula: número de alternâncias nos quantificadores
- Demonstração automática de teoremas

Exemplo

$\forall x[(C(x) \wedge \exists y(T(y) \wedge L(x,y))) \rightarrow \exists y(D(y) \wedge B(x,y))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x[\neg(C(x) \wedge \exists y(T(y) \wedge L(x,y))) \vee \exists y(D(y) \wedge B(x,y))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x[\neg \exists y(C(x) \wedge T(y) \wedge L(x,y)) \vee \exists y(D(y) \wedge B(x,y))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x[\forall y \neg(C(x) \wedge T(y) \wedge L(x,y)) \vee \exists y(D(y) \wedge B(x,y))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x[\forall y \neg(C(x) \wedge T(y) \wedge L(x,y)) \vee \exists z(D(z) \wedge B(x,z))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x \forall y[\neg(C(x) \wedge T(y) \wedge L(x,y)) \vee \exists z(D(z) \wedge B(x,z))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x \forall y[\exists z (\neg(C(x) \wedge T(y) \wedge L(x,y)) \vee (D(z) \wedge B(x,z)))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x \forall y \exists z[\neg(C(x) \wedge T(y) \wedge L(x,y)) \vee (D(z) \wedge B(x,z))] \quad \Leftrightarrow$

$\forall x \forall y \exists z[(C(x) \wedge T(y) \wedge L(x,y)) \rightarrow (D(z) \wedge B(x,z))]$

Substituições inválidas!

$\forall xP \vee \forall xQ \quad \not\Leftrightarrow \quad \forall x[P \vee Q]$

$\exists xP \wedge \exists xQ \quad \not\Leftrightarrow \quad \exists x [P \wedge Q]$

Conversão na forma Prenex

$\forall x[(Cube(x) \wedge \exists y(Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))) \rightarrow \exists y(Dodec(y) \wedge BackOf(x,y))]$

$\forall x \forall y \exists z[(Cube(x) \wedge Tet(y) \wedge LeftOf(x,y)) \rightarrow (Dodec(z) \wedge BackOf(x,z))]$

- Não basta puxar os quantificadores para o prefixo
  - $\exists y(Tet(y)\ldots$ quantificador passa a universal porque está logicamente dentro de um $\neg$
  - 2 quantificadores para a variável y: necessário renomear

$\forall xP \wedge \forall xQ$	$\Leftrightarrow$	$\forall x[P \wedge Q]$	
$\exists xP \vee \exists xQ$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\ [P \vee Q]$	
$\forall xP \vee Q$	$\Leftrightarrow$	$\forall x[P \vee Q]$	se x não é livre em Q
$\exists xP \wedge Q$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\ [P \wedge Q]$	se x não é livre em Q
Q	$\Leftrightarrow$	$\forall xQ$	se x não é livre em Q
Q	$\Leftrightarrow$	$\exists xQ$	se x não é livre em Q

Usos dos quantificadores

- Afirmações numéricas
  - um certo número de objetos verifica uma propriedade
- Distinção entre objetos
  - Nomes distintos não têm de referir objetos distintos
  - Variáveis distintas não têm de ter domínios diferentes

$$\mathrm{Cube}(a) \land \mathrm{Small}(a) \land \mathrm{Cube}(b)$$

$$\exists x \exists y (\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Small}(x) \land \mathrm{Cube}(y))$$

verdadeiras num mundo com 1 objeto

$$\mathrm{Cube}(a) \land \mathrm{Small}(a) \land \mathrm{Cube}(b) \land \mathrm{Large}(b)$$

$$\exists x \exists y (\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Small}(x) \land \mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{LeftOf}(x,y))$$

$$\exists x \exists y (\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Small}(x) \land \mathrm{Cube}(y) \land x \neq y)$$

há 2 objetos distintos