RELAÇÕES BINÁRIAS E ORDENS PARCIAIS

1 Relação. Considere a relação binária R= {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,4)} definida em A={1,2,3,4}.

a) Represente a relação R por um diagrama e por uma matriz.

b) Quais as propriedades das relações de que R goza (reflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva)?

c) Como carateriza cada uma dessas propriedades em termos gráficos na figura?

2 Relação. Suponha que A é um subconjunto de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ com as propriedades

- $(1,1) \in A$
- $(a,b) \in A \rightarrow (a+1,b)$ e $(a+1,b+1)$ estão ambos em A.

Acha que $\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m \geq n\}$ é um subconjunto de A? Explique.

3 Relação. Considere a relação $S = \{((x,y),(u,v)) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = u^2+v^2\}$.

a) É antissimétrica?

b) É uma relação de equivalência? Se sim, descreva $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência de (a,b).

4 Relação de equivalência. Considere P, o conjunto dos naturais de Portugal e a relação $S = \{(x,y) \in P\times P \mid x$ é natural do mesmo distrito que $y\}$. Esta relação define uma partição em P? Com quantas células?

5 Diagrama de Hasse. Desenhe o diagrama de Hasse para o seguinte conjunto parcialmente ordenado ({{a}, {a,b}, {a,b,c}, {a,b,c,d}, {a,c},{c,d}}, ⊆).

a) Qual o máximo?

b) Quais os maximais?

c) Qual o mínimo?

d) Quais os minimais?

e) Qual o supremo de {a,b} e {a,c}?

f) Qual o ínfimo de {a,b} e {c,d}?

g) $\{a,b\} \wedge \{a,c\}$

h) $\{a\} \vee \{c,d\}$

6 Diagrama de Hasse. Considere o cpo $(\mathbf{B},\leq)$ em que $\mathbf{B}=\{0,1\}$ é o conjunto dos dígitos binários e $0\leq 1$. $\mathbf{B}^n$ é o conjunto dos n-uplos com componentes binárias $\mathbf{B}^n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i \in \mathbf{B}$, para $i = 1,\ldots,n\}$ os quais, por simplicidade, podem ser escritos $a_1a_2\ldots a_n$. Define-se em $\mathbf{B}^n$ a relação binária $a_1a_2\ldots a_n \preccurlyeq b_1b_2\ldots b_n \leftrightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\}\ a_i \leq b_i$.

a) Mostre que $(\mathbf{B}^n,\preccurlyeq)$ é um cpo.

b) Desenhe o diagrama de Hasse correspondente ao cpo $(\mathbf{B}^3,\preccurlyeq)$.

c) Qual o supremo de $\{001,110\}$? E o ínfimo de $\{011,110\}$?

d) Qual o significado do supremo e do ínfimo neste cpo, em termos de lógica binária?

7 **Diagrama de Hasse**. Considere o conjunto de todos os divisores positivos de 36, $D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ e a relação de divisibilidade a|b se a for um divisor inteiro de b.

a) Desenhe o diagrama de Hasse do cpo $(D_{36},|)$.

b) Determine o sup A={1,2,3,4,6}

c) Determine o inf A

d) Determine o sup B={2,6,12,18}

e) Determine inf B

f) Qual o conjunto dos minorantes de {12,18}? O que significa esse conjunto?

g) Qual o significado de $12 \wedge 18$ e de $12 \vee 18$?

8 Seja S um conjunto não vazio e A e B dois elementos do power set de S. Para o cpo $(\wp(S), \subseteq)$ prove que $A \wedge B = A \cap B$.

9 Suponha que $(A_1, \preccurlyeq_1) e\ (A_2, \preccurlyeq_2)$ são conjuntos parcialmente ordenados.

a) Mostre que a definição

$$(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 \preccurlyeq_1 y_1\ e\ x_2 \preccurlyeq_2 y_2$$

para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A_1 \times A_2$ faz de $(A_1 \times A_2, \preccurlyeq)$ um cpo.

b) Seja $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \{2,3,4\}$. Atribua a A_1 a ordem parcial $\leq$ e a A_2 a ordem parcial $|$. Ordene parcialmente $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$ tal como definido em a). Mostre todos os relacionamentos da forma $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$.

c) Desenhe o diagrama de Hasse para o cpo de b).

d) Determine todos os elementos maximais, minimais, máximo e mínimo que existirem no cpo de b).

e) Com $A_1\ e\ A_2$ tal como em b), obtenha os ínfimos e supremos que existirem para cada um dos seguintes pares de elementos

i. (2,2), (3,3)

ii. (4,2), (3,4)

iii. (3,2), (2,4)

iv. (3,2), (3,4)

f) Mostre, com um exemplo, que se $(A_1, \preccurlyeq_1)\ e\ (A_2, \preccurlyeq_2)$ forem cpo com ordens totais, $(A_1 \times A_2, \preccurlyeq)$ não é necessariamente um cpo com uma ordem total.

10 Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots \right\}$ o conjunto de todas as matrizes 2x2 binárias.

a) Sendo A e B elementos de S, define-se a ordem parcial $A \preccurlyeq B$ sse $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo o i e j. Desenhe o diagrama de Hasse do cpo $(S, \preccurlyeq)$, assinalando o elemento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se redefinisse a relação binária para A ≼ B sse det(A) ≤ det(B), o resultado seria: uma relação de ordem total; uma relação de ordem parcial correspondendo a um diagrama de Hasse só com três níveis; não é ordem parcial.

11 Seja $S=\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge |a+bi|= \sqrt{(a^2+b^2)} \leq 4\}$ o conjunto dos números complexos de coeficientes inteiros e módulo inferior ou igual a 4.

a) Define-se neste conjunto a seguinte ordem parcial: $a+bi \preccurlyeq c+di$ sse $a \leq c \wedge b \leq d$. Desenhe o diagrama de Hasse do cpo (S, ≼), assinalando o elemento $1+3i \vee 3+i$.
b) Se redefinisse a relação binária para $a+bi \preccurlyeq c+di$ sse $|a+bi| \leq |c+di|$, o resultado seria: uma relação de ordem total; uma relação de ordem parcial correspondendo a um diagrama de Hasse com quatro níveis; não é ordem parcial.

12 Dada uma relação binária R, define-se a relação inversa $R^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.

a) Suponha que R é uma relação transitiva em S×S. Será que R^{-1} tem que ser também transitiva? Prove a afirmação ou construa um contraexemplo.
b) Suponha que R é uma ordem total num conjunto S. Mostre que $R \cup R^{-1} = S \times S$.