

FUNÇÕES

- 1 Para cada uma das fórmulas seguintes, obtenha o maior subconjunto A de \mathbb{R} tal que a fórmula de $f(x)$ defina uma função em A . Indique o respetivo contradomínio.
 - a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$
 - b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
- 2 Seja S um conjunto contendo o número 5. Seja $A = \{f: S \rightarrow S\}$ o conjunto de todas as funções $S \rightarrow S$. Para $f, g \in A$, define-se $f \sim g$ se $f(5) = g(5)$.
 - a) Prove que \sim define uma relação de equivalência em A .
 - b) Obtenha a classe de equivalência de $f = \{(5, a), (a, b), (b, b)\}$ no caso $S = \{5, a, b\}$.
- 3 Seja $X = \{a, b\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$. Liste todas as funções de X para Y e de Y para X , indicando se são sobrejetivas ou injetivas.
- 4 Definindo $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como $g(x) = 2x^2 + 7x$. A função g é sobrejetiva? É injetiva?
- 5 Seja $A = \{x \mid x \neq 1/2\}$. Define-se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{4x}{2x-1}$.
 - a) A função f é injetiva?
 - b) Obtenha $\text{rng } f$. Explique porque é que $f: A \rightarrow \text{rng } f$ tem inversa.
 - c) Obtenha $\text{dom } f^{-1}$, $\text{rng } f^{-1}$ e uma fórmula para $f^{-1}(x)$.
- 6 Seja $S = \{1, 2, 3, 4\}$ e defina as funções $f, g: S \rightarrow S$ por $f = \{(1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 1)\}$ e $g = \{(1, 4), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}$. Calcule:
 - a) $f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g$
 - b) $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f$
- 7 Considere as seguintes funções

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ e}$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$
 - a) Calcule $f \circ g$ e $g \circ f$. São iguais?
 - b) Calcule $(f \circ g)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ e $g^{-1} \circ f^{-1}$. O que pode concluir?
- 8 Mostre que, se A e B forem conjuntos enumeráveis, $A \times B$ também é enumerável.
- 9 Define-se $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 2^{x-1} + 3$. Determine justificadamente o domínio e o contradomínio e se g é injetiva ou sobrejetiva.
- 10 Uma turma tem 21 estudantes, cada um dos estudantes terá uma avaliação qualitativa A, B, C, D, ou F. Quantas funções pode definir do conjunto dos alunos para o conjunto das notas? Quantas dessas funções são injetivas? Justifique.
- 11 Prove que os intervalos $]a, b[$ e $]c, +\infty[$ têm a mesma cardinalidade. Assuma que $a < b$.
- 12 A é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Dadas as funções definidas em $A \rightarrow A$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad r(x) = \frac{x}{x-1}$$
 Calcule as funções $f \circ g$ e $(g \circ r)^{-1}$.