Ordens parciais

Ordens parciais.

Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006

Capítulo: 2

ORDENS PARCIAIS

Ordem parcial

- Uma ordem parcial num conjunto A é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva em A. Um conjunto parcialmente ordenado (**cpo**) é um par $(A, \preccurlyeq)$ onde $\preccurlyeq$ é uma ordem parcial no conjunto A
- **Exemplo**: a relação binária $\leq$ nos números reais é uma ordem parcial porque $a \leq a$ para todo o $a \in \mathbb{R}$ (reflexividade), $a \leq b$ e $b \leq a$ implica $a=b$ (antissimetria) e $a \leq b$ e $b \leq c$ implica $a \leq c$ (transitividade)
- **Exemplo**: mostre que, para qualquer conjunto S, a relação binária $\subseteq$ no conjunto das partes de S, $\wp(S)$, é uma ordem parcial

Ordem total

- Se $(A, \preccurlyeq)$ for um cpo, os elementos a e b de A dizem-se **comparáveis** se e só se $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$
  - A ordem designa-se parcial precisamente por poder não se aplicar a todos os pares. Exemplo: se $X=\{a\}$ e $Y=\{b,c\}$ forem subconjuntos de S, nem $X \subseteq Y$ nem $Y \subseteq X$, pelo que X e Y não são comparáveis
- Se $\preccurlyeq$ for uma ordem parcial num conjunto A e $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$ para todos os $a,b \in A$, então $\preccurlyeq$ é uma **ordem total** e o par $(A, \preccurlyeq)$ é um conjunto totalmente ordenado
  - O par $(\mathbb{R}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado

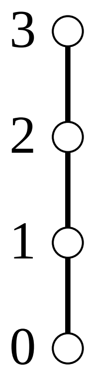
- Se $a \preccurlyeq b$ diz-se que a é menor ou igual a b (analogia com $\leq$)
- Usa-se a notação $a \prec b$ (a menor do que b) se $a \preccurlyeq b$ e $a \neq b$

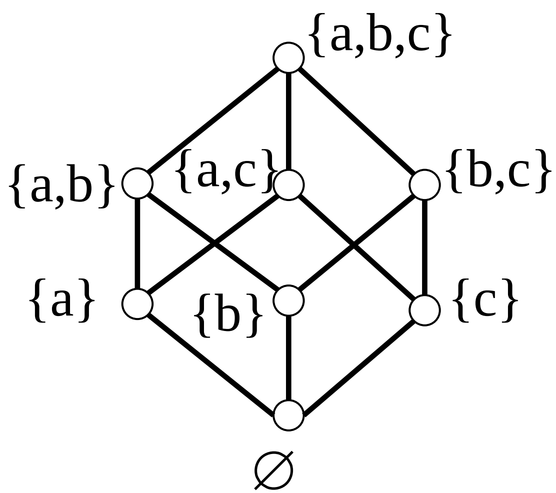
Exemplo: ordem lexicográfica

- Exemplo: Seja o conjunto das palavras formadas por cadeias de símbolos do alfabeto português. Para as palavras $a=a_1a_2\ldots a_n$ e $b=b_1b_2\ldots b_m$ define-se $a \preccurlyeq b$ se:
  - a e b são idênticas, ou
  - $a_i \preccurlyeq b_i$ no alfabeto na primeira posição i em que as palavras diferem, ou
  - $a_i = b_i$ para $i= 1,\ldots,n$ mas $n<m$
- Esta relação é uma ordem parcial? E total?

Diagramas de Hasse

- No **diagrama de Hasse** de um cpo A
  - Existe um ponto (ou vértice) associado com cada elemento de A
  - Se a $\preccurlyeq$ b então o ponto do b está posicionado acima do ponto do a
  - Se a $\prec$ b e não existir um c intermediário tal que a $\prec$ c $\prec$ b, então desenha-se uma linha de a para b (e diz-se que b cobre a).
    - Não existem linhas redundantes no diagrama de Hasse

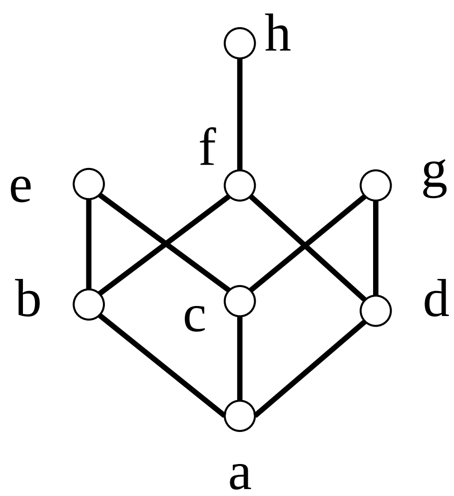




- $(\{0,1,2,3\}, \leq)$ $\qquad$ $(\wp(\{a,b,c\}), \subseteq)$

Máximos e mínimos

- Um elemento a de um cpo (A, $\preccurlyeq$) é **máximo** se e só se b $\preccurlyeq$ a para todo o b $\in$ A e **mínimo** se e só se a $\preccurlyeq$ b para todo o b $\in$ A
- Um elemento a de um cpo (A, $\preccurlyeq$) é **maximal** se e só se b $\in$ A e a $\preccurlyeq$ b $\rightarrow$ a=b e é **minimal** se e só se b $\in$ A e b $\preccurlyeq$ a $\rightarrow$ a=b
- Exemplo
  - Mínimo a
  - Máximo Não há
  - Maximal e,g,h
  - Minimal a



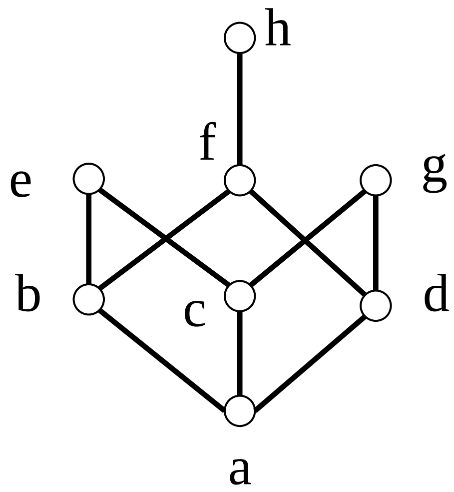
Supremo e ínfimo

- Seja $(A, \preccurlyeq)$ um cpo. Um elemento lb é um **minorante** dos elementos a e $b \in A$ se e só se $lb \preccurlyeq a$, $lb \preccurlyeq b$
- Um elemento g designa-se por **ínfimo** e representa-se por inf{a,b} se e só se
  1. $g \preccurlyeq a$, $g \preccurlyeq b$, e
  2. Se $c \preccurlyeq a$ e $c \preccurlyeq b$, para um $c \in A$, então $c \preccurlyeq g$.
  - g é maior dos minorantes de a e b (inglês: glb – greatest lower bound)
  - Também se representa por **a** $\wedge$ **b** (a meet b), quando existe, e é único

- Seja $(A, \preccurlyeq)$ um cpo. Um elemento ub é um **majorante** dos elementos a e $b \in A$ se e só se $a \preccurlyeq ub$, $b \preccurlyeq ub$
- Um elemento l designa-se por **supremo** e representa-se por sup{a,b} se e só se
  1. $a \preccurlyeq l$, $b \preccurlyeq l$, e
  2. Se $a \preccurlyeq c$ e $b \preccurlyeq c$, para um $c \in A$, então $l \preccurlyeq c$.
  - l é o menor dos majorantes de a e b (inglês: lub – least upper bound)
  - Também se representa por **a** $\vee$ **b** (a join b), quando existe, e é único

Exemplo

- Minorantes de *e* e *g* a,c
- inf {e,g} c
- Majorantes de *b* e *d* f,h
- sup {b,d} f
- $e \wedge d$ a
- $b \vee d$ f
- $e \vee d$ Não há
- $a \wedge h$ a
- $a \vee h$ h
- $\{x \mid x \preccurlyeq f\}$ a,b,d,f



Reticulado

- Um cpo (A, $\preccurlyeq$) em que todos os pares de elementos têm um ínfimo e um supremo em A designa-se **reticulado**

- CPO: $(\wp(\{a,b,c\}), \subseteq)$