T2013-4-P10

- a) Prove por indução que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

- R: a) A estrutura indutiva é o conjunto dos números naturais.
- A afirmação a provar é $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$
- Caso base: n=1, $2^0=2^1-1=1$
- Caso indutivo Q(n+1): $\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n = 2^n - 1 + 2^n = 2(2^n) - 1 = 2^{n+1} - 1$
- Usando a hipótese de indução, concluímos que a afirmação é verdadeira no caso n+1.

Mudança de domínio

- b) Confirme o resultado através de uma mudança de domínio para a representação numérica binária.

- R: b) O lado esquerdo da igualdade representa o número binário de n bits, todos a 1, 11…1. 2^n representa o número binário 100..0 com n zeros. Acontece que, pelas regras da adição binária, este é o número que se obtém se se somar 1 ao número anterior, confirmando a igualdade.

T2014-4-P11

- Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.
- Mostre por indução que $A^n = 4^n \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- R: Estrutura indutiva: N
- Afirmação: acima
- Caso base: n=0: $A^0 = 4^0 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3^0 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$=I.
- Caso indutivo:
- $A^{n+1} = AA^n = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \left(4^n \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) =$
  $4^n \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} + 3^n \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = 4^{n+1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3^{n+1} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$