Lógica Proposicional-3

Condicional e bicondicional

Provas informais e formais com condicionais

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011
Capítulos: 7-8

Condicional

- Implicação ou condicional material: $\rightarrow$
  - **P → Q** P é antecedente e Q consequente
- Linguagem natural
  - *se P então Q*

    Se a Ana está na sala então a Rita está na biblioteca

    NaSala(ana) → NaBiblioteca(rita)
  - *P só se Q* P → Q [condição necessária]

    O Nilton é aprovado só se assistir a 75% das aulas

    Aprovado(nilton) → Assiste75%(nilton)
  - *P se Q* Q → P [condição suficiente]

    O Luís é bom aluno se tiver média de 15

    Media15(luis) → BomAluno(luis)

Tradução

- *Q sempre que P, Q quando P, Q dado P*

  Chove sempre que vou à praia

  NaPraia(eu) → Chove
- *P implica Q* [valor de verdade, não causalidade]

  A Otília andar à chuva implica que fica molhada

  AndarChuva(otilia) → Molhada(otilia)

- Combinado com negação: **¬P → Q**
  - *Q a menos que P; a não ser que P, Q*

    A Clara vai à praia a menos que chova

    ¬Chove → NaPraia(clara) [se chover não se sabe...]
- Em fórmulas quantificadas: expressões mais naturais

  Todos os A's são B´s

  - Para todo o x (A(x) → B(x))

$\rightarrow$: Semântica e Regra do jogo

- $P \rightarrow Q$ verdadeiro se e só se P é falso ou Q verdadeiro

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

significado é $\neg P \vee Q$

- Quando é falso: antecedente verdadeiro e consequente falso
- Não aumenta a potência da linguagem mas torna-a mais natural e fácil de entender
- Tarski´s World: $P \rightarrow Q$ é abreviatura de $\neg P \vee Q$
  - no jogo: substitui e usa regra para $\vee$

Verdade lógica e consequência lógica

- Importância do condicional: reduzir consequência lógica a verdade lógica

- Q é consequência das premissas $P_1, \ldots P_n$ se e só se

  é impossível todas serem verdadeiras e Q falso

  Então a fórmula

  $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ — não pode ser falsa

  é logicamente verdadeira

Bicondicional

- Equivalência ou bicondicional material: $\leftrightarrow$
- [condição necessária e suficiente]
- LN: *se e só se… só no caso em que...*
  - n é par sse n^2 é par

    $Par(n) \leftrightarrow Par(n^2)$

sse

P se Q	$Q \rightarrow P$
P só se Q	$P \rightarrow Q$

- Propriedades: P e Q são **logicamente equivalentes** se e só se o bicondicional $P \leftrightarrow Q$ for **logicamente verdadeiro**

  $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$ sse; abreviatura; não é símbolo da FOL

  $\mathbf{P \leftrightarrow Q}$ conetiva; logicamente verdadeiro; símbolo da FOL

- Exemplo: lei de DeMorgan

  $\neg (P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ é logicamente verdadeira

$\leftrightarrow$: Semântica e Regra do jogo

- $P \leftrightarrow Q$ verdadeiro se e só P e Q têm o mesmo valor de verdade

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

significado é $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

- Tarski´s World:
  - $P \leftrightarrow Q$ é substituído por $(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$
  - no jogo: substitui e usa regra para $\rightarrow$

LN: o que decorre de uma frase?

- Ao traduzir LN para LPO:
  - questão do que é ou não consequência da frase

    A Rita está na sala quando o Rui não está na sala

  ? $\neg$NaSala(rui) $\rightarrow$ NaSala(rita)

  ? $\neg$NaSala(rui) $\leftrightarrow$ NaSala(rita)

  - Na frase em LN: decorre de alguma maneira que se o Rui estiver na sala, então a Rita não estará
- Distinção a fazer:
  - condições de verdade de uma afirmação
  - outras coisas que decorrem da afirmação
- H.P. Grice: introduz noção de <u>decorrência conversacional</u>

Decorrência Conversacional

Frase F e conclusão C

- se C faz <u>parte do significado de F</u>: não pode ser cancelada por afirmações subsequentes
  - ✗ *A Rita e o Rui estão na sala … mas o Rui não está na sala*

    O Rui está na sala é parte do significado: não pode ser cancelado
- se C é mera <u>decorrência de F</u>: pode ser cancelada por afirmações subsequentes
  - ✓ *A Rita está na sala quando o Rui não está na sala … mas quando o Rui está na sala não sei onde está a Rita*

  $NaSala(Rita) \rightarrow \neg NaSala(Rui)$ não faz parte do significado da afirmação: pode ser cancelado na afirmação seguinte sem contradição

Equivalências

- Condicional

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

contrapositiva

$$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

- Bicondicional

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

Métodos de prova usando $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

- Estritamente: podem usar-se só as regras para $\neg$, $\wedge$ e $\vee$
- Provas mais naturais: usam regras próprias para $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

- Passos de prova:
- *Modus ponens* ou **eliminação do condicional**
  - tendo estabelecido $P \rightarrow Q$ e P pode inferir-se Q

- **Eliminação do bicondicional**
  - tendo estabelecido $Q \leftrightarrow R$ ou $R \leftrightarrow Q$, tendo Q pode inferir-se R

Método de prova condicional

- Para provar $P \rightarrow Q$:
  - Subprova, assumir P como premissa
  - Provar Q
  - Concluir $P \rightarrow Q$

- Exemplo: $A \rightarrow C$ é consequência de $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$
  - Assumindo A: de $A \rightarrow B$, por *modus ponens* infere-se B
  - De B e $B \rightarrow C$, por *modus ponens* infere-se C
  - Provou-se C tendo assumido A, provou-se $A \rightarrow C$

Exemplo de prova condicional

- Provar: $Par(n^2) \rightarrow Par(n)$
  - Assumindo $Par(n^2)$, e fazendo prova por contradição
    - n é ímpar, $n = 2m + 1$
    - $n^2 = (2m+1)^2 = 4\,m^2 + 4m + 1 = 2\,(2\,m^2 + 2m) + 1$ donde n^2 é ímpar
    - Contradiz a premissa, logo n é par
  - $Par(n^2) \rightarrow Par(n)$ infere-se por prova condicional

Provas com $\leftrightarrow$

- Prova condicional: para provar $P \leftrightarrow Q$
  - Assumir P e provar Q
  - Assumir Q e provar P
- Para provar Q1, Q2, Q3 todos equivalentes:

Expressão em LPO:

$Q1 \leftrightarrow Q2$

$Q2 \leftrightarrow Q3$

$Q1 \leftrightarrow Q3$

Em vez de 6 provas condicionais:

provar um ciclo

$Q1 \rightarrow Q2$

$Q2 \rightarrow Q3$

$Q3 \rightarrow Q1$

Exemplo

- As condições seguintes nos números naturais são todas equivalentes:

  (1) n é par

  (2) n^2 é par

  (3) n^2 é divisível por 4

- Provando (3) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (3)
  - Assumindo (3): se n^2 é divisível por 4, é divisível por 2, logo (2)
  - (2) $\rightarrow$ (1) por contrapositiva: se n é ímpar, pode escrever-se
    - $n = 2m + 1$
    - $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ é ímpar
  - (1) $\rightarrow$ (3) é evidente

Regras de inferência para $\rightarrow$

Eliminação do condicional

($\rightarrow$ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P \rightarrow Q \\
 & \ldots \\
 & P \\
 & \ldots \\
\triangleright & Q
\end{array}
$$

Modus ponens

Introdução do condicional

($\rightarrow$ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} \underline{P} \\ \ldots \\ Q \end{array} \\
 & \\
\triangleright & P \rightarrow Q
\end{array}
$$

Prova condicional

→ nas provas formais

1. $(A \vee B) \rightarrow C$	
2. A	
3. $A \vee B$	$\vee$ Intro: 2
4. C	$\rightarrow$ Elim: 1,3
5. $A \rightarrow C$	$\rightarrow$ Intro: 2-4

1. A	
2. $\neg A$	
3. $\perp$	$\perp$ Intro: 1,2
4. $\neg\neg A$	$\neg$ Intro: 2,3
5. $A \rightarrow \neg\neg A$	$\rightarrow$ Intro: 1-4

Usar prova de $\neg\neg A$ a partir de A
para provar o condicional
$A \rightarrow \neg\neg A$
(sem premissas)

Regras de inferência para $\leftrightarrow$

Eliminação do bicondicional

($\leftrightarrow$ Elim)

	$P \leftrightarrow Q$ (ou $Q \leftrightarrow P$)
	…
	P
	…
$\triangleright$	Q

Introdução do bicondicional

($\leftrightarrow$ Intro)

	P
	…
	Q
	Q
	…
	P
$\triangleright$	$P \leftrightarrow Q$

Dupla prova condicional

$\leftrightarrow$ nas provas formais

1. $\neg(P \wedge Q)$
2. $\neg P \vee \neg Q$ Teor Prev(Teorema 2): 1

3. $\neg P \vee \neg Q$
4. $\neg(P \wedge Q)$ Teor Prev(Teorema 3): 3

5. $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ $\leftrightarrow$ Intro: 1-2, 3-4

Esquemas úteis

- Modus ponens
  - De $A \rightarrow B$ e A
  - Inferir B
- Modus tollens
  - De $A \rightarrow B$ e $\neg B$
  - Inferir $\neg A$
- Cancelamento
  - De $A \vee B$ e $\neg B$
  - Inferir A
- Reforço do antecedente
  - De $B \rightarrow C$
  - Inferir $(A \wedge B) \rightarrow C$
- Enfraquecimento do consequente
  - De $A \rightarrow B$
  - Inferir $A \rightarrow (B \vee C)$
- Dilema construtivo
  - De $A \vee B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$
  - Inferir $C \vee D$