Relações de recorrência

Sequências.

Relações de recorrência.

Equação caraterística.

Relações de recorrência de 2ª ordem não homogéneas.

Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006

Capítulo: 4

Sequências definidas recursivamente

- Definição de fatorial
  - $n! = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 & se\ n \geq 1 \end{cases}$
- Exemplos
  - 0! = 1   1! = 1   3! = 3.2.1 = 6   6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
- Definição **recursiva** de fatorial (recorrente, indutiva)
  - $n! = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ n \times (n-1)! & se\ n \geq 1 \end{cases}$
- Fatorial de ordem n definido à custa de fatorial de ordem n-1

Cálculo iterativo do fatorial

```
Fatorial(n){
i=1
fat=1
while (i<n) {
   i= i+1
   fat= fat*i
   }
}
```

- Mostrar que, no final, fat=n!
- Invariante (afirmação a provar): no final de cada ciclo fat=i!
- Base: antes do ciclo i=1 e fat =1=i!
- Indutivo: assumir que fat=i!; se i<n executa-se outro ciclo e i passa a i+1 e fat passa a fat*(i+1)=i!*(i+1)= (i+1)!

Implementação recursiva

```
Fatorial(n){
if (n<=1)
    return 1
else
    return n*Fatorial(n-1)
}
```

- Calcula o fatorial(n) à custa do n e do fatorial(n-1)
- Segue a prova indutiva

Sequência

- Uma **sequência** é uma função cujo domínio é um conjunto infinito de inteiros e que toma valores num conjunto de números reais
- Definição da sequência $f_1(n) = n^2$
  - Por lista: 1, 4, 9, 16, …
- Definição da sequência $f_2(n)$
  - Por lista: 2, 4, 8, 16, …
  - Recursivamente:
    - $a_1=2$ condição inicial
    - $a_{k+1} = 2a_k$, para $k \geq 1$ relação de recorrência
  - Por fórmula explícita
    - $a_n = 2^n$ solução da relação de recorrência

Sequências aritmética e geométrica

- A sequência aritmética de primeiro termo a e diferença d
  - $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = a_k + d, \quad k \geq 1. \end{cases}$
  - O termo geral é $a_n = a + (n-1)d$
  - A soma dos n primeiros termos é $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
  - Ex: -7, -4, -1, 2, 5, 8, …
- A sequência geométrica de primeiro termo a e razão r
  - $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = ra_k, \quad k \geq 1. \end{cases}$
  - O termo geral é $a_n = ar^{n-1}$
  - A soma dos n primeiros termos é $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
  - Ex: 1, 2, 4, 8, 16, 32, …

Problema

- Como descobrir a relação de recorrência?
  - Certos problemas são naturalmente formulados como relações de recorrência
  - O cálculo de um termo de ordem n depende de termos anteriores, recursivamente até à condição inicial
- Como descobrir a solução explícita para uma relação de recorrência?
  - A solução explícita é necessária para o cálculo direto do termo de ordem n

Depósito com capitalização

- O banco tem um depósito com juros de 4% ao ano, automaticamente acumulados ao capital inicial. Se depositar, em 2012-01-01, 1000€, ao fim de quanto tempo tem mais do que 1400€ na conta?
- E se o cálculo e capitalização dos juros for mensal?

- R: $c_n = (1+J)c_{n-1}$, $n \geq 1$, $c_0 = C$
- A solução da relação de recorrência é $c_n = (1+J)^n C > 1400$
- Resolvendo em ordem a n, $n > \log_{1+J} \frac{1400}{C}$ com C=1000
- No caso da capitalização anual J=0.04 e n>8.58, 9 anos
- No caso da mensal J=0.04/12=0.0033 e n>101.9, 102 meses

Reprodução de coelhos

- Suponha que numa ilha sem coelhos nem predadores se coloca à nascença um casal de coelhos e se pretende estudar a evolução da população
- Cada casal de coelhos começa a reproduzir-se ao fim de dois meses de vida e a partir daí produz um novo casal todos os meses
- Qual a população de coelhos ao fim de 8 meses?

- R: $c_0=1$, $c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=3$, $c_4=5$, $c_5=8$, $c_6=13$, $c_7=21$, $c_8=34$
- $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ sequência de Fibonacci
  - (Solução mais à frente a partir do polinómio caraterístico.)

Solução por abstração

- Dada a relação de recorrência
  - $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{k+1} = 3a_k + 1 \end{cases} \quad k \geq 1$
  - Obtenha uma fórmula explícita para a_k e mostre que é correta.
  - $a_1 = 1$
  - $a_2 = 3a_1 + 1 = 3(1) + 1 = 4$
  - $a_3 = 3a_2 + 1 = 3(3(1) + 1) + 1 = 13$
  - $a_4 = 3a_3 + 1 = 3(3(3(1) + 1) + 1) + 1 = 40$
  - $a_5 = 3a_4 + 1 = 3(3(3(3(1) + 1) + 1) + 1) + 1 = 121$
  - …
  - $a_k = \frac{3^k - 1}{2}$
  - Prova da correção por indução.

Polinómio caraterístico

- Relação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\boldsymbol{a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)}$$

  - Linear porque a_{n-1} e a_{n-2} aparecem a somar e com expoente 1
    - $a_n = a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-1}^2 + 4$ não é linear por duas razões
  - De segunda ordem porque a_n depende de a_{n-2}
    - $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3} + n^2$ é de terceira ordem
  - Com coeficientes constantes porque r e s não dependen de n
  - Se f(n)=0 a relação de recorrência diz-se **homogénea**

$$a_n - ra_{n-1} - sa_{n-2} = 0$$

- Polinómio caraterístico é

$$x^2 - rx - s = 0$$

Solução da recorrência homogénea

- Sejam x_1 e x_2 as raízes do polinómio caraterístico. Então a solução de $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ é, para $n \geq 2$,

  $$a_n = c_1{x_1}^n + c_2{x_2}^n \text{, se } x_1 \neq x_2$$

  $$a_n = c_1x^n + c_2nx^n \text{, se } x_1 = x_2 = x$$

- c_1 e c_2 a determinar a partir das condições iniciais

Exemplo com $x_1 \neq x_2$

- Resolva a relação de recorrência $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geq 2$ com as condições iniciais $a_0 = 1\ e\ a_1 = 4.$
- R: o polinómio característico é $x^2 - 5x + 6$ cujas raízes são $x_1 = 2\ e\ x_2 = 3$
- A solução vai então ser da forma
$$a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$$
- As condições iniciais forçam a que
$$a_o = c_1 2^0 + c_2 3^0 = c_1 + c_2 = 1$$
$$a_1 = c_1 2^1 + c_2 3^1 = 2c_1 + 3c_2 = 4$$

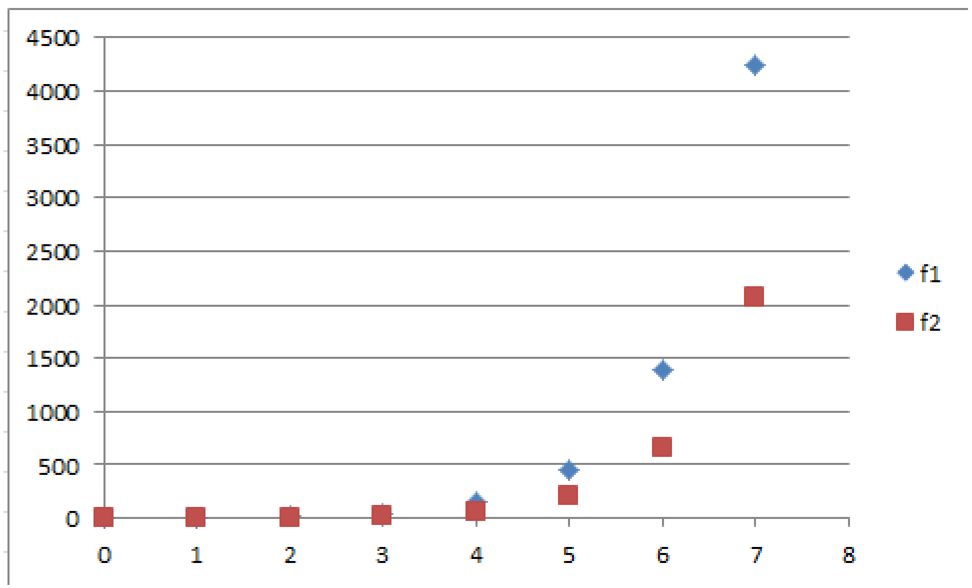
E se a_0=0 e a_1=1 ?

- Pelo que $c_1 = -1\ e\ c_2 = 2$ e finalmente
$$a_n = -2^n + 2(3^n)$$

c_1=-1 e c_2=1

Condições iniciais diferentes

- $f_1 = -2^n + 2(3^n)$
- $f_2 = -2^n + 3^n$



Exemplo com $x_1 = x_2$

- Resolva a relação de recorrência $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2$ com as condições iniciais $a_0 = 1\ e\ a_1 = 4.$
- R: o polinómio característico é $x^2 - 4x + 4$ que tem uma raíz dupla $x = 2$
- A solução vai então ser da forma
$$a_n = c_1(2^n) + c_2 n(2^n)$$
- As condições iniciais forçam a que
$$a_o = c_1 2^0 + c_2(0)2^0 = c_1 = 1$$
$$a_1 = c_1 2^1 + c_2(1)2^1 = 2c_1 + 2c_2 = 4$$
- Pelo que $c_1 = 1\ e\ c_2 = 1$ e finalmente
$$a_n = 2^n + n(2^n) = (n+1)2^n$$

Sequência de Fibonacci

- (exemplo dos coelhos)
- $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$
- Polinómio caraterístico: $x^2 - x - 1$ Raízes: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Solução da recorrência: $a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Das condições iniciais:
  - $c_1 + c_2 = 1$
  - $c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$
- Solução: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

Caso geral (não homogéneo)

- Relação de recorrência $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)$
- **Solução particular** é uma solução específica p_n que portanto satisfaz $p_n = rp_{n-1} + sp_{n-2} + f(n)$
- Seja t_n outra solução particular; então também se verifica que $t_n = rt_{n-1} + st_{n-2} + f(n)$
- Chamando à diferença
- $q_n = t_n - p_n = r(t_{n-1} - p_{n-1}) + s(t_{n-2} - p_{n-2})$

$$q_n = rq_{n-1} + sq_{n-2}$$

- Verifica-se que esta satisfaz a relação homogénea
- Portanto $t_n = p_n + q_n$ é a soma de uma solução particular mais a solução homogénea (já vista atrás)

Teorema

- Seja p_n uma solução particular para a relação de recorrência $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)$ ignorando as condições iniciais. Seja q_n a solução da recorrência homogénea $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$, também ignorando as condições iniciais. Então $p_n + q_n$ é a solução para a relação de recorrência não homogénea. As condições iniciais determinam as constantes em q_n.

Solução particular

- A solução particular p_n depende de f(n) e nem sempre é fácil de encontrar
  - Um bom ponto de partida é fazer p_n da mesma forma de f(n), com as constantes por determinar
  - As constantes determinam-se por substituição na recorrência

Exemplo

- Exemplo: resolva a relação de recorrência não homogénea $a_n = -3a_{n-1} + n, n \geq 1$ com $a_0 = 1$
- R: Determinação de uma solução particular; como f(n)=n é linear vamos escolher $p_n = c + bn$. Para determinar c e b vamos substituir p_n na relação de recorrência

$$c + bn = -3[c + b(n-1)] + n =$$
$$-3c + 3b + (1 - 3b)n$$

- Igualando os coeficientes das potências de n idênticas

$$c = -3c + 3b \ \text{ e } \ b = 1 - 3b$$

- Conclui-se que $c = \frac{3}{16}$ e $b = \frac{1}{4}$, pelo que

$$p_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n$$

Exemplo (cont.)

- A relação de recorrência homogénea é

$$a_n = -3a_{n-1}$$

- O polinómio caraterístico resulta $x^2 + 3x$, com raízes -3 e 0
- A solução homogénea sem condições iniciais é da forma

$$q_n = c_1(-3)^n + c_2(0^n) = c_1(-3)^n$$

- Então, a solução geral é da forma

$$p_n + q_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n + c_1(-3)^n$$

- Para a condição inicial $a_0 = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}(0) + \mathrm{c}_1(-3)^0 = 1$

  conclui-se que $c_1 = \frac{13}{16}$

$$a_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n + \frac{13}{16}(-3)^n$$

Outro exemplo

- Obter uma solução para $a_n = 2a_{n-1} + 3\mathrm{a}_{\mathrm{n}-2} + 5^{\mathrm{n}}, n \geq 2, a_0 = -2, a_1 = 1.$
- R: Tentando $p_n = c(5^n)$ e substituindo na relação

  $c(5^n) = 2c(5^{n-1}) + 3c(5^{n-2}) + 5^{\mathrm{n}}$ dividindo por 5^{n-2}

  $$25c = 10c + 3c + 25, \quad \text{logo } c = \frac{25}{12} \; e \; p_n = \frac{25}{12}(5^n)$$
- Polinómio caraterístico $x^2 - 2x - 3$ com raízes -1 e 3
- Solução homogénea $q_n = c_1(-1)^n + c_2(3^n)$
- Solução geral $p_n + q_n = \frac{25}{12}(5^n) + c_1(-1)^n + c_2(3^n)$
- Iniciais: $a_0 = -2 = \frac{25}{12} + c_1 + c_2, a_1 = 1 = \frac{25}{12}(5) - c_1 + 3c_2$

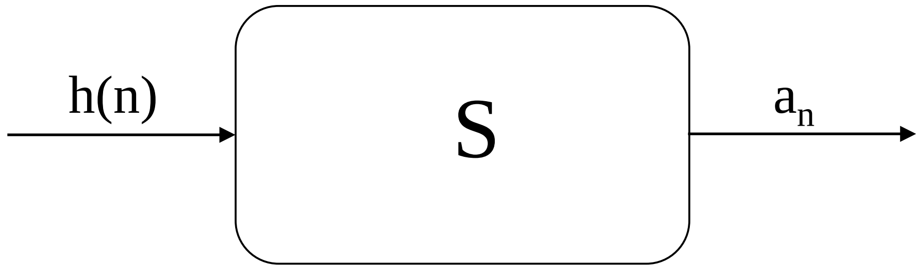
$$a_n = \frac{25}{12}(5^n) - \frac{17}{24}(-1)^n - \frac{27}{8}(3^n)$$

Sistema discreto (1)

- Uma relação de recorrência é muitas vezes um modelo para um dado fenómeno. A sequência a_n pode ser vista como a série de valores que a variável **a** toma nos vários instantes **n**.

$$a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} - \frac{1}{8}a_{n-2} + h(n) \quad n \geq 2, a_0 = 0 \; e \; a_1 = 0$$

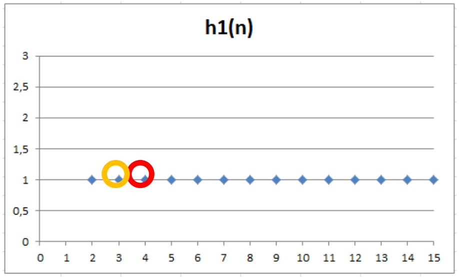
- isto é, a variável no instante n depende dos valores da variável no instante anterior e dois instantes atrás e ainda da sequência h(n)
- A equação descreve assim um sistema S com memória interna para dois instantes (n-1 e n-2), entrada h(n) e saída a_n

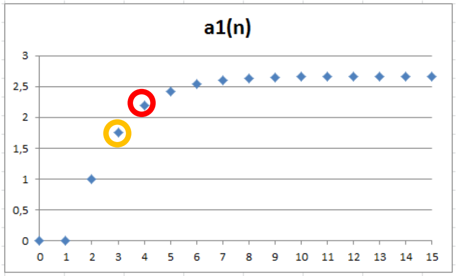


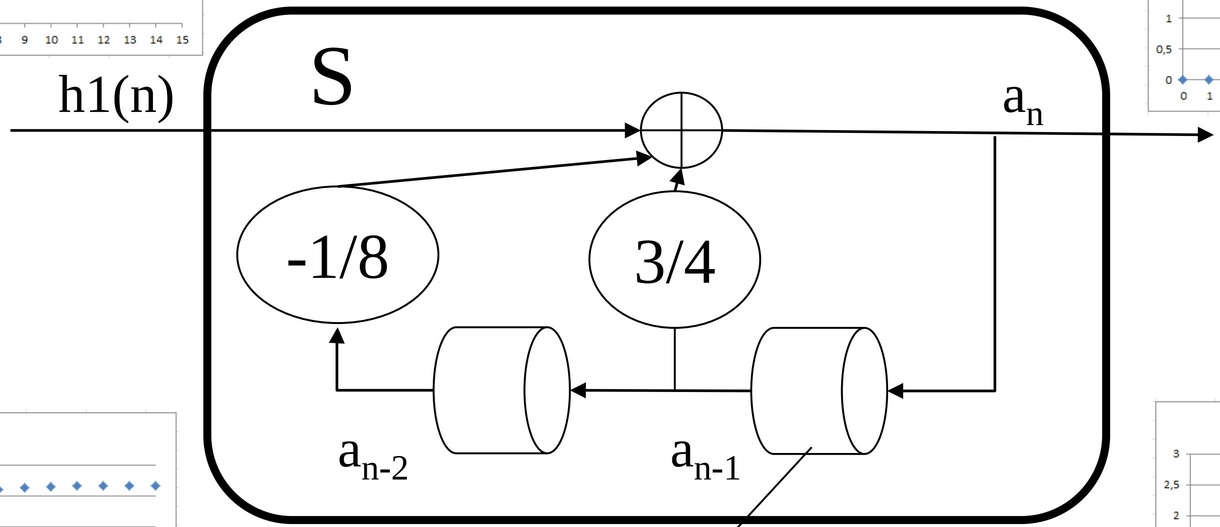
Sistema discreto (2)

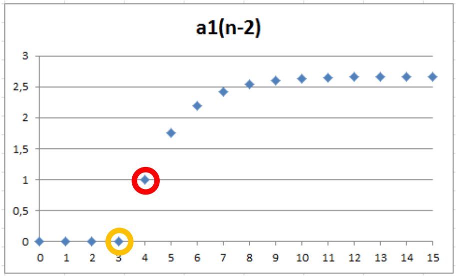
$$a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} - \frac{1}{8}a_{n-2} + h(n) \quad \color{red}{n \geq 2, a_0 = 0 \; e \; a_1 = 0}$$

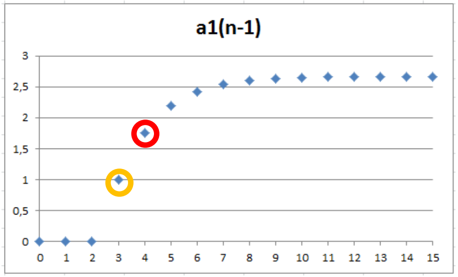
$$h1(n) = 1, \qquad n \geq 2$$









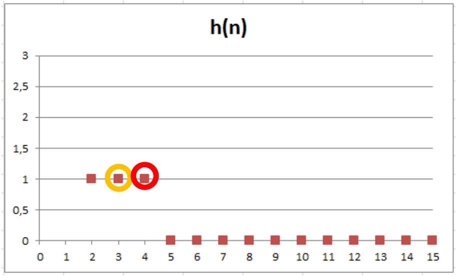


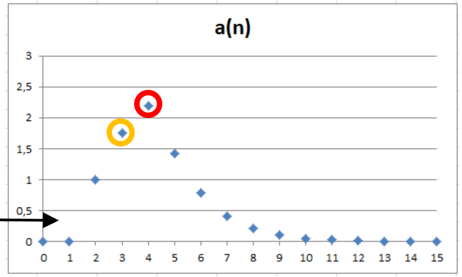
atraso: no instante
n dá o valor de n-1

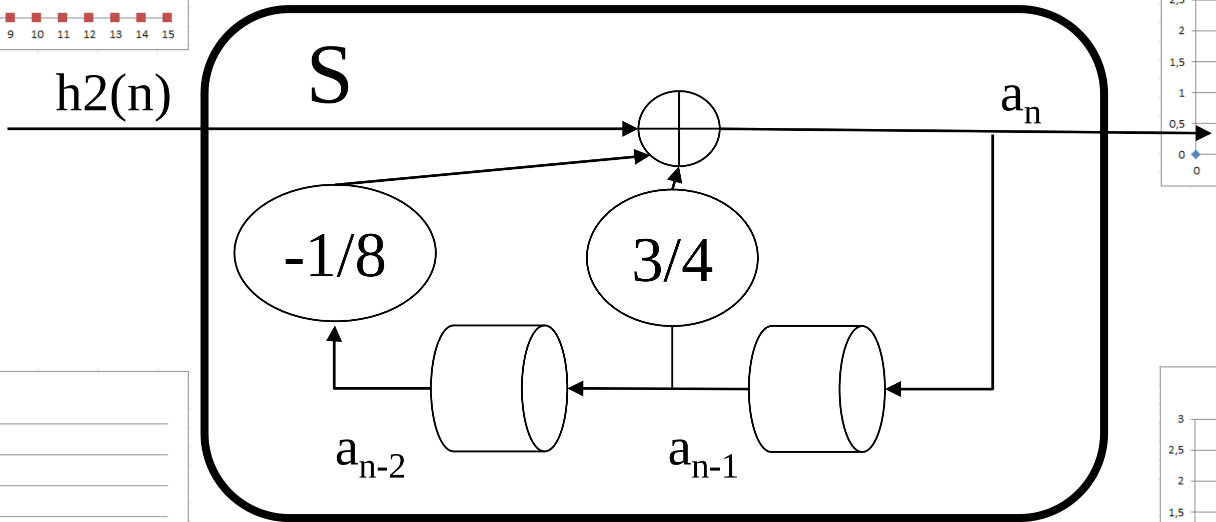
Sistema discreto (3)

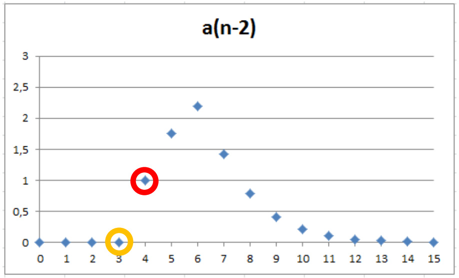
$$a_n = \frac{3}{4} a_{n-1} - \frac{1}{8} a_{n-2} + h(n) \quad n \geq 2, a_0 = 0 \; e \; a_1 = 0$$

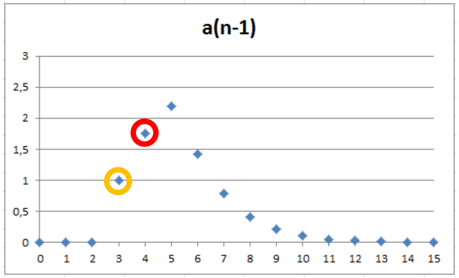
$$h2(n) = \begin{cases} 1, & 2 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \geq 5 \end{cases}$$











Sistema discreto (4)

- $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} - \frac{1}{8}a_{n-2} + h(n) \quad n \geq 2, a_0 = 0 \; e \; a_1 = 0$

$$h2(n) = \begin{cases} 1, & 2 \leq n \leq 4 \\ 0, & n \geq 5 \end{cases}$$

- Primeira parte ($2 \leq n \leq 4$)
- Solução particular (h(n)=1)
  - $p_n=b$
  - b= $\frac{3}{4}b - \frac{1}{8}b + 1$ b= $\frac{8}{3} = 2.6667$
- Solução homogénea
  - polinómio característico: $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$ x = $\frac{1}{2} \vee \frac{1}{4}$
  - $q_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Sistema discreto (5)

- Solução geral
  - $a_n = q_n + p_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$
  - $\begin{cases} a_0 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \frac{8}{3} = 0 \\ a_1 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \frac{8}{3} = 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{8}{3} \\ \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} = -\frac{8}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -8 \\ c_2 = \frac{16}{3} \end{cases}$
  - $a_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$

n	a_n
0	0
1	0
2	1
3	1.75
4	2.1875
(5)	(2.421875)
(6)	(2.542969)

Sistema discreto (6)

- Segunda parte (n≥5)
  - A partir de n=5, considera-se o termo independente como sendo 0 (isto é, a entrada passa a ser 0) pelo que não é necessária a solução particular mas apenas a solução homogénea já calculada mas com condições iniciais (a_3 e a_4) impostas pela primeira parte; o sistema só tem memória para os dois últimos valores
  - $a_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$
  - $\begin{cases} a_3 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1.75 \\ a_4 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^4 = 2.1875 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 = 56 \\ c_2 = -336 \end{cases}$

n	a_n
(3)	1.75
(4)	2.1875
5	1,421875
6	0,79296875
7	0,416992188
8	0,213623047
9	0,108093262

- Sem entrada, este sistema tende para 0
  - é um sistema **estável** porque
  - todas as raízes da equação caraterística têm módulo inferior a 1

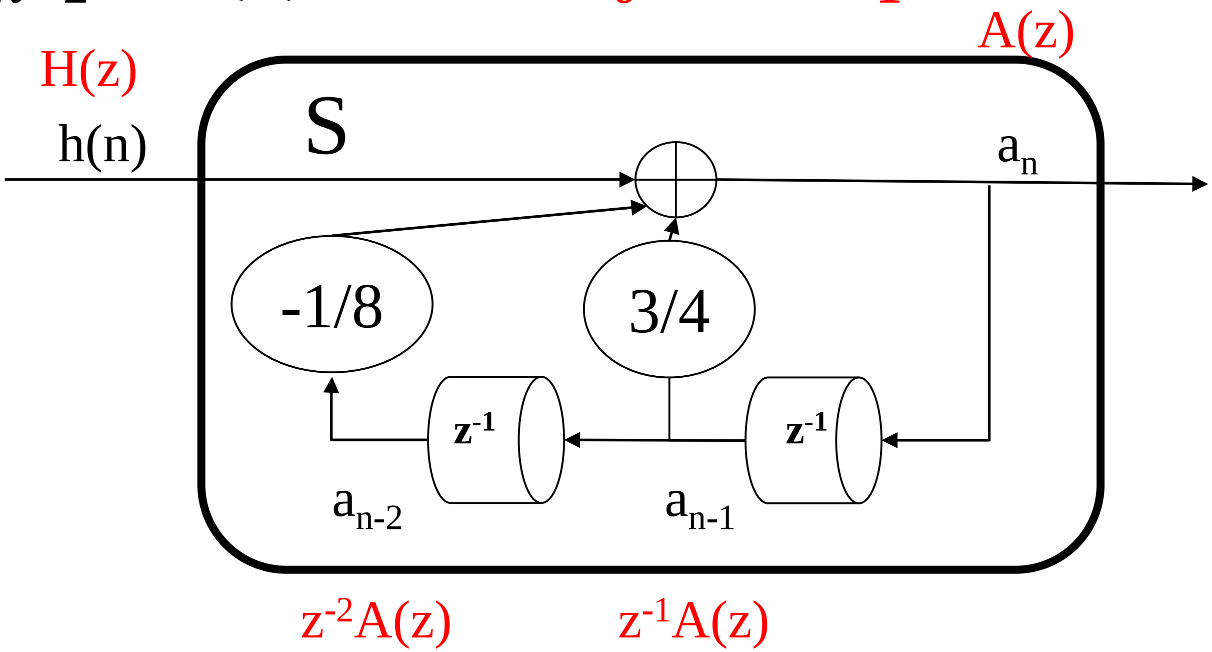
Sistema discreto (7)

- O sinal a_n pode ser visto como uma sequência ou como um sinal no domínio do tempo, n entendido como número de períodos de amostragem T, a(nT)
- Abordagem alternativa: usar a **Transformada z**
- Passar dos sinais a_n no domínio do tempo para os sinais A(z) no domínio das frequências

- Matematicamente z é uma variável complexa
- Interpretação "física": multiplicar por z^{-1} é atrasar um intervalo de amostragem
  - Isto permite obter A(z) a partir do diagrama de blocos do sistema

Sistema discreto (8)

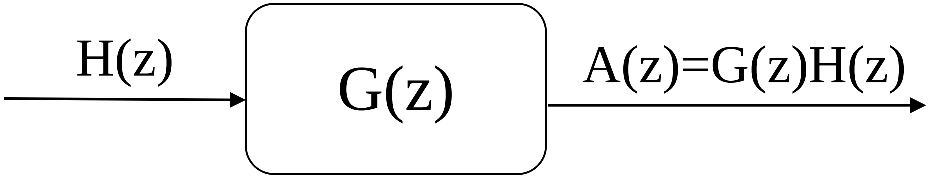
- $a_n = \frac{3}{4}a_{n-1} - \frac{1}{8}a_{n-2} + h(n) \quad n \geq 2, a_0 = 0 \ e \ a_1 = 0$



- $A(z) = \frac{3}{4}z^{-1}A(z) - \frac{1}{8}z^{-2}A(z) + H(z)$
- $A(z)\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right) = H(z)$
- $G(z) = \frac{A(z)}{H(z)} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}} = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$ Função de transferência

Sistema discreto (9)

- Significado da função de transferência

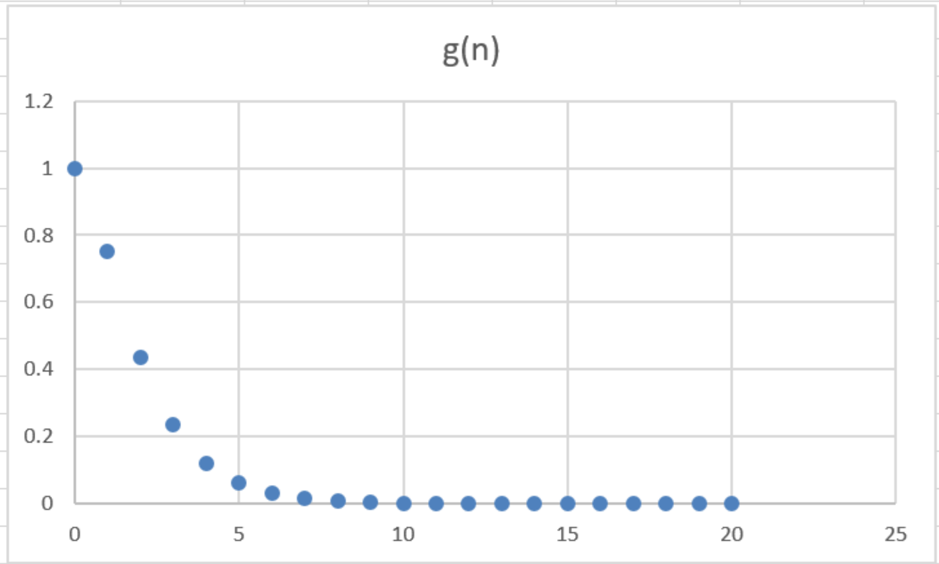


- A transformada z da saída $A(z)$ é o produto da função de transferência $G(z)$ pela transformada z da entrada $H(z)$
- Se a entrada for um impulso de amplitude 1 em $n=0$, $H(z)=1$ e $A(z)=G(z)$. Portanto, a função de transferência é a transformada z da resposta impulsional

- Vamos considerar só sinais causais: $h(n)=0$, para $n<0$

Sistema discreto (10)

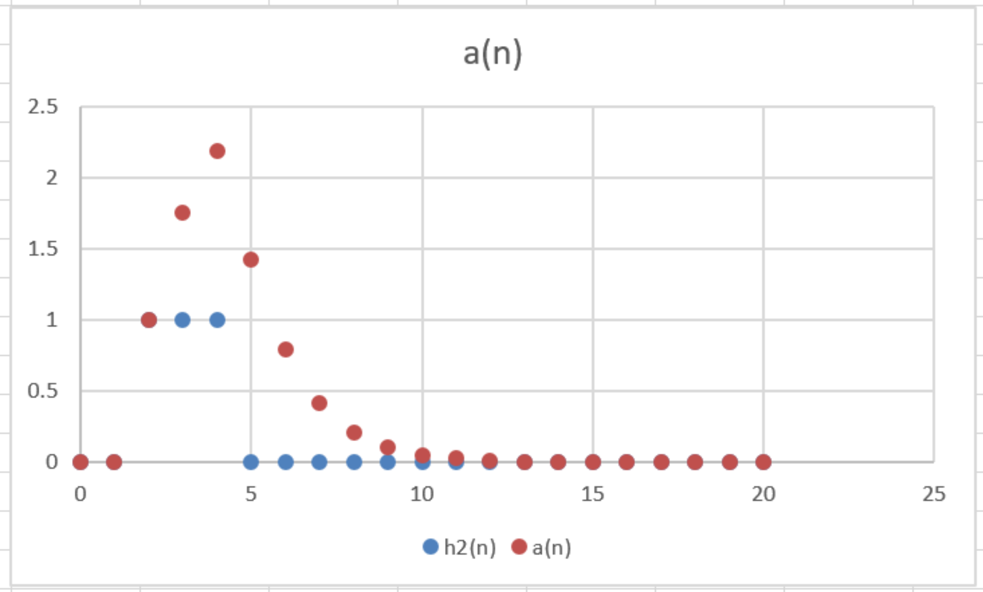
- O impulso de amplitude 1 em n=0 força a saída a(0)=1
- Usando a solução homogénea $a_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$
- $a_0 = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$
- $a_{-1} = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 0$
- $c_1 = 1 - c_2$
- $2c_1 + 4c_2 = 0$
- $2(1 - c_2) + 4c_2 = 0$
- $c_2 = -1$ $\qquad c_1 = 2$
- $a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n$



Sistema discreto (11)

- A resposta ao degrau do exemplo $h2(n) = \begin{cases} 1\,, & 2 \le n \le 4 \\ 0, & n \ge 5 \end{cases}$
- pode ser vista com a sobreposição das três respostas impulsionais atrasadas 2, 3 e 4 períodos

- Este resultado é uma
- convolução do degrau
- da entrada com a resposta
- impulsional



Sistema discreto (12)

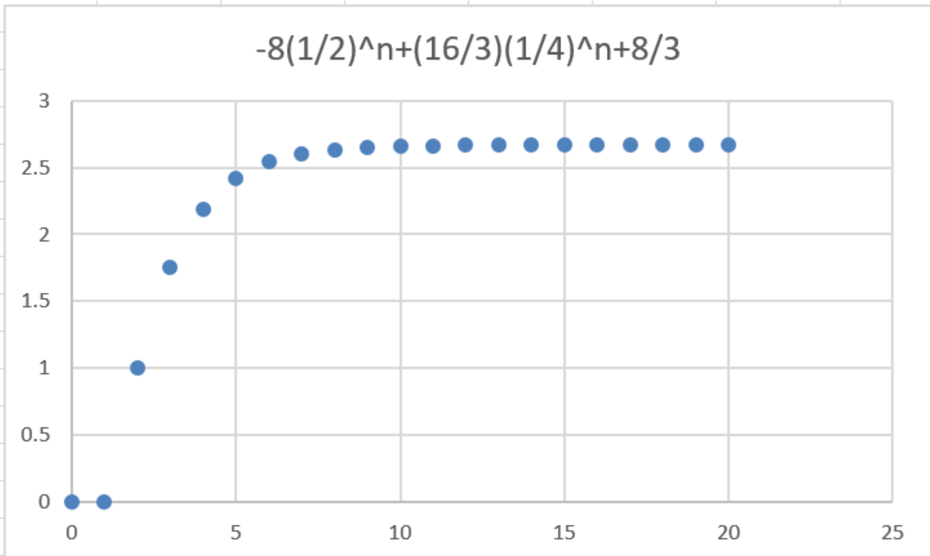
Propriedade	**Domínio dos tempos (n)**	**Domínio das frequências (z)**
Variável	Sequências de números (de períodos T)	Função de variável complexa z
Transformada	$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$
Linearidade	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
Atraso temporal	$x[n-k]$, com $k>0$ e x: $x[n]=0$ se $n<0$	$z^{-k} X(z)$
Avanço temporal	$x[n+k]$, com $k>0$	$z^k X(z) - z^k \sum_{n=0}^{k-1} x[n] z^{-n}$
Escalar em z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1} z)$
Convolução	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) X_2(z)$
Estabilidade	Resposta impulsional tende para 0	Polos da FT dentro do círculo de raio 1

Sistema discreto (13)

Sinal	**Sequência**	**Transformada**
Degrau de Heaviside	$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$	$\dfrac{z}{z-1}$
Impulso de Dirac	$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$	1
Exponencial	$a^n u[n]$	$\dfrac{z}{z-a}$
Cosseno	$\cos(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1 - z^{-1}\cos(w_0)}{1 - 2z^{-1}\cos(w_0) + z^{-2}}$
Seno	$\sin(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{z^{-1}\sin(w_0)}{1 - 2z^{-1}\cos(w_0) + z^{-2}}$
Cosseno exponencial	$a^n \cos(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1 - az^{-1}\cos(w_0)}{1 - 2az^{-1}\cos(w_0) + a^2 z^{-2}}$
Seno exponencial	$a^n \sin(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{az^{-1}\sin(w_0)}{1 - 2az^{-1}\cos(w_0) + a^2 z^{-2}}$

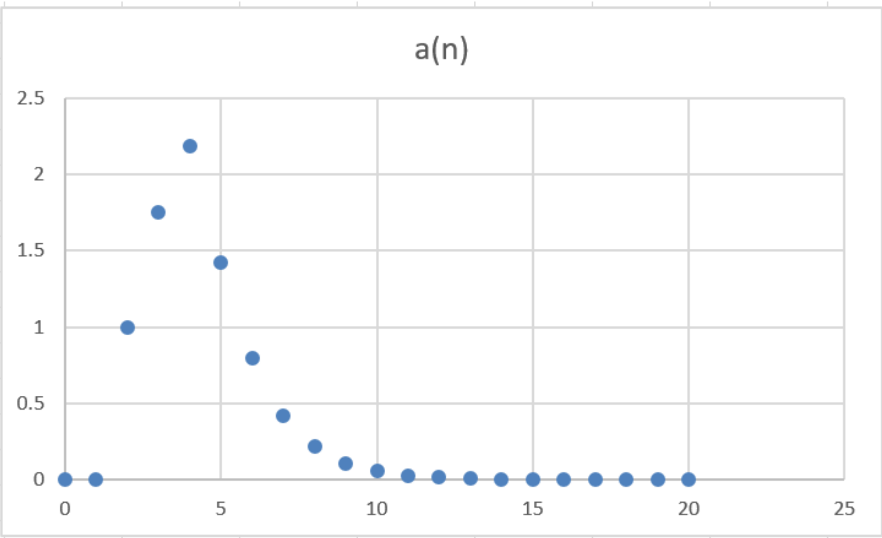
Sistema discreto (14)

- $A(z) = G(z)H(z) = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} \; . z^{-2}$
  - resposta a um degrau unitário no instante 2
- $A(z) = z\left(\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)(z-1)}\right) = z\left(\frac{\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}}{z-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}}{z-1}\right) =$
- $A(z) = -\frac{8z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{16}{3}z}{z-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{8}{3}z}{z-1}$
- $a_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$



Sistema discreto (15)

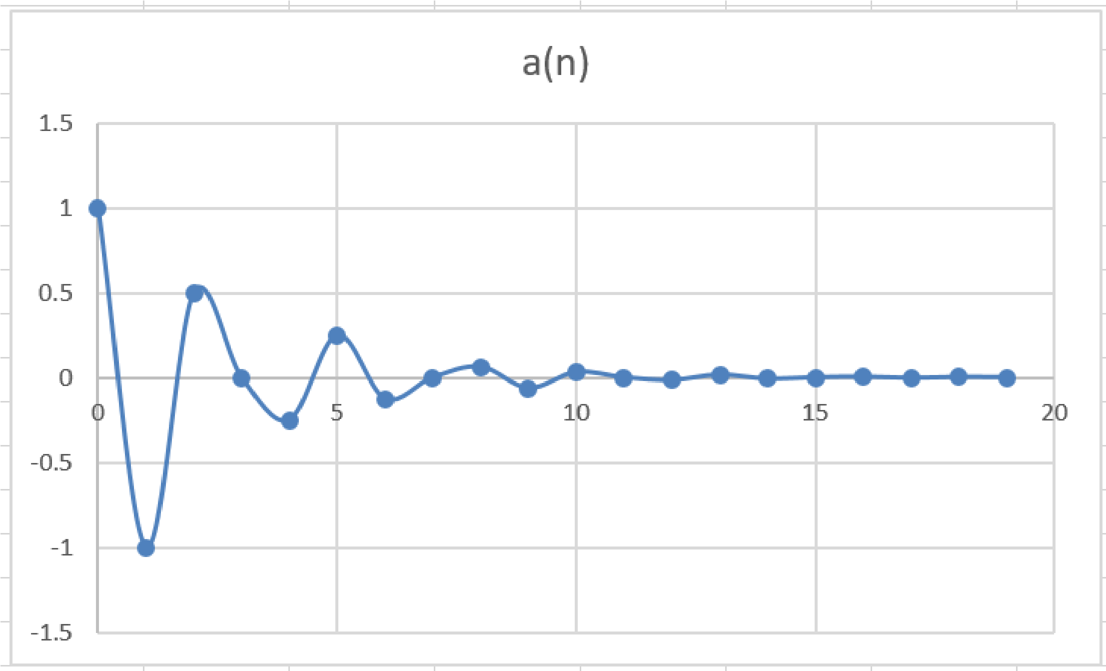
- Para obter o patamar do exemplo, podemos adicionar um degrau negativo a partir do instante 5
- $A_2(z) = G(z)H_2(z) = -\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot z^{-5}$
- $A_2(z) = \frac{64z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1024}{3}z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{\frac{8}{3}z}{z-1}$
- $a2_n = \left(64\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1024}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}\right)u(n-5)$
- Adicionando este ao anterior,
- obtém-se a solução



Sistema discreto (16)

- Novo exemplo: $a_n = -a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-2} + h(n)$, com h(n)=δ(n)
- $G(z) = \frac{1}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$ $\quad H(z) = 1$
- Raízes: $z = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{3\pi}{4}} = ae^{jw_0}, a = \frac{1}{\sqrt{2}}, w_0 = \frac{3\pi}{4}$
- A(z)=$G(z)H(z) = 2z\frac{az^{-1}\sin(w_0)}{1-2az^{-1}\cos(w_0)+a^2z^{-2}}$
- Na tabela, a fração corresponde a $a^n \sin(w_0 n)$ e multiplicar por z corresponde a um avanço de 1 unidade
- $a_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \sin\left(\frac{3\pi}{4}(n+1)\right)u[n]$

Sistema discreto (17)



- A resposta impulsional é oscilatória: corresponde a raízes com parte imaginária, frequência é $w_0 = \tan^{-1}\frac{Im(z_1)}{Re(z_1)}$, em rad
- No entanto é estável (tende para 0) porque multiplica pela exponencial a^n, em que a=$|z_1|$ <1, porque as raízes estão dentro do círculo unitário

Sistema discreto (18)

- Conclusão
- A mudança para a transformada z facilita o cálculo da resposta a entradas diversas, através do conceito de função de transferência
- Facilita a análise dos sistemas, prevendo o tipo de resposta, pela análise dos respetivos polos
- A transformada z é uma ferramenta poderosa na análise de sistemas descritos por relações de recorrência
- Paralelo: algo de semelhante se passa nos sistemas em tempo contínuo com a transformada de Laplace.
- Ambas estão relacionadas com a transformada de Fourier e com um algoritmo de implementação, a FFT Fast Fourier Transform.