# Lógica de Primeira Ordem -1

Variáveis e Quantificadores

Semântica de Quantificadores

Tradução

Referência: Language, Proof and Logic
Dave Barker-Plummer,
Jon Barwise e John Etchemendy, 2011

Capítulo: 9

# Variáveis e fórmulas atómicas

- Variáveis: aparecem como argumentos de predicados
  - Não referem objetos: marcam lugares nos argumentos dos predicados
  - LPO: lista infinita de variáveis
  - Tarski's World: u, v, w, x, y, z

Larger(x,y)

- Fórmulas atómicas
  - Fórmulas bem formadas
    - variáveis podem surgir como argumentos
  - Para serem frases: todas as variáveis quantificadas

# Quantificadores

- Afirmações acerca do **número** de objetos que verificam uma condição
- $\forall$ todos os objetos satisfazem a condição
  - LN: *todo…, cada…, qualquer um…*
  - LPO: $\forall$x ligação de variável
    - para todo o objeto x…

      $\forall$x NaSala(x)

      $\forall$x (AlunoMDIS(x) $\rightarrow$ NaSala(x))
- $\exists$ pelo menos 1 objeto satisfaz a condição
  - LN: *algum…, existe…, um…*
  - LPO: $\exists$x ligação de variável
    - para algum objeto x…

      $\exists$x NaSala(x)

      $\exists$x (AlunoMDIS(x) $\wedge$ NaSala(x))

# WFF – Fórmula bem formada

- AlunoMDIS(x) $\wedge$ NaSala(x)
  - expressão com variáveis não quantificadas
- WFF atómica:
  - predicado n-ário + n variáveis ou constantes
- Formação de WFF's
  - 1. P é wff, $\neg$P é wff
  - 2. $P_1$, … $P_n$ são wff's, ($P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$) é wff
  - 3. $P_1$, … $P_n$ são wff's, ($P_1 \vee \ldots \vee P_n$) é wff
  - 4. P e Q são wff's, ($P \rightarrow Q$) é wff
  - 5. P e Q são wff's, ($P \leftrightarrow Q$) é wff
  - 6. P é wff e $\nu$ é variável
    - $\forall \nu$ P é wff (ocorrências de $\nu$ em P são ligadas)
  - 7. P é wff e $\nu$ é variável
    - $\exists \nu$ P é wff (ocorrências de $\nu$ em P são ligadas)

# Frases

$(Cube(x) \wedge Small(x))$ wff com x variável livre

$\exists y\ LeftOf(x,y)$ wff com x variável livre e y variável ligada

$((Cube(x) \wedge Small(x)) \rightarrow \exists y\ LeftOf(x,y))$ wff

$\forall x\ ((Cube(x) \wedge Small(x)) \rightarrow \exists y\ LeftOf(x,y))$ frase

- Frase: wff sem variáveis livres
  - expressão com variáveis todas quantificadas

$\exists x\ (AlunoMDIS(x) \wedge NaSala(x))$

Frase? ✓

$\exists x\ AlunoMDIS(x) \wedge NaSala(x)$

Frase? ✗

# Satisfação de wff's

- Nas conetivas:

  valor lógico de fórmula complexa é função dos valores lógicos das componentes

- Expressões quantificadas: componentes não são frases

  $\exists$x Cube(x) Cube(x) não é frase, não é verdadeiro nem falso

- Satisfação de wff's
  - Objeto satisfaz wff
    - a satisfaz Cube(x) se a é cubo
    - a satisfaz (Cube(x) $\wedge$ Small(x)) se a é cubo e a é pequeno
    - a satisfaz (Cube(x) $\vee$ $\neg$Small(x)) se a é cubo ou a não é pequeno

# Verificar se um objeto satisfaz a wff S(x)

- Objeto tem um nome: b
  - S(b) é frase
  - S(b) verdadeira : b satisfaz S(x)
- Objeto não tem nome
  - Escolhe-se um nome não usado: n1
  - S(n1) é frase
  - S(n1) é verdadeira: objeto satisfaz S(x)

# Semântica dos quantificadores

- Frases quantificadas: são verdadeiras ou falsas em relação a um **domínio de discurso**
- Domínio de discurso:
  - coleção de coisas acerca das quais se fazem afirmações

- $\forall x\ S(x)$ Verdadeiro se e só se S(x) é satisfeito por todos os objetos do domínio de discurso
- $\exists x\ S(x)$ Verdadeiro se e só se S(x) é satisfeito por algum objeto do domínio de discurso

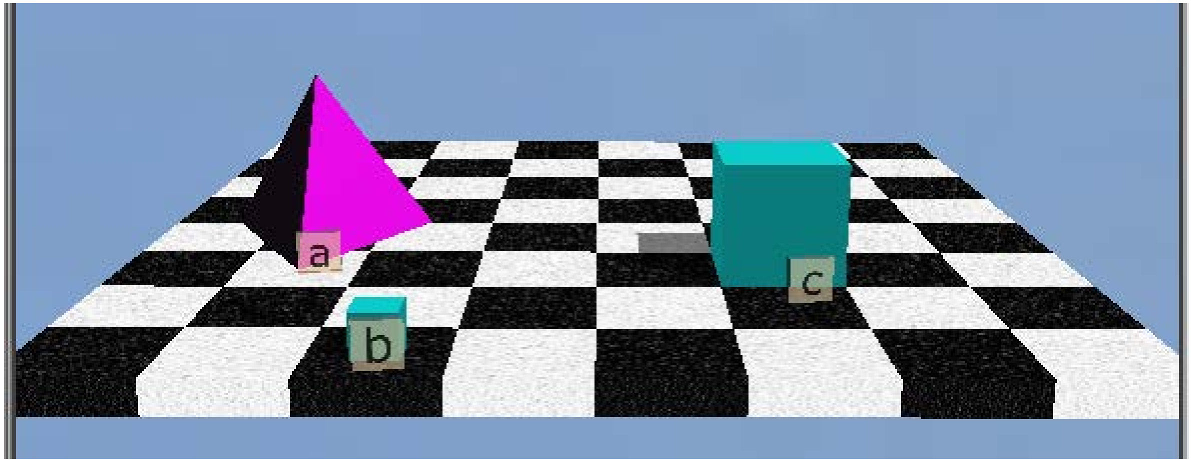
# Quantificadores: regras do jogo

Nas regras para as conetivas: escolher frases e subfrases

Nas regras para os quantificadores: escolher objetos

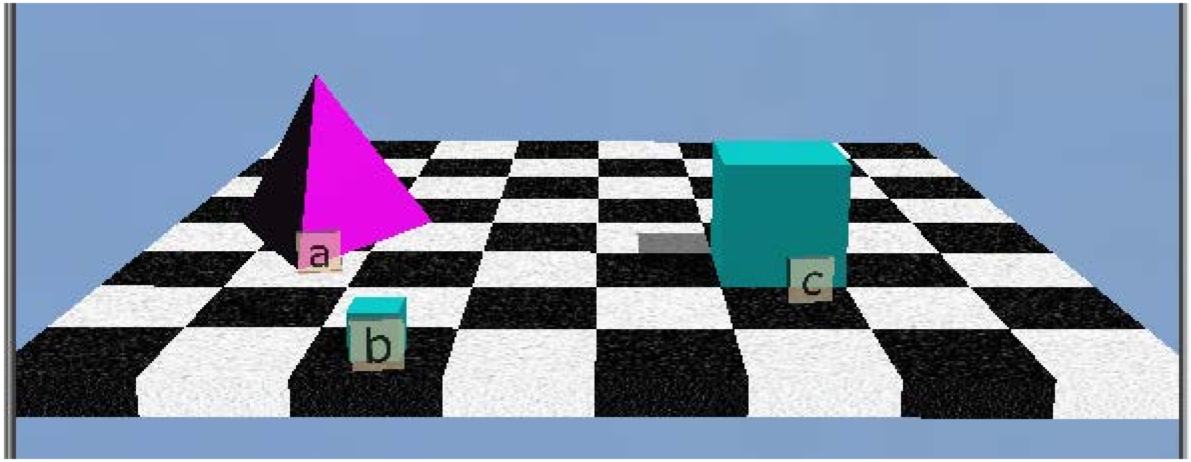
| Forma | Afirmação | Quem joga | Objetivo |
|---|---|---|---|
| $P \vee Q$ | V<br>F | nós<br>Tarski's World | Escolher um de P e Q verdadeiro |
| $P \wedge Q$ | V<br>F | Tarski's World<br>nós | Escolher um de P e Q falso |
| $\exists x\, P(x)$ | V<br>F | nós<br>Tarski's World | Escolher objeto b que satisfaça a wff P(x) |
| $\forall x\, P(x)$ | V<br>F | Tarski's World<br>nós | Escolher objeto b que não satisfaça a wff P(x) |

# Avaliar frases quantificadas




- $\forall x\ Cube(x)$ ? **F**
  - Cube(a) **F**
  - Cube(b) **T**
  - Cube(c) **T**
- $\exists x\ Cube(x)$ ? **T**
  - Cube(a) **F**
  - Cube(b) **T**
  - Cube(c) **T**
- $\forall y\ (Medium(y) \rightarrow Cube(y))$ ? **T**
  - $Medium(a) \rightarrow Cube(a)$ **T**
  - $Medium(b) \rightarrow Cube(b)$ **T**
  - $Medium(c) \rightarrow Cube(c)$ **T**
- $\exists z\ (Tet(z) \rightarrow Small(z))$ ? **T**
  - $Tet(a) \rightarrow Small(a)$ **F**
  - $Tet(b) \rightarrow Small(b)$ **T**
  - $Tet(c) \rightarrow Small(c)$ **T**

# Avaliar frases quantificadas




- $\forall x\ ((Cube(x) \land Small(x)) \rightarrow \exists y\ LeftOf(x,y))$ ? **T**
  - x=a: (Cube(a) ∧ Small(a)) → ∃y LeftOf(a,y) **T**
    **F** **T**
  - x=b: (Cube(b) ∧ Small(b)) → ∃y LeftOf(b,y) **T**
    **T** **T**
  - x=c: (Cube(c) ∧ Small(c)) → ∃y LeftOf(c,y) **T**
    **F** **F**

y=a: LeftOf(a,a)
y=b: LeftOf(a,b) **T**
y=c: LeftOf(a,c) **T**
y=a: LeftOf(b,a)
y=b: LeftOf(b,b)
y=c: LeftOf(b,c) **T**
y=a: LeftOf(c,a)
y=b: LeftOf(c,b)
y=c: LeftOf(c,c)

# As 4 formas aristotélicas

(1) *Todos os P's são Q's*

(2) *Alguns P's são Q's*

(3) *Nenhum P é Q*

(4) *Alguns P's não são Q's*

(1) $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$

(2) $\exists x\,(P(x) \land Q(x))$

porque não $\exists x\,(P(x) \to Q(x))$ ?

(3) $\forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))$

serve $\neg\exists x\,(P(x) \land Q(x))$ ? √

(4) $\exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$

# Exemplo

- Linguagem:
  - extensão da linguagem de 1ª ordem da aritmética
  - predicados adicionais Par(x) e Primo(x)

- Exprimir as afirmações:

  *Nenhum número par é primo*

  *Todo o número primo é ímpar ou igual a 2*

  *Algum dos números primos é par*

  *Algum dos números primos não é par*

- Quais são as frases verdadeiras ?

# Tradução de frases nominais complexas

*Um rapaz que vive em Cedofeita…*

*Todas as mulheres portuguesas…*

- Frases existenciais   *um…, alguma…, alguém…*

  *Um cão pequeno e feliz está em casa*

  $\exists x\ ((Cao(x) \wedge Pequeno(x) \wedge Feliz(x)) \wedge EmCasa(x))$

- Frases universais   *todo…, cada…, as…, qualquer…*

  *Todo o cão pequeno que está em casa está feliz*

  $\forall x\ ((Cao(x) \wedge Pequeno(x) \wedge EmCasa(x)) \rightarrow Feliz(x)))$

# Afirmações vacuosas

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Mundos sem objetos que satisfaçam P(x): frase é verdadeira
  - diz-se uma generalização vacuosamente verdadeira
  - Exemplo:

    $$\forall x\ (Tet(x) \rightarrow Small(x))$$

    - verdadeira em mundos onde não haja tetraedros

    $$\forall x\ (Tet(x) \rightarrow Cube(x))$$

    - verdadeira em mundos onde não haja tetraedros (e só esses)
    - só pode ser verdadeira de forma vacuosa: é **inerentemente vacuosa**
- Frases vacuosamente verdadeiras: raras em LN

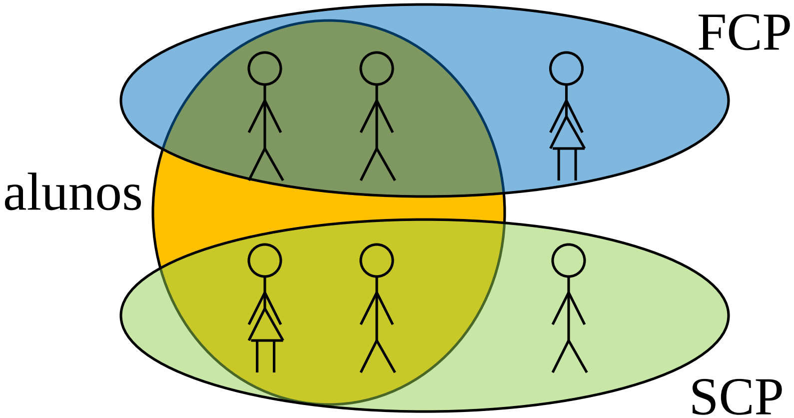
  *Todos os caloiros que frequentaram MDIS tiveram 18*

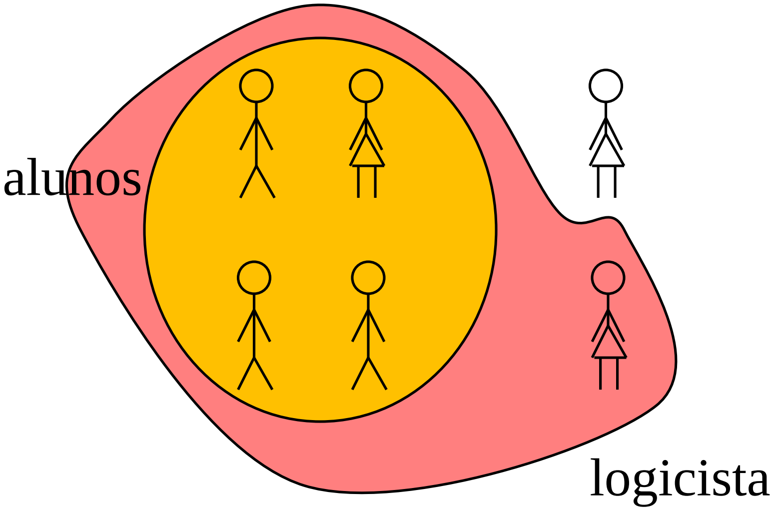
  - verdadeira se nenhum caloiro frequentou a cadeira
  - frases inerentemente vacuosas associadas à intenção de “enganar” o ouvinte

# Contradição?

- Os pares de frases são contraditórios?
- Quais as frases verdadeiras nos mundos apresentados?

| Alguns alunos de MDIS são do FCP<br>Todos os alunos de MDIS são do FCP | Alguns alunos de MDIS gostam de Lógica<br>Todos os alunos de MDIS gostam de Lógica |
|---|---|



# Decorrência conversacional

(1) *Alguns $P$'s são $Q$'s*

(2) *Todos os $P$'s são $Q$'s*

- Intuição: são contraditórias num discurso

  *Alguns alunos de* MDIS *vão passar*

  *Todos os alunos de* MDIS *vão passar*

- Se fossem contraditórias: tradução de (1) seria

  $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

- De novo a decorrência conversacional

  $\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ não é parte do significado

  afirmações subsequentes a (1) podem afirmar (2) sem serem contraditórias

# Símbolos de função

- Construir nomes complexos a partir de outros nomes
  - pai(pai(rui))
  - (1+ (1+1))
- Variáveis: podem aparecer nos termos
  - pai(pai(x))
  - (1+ (1+y))
- Wff's
  - MaisAlto( pai(pai(x)), x)
  - Par( y $\times$ y)
- Frases
  - $\forall$y (Par(y) $\leftrightarrow$ Par( y $\times$ y))

# Negação de frases quantificadas

Leis de DeMorgan para quantificadores

(1) $\neg\forall x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\, \neg P(x)$

(2) $\neg\exists x\, P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, \neg P(x)$

- Formas aristotélicas:
  - *Todos os P's são Q's* é negação de *Alguns P's não são Q's*

$\neg\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg\forall x\, (\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, (P(x) \wedge \neg Q(x))$

# Substituição de variáveis ligadas

- Para toda a wff P(x) e variável y que não ocorre em P(x)

(1) $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \forall y\, P(y)$

(2) $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \exists y\, P(y)$

# Tradução com quantificadores

1. Só os bravos sabem como perdoar
2. Nenhum homem é uma ilha
3. Eu não me preocupo com ninguém, se ninguém se preocupar comigo
4. Cada nação tem o governo que merece
5. Não há certezas, à parte a lógica
6. A miséria (i.e., pessoa miserável) gosta de companhia
7. Nem tudo o que luz é ouro
8. Havia um moleiro alegre que viveu no rio Côa
9. Se prezas toda a gente não prezas ninguém
10. Algo está podre no reino da Dinamarca

# Respostas

1. $\forall x\ (Perdoa(x) \rightarrow Bravo(x))$
2. $\forall x\ (Homem(x) \rightarrow \neg Ilha(x))$
3. $\neg\exists x\ Preocupa(x, eu) \rightarrow \neg\exists x\ Preocupa(eu, x))$ x's diferentes
   - $\forall x\ (\neg Preocupa(x, eu) \rightarrow \neg Preocupa(eu, x))$ o que significa?
4. $\forall x\ (Nação(x) \rightarrow Merece(x, governo(x))$
   - $\forall x\ \forall y\ [(Nação(x) \wedge Governo(y) \wedge Tem(x,y)) \rightarrow Merece(x,y)]$
5. $Certo(Lógica) \wedge \neg\exists x\ (x \neq Lógica \wedge Certo(x))$ ou com $\forall$
6. $\forall x\ (Miserável(x) \rightarrow \exists y\ (Companhia(y, x) \wedge Gosta(x, y)))$
7. $\neg\forall x\ (Luz(x) \rightarrow Ouro(x))$
8. $\exists x\ (Moleiro(x) \wedge Alegre(x) \wedge Rio(Côa) \wedge Vive(x, Côa))$ sem tempo
9. $\forall x\ [(Pessoa(x) \wedge \forall y\ (Pessoa(y) \rightarrow Preza(x,y))) \rightarrow$
   $\forall y\ (Pessoa(y) \rightarrow \neg Preza(x,y))]$
10. $Reino(dinamarca) \wedge \exists x(Podre(x) \wedge Local(x, dinamarca))$