

Занятие 11. Кластеризация

Гирдюк Дмитрий Викторович

2 декабря 2023

СПбГУ, ПМ-ПУ, ДФС

Обучение без учителя

- *Обучение без учителя (unsupervised learning) – это тип машинного обучения, который ищет ранее обнаруженные закономерности в наборе данных без ранее существовавших меток и с минимальным или полностью отсутствующим контролем человека.*
- *Задача обучения без учителя покрывает не только кластеризацию, но и*
 - *поиск ассоциативных правил*
 - *заполнение пропущенных значений*
 - *поиск аномалий*
 - *сокращение размерности и визуализация данных*

Постановка задачи кластеризации

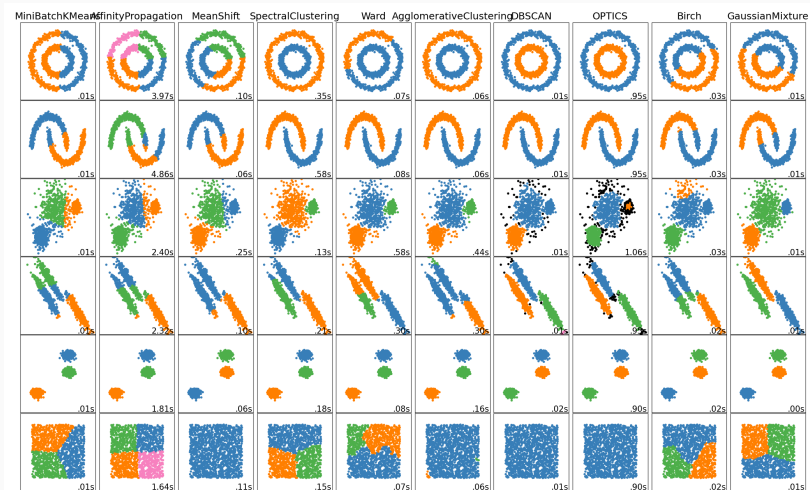
- *Кластерный анализ* или *кластеризация* – это задача группировки набора объектов таким образом, чтобы объекты в одной группе (называемой кластером) были более похожи (в некотором смысле) друг на друга, чем на объекты в других группах (кластерах).
- Проще говоря, имеем
 - Неизвестное распределение $f_{\mathcal{X}}(x)$ и выборку $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}\}_{i=1}^N, \mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^m$ из него.
 - Мера расстояния между объектами $\rho : X \times X \rightarrow R^+$

Хотим получить

- Множество групп/кластеров $Y = \{y^{(i)}\}_{i=1}^N, y_i \in \mathbb{N}$
- Алгоритм кластеризации $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$

- Разделение на группы с целью упрощения работы (отдельные модели для каждой группы).
- Сокращение объемов наблюдений и сжатие данных (например, квантизация нейронных сетей).
- Выделение новизны/аномалий.
- Построение иерархии/таксономии объектов.

Примеры кластеризации [1]



Классификация алгоритмов

В большинстве источников выделяют пять групп алгоритмов

- *Основанные на центроидах* (centroid based): **k-means**, k-modes, k-medoids, **Meanshift**, FCM, Affinity propagation.
- *Иерархические* (hierarchical): **агломеративные** (Ward, single/average/complete linkage), BIRCH, на основе теории графов (выделение связных компонент и минимальное остовное дерево), **Spectral Clustering**, CURE, ROCK, Chameleon, Echidna, SNN, CACTUS, GRIDCLUST.
- *Основанные на плотности* (density based): **DBSCAN**, OPTICS, DBCLASD, GDBSCAN, DENCLU, SUBCLU.
- *Сеточные* (grid based): STING, Wave cluster, BANG, CLIQUE, OptiGrid, MAFLA, ENCLUS, PROCLUS, ORCLUS, FC, STIRR.
- *Основанные на модели данных* (model based): **Expectation Maximization** (EM), COBWEB, CLASSIT, SOM.

- Алгоритм k-means – один из самых простых и популярных алгоритмов кластеризации, заключающийся в поиске заранее заданного числа кластеров путем минимизации суммы квадратов внутрикластерных расстояний между точками кластеров и соответствующих им центроидами.
- Получаемая оптимизационная задача вычислительно трудна (NP-сложная), однако разработано достаточно много эвристических алгоритмов, позволяющих достаточно быстро отыскать локальный минимум.

Формальное определение

- Пусть $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ есть разбиение выборки на k непересекающихся множеств.
- Тогда задача минимизации суммы квадратов внутрикластерных расстояний может быть записана следующим образом

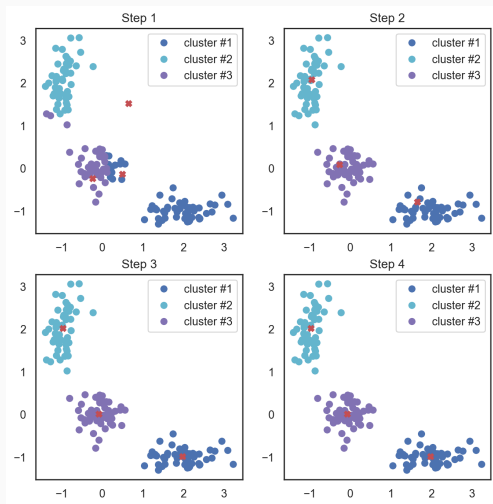
$$\arg \min_S \sum_{i=1}^k \sum_{\mathbf{x} \in S_i} \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^{(i)}\|^2 = \arg \min_S \sum_{i=1}^k |S_i| \text{Var} S_i,$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(i)} = \frac{1}{|S_i|} \sum_{\mathbf{x} \in S_i} \mathbf{x}$$

k-means: описание алгоритма Ллойда

1. Зафиксировав число кластеров, произвольным образом инициализируем k центроид. Это могут быть наблюдения из выборки, произвольные точки в пространстве данных или что-нибудь более умное, вроде использования эмпирической плотности распределения данных (k-means++).
2. Относим каждое наблюдение к кластеру, чей центроид (центр тяжести) находится к наблюдению ближе всего.
3. Обновляем центроиды с учетом всех входящих в каждый кластер наблюдений.
4. Повторяем шаги 2 и 3 фиксированное количество раз или до тех пор, пока все центроиды не стабилизируются (т.е. изменяются по норме не больше заранее заданного ε).

k-means: пример [2]



k-means: алгоритм Ллойда

Algorithm 1: k-means

input : Выборка $X = \{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$, количество кластеров k и ε

Произвольным образом инициализируем k центроидов μ_i

while *True* **do**

 Относим наблюдения к ближайшим центроидам:

$$S_i := \left\{ x^{(p)} : \|x^{(p)} - \mu^{(i)}\| \leq \|x^{(p)} - \mu^{(j)}\|, 1 \leq j \leq k \right\}$$

 Обновляем центроиды:

$$\mu^{(i)} = \frac{1}{|S_i|} \sum_{x \in S_i} x$$

if $\max_p \left| \min_i \|x^{(p)} - \mu_t^{(i)}\| - \min_i \|x^{(p)} - \mu_{t-1}^{(i)}\| \right| < \varepsilon$ **then**

 └ Завершить работу

k-means: обсуждение

- Отличное базовое решение.
- Алгоритм метрический, потому либо нормализуем данные, либо определяем специальную метрику.
- Алгоритм прост и понятен, имеет большое количество всевозможных обобщений (k-medians, k-medoids, k-means++ и т.д.).
- Не гарантируется достижение глобального минимума суммарного квадратичного отклонения, а только одного из локальных минимумов. Кроме того, полученные кластеры зачастую стремятся иметь сферическую форму ввиду вида целевой функции.
- Результат зависит от выбора исходных центров кластеров, их оптимальный выбор неизвестен. Чаще всего алгоритм запускают несколько раз и выбирают то разбиение, которое показало наименьшее значение целевой функции.

k-means: эвристика выбора числа кластеров

- Число кластеров необходимо задавать заранее. На практике производят разбиения для различных значений k , строят график значений целевой функции и ищут такое значение k , после которого значение целевой функции перестает сильно изменяться (так называемый «метод локтя»).

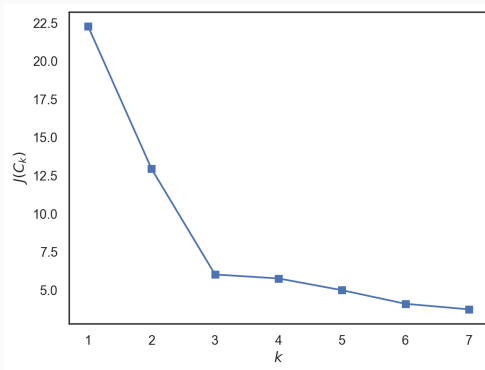


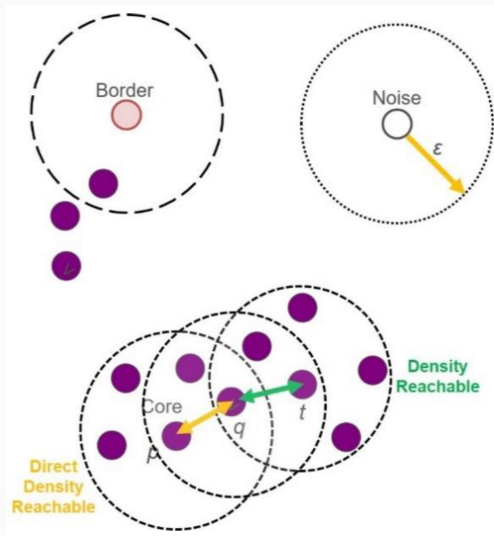
Рис. 1: График локтя [2]

- k-means реализован в sklearn'е.
- Кроме числа кластеров `n_clusters` основными гиперпараметрами являются:
 - `init`. Метод инициализации центроид. `k-means++` (стандартный), случайный и определенный пользователем.
 - `n_init`. Количество запусков алгоритма (было описано ранее на слайдах).
 - `algorithm`. Алгоритм Ллойда или Элкана. Второй является модификацией алгоритма Ллойда: ускорение работы путем исключения некоторого числа вычислений расстояний за счет использования неравенства треугольника).

- Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (DBSCAN) – алгоритм кластеризации, основанный на плотности точек, изначально разработанный с целью кластеризации в базах данных, содержащих геометрические представления наблюдений.
- Основными преимуществами алгоритма авторы выделили минимальную необходимость понимания предметной области данных при подборе гиперпараметров метода, а также способность обнаруживать кластеры произвольной формы.
- Алгоритм достаточно прост, наряду с k-means один из самых популярных.

- Алгоритм имеет 2 гиперпараметра: величина окрестности точки ε и минимальное количество наблюдений в окрестности *MinPts*
- При кластеризации точка может быть причислена к одному из 3 типов:
 - корневая: в ее ε -окрестности не менее *MinPts* точек
 - граничная: в ее ε -окрестности меньше *MinPts* точек, но среди них есть как минимум одна корневая
 - шумовая: не корневая и не граничная

DBSCAN: иллюстрация типов наблюдений [3]



Algorithm 2: DBSCAN

input : Выборка $X = \{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$, параметры ε и $MinPts$
 $U = X$, $N = \emptyset$, $a = 0$;

while $U \neq \emptyset$ **do**

 Взять $x \in U$;

if $|U_\varepsilon(x)| < MinPts$ **then**

$N = N \cup x$;

else

$K = U_\varepsilon(x)$, $a = a + 1$;

for $x' \in K$ **do**

if $|U_\varepsilon(x')| \geq MinPts$ **then**

$K = K \cup U_\varepsilon(x')$;

else

 позначить x' как граничную точку кластера K ;

foreach $x_i \in K$ **do** $a_i = a$;

$U = U \setminus K$;

DBSCAN: Подбор гиперпараметров

- Общая идея состоит в построении графика, по ординате у которого расстояние до *MinPts*-го соседа, а по абсциссе – точки, отсортированные в порядке увеличения этого расстояния.
- Существенный скачок в значении идентифицирует выбросы, посему задавая некоторый процент на их число можно определить ε .
- Обычно строят несколько таких графиков для различных значений *MinPts*.
- В некоторых источниках значение *MinPts* предлагают выбирать равным $|X| + 1$. Где-то встречается $2 * |X|$.

- Есть реализация в sklearn'е. Кроме того, там же представлена модификация алгоритма под названием OPTICS, фактически отличающаяся от него тем, что задает интервал для значений ϵ , что позволяет выделять кластеры с различными плотностями.
- Основные гиперпараметры:
 - `eps` и `min_samples`. ϵ и *MinPts* соответственно.
 - `algorithm`. Способ поиска соседей: брутфорс, ball-дерево, KD-дерево, и автоматический подбор подходящего с учетом обучающей выборки (дефолтное).
 - `leaf_size`. Максимальный размер листа в дереве, если выбрано ball/KD-дерево.
 - `metric` и p . Метрику можно как реализовать самостоятельно, так и использовать из имеющегося: Минковского (p – ее параметр) и ее частные случаи (Чебышева и Манхэттенская).

1. **sklearn clustering user guide.** URL:
<https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html>.
2. **mlcours.ai: Unsupervised learning: PCA and clustering.** URL:
https://mlcourse.ai/book/topic07/topic7_pca_clustering.html.
3. **A Blind Nonlinearity Compensator Using DBSCAN Clustering for Coherent Optical Transmission Systems.** /. E. Giacomidis [и др.] // Applied Sciences. 2019. Т. 9, № 20. DOI: 10.3390/app9204398. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/9/20/4398>.