

# Занятия 2 и 3. Снижение размерности

Анализ данных и машинное обучение

---

Гирдюк Дмитрий Викторович

27 марта 2021 г.

СПбГУ, ПМ-ПУ

1. Снижение размерности: постановка задачи
2. Снижение размерности: общая классификация алгоритмов
3. Снижение размерности: основные алгоритмы
4. Снижение размерности: обсуждение

# Снижение размерности: постановка задачи

---

# Постановка задачи [1]

Задача *снижения размерности* состоит преобразование многомерных данных в осмысленное представление пониженной размерности с как можно более полным сохранением расстояний между (отдельными) наблюдениями

Формализуя,

- Имеем матрицу  $X$  размерности  $m \times n$
- Предполагаем, что исходная размерность исследуемых данных равна  $k$ , и они представляют собой отображение в пространство большей размерности  $n$ ,  $k \ll n$
- Хотим получить исходное представление  $Y$  размерности  $m \times k$
- Желательно без полного переобучения иметь возможность получить исходное представление для новых данных

## С какой целью используется

- Избавление от лишнего (шума) и мультиколлинеарности признаков
- Меньшие временные затраты на процессинг данных
- Визуализация

Все те же проблемы, что и с кластеризацией

- Масса подходов со своими целевыми функциями
- Необходимо знание предметной области
- Сложности в настройке гиперпараметров
- Большинство методов непараметрические – отсутствует гибкость

# Снижение размерности: общая классификация алгоритмов

---

## Расширяем кругозор [2, 3] i

- Principal Component Analysis (PCA, Probabilistic PCA, Kernel PCA)
- Classical multidimensional scaling (MDS)
- Sammon mapping
- Linear Discriminant Analysis (LDA, Generalized DA)
- Factor Analysis (FA, Coordinated FA)
- Isometric feature mapping a.k.a ISOMAP (Landmark Isomap)
- Local Linear Embedding (LLE, Hessian LLE, Conformal Eigenmaps, Maximum Variance Unfolding)
- Laplacian Eigenmaps
- Local Tangent Space Alignment (LTSA, Linear LTSA)
- Maximum Variance Unfolding (MVU, LandmarkMVU, FastMVU)



## Расширяем кругозор [2, 3] ii

- Diffusion maps
- Neighborhood Preserving Embedding (NPE)
- Locality Preserving Projection (LPP)
- Stochastic Proximity Embedding (SPE)
- Local Linear Coordination (LLC)
- Manifold charting
- Gaussian Process Latent Variable Model (GPLVM)
- Stochastic Neighbor Embedding (SNE, Symmetric SNE, t-SNE)
- LargeVis
- Neighborhood Components Analysis (NCA)
- Maximally Collapsing Metric Learning (MCML)
- Large-Margin Nearest Neighbor (LMNN)
- UMAP
- Deep autoencoders

# Общая классификация

- Методы, оптимизирующие выпуклую целевую функцию без локальных минимумов
  - Полное спектральное разложение
    - PCA, Kernel PCA, Multidimensional scaling, ISOMAP, MVU, Diffusion maps
  - Частичное спектральное разложение
    - Laplacian eigenmaps, LLE, Hessian LLE, LTSA
- Методы, оптимизирующие невыпуклую целевую функцию с локальными минимумами:
  - Sammon mapping, LLC, Manifold charting, Deep autoencoders, t-SNE, LarveVis, UMAP

# Снижение размерности: основные алгоритмы

---

# Principal Component Analysis (PCA)

- Главными компонентами некоторого набора данных  $X_{[m \times n]}$  является последовательность из  $n$  векторов, каждый из которых наилучшим образом (в смысле минимизации средних квадратов расстояний между наблюдениями и текущим вектором) подгоняется под данные, при этом каждый  $i$ -ый вектор ортогонален предыдущим  $i - 1$  векторам
- Новый ортогональный базис? Новый ортогональный базис!
- Principal component analysis (PCA, метод главных компонент) – метод снижения размерности, основанный на построении набора из первых  $k$  таких ортогональных векторов

- Хотим получить такой нормированный ортогональный набор векторов  $v_j \in R^n, j = 1, 2, \dots, k$ , которыми можно будет аппроксимировать исходные векторы  $x_i \in R^n, i = 1, 2, \dots, m$

$$x_i \approx \sum_{j=1}^k a_{ij} v_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- Нормируем (опционально шкалируем) данные!
- От простого к сложному: целевая функция (минимизация дисперсии/разброса проекции точек на главную компоненту) в случае  $k = 1$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|x_i \perp v\|_2^2 \longrightarrow \min_{\|v\|_2=1}$$

- Теорема Пифагора позволяет преобразовать целевую функцию

$$\begin{aligned} \|x_i \perp v\|_2^2 + \langle x_i, v \rangle^2 &= \|x_i\|_2^2 \implies \\ \implies \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \langle x_i, v \rangle^2 &= \frac{1}{m} (Xv)^T (Xv) = \frac{1}{m} v^T X^T X v = \\ &= \frac{1}{m} v^T A v \longrightarrow \max_{\|v\|_2=1} \quad (1) \end{aligned}$$

- Симметричная матрица  $A = X^T X$  – штука известная. Ничто иное как ковариационная (учитывая шкалирование, еще и корреляционная) матрица
- Целевая функция для случай  $k > 1$ , проекция  $x_i$  на векторное подпространство  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \langle x_i, v_j \rangle^2 \longrightarrow \max_{V: \|v_j\|_2=1}$$

- Теперь рассмотрим разложение матрицы  $A$

$$A = VDV^T,$$

где матрица  $V$  есть ортогональная матрица, а  $D$  – диагональная

- Заметим, что если матрица  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  (пусть еще  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ), то максимум для (1) достигается для  $v = e_1$

$$v^T A v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j^2$$

- Отсюда следует, что для произвольной матрицы  $A$ , положив  $v_1 = V e_1$ , получим

$$v_1^T A v_1 = v_1^T V D V^T v_1 = e_1^T V^T V D V^T V e_1 = e_1^T D e_1 = \lambda_1$$

- Более того, для любого другого вектора  $\hat{v}$ ,  $\hat{v}^T A v \leq \lambda_1$
- Для случая  $k > 1$  все выводится аналогичным образом. Оптимальное решение – первые  $k$  столбцов матрицы  $V$
- Вопрос: как эту матрицу  $V$  искать-то?
- На самом деле матрица  $V$  в разложении  $A = V D V^T$  есть ничто иное как матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрица  $A = X^T X$

$$A v_i = A V e_i = V D V^T V e_i = V D e_i = \lambda_i V e_i = \lambda_i v_i$$

- Последнее, что тут стоит отметить, это уникальность решения: если все собственные числа уникальны, то и разложение уникально. Если же встречаются кратные, то образуется целое подпространство собственных векторов, решающих задачу



- Основанный на Singular Value Decomposition (SVD, в другой раз)
- Итерационный алгоритм (Power Iteration)

# PCA: итерационный алгоритм

---

**Algorithm 1:** Итерационный алгоритм поиска главной компоненты

---

**input** : Матрица  $A = X^T X$

Выбираем произвольный нормированный вектор  $u_0$ ;

**for**  $i = 1, 2, \dots$  **do**

$u_i = A^i u_0$ ;

**if**  $u_i / \|u_i\|_2 \approx u_{i-1} / \|u_{i-1}\|_2$  **then**

        Возвращаем  $u_i$ ;

- 
- Важно отметить (доказывается по индукции):  
$$A^{i+1} = A^i A = V D^i V^T V D V^T = V D^i V^T$$
  - Как только нашли первую компоненту, проектируем данные ортогонально найденной главной компоненте, т.е. полагаем  $x_i := x_i - \langle x_i, v_1 \rangle v_1$  и запускаем итерационный алгоритм заново

# РСА: обсуждение алгоритма

Почему последовательное домножение на вектор  $u_0$  матрицы  $A$  приводит нас в конечном итоге к главной компоненте?

- $A = QDQ^T$
- $AQ = QD$
- Учитывая то, что по столбцам у матрицы  $Q$  стоят собственные векторы, формирующие ортогональный базис, то любой вектор в этом базисе может быть расписан как  $u_0 = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$
- Тогда получаем

$$\begin{aligned} A^k u_0 &= c_1 A^k v_1 + \dots + c_n A^k v_n = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n = \\ &= \lambda_1^k (c_1 v_1 + c_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} v_2 + \dots + c_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} v_n) \end{aligned}$$

- Откуда следует, что при  $k \rightarrow \infty$ , учитывая  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ ,  
 $A^k u_0 \rightarrow v_1$

- Простая интерпретация PCA: компоненты последовательно выбираются так, чтобы дисперсия проекции данных на нее была максимальной. Следует это из центрированности данных и вида целевой функции (1)
- Выбираем число главных компонент на основе объясненной дисперсии равной кумулятивной сумме отнормированных собственных чисел, соответствующих собственным векторам (главным компонентам). Или используйте правило Кайзера:

$$\lambda_i > \frac{1}{n} \text{trace } A$$

- Еще раз, нормализуем (и шкалируем) данные!
- Интерпретация главных компонент зачастую затруднительна
- Нелинейная структура – увы. Используйте другой метод

- Например, Kernel PCA! Все отличие лишь в том, что находим собственные векторы не ковариационной матрицы  $X^T X$ , а ядровой матрицы  $K : k_{ij} = \kappa(x_i, x_j)$
- Самое главное:  $Y_k = X V_k$

# Multidimensional Scaling

- Multidimensional scaling – семейство техник для снижения размерности (чаще всего для визуализации), цель которых состоит в сохранении расстояний между наблюдениями в пространстве меньшей размерности
- Из интересного – алгоритм работает не с точками напрямую, а с матрицей расстояний между ними
- Существует масса вариаций этой общей идеи. Рассмотрим классический алгоритм и то, что сейчас используется в соответствующих пакетах как `sota`

# Classical Multidimensional Scaling: общая теория

- Немного формализма: имеем матрицу  $D_{[n \times n]} = \{d_{ij}\}$ , хотим найти такие  $y_j \in R^k$ ,  $k < n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , чтобы

$$d_{ij} \approx \|y_i - y_j\|_2$$

- Стандартизируем!
- Понятно, что решение не единственно:  $Y + \text{const}$  также будет удовлетворять основному требованию. Потому вводится дополнительное ограничение

$$\sum_{i=1}^m y_{ip} = 0, \quad p = 1, \dots, k \quad (2)$$

# Classical Multidimensional Scaling: общая теория

- Теперь рассмотрим матрицу Грама  $B = YY^T$  (не путать с  $Y^TY$ )

$$\|y_i - y_j\|_2^2 = y_i^T y_i + y_j^T y_j - 2y_i^T y_j \implies d_{ij}^2 = b_{ii} + b_{jj} - 2b_{ij} \quad (3)$$

- Кроме того из (2)

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^k y_{ip} y_{jp} = \sum_{p=1}^k y_{jp} \sum_{i=1}^m y_{ip} = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

- Из (3)

$$\sum_{i=1}^m d_{ij}^2 = \text{tr} B + m b_{jj}, \quad \sum_{j=1}^m d_{ij}^2 = \text{tr} B + m b_{ii}, \quad \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m d_{ij}^2 = 2m \text{tr} B, \quad (4)$$



- Наконец, из (3), (4) имеем

$$b_{ij} = -1/2(d_{ij}^2 - d_{.j}^2 - d_{i.}^2 + d_{..}^2)$$

- Ну а дальше для полученной матрицы  $B$  как и в PCA находим разложение уже известного вида  $B = VDV^T$
- Что дает нам  $Y = V_k D_k^{1/2}$
- Точное решение для случая евклидовой нормы. Впрочем, может быть использован и для неевклидовых метрик

# Metric/Nonmetric Multidimensional Scaling

- Есть вариант, называющийся Metric MDS. Задача переформулируется в виде минимизации функционала (называемого stress'ом)

$$Stress(Y) = \left( \sum_{i,j=1|i \neq j}^m (d_{ij} - \|y_i - y_j\|_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \min_Y \quad (5)$$

- Тут уже используются всевозможные оптимизационные методы. В свое время Крускал предлагал вариацию градиентного спуска
- Есть и Nonmetric MDS, где метрика расстояния  $f(y_i, y_j)$  неевклидова, вообще говоря, лишь монотонна и сохраняет отношение порядка (чаще всего там работа с рангами наблюдений)

# Metric Multidimensional Scaling: SMACOF

- На данный момент для нахождения низкоуровневого представления с помощью Metric MDS чаще всего используется итеративный алгоритм Scaling by MAjorizing a COmplicated Function, SMACOF (в том числе в sklearn)
- В основе всего следующая стресс-функция

$$\sigma(Y) = \sum_{i < j \leq m} w_{ij} \left( d_{ij} - \hat{d}_{ij}(Y) \right)^2 \longrightarrow \min_Y \quad (6)$$

# Metric Multidimensional Scaling: SMACOF

- Ее ограничивают сверху

$$\begin{aligned}\sigma(Y) &= \sum_{i < j} w_{ij} d_{ij}^2 + \sum_{i < j} w_{ij} \hat{d}_{ij}(Y)^2 - 2 \sum_{i < j} w_{ij} d_{ij}^2 \hat{d}_{ij}(Y) = \\ &= \text{Const} + \text{tr} [Y^T W Y] - 2 \text{tr} [Y^T B(Y) Y] \leq \\ &\leq \text{Const} + \text{tr} [Y^T W Y] - 2 \text{tr} [Y^T B(Z) Z] = \tau(Y, Z), \quad (7)\end{aligned}$$

где  $B(Z)$  определяется следующим образом

$$b_{ij} = -\frac{w_{ij} d_{ij}}{\hat{d}_{ij}(Z)} \text{ for } \hat{d}_{ij}(Z) \neq 0, i \neq j$$

$$b_{ij} = \epsilon \text{ for } \hat{d}_{ij}(Z) = 0, i \neq j$$

$$b_{ij} = - \sum_{j=1|j \neq i}^m b_{ij}$$

---

## Algorithm 2: SMACOF

---

Произвольно инициализируем матрицу  $Y_0$  размерности  $m \times k$ ;

**for**  $i = 1, 2, \dots$  **do**

$Z = Y_{k-1}$ ;

$Y_k = \arg \min_Y \tau(Y, Z)$  (7);

**if**  $\sigma(Y_{k-1}) - \sigma(Y_k) < \varepsilon$  **then**

        Возвращаем  $Y_k$ ;

---

- Classical MDS с евклидовыми расстояниями практически полностью аналогичен классическому PCA
- Чаще всего используется все же именно для визуализации
- Устоявшийся и все еще актуальный алгоритм (набор алгоритмов) с долгой историей
- Все те же проблемы с существенной нелинейностью многообразия как и у PCA

# ISOMAP (Isometric feature mapping) [4]

- ISOMAP – пример нелинейного алгоритма снижения размерности, фактически обобщающим MDS путем работы не с евклидовыми расстояниями между наблюдениями, а геодезическими расстояниями на основе взвешенного графа, подогнанного к наблюдениям на основе метода k-ближайших соседей.
- Проще говоря
  - Строим граф на основе k-ближайших соседей для матрицы  $X$
  - Строим матрицу попарных расстояний для наблюдений  $x_i, x_j$  путем применения какого-либо алгоритма поиска кратчайших путей на графе (Дийкстра, Флойд–Уоршелл)
  - Полученную матрицу загоняем в классический MDS

- В sklearn'е вместо MDS используется PCA, который, как уже было отмечено, эквивалентен classical MDS
- В целом, удачное обобщение, тем не менее страдающее от некоторых недостатков [2]
  - Топологическая нестабильность – проблема с замкнутыми циклами может существенно ухудшить производительность метода
  - Проблемы с дырами в многообразии
  - Проблемы с невыпуклыми многообразиями



# Local Linear Embedding (LLE) [5]

- Local Linear Embedding – нелинейная техника снижения размерности, основанная на построении графа  $k$ -ближайших соседей и попыткой поиска локальных весов для восстановления исходных наблюдений по их ближайшим соседям
- Основная идея состоит в том, что веса, позволяющие восстановить наблюдение по его соседям, могут быть использованы с той же целью в пространстве меньшей размерности (ввиду предположения о том, что наблюдение и его ближайшие соседи лежат на линейном многообразии)

- Имея на руках граф соседей, построим матрицу  $W$ , такую что

$$\mathcal{E}(W) = \sum_{i=1}^m \left| x_i - \sum_{j: x_j \in Nb(x_i)} w_{ij} x_j \right|^2 \longrightarrow \min_W,$$

причем,  $w_{ij} = 0$ , если  $x_i$  и  $x_j$  не являются соседями, а также  $\sum_j w_{ij} = 1$

- Веса, удовлетворяющие ограничениям, обладают важным свойством: при поворотах, шкалировании или сдвигах осей они остаются неизменны

- Для нахождения весов применяются следующее соотношение

$$\varepsilon_i = \left| x_i - \sum_j w_{ij} \eta_j \right|^2 = \left| \sum_j w_{ij} (x_i - \eta_j) \right|^2 = \sum_{j,p} w_{ij} w_{ip} C_{ijp},$$

где  $C_{ijp} = \langle x_i - \eta_j, x_i - \eta_p \rangle$

- Ну а дальше задача условной оптимизации методом множителей Лагранжа

- Найдя веса, рассматриваем аналогичную оптимизационную задачу

$$\Phi(Y) = \sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_j w_{ij} y_j \right|^2$$

- Как и при рассмотрении MDS, накладываем ограничение на  $Y$

$$\sum_{i=1}^m y_{ip} = 0, \quad p = 1, \dots, k,$$

- Решается путем построения собственных векторов матрицы

$$M = (E - W)^T (E - W),$$

которые и являются искомыми эмбедингами

- Простой и интуитивно понятный способ снижения размерности
- По духу очень близок с ISOMAP, но сама идея на первый взгляд выглядит куда более «правильной»
- Есть куча расширений и обобщений, аля Hessian LLE, LTSA и другие

- Laplacian eigenmaps во многом схож с LLE: поиск низкоуровневого представления данных с попыткой сохранить локальные свойства искомого многообразия.
- В данном случае под локальными свойствами подразумеваются расстояния между наблюдением и его  $k$ -ближайшими соседями
- Фактически изучили, когда обсуждали спектральную кластеризацию

- t-distributed Stochastic Neighbour Embedding (t-SNE) [6] – нелинейный алгоритм снижения размерности, разработанный для визуализации в (обычно) двух/трехмерном пространстве эмбедингов, основанный на построении вероятностного распределения расстояний между парами наблюдений в исходном пространстве и пространстве эмбедингов, и вычислении их [эмбедингов] путем оптимизации дивергенции Кульбака–Лейбера между этими двумя распределениями

## t-SNE: общая теория

- Распределение вероятностей на расстояния между парами наблюдений  $i$  и  $j$  в исходном пространстве

$$p_{i|j} = \frac{\exp(-d(x_i, x_j)^2 / 2\sigma_i^2)}{\sum_{k \neq i} \exp(-d(x_i, x_k)^2 / 2\sigma_i^2)}, \quad p_{i|i} = 0 \quad (8)$$

$$p_{ij} = \frac{p_{i|j} + p_{j|i}}{2m} \quad (9)$$

- Среднеквадратическое отклонение подбирается на основе гиперпараметра, называемого перплексией

$$u = \text{Perp}(P_i) = 2^{H(P_i)} = 2^{-\sum_j p_{j|i} \log p_{j|i}},$$

где  $H(P_i)$  есть энтропия Шэннона от случайной величины  $P_i$

- Чаще всего запускается бинарный поиск значения  $\sigma_i$ , ввиду того, что монотонное увеличение среднеквадратической ошибки приводит к монотонному увеличению перплексии



## t-SNE: общая теория

- Распределение вероятностей (на основе распределения Стьюдента) на расстояния в пространстве эмбедингов

$$q_{ij} = \frac{(1 + \|y_i - y_j\|^2)^{-1}}{\sum_{k \neq l} (1 + \|y_k - y_l\|^2)^{-1}}, \quad q_{ii} = 0. \quad (10)$$

- t-распределение позволяет улучшить ситуацию с так называемой «проблемой скученности» (crowding problem), состоящей в том, что наблюдения, находящиеся на средней дистанции от рассматриваемого наблюдения в исходном многомерном пространстве, в, скажем, двухмерном пространстве, должны будут находиться куда дальше относительно того, как будут находиться друг относительно друга рассматриваемое наблюдение и наблюдения, находящиеся очень близко от него
- Подробнее о том, почему было взято t-распределение (конечно, за его длинные широкие хвосты), читайте в статье [6]. В изначальном SNE вместо распределения Стьюдента использовалось нормальное распределение с  $\sigma_i = 1$ .

- Вычисление эмбеддингов  $y_i, i = 1, \dots, m$  происходит на основе оптимизации КЛ-дивергенции между распределениями  $P$  и  $Q$ , являющимися совместными распределениями на все расстояния между парами наблюдений

$$C = KL(P||Q) = \sum_i \sum_j p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$$

- Градиент дивергенции найти не сложно

$$\frac{\partial C}{\partial y_i} = 4 \sum_j (p_{ij} - q_{ij})(y_i - y_j)(1 + \|y_k - y_l\|^2)^{-1} \quad (11)$$

Что до оптимизации, то

- инициализируют  $y_i$  обычно либо значениями из нормального распределения с нулевым матожиданием и очень маленькой дисперсией, либо на основе PCA
- при градиентном спуске кроме слагаемого с лернинг рейтом и антиградиентом докидывают экспоненциально убывающую разность между предыдущим и предпредыдущим значениями градиентов

$$Y^t = Y^{t-1} - \eta \frac{\partial C}{\partial y_i} + \alpha(t)(Y^{t-1} - Y^{t-2}) \quad (12)$$

---

**Algorithm 3:** Классический t-SNE

---

**input** :  $u, \eta, \alpha(t)$

Вычисляем  $p_{ij}$  по формуле (9);

Произвольно инициализируем матрицу  $Y_0$  размерности  $m \times k$ ;

**for**  $i = 1, 2, \dots$  **do**

    Вычисляем  $q_{ij}$  по формуле (10);

    Вычисляем градиент  $\frac{\partial C}{\partial y_i}$  по формуле (11);

    Обновляем значения  $Y^i$  по формуле (12) ;

---

## t-SNE: еще пара слов об оптимизации в алгоритме

- На начальном этапе работы домножают  $p_{ij}$  на коэффициент, называемый «early exaggeration». Это позволяет в пространстве меньшей размерности работать с более кучными и хорошо разделенными кластерами относительно кластеров в исходных данных
- Рекомендованные значения на перплексию лежат в пределах от 5 до 50. Впрочем, для больших датасетов это значение можно увеличить. Сама по себе перплексия может быть рассмотрена как эффективное количество соседей рассматриваемого наблюдения

# How to Use t-SNE Effectively [7]

- Гиперпараметры имеют принципиальное значение (особое внимание, разумеется, перплексии)
- Размеры кластеров в пространстве эмбедингов не имеют значения
- Расстояние между кластерами может также не иметь значения
- Случайный шум порой может образовывать что-то «необычное»
- Порой могут появляться интересные формы кластеров в пространстве эмбедингов, не свойственные исходным данным
- Чтобы убедиться в наличие специфической топологии данных, необходимо строить графики с различными значениями перплексии

## t-SNE: оптимизация алгоритма

- Трудоемкость t-SNE во многом связана с квадратичной сложностью при вычислении  $p_{ij}$  и градиента (11)
- Первая идея, позволяющая улучшить положение дел состоит в построении для каждого наблюдения  $\lfloor 3u \rfloor$ -ближайших соседей и вычисление  $p_{ij_k}$ . Остальные значения полагаются равными нулю. Соседей в статье предлагается искать, строя VP-дерево (vantage point). Вычислительная сложность  $O(un \log n)$
- Модификация алгоритма на основе алгоритма Барнеса-Хата [8] позволяет аппроксимировать значения градиентов путем построения дерева специального вида для хранения  $y_i$ , снижая вычислительную сложность этого шага до  $O(n \log n)$

## t-SNE: алгоритм Барнеса–Хата

- Распишем градиент (11) следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial y_i} &= 4 \sum_j (p_{ij} - q_{ij})(y_i - y_j)(1 + \|y_k - y_l\|^2)^{-1} = \\ &= 4 \sum_j (p_{ij} - q_{ij})q_{ij}Z(y_i - y_j) = \\ &= 4 \left( \sum_j p_{ij}q_{ij}Z(y_i - y_j) - \sum_j q_{ij}^2Z(y_i - y_j) \right) \quad (13)\end{aligned}$$

где  $Z = \sum_{k \neq l} (1 + \|y_k - y_l\|^2)^{-1}$

- Первое слагаемое считается за  $O(un)$  с учетом первой идеи по аппроксимации  $P$  и ввиду того, что  $q_{ij}Z = (1 + \|y_k - y_l\|^2)^{-1}$
- Второе слагаемое может быть аппроксимировано за  $O(n \log n)$  путем построения дерева квадрантов (quadtree; для двумерного эмбединга). Для трехмерного случая можно использовать октодерево (octtree)



# t-SNE: алгоритм Барнеса–Хата

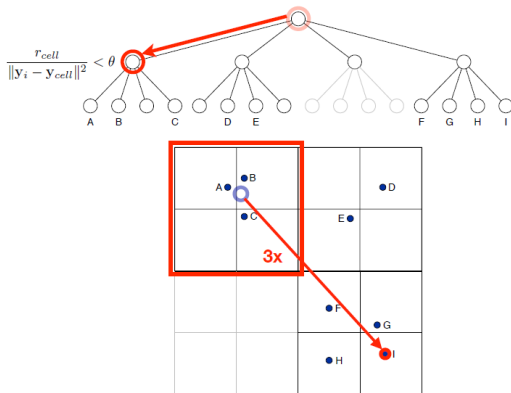


Figure 2: Illustration of the Barnes-Hut approximation. To evaluate the t-SNE gradient for point I, the Barnes-Hut algorithm performs a depth-first search on the embedding quadtree, checking at every node whether or not the node may be used as a “summary”. In the illustration, the cell containing points A, B, and C satisfies the summary-condition: the force between the center-of-mass of the three points (which is stored in the quadtree node) and point I is computed, multiplied by the number of points in the cell (*i.e.*, by three), and added to the gradient for point I. All children of the summary node are pruned from the depth-first search.

## t-SNE: алгоритм Барнеса–Хата

- Используя построенное дерево, можем аппроксимировать второе слагаемое следующим образом

$$-q_{ij}^2 Z(y_i - y_j) \approx -n_{cell} q_{i, cell} Z(y_i - y_{cell}),$$

где  $n_{cell}$  – числоточек в квадранте в квадранте,  $y_{cell}$  – центр масс точек в квадранте

- Небольшой хак: находим аппроксимацию для значения  $-q_{ij}^2 Z^2(y_i - y_j)$  и делим на  $Z$  (приблизительное значение которого также подсчитываем в процессе) ввиду того, что из себя представляет  $q_{ij} Z$
- Критерий останова для квадранта следующий

$$\frac{r_{cell}}{\|y_i - y_{cell}\|^2} < \theta,$$

где  $r_{cell}$  – длина диагонали квадранта

- $\theta$  – тот самый параметр `angle` в `sklearn`'е

- Пожалуй, самый популярный нелинейный метод визуализации многомерных данных в (обычно) двухмерном/трехмерном пространстве
- Метод гибок, количество параметров больше, чем у «среднестатистического» нелинейного алгоритма снижения размерности
- Тем не менее, обычно достаточно посмотреть на различные значения перплексии (и попробовать проварьировать лернинг рэйт при оптимизации КЛ-дивергенции)

Основные недостатки:

- Трудности в интерпретации [7]
- Трудоемок (в классической имплементации алгоритма вычислительная сложность равна  $O(n^2)$ )
- Модификация на основе VP-дерева и алгоритма Барнеса–Хата (дефолт в `sklearn`'е) снижает это число до  $O(un \log n)$ , но ограничивает применение для эмбедингов размерности 2 или 3

- Uniform Manifold Approximation and Projection, UMAP [9] – относительно недавно появившийся (2018 г.) нелинейный алгоритм снижения размерности
- Разработан на основе результатов из римановой геометрии, алгебраической топологии, элементов нечеткой топологии
- Хотя для общего понимания алгоритма глубокое понимание не обязательно: метод относится к классу алгоритмов, строящих граф  $k$ -ближайших соседей, на манер Laplacian eigenmaps, ISOMAP или t-SNE

Что точно стоит упомянуть из теории, так это основные предположения о данных

- Существует многообразие, на котором наблюдения распределены равномерно
- Данное многообразие является локально связанным пространством
- Основная цель алгоритма состоит в сохранении топологической структуры многообразия

Первый этап – построение взвешенного графа по наблюдениям

- Находим  $k$ -ближайших соседей для каждого  $x_i \in X$
- Для каждого  $x_i$  находим  $\rho_i$  и  $\sigma_i$

$$\rho_i = \min \{d(x_i, x_{i_j}) | 1 \leq j \leq k\}$$

$$\sum_{j=1}^k \exp \left( \frac{-\max(0, d(x_i, x_{i_j}) - \rho_i)}{\sigma_i} \right) = \log_2 k$$

- Что есть  $p_i$ ? Расстояние до ближайшего соседа. Для чего нужно? Чтобы точно иметь хотя бы одно ребро в графе с весом 1. А это, в свою очередь, позволяет быть уверенным в том, что общее нечеткое симплициальное множество (fuzzy simplicial set, которое мы зададим графом) локально связано в точке  $x_i$
- Для чего нужно  $\sigma_i$ ? Для задания собственной Римановой метрики вблизи  $x_i$  (хак для приближения к выполнимости первой аксиомы о равномерности распределения данных на многообразии). Находится бинарным поиском



Строим сам граф  $G = (V, E, w)$

- Вершины  $V = X$
- Ребра  $E$  – связи между  $k$ -ближайшими соседями
- Весовая функция  $w$  определяются следующим образом

$$w((x_i, x_{i_j})) = \exp\left(\frac{-\max(0, d(x_i, x_{i_j}) - \rho_i)}{\sigma_i}\right)$$

- Ну а дальше строим симметричную матрицу смежности  $B$  на основании несимметричной матрицы смежности  $A$ , состоящей из элементов  $w((x_i, x_{i_j}))$

$$B = A + A^T - A \odot A^T,$$

где операция  $\odot$  – покомпонентное произведение матриц

- Элементы матрицы  $A$ , т.е. веса  $w((x_i, x_{i_j}))$ , можно понимать как вероятности существования ребра между наблюдениями. Очевидно, что они несимметричны
- Тогда элементы симметричной матрицы смежности  $B$  можно понимать как вероятность того, что хотя бы одно из ребер между  $x_i$  и  $x_j$  существует
- По итогу имеем взвешенный ненаправленный граф
- Что до теоретических оснований, почему мы все это объединяем в таком ключе (различные локальные топологические структуры с вообще говоря различными метриками) – придется разбираться с теорией нечетких симплициальных множеств [9] (удачи)

Второй этап – построение эмбединга

- Строго говоря, построенный граф  $G$  есть представление нечеткого множества  $A$  с функцией принадлежности  $\mu(a), a \in A$
- Хотим получить граф в пространстве меньшей размерности, соответствующей нечеткому множеству  $A$  с функцией принадлежности  $\nu(a), a \in A$
- Кросс-энтропия для нечетких множеств

$$\begin{aligned} C((A, \mu), (A, \nu)) = & \sum_{a \in A} \mu(a) \log \left( \frac{\mu(a)}{\nu(a)} \right) + (1 - \mu(a)) \log \left( \frac{1 - \mu(a)}{1 - \nu(a)} \right) = \\ & \sum_{a \in A} (\mu(a) \log (\mu(a)) + (1 - \mu(a)) \log (1 - \mu(a))) - \\ & - \sum_{a \in A} (\mu(a) \log (\nu(a)) + (1 - \mu(a)) \log (1 - \nu(a))) \quad (14) \end{aligned}$$

- Ввиду того, что первая часть суммы зависит только от известной  $\mu(a)$ , ее можно отбросить, т.е. оптимизировать лишь

$$- \sum_{a \in A} (\mu(a) \log(\nu(a)) + (1 - \mu(a)) \log(1 - \nu(a)))$$

- Для оптимизации предлагается использовать вариацию стохастического градиентного спуска, используя сэмплирование ребер из графов для обоих слагаемых под суммой (в случае второго слагаемого, будет использоваться так называемый negative sampling)

- Для этого надо определиться, что делать с  $\nu(a)$ . А именно найти дифференцируемую аппроксимацию этой функции. Авторы делают это на манер t-SNE

$$\Phi(y_i, y_j) = \left(1 + a (\|y_i - y_j\|_2^2)^b\right)^{-1}$$

- Причем параметры подбирают на основе МНК, подгоняясь под

$$\Psi(y_i, y_j) = \begin{cases} 1, & \|y_i - y_j\|_2 \leqslant mindist \\ \exp(-(\|y_i - y_j\|_2 - mindist)), & \text{иначе} \end{cases}$$

# UMAP: псевдокод всего алгоритма

---

**Algorithm 1** UMAP algorithm

---

**function** UMAP( $X, n, d, \text{min-dist}, \text{n-epochs}$ )

*# Construct the relevant weighted graph*

**for all**  $x \in X$  **do**

fs-set[ $x$ ]  $\leftarrow$  LOCALFUZZYSIMPLICIALSET( $X, x, n$ )

top-rep  $\leftarrow \bigcup_{x \in X} \text{fs-set}[x]$       *# We recommend the probabilistic t-conorm*

*# Perform optimization of the graph layout*

$Y \leftarrow$  SPECTRALEMMBEDDING(top-rep,  $d$ )

$Y \leftarrow$  OPTIMIZEEMBEDDING(top-rep,  $Y, \text{min-dist}, \text{n-epochs}$ )

**return**  $Y$

---

---

**Algorithm 2** Constructing a local fuzzy simplicial set

---

**function** LOCALFUZZYSIMPLICIALSET( $X, x, n$ )

$\text{knn}, \text{knn-dists} \leftarrow \text{APPROXNEARESTNEIGHBORS}(X, x, n)$

$\rho \leftarrow \text{knn-dists}[1]$  *# Distance to nearest neighbor*

$\sigma \leftarrow \text{SMOOTHKNNDIST}(\text{knn-dists}, n, \rho)$  *# Smooth approximator to*

*knn-distance*

$\text{fs-set}_0 \leftarrow X$

$\text{fs-set}_1 \leftarrow \{([x, y], 0) \mid y \in X\}$

**for all**  $y \in \text{knn}$  **do**

$d_{x,y} \leftarrow \max\{0, \text{dist}(x, y) - \rho\} / \sigma$

$\text{fs-set}_1 \leftarrow \text{fs-set}_1 \cup ([x, y], \exp(-d_{x,y}))$

**return**  $\text{fs-set}$

---

# UMAP: псевдокод алгоритмов инициализации параметров $\sigma_i$ и спектрального эмбединга

---

**Algorithm 3** Compute the normalizing factor for distances  $\sigma$

---

**function** SMOOTHKNNDIST(knn-dists,  $n$ ,  $\rho$ )

Binary search for  $\sigma$  such that  $\sum_{i=1}^n \exp(-(knn-dists_i - \rho)/\sigma) = \log_2(n)$

**return**  $\sigma$

---

---

**Algorithm 4** Spectral embedding for initialization

---

**function** SPECTRALEMMBEDDING(top-rep,  $d$ )

$A \leftarrow$  1-skeleton of top-rep expressed as a weighted adjacency matrix

$D \leftarrow$  degree matrix for the graph  $A$

$L \leftarrow D^{1/2}(D - A)D^{1/2}$

evec  $\leftarrow$  Eigenvectors of  $L$  (sorted)

$Y \leftarrow$  evec[1.. $d + 1$ ]

*# 0-base indexing assumed*

**return**  $Y$

---



# УМАР: псевдокод алгоритма стохастической оптимизации

---

**Algorithm 5** Optimizing the embedding

---

**function** OPTIMIZEEMBEDDING(top-rep,  $Y$ , min-dist, n-epochs)

$\alpha \leftarrow 1.0$

Fit  $\Phi$  from  $\Psi$  defined by min-dist

**for**  $e \leftarrow 1, \dots, \text{n-epochs}$  **do**

**for all**  $([a, b], p) \in \text{top-rep}_1$  **do**

**if** RANDOM( )  $\leq p$  **then**                      *# Sample simplex with probability p*

$y_a \leftarrow y_a + \alpha \cdot \nabla(\log(\Phi))(y_a, y_b)$

**for**  $i \leftarrow 1, \dots, \text{n-neg-samples}$  **do**

$c \leftarrow$  random sample from  $Y$

$y_a \leftarrow y_a + \alpha \cdot \nabla(\log(1 - \Phi))(y_a, y_c)$

$\alpha \leftarrow 1.0 - e/\text{n-epochs}$

**return**  $Y$

---

- Число компонент  $k$
- Число соседей  $k_{nn}$ . Чем меньше значение, тем точнее передается локальная топология многообразия. Чем выше, тем точнее передается глобальная структура
- *mindist* – задает уровень разделения между точками в пространстве эмбедингов. Чем меньше, тем более плотно упакованными будут локальные области с эмбедингами. Чем больше, тем точки сильнее будут разбросаны по пространству меньшей размерности

Из плюсов

- Серьезная теория под капотом
- Вычислительно эффективный ( $O(N^{1.14})$ )
- Умеет в произвольный размер эмбедингов

## Основные недостатки

- Все те же проблемы с интерпретацией
- И нахождением структур в шуме (одна из аксиом гласит о существовании в данных многообразия)
- Ориентируется на локальную структуру, потому в случае, когда нужно точнее передать общую структуру данных, рекомендуется применять другой алгоритм
- Ну и разного рода аппроксимации (поиск соседей, аппроксимация функции принадлежности в пространстве меньшей размерности) могут портить общую картину работы алгоритма. Особенно в случае небольшой выборки

# Снижение размерности: обсуждение

---

- Классификация алгоритмов разнится. Кроме указанной в начале презентации (из работы van der Maaten'a [2]), можно выделить следующую:
  - алгоритмы, которые стремятся сохранить попарную структуру расстояний среди всех наблюдений (например, PCA, MDS)
  - и те, которые поддерживают сохранение локальных расстояний по сравнению с глобальным расстоянием (ISOMAP, LLE, t-SNE, UMAP).

## Немного о взаимосвязях

- PCA практически полностью идентичен классическому MDS
- Применение MDS для геодезических расстояний эквивалентно применению ISOMAP
- Общий паттерн алгоритмов [для удобного запоминания], основанных на построении графа k-ближайших соседей (ISOMAP, LLE, Laplacian eigenmaps, даже t-SNE и UMAP), выглядит следующим образом:
  1. Построение взвешенного графа k-ближайших соседей и применение некоторой трансформации над расстояниями между вершинами, чтобы отразить локальную структуру данных (не забыть о симметрии)
  2. Подобрать специальную целевую функцию (отражающую желаемые свойства), на основе оптимизации которой построить эмбединг в пространстве меньшей размерности

- Расхождений между теорией и имплементацией алгоритмов в `sklearn` обнаружено не было. Однако есть тонкости, связанные с различными оптимизационными трюками (t-SNE и алгоритм Барнеса–Хата), построением Лапласиана графа (еще его называют матрицей Кирхгофа), etc
- UMAP на бумаге выглядит очень многообещающе. И хотя есть замечательно написанная статья, а также подробная документация, разобраться в репе с кодом достаточно сложно. Ну и результаты экспериментов на своих собственных датасетах весьма спорные



1. *Гирдюк Д.* Репозиторий с материалами для занятий. URL:  
[https://github.com/dmgirdyuk/PtW\\_ML\\_Unsupervised\\_learning](https://github.com/dmgirdyuk/PtW_ML_Unsupervised_learning).
2. *Van Der Maaten L., Postma E., Van den Herik J.* Dimensionality reduction: a comparative review. // J Mach Learn Res. 2009. Т. 10. С. 66—71.
3. *Van der Maaten L.* Подробный список классических методов снижения размерности. URL:  
<https://lvdmaaten.github.io/drtoolbox/>.
4. *Tenenbaum J. B., Silva V. d., Langford J. C.* A Global Geometric Framework for Nonlinear Dimensionality Reduction. // Science. 2000. Т. 290, № 5500. С. 2319—2323. ISSN 0036-8075. DOI: 10.1126/science.290.5500.2319. URL:  
<https://science.sciencemag.org/content/290/5500/2319>.

5. *Saul L., Roweis S.* An introduction to locally linear embedding. // Journal of Machine Learning Research. 2001. ЯНВ. Т. 7.
6. *van der Maaten L., Hinton G.* Visualizing High-Dimensional Data Using t-SNE. // Journal of Machine Learning Research. 2008. Т. 9. С. 2579—2605.
7. *Wattenberg M., Viegas F., Johnson I.* How to use t-SNE Effectively. URL: <https://distill.pub/2016/misread-tsne/>.
8. *Maaten L. van der.* Accelerating t-SNE using Tree-Based Algorithms. // Journal of Machine Learning Research. 2014. Т. 15, № 93. С. 3221—3245. URL: <http://jmlr.org/papers/v15/vandermaaten14a.html>.
9. *McInnes L., Healy J.* UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction. // ArXiv. 2018. Т. abs/1802.03426.