

# Занятие 11. Кластеризация

---

Гирдюк Дмитрий Викторович

14 декабря 2024

СПбГУ, ПМ-ПУ, ДФС

1. Введение в направление
2. Постановка задачи кластеризации
3. Общая классификация алгоритмов
4. Основные алгоритмы
5. Общая характеристика 5 подходов
6. Метрики качества
7. Кратко о выборе числа кластеров

# Введение в направление

---

# Чем будем заниматься? [1]

*Обучение без учителя (unsupervised learning)* – это тип машинного обучения, который ищет ранее необнаруженные закономерности в наборе данных без ранее существовавших меток и с минимальным или полностью отсутствующим контролем человека.

Задача обучения без учителя покрывает не только *кластеризацию*, но и

- *поиск ассоциативных правил*
- *заполнение пропущенных значений*
- *поиск аномалий*
- *сокращение размерности и визуализация данных*

# Постановка задачи кластеризации

---

# Постановка задачи

*Кластерный анализ* или *кластеризация* – это задача группировки набора объектов таким образом, чтобы объекты в одной группе (называемой кластером) были более похожи (в некотором смысле) друг на друга, чем на объекты в других группах (кластерах).

Проще говоря, имеем

- Пространство объектов  $X$  и выборку из него  $X^l$
- Мера расстояния между объектами  $\rho : X \times X \rightarrow R^+$

Хотим получить

- Множество групп/кластеров  $Y$
- Алгоритм кластеризации  $\alpha : X \rightarrow Y$

## С какой целью используется

- Разделение на группы с целью упрощения работы (отдельные модели для каждой группы)
- Сокращение объемов наблюдений и сжатие данных (например, квантизация нейронных сетей)
- Выделение новизны/аномалий
- Построение иерархии/таксономии объектов

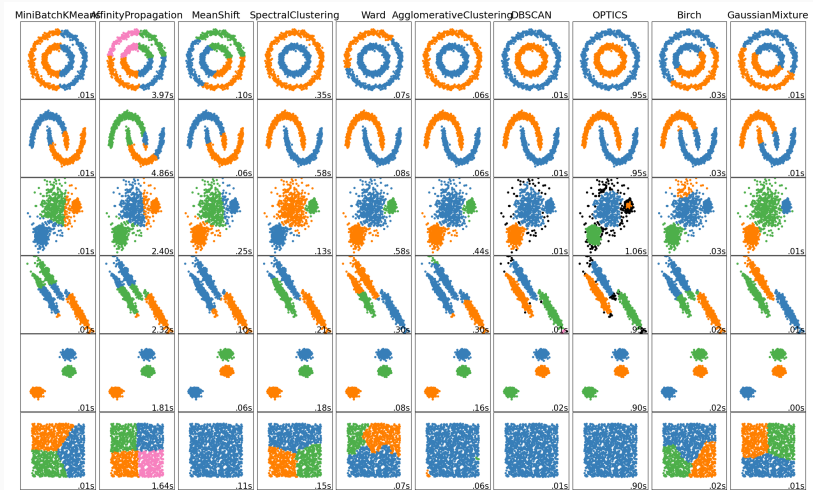
# Некорректность постановки задачи

Сама по себе постановка задачи кластеризации некорректна, а именно

- не существует единого критерия качества (их, скорее, наоборот слишком много)
- число кластеров может быть заранее неизвестно
- сильная зависимость от метрики  $\rho$



# Иллюстрация проблем на примерах



# И что с этим делать?

- Не полагаться на нее, если не существует альтернативных способов подтверждения адекватности ее результатов
- Ответственно подходить к предварительному изучению данных, отбору обучающей выборки и метрике

# Требования к алгоритмам

- Масштабируемость
- Работа с большими размерностями
- Устойчивость к выбросам
- Устойчивость к различным типам кластерных структур
- Интерпретируемость результатов
- Временная сложность

# Общая классификация алгоритмов

---

# Классификация алгоритмов [2—4]

В большинстве источников выделяют пять групп алгоритмов

- *Основанные на центроидах* (centroid based): k-means, k-modes, k-medoids, **Meanshift**, FCM, Affinity propagation
- *Иерархические* (hierarchical): **агломеративные** (Ward, single/average/complete linkage), BIRCH, на основе теории графов (выделение связных компонент и минимальное остовное дерево), **Spectral Clustering**, CURE, ROCK, Chameleon, Echidna, SNN, CACTUS, GRIDCLUST
- *Основанные на плотности* (density based): **DBSCAN**, OPTICS, DBCLASD, GDBSCAN, DENCLU, SUBCLU
- *Сеточные* (grid based): STING, Wave cluster, BANG, CLIQUE, OptiGrid, MAFLA, ENCLUS, PROCLUS, ORCLUS, FC, STIRR
- *Основанные на модели данных* (model based): **Expectation Maximization** (EM), COBWEB, CLASSIT, SOM

# Основные алгоритмы

---

- Meanshift – это алгоритм кластеризации, использующий *ядерную оценку плотности* (Kernel Density Estimation, KDE), который итеративно назначает наблюдения кластерам, сдвигая точки в сторону моды
- В отличие от (дешевого и сердитого) K-Means, Meanshift не требует заранее указывать количество кластеров, но требует задать параметр окна для KDE.

# Meanshift: описание алгоритма

- Алгоритм итеративно назначает каждую точку ближайшему центроиду кластера.
- Направление к ближайшему центроиду скопления определяется тем, где находится большинство ближайших точек.
- Таким образом, на каждой итерации каждая точка данных будет перемещаться ближе к тому месту, где находится большинство точек, которое является или приведет к центру кластера.
- Когда алгоритм останавливается, каждой точке в соответствии ставится номер кластера



# Meanshift: подробнее об алгоритме

- Ядровая оценка плотности

$$f_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

- Итеративное обновление точек

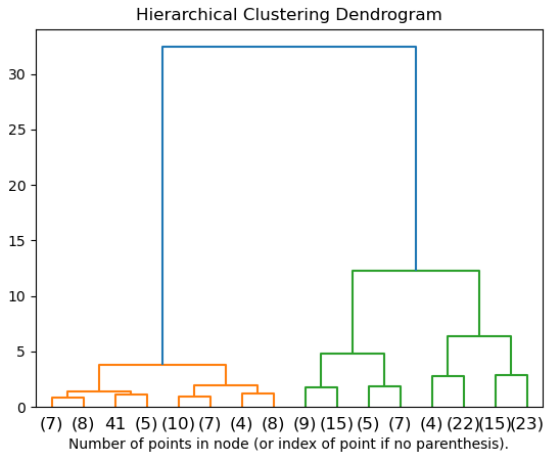
$$x_i^{t+1} = m(x_i^t)$$
$$m(x_i) = \frac{\sum_{x_j \in N(x_i)} K_h(x_j - x_i) x_j}{\sum_{x_j \in N(x_i)} K_h(x_j - x_i)}$$

- Обязательна стандартизация входных данных (привет, bandwidth)
- Есть реализация в scikit-learn'е. Распараллеливание; поддерживает бинаризацию исходных данных; можно даже не задавать  $h$ , но тогда страдает производительность; кроме брутфорса для поиска соседей есть KD- и Ball-деревья.

# Агломеративная кластеризация

- Иерархическая кластеризация – это метод кластерного анализа, который направлен на построение иерархии кластеров
- Выделяют два подхода
  - Дивизимный (“снизу вверх”)
  - Агломеративный (“сверху вниз”)
- В большинстве реализаций слияния и разбиения происходят жадно
- Результаты иерархической кластеризации обычно представляются в виде дендрограммы.

# Агломеративная кластеризация: пример дендрограммы



# Агломеративная кластеризация: описание подхода

- Изначально каждая точка – отдельный кластер
- Объединение кластеров происходит путем поиска такой их пары, которая имеет наименьшее значение симметричной метрики близости между кластерами
- Процесс завершается, когда все сливается в один единственный кластер (или до фиксированного числа кластеров)
- Все, что остается, произвести “разрез” в получившейся иерархии кластеров

# Агломеративная кластеризация: итеративный алгоритм Ланса-Уильямса

---

**Algorithm 1:** Алгоритм Ланса-Уильямса

---

**input** : Каждая точка – кластер  $C_1 = \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}$ ,  
          подсчитаны расстояния между кластерами-точками  
           $R_{\{x_i\}\{x_j\}} = \rho(x_i, x_j)$

**for**  $t \leftarrow 2$  **to**  $l$  **do**

- Найти в  $C_{t-1}$  пару кластеров  $U$  и  $V$  с минимальным  $R_{UV}$ ;
- $W = U \cup V$ ;
- $C_t = C_{t-1} \cup W \setminus \{U, V\}$ ;
- for**  $S \in C_t$  **do**
  - $R_{WS} = \alpha_U R_{US} + \alpha_V R_{VS} + \beta R_{UV} + \gamma |R_{US} - R_{VS}|$ ;

---

# Агломеративная кластеризация: частные случаи метрики схожести

- Расстояние ближайшего соседа/Single/Minimum:

$$R_{WS} = \min_{w \in W, s \in S} \rho(w, s),$$
$$\alpha_U = \alpha_V = \frac{1}{2}, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{2}$$

- Расстояние дальнего соседа/Complete/Maximum:

$$R_{WS} = \max_{w \in W, s \in S} \rho(w, s),$$
$$\alpha_U = \alpha_V = \frac{1}{2}, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{2}$$

- Групповое среднее расстояние/Average:

$$R_{WS} = \frac{1}{|W||S|} \sum_{w \in W, s \in S} \rho(w, s),$$
$$\alpha_U = \frac{|U|}{|W|}, \alpha_V = \frac{|V|}{|W|}, \beta = \gamma = 0$$

# Агломеративная кластеризация: частные случаи метрики схожести (ii)

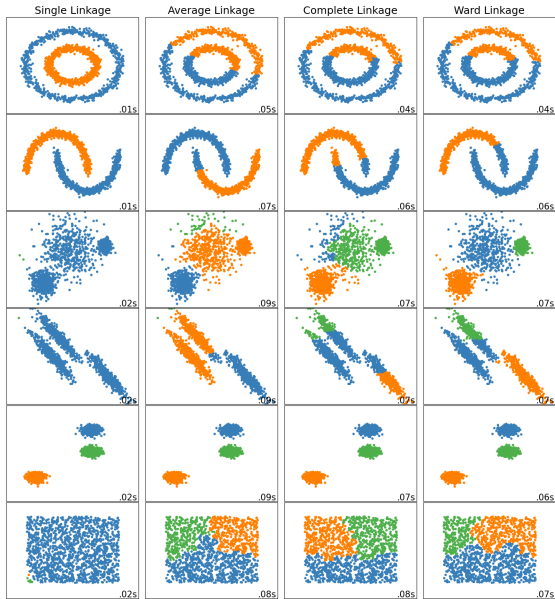
- Расстояние между центроидами/Centroid:

$$R_{WS} = \rho^2 \left( \sum_{w \in W} \frac{w}{|W|}, \sum_{s \in S} \frac{s}{|S|} \right),$$
$$\alpha_U = \frac{|U|}{|W|}, \alpha_V = \frac{|V|}{|W|}, \beta = -\alpha_U \alpha_V, \gamma = 0$$

- Расстояние Уорда/Ward:

$$R_{WS} = \frac{|S||W|}{|S| + |W|} \rho^2 \left( \sum_{w \in W} \frac{w}{|W|}, \sum_{s \in S} \frac{s}{|S|} \right),$$
$$\alpha_U = \frac{|S| + |U|}{|S| + |W|}, \alpha_V = \frac{|S| + |V|}{|S| + |W|}, \beta = -\frac{|S|}{|S| + |W|}, \gamma = 0$$

# Агломеративная кластеризация: пример дендрограммы





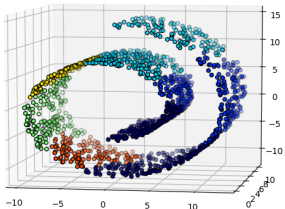
# Агломеративная кластеризация: подробнее

- Подбор функции расстояния между точками, очевидно, имеет существенное влияние. Чаще всего выбор между  $l_2$  и  $l_1$
- Стандартизация тоже влияет. Но производить ли ее в случае иерархической кластеризации – вопрос спорный
- Метрика близости: обычно Ward. Ну и тут ограничение на использование только  $l_2$ . В таких случаях в первую очередь смотрите на Average (устойчивее к выбросам)
- Обычно количество кластеров определяют по дендограмме: “отсекают” там, где дельта метрики на двух итерациях имеет наибольшее значение

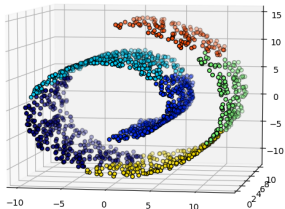
# Агломеративная кластеризация: подробнее (ii)

- Чаще всего применяют в случае, когда данных мало, либо когда хочется построить иерархию/таксономию (ваш кэп)
- Имплементировано в `scikit-learn`'е. Из интересного: есть возможность докидывать ограничения на локальную структуру в данных

Without connectivity constraints (time 0.05s)



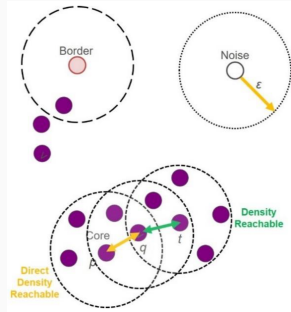
With connectivity constraints (time 0.07s)



- Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (DBSCAN) – алгоритм кластеризации, основанный на плотности точек, изначально разработанный с целью кластеризации в базах данных, содержащих геометрические представления наблюдений
- Основными преимуществами алгоритма авторы выделили минимальную необходимость понимания предметной области данных при подборе гиперпараметров метода, а также способность обнаруживать кластеры произвольной формы
- Алгоритм достаточно прост, наряду с k-means один из самых популярных

# DBSCAN: описание алгоритма

- Алгоритм имеет 2 гиперпараметра: величина окрестности точки  $\varepsilon$  и минимальное количество наблюдений в окрестности  $MinPts$
- При кластеризации точка может быть причислено к 3 типам:
  - корневая: в его  $\varepsilon$ -окрестности не менее  $MinPts$  точек
  - граничная: в его  $\varepsilon$ -окрестности меньше  $MinPts$  точек, но среди них есть как минимум одна корневая
  - шумовая: не корневая и не граничная



---

**Algorithm 2:** DBSCAN

---

**input** : Выборка  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , параметры  $\varepsilon$  и  $MinPts$

$U = X$ ,  $N = \emptyset$ ,  $a = 0$ ;

**while**  $U \neq \emptyset$  **do**

    Взять  $x \in U$ ;

**if**  $|U_\varepsilon(x)| < MinPts$  **then**

$N = N \cup x$ ;

**else**

$K = U_\varepsilon(x)$ ,  $a = a + 1$ ;

**for**  $x' \in K$  **do**

**if**  $|U_\varepsilon(x')| \geq MinPts$  **then**

$K = K \cup U_\varepsilon(x')$ ;

**else**

                позначить  $x'$  как граничную точку кластера  $K$ ;

**foreach**  $x_i \in K$  **do**  $a_i = a$ ;

$U = U \setminus K$ ;

- Подбор гиперпараметров.
  - Общая идея состоит в построении графика, по ординате у которого расстояние до *MinPts*-го соседа, а по абсциссе – точки, отсортированные в порядке увеличения этого расстояния.
  - Существенный скачок в значении идентифицирует выбросы, посему задавая некоторый процент на их число можно определить  $\epsilon$ .
  - Обычно строят несколько таких графиков для различных значений *MinPts*.
  - В некоторых источниках значение *MinPts* предлагают выбирать равным  $\dim X + 1$ , Где-то встречается  $2 * \dim X$

- Есть реализация в sklearn'е. Кроме того, там же представлена модификация алгоритма под названием OPTICS [7], фактически отличающаяся от него тем, что задает интервал для значений  $\varepsilon$ , что позволяет выделять кластеры с различными плотностями

- Expectation Maximization (EM) – итеративный алгоритм для поиска оценок максимального правдоподобия параметров вероятностных моделей, зависящих от некоторых скрытых переменных
- Алгоритм имеет приложения в дискриминатном анализе, кластеризации (разделение смеси распределений), восстановлении пропусков в данных, обработке сигналов и изображениях



- Смесь распределений

$$p(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi(x, \theta_j), \quad \sum_{j=1}^k w_j = 1, \quad w_j \geq 0$$

$\varphi(x, \theta_j) = p(x|j)$  – функция правдоподобия  $j$ -ой компоненты,

$w_j = P(j)$  – априорная вероятность  $j$ -ой компоненты

- Задача поиска максимума правдоподобия

$$L(w, \theta) = \ln \prod_{i=1}^n p(x_i) = \sum_{i=1}^n \ln \sum_{j=1}^k w_j \varphi(x_i, \theta_j) \longrightarrow \max_{w, \theta}$$

$$\text{w.r.t } \sum_{j=1}^k w_j = 1, \quad w_j \geq 0$$

- При разделении смеси распределений (обычно, гауссовских, отсюда Gaussian Mixtures Model, GMM-EM) EM используется следующим образом [8]:
  - (expectation) вводится вспомогательный вектор скрытых переменных  $g$ , такой что его значения могут быть вычислены, зная параметры распределений  $\theta$
  - (maximization) вычислив значения скрытых переменных, задача поиска (локального) максимума правдоподобия существенно упрощается

- В качестве скрытых переменных выберем

$$g = \{g_{ij}\}, \quad g_{ij} = P(j|x_i)$$

- По формуле Байеса

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi(x_i, \theta_j)}{\sum_{s=1}^k w_s \varphi(x_i, \vartheta_s)} \quad (1)$$

- Формулы для  $\theta_j$  и  $w_j$  выводятся из условий Куна–Такера

$$\theta_j = \arg \max_{\theta_s} \sum_{i=1}^n g_{ij} \ln \varphi(x_i, \theta_s) \quad (2)$$

$$w_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_{ij} \quad (3)$$

---

## Algorithm 3: EM

---

**input** : Выборка  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , начальные приближения для  $(w, \theta)$ , количество кластеров  $k$  и  $\varepsilon$

**while** *True* **do**

- E: **foreach**  $i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k$  **do**  $g_{ij}^0 = g_{ij}$ , вычислить новые значения  $g_{ij}$  по формуле (1);
- M: **foreach**  $j = 1, \dots, k$  **do** решить задачу (2) для нахождения  $\theta_j$ , вычислить новые значения  $w_j$  по формуле (3);
- if**  $\max_{i,j} |g_{ij} - g_{ij}^0| < \varepsilon$  **then**
  - └ Завершить работу

---

- В случае гауссовских плотностей при условии, что признаки независимы (матрица ковариаций диагональна), задача (2) имеет аналитическое решение
- Кластеризация мягкая, т.е. точкам не ставится в соответствии номер кластера, а лишь вероятность принадлежности. Нужен номер – берите максимум по  $g_{ij}$
- k-means – частный случай ЕМ. На Е-этапе вычисляются скрытые переменные – номера кластеров, а на М-этапе происходит обновление центров.
- Начальное приближение: рандом/k-means

- У ЕМ'а есть масса модификаций: generalized EM (GEM), stochastic EM (SEM), есть вариант с последовательным добавлением компонент
- GaussianMixture в scikit-learn'е. Количество компонент обязательно. Поддерживает различные типы ковариационных матриц

- Spectral Clustering – двухэтапный алгоритм кластеризации, который на первом этапе находит некоторое количество собственных векторов *лапласиана графа*, образованного из входных наблюдений (фактически процедура снижения размерности), а затем применяет (обычно) k-means к составленной из них [собственных векторов] матрице
- В отличие от алгоритмов, использующих сферические/эллиптические метрики расстояний, умеет выделять существенно невыпуклые кластеры

# Spectral Clustering: основная теория

- Предварительный этап состоит в формировании из исходной матрицы с наблюдениями  $X$  ненаправленный граф похожести (similarity graph). Варианты следующие:
  - Полностью связанный
  - $\varepsilon$ -окрестность
  - $k$ -ближайших соседей: если вершина  $v_i$  находится среди  $k$ -ближайших соседей вершины  $v_j$
- Элементы  $s_{ij}$  матрицы схожести графа неотрицательны и равны 0, когда объекты совершенно не похожи (не связаны, нет ребра в графе)
- Обычно матрица формируется на основе радиально-базисных функций: чаще всего Гауссовская  $\varphi(x) = \exp(\frac{-d_{ij}^2}{\sigma^2})$



- Пусть  $W$  есть матрица весов (взвешенная матрица смежности), такая что  $w_{ij} = s_{ij}$ , если существует ребро между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ , и 0 иначе
- Матрица  $D$  (degree matrix) есть диагональная матрица с элементами  $d_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}$

- Лапласианом графа называется матрица  $L = D - W$  с набором интересных свойств

- $z^T L z = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_{ij} (z_i - z_j)^2$  для любого  $z \in R^n$

- $L$  симметрична и положительно полуопределена

- У  $L$   $n$  неотрицательных собственных чисел:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

- Наименьшее собственное число  $\lambda_1$  всегда равно 0.

Соответствующий ему собственный вектор состоит из 1, если граф связный. Если у графа есть  $p$  компонент связности, то кратность  $\lambda_1$  равна  $p$ , а собственные векторы представляют собой индикаторные векторы

---

**Algorithm 4:** Spectral Clustering

---

**input** : Матрица схожести  $S \in R^{n \times n}$  и количество кластеров  $k$   
Построить граф схожести. Пусть  $W$  есть его матрица смежности;  
Вычислить лапласиан  $L$ ;  
Найти первые  $k$  собственных векторов  $u_1, \dots, u_k$ . Составить из них матрицу  $U \in R^{n \times k}$ ;  
k-means( $U, k$ );

---

- Подробнее о том, почему это действительно работает, в статье [9]. Спектральная кластеризация по сути является релаксацией задачи о разделении графа на компоненты
- Но нужна грамотная настройка: тут и выбор матрицы схожести, и количества кластеров. Для данного алгоритма есть эвристика для поиска оптимального числа кластеров: построить график собственных векторов по возрастанию и “обрезать” там, где происходит существенный скачок в их значениях

- Что касается поиска собственных векторов, то существует масса численных методов, обернутых в фреймворки. Например, «`arpack`», «`eigen`». `sklearn` подтягивает методы линейной алгебры из `scipy` – подробнее в их доках. С простейшим итеративным методом поиска собственных векторов познакомимся в следующий раз, когда будет говорить о методе главных компонент (PCA)
- Лапласиан не единственный. Опять же, в работе [9] приводятся “нормализованные” альтернативы
- Есть в `scikit-learn`’е. `n_components` не про количество связанных компонент, а про число собственных векторов, используемых на втором этапе алгоритма (по умолчанию `n_components = n_clusters`)

## Общая характеристика 5 подходов

---

# Сравнение подходов: Centroid based

## Преимущества:

- Простые, надежные, обычно масштабируемые
- Не требуют глубокого понимания специфики данных
- Итеративные (пересчитали центроиды и разделение на кластеры изменилось)

## Недостатки

- Число кластеров?
- Нормализация/стандартизация данных может существенно изменить расклад

# Сравнение подходов: Hierarchical

## Преимущества:

- Изначально не требуют фиксации количества кластеров
- Зачастую никаких гиперпараметров
- Просты для понимания и имплементации

## Недостатки

- Трудности с интерпретацией
- Чувствительны к выбросам
- Отсутствует итеративность (как только объект отнесен к кластеру, он из него уже не выйдет)



# Сравнение подходов: Density based

Преимущества:

- Умеют в кластеры произвольной формы
- Весьма устойчивы к выбросам

Недостатки

- Трудности с очень большими и разреженными данными
- Проклятие размерности

# Сравнение подходов: Grid based

## Преимущества:

- Разбивают пространство данных на ячейки
- Хороши для датасетов больших размерностей, итеративные

## Недостатки

- Плохо работают на данных, являющихся отображением датасета меньшей размерности в пространство большей размерности
- Требуют тщательного выбора проекций, функции оценки плотности и оптимальных разделяющих поверхностей

# Сравнение подходов: Model based

## Преимущества:

- Полученное разбиение интерпретируемо со статистической точки зрения
- Успешно используются в векторной квантизации [10]
- Позволяют выбирать плотности распределения компонент

## Недостатки

- Параметры должны быть оценены, что требует большего количества точек данных в каждой компоненте
- Трудно настраивать

# Метрики качества

---

# Общая классификация [11]

- Разделение простое: либо работа с известной правильной разметкой, либо попытка понять, насколько хорошо произошло разбиение
- К первым относятся Adjusted Rand index, Mutual Information based scores, Homogeneity, completeness and V-measure
- Ко вторым Silhouette, Calinski-Harabasz Index, Davies-Bouldin Index и другие

## Adjusted Rand index [12]

- Здесь и далее обозначим через  $C$  истинное разбиение данных, а через  $K$  – разбиение на основе какого-либо алгоритма
- Пусть  $a$  и  $d$  есть общее количество пар наблюдений, которые находятся в одном/разных кластерах как в  $C$ , так и в  $K$
- Rand Index и Adjusted Rand index

$$RI = 2 \frac{a + d}{n(n - 1)} = \frac{a + d}{a + b + c + d}$$

$$\begin{aligned}ARI &= \frac{RI - E[RI]}{\max(RI) - E[RI]} = \\&= \frac{(a + b + c + d)(a + d) - [(a + b)(a + c) + (b + d)(c + d)]}{(a + b + c + d)^2 - [(a + b)(a + c) + (b + d)(c + d)]}\end{aligned}$$

- Очевидно, чем больше, тем лучше. Значения RI в интервале от 0 до 1, ARI – [-1; 1]. Если разметка рандомная, то ARI будет близок к 0. Никаких предположений о структуре кластеров – можно сравнивать результаты разных алгоритмов

## Mutual Information based scores [13]

- Энтропия C/K

$$H(C) = - \sum_{i=1}^{|C|} P^C(i) \log(P(i)), \quad P^C(i) = \frac{|C_i|}{n}$$

- Взаимная информация (Mutual information)

$$\text{MI}(C, K) = \sum_{i=1}^{|C|} \sum_{j=1}^{|K|} P(i, j) \log \left( \frac{P(i, j)}{P^C(i) P^K(j)} \right), \quad P(i, j) = \frac{|C_i \cap K_j|}{n}$$

- Ее нормализованная версия

$$\text{NMI}(U, V) = \frac{\text{MI}(C, K)}{\text{mean}(H(C), H(K))}$$

## Mutual Information based scores ii

- И скорректированная нормализованная версия

$$\text{AMI}(U, V) = \frac{\text{MI} - E[\text{MI}]}{\text{mean}(H(C), H(K)) - E[\text{MI}]}$$

где

$$E[\text{MI}(U, V)] = \sum_{i=1}^{|U|} \sum_{j=1}^{|V|} \sum_{n_{ij}=(a_i+b_j-N)+}^{\min(a_i, b_j)} \frac{n_{ij}}{N} \log \left( \frac{N n_{ij}}{a_i b_j} \right) \times \\ \times \frac{a_i! b_j! (N - a_i)! (N - b_j)!}{N! n_{ij}! (a_i - n_{ij})! (b_j - n_{ij})! (N - a_i - b_j + n_{ij})!}$$



## Mutual Information based scores iii

- Чем больше, тем лучше
- MI, NMI лежат в интервале  $[0; 1]$ . При произвольной разметке не факт что будут близки к 0
- AMI это исправляет, его значения лежат в интервале от -1 до 1

# Homogeneity и completeness

- Homogeneity (однородность) – каждый кластер из  $K$  содержит наблюдения только из одного класса  $C$

$$h = 1 - \frac{H(C|K)}{H(C)}$$

- Completeness (полнота) – все наблюдения из класса  $C$  находятся в каком-либо кластере  $K$

$$c = 1 - \frac{H(K|C)}{H(K)}$$

- Условная энтропия

$$H(C|K) = - \sum_{c=1}^{|C|} \sum_{k=1}^{|K|} \frac{n_{c,k}}{n} \log \left( \frac{n_{c,k}}{n_k} \right)$$

где  $n_{c,k}$  есть число наблюдений из класса  $c$  в кластере  $k$ , а  $n_k$  – общее число наблюдений в кластере  $k$

- V-мера – их гармоническое среднее

$$v_{\beta} = \frac{(1 + \beta)hc}{\beta h + c}$$

- Значения всех трех метрик в интервале  $[0; 1]$ . Чем больше, тем лучше.
- Никаких предположений о структуре кластеров – можно сравнивать результаты разных алгоритмов кластеризации
- Та же проблема с нормализацией. Если мало наблюдений / много кластеров, рекомендуется использовать ARI

- Пусть  $a$  и  $b$  есть среднее расстояние между наблюдением и всеми другими точками в том же кластере/в следующем ближайшем кластере
- Коэффициент силуэта для наблюдения есть

$$s = \frac{b - a}{\max(a, b)}$$

- Для выборки коэффициент силуэта задается средним значением коэффициентов каждого наблюдения
- Значения в интервале  $[-1; 1]$ . Чем больше, тем лучше. Если коэффициент близок к 0, то это свидетельство в сторону того, что кластеры “накладываются” друг на друга

# Calinski-Harabasz Index (Variance Ratio Criterion)

- Индекс Калинского–Харабэса определяется как отношение между средней межкластерной дисперсией и средней дисперсией внутри кластеров

$$s = \frac{\text{tr}(B)}{k-1} / \frac{\text{tr}(W)}{n-k}$$

- Тут  $k$  – число кластеров, а матрицы  $B$  и  $W$  имеют вид

$$W = \sum_{q=1}^k \sum_{x \in C_q} (x - c_q)(x - c_q)^{\top}, \quad B = \sum_{q=1}^k n_q (c_q - c_X)(c_q - c_X)^{\top}$$

где  $C_q$  – наблюдения из кластера  $q$ ,  $c_q$  – центр кластера  $q$ ,  $c_X$  – центр всего набора данных  $X$ , а  $n_q$  – число наблюдений в кластере  $q$

- Значение индекса тем больше, чем разделеннее кластеры и чем более сгруппированы в кластерах наблюдения. Ну и применять для случая сферических/эллиптических кластеров

# Davies-Bouldin Index

- Индекс Дэвиса–Болдина оценивает среднее “сходство” между кластерами, где сходство есть мера, которая сравнивает расстояние между кластерами с размером самих кластеров
- Пусть  $s_i$  есть среднее расстояние между каждой точкой кластера  $i$  и центроида этого кластера, а  $d_{ij}$  есть расстояние между центроидами кластеров. Определим схожесть между кластерами следующим образом

$$R_{ij} = \frac{s_i + s_j}{d_{ij}}$$

- Тогда индекс имеет вид

$$DB = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \max_{i \neq j} R_{ij}$$

- Чем индекс меньше, тем лучше. Близок к 0 – отличное разделение. Недостаток тот же, что и у индекса Калинского–Харабэса

## Кратко о выборе числа кластеров

---

# Elbow method

- Вполне естественно полагать, что при хорошей кластеризации (в простом случае сферических/эллиптических кластеров) общее внутрикластерное расстояние

$$W(K) = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in K_k} \|x_j - \mu_i\|_2 \longrightarrow \min_K$$

должно быть как можно меньше

- В то же время, минимум метрики достигается тогда, когда каждое наблюдение формирует отдельный кластер
- Идея метода локтя проста: смотрим на график метрики для различного количества кластеров и выбираем то, после которого увеличение числа кластеров не дает существенного снижения значения метрики
- Формализуя, правило следующее:

$$D(k) = \frac{|W(K_k) - W(K_{k+1})|}{|W(K_{k-1}) - W(K_k)|} \longrightarrow \min_k$$



- Рассмотренные ранее коэффициенты Silhouette, Calinski-Harabasz Index, Davies-Bouldin Index также можно использовать для определения числа кластеров
- Всем желающим подробнее изучить эту тему предлагаю взглянуть на библиотеку “NbClust” в R [14]. В ней представлено более 30 различных коэффициентов

1. *Гирдюк Д.* Репозиторий с материалами для занятий. URL: [https://github.com/dmgirdyuk/PtW\\_ML\\_Unsupervised\\_learning](https://github.com/dmgirdyuk/PtW_ML_Unsupervised_learning).
2. **A Survey of Clustering Algorithms for Big Data: Taxonomy and Empirical Analysis.** / . A. Fahad [и др.] // IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing. 2014. Т. 2, № 3. С. 267—279.
3. *Tiruveedhula S., Rani C., Narayana V.* **A Survey on Clustering Techniques for Big Data Mining.** // Indian Journal of Science and Technology. 2016. Февр. Т. 9. С. 1—12. DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i3/75971.
4. *Benabdellah A. C., Benghabrit A., Bouhaddou I.* **A survey of clustering algorithms for an industrial context.** // Procedia Computer Science. 2019. Т. 148. С. 291—302. ISSN 1877-0509. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2019.01.022>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050919300225>.

5. *Comaniciu D., Meer P.* **Mean shift: a robust approach toward feature space analysis.** // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2002. Т. 24, № 5. С. 603—619.
6. **A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise.** /. М. Ester [и др.] // KDD. 1996.
7. **OPTICS: Ordering Points to Identify the Clustering Structure.** /. М. Ankerst [и др.] // Proceedings of the 1999 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. Philadelphia, Pennsylvania, USA : Association for Computing Machinery, 1999. С. 49—60. (SIGMOD '99). ISBN 1581130848. URL: <https://doi.org/10.1145/304182.304187>.

8. *Воронцов К.* Презентация по разделению смеси распределений из курса лекций Воронцова К.В. URL: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/a/a9/Voron-ML-BTC-EM-slides.pdf>.
9. *Luxburg U. V.* **A tutorial on spectral clustering.** // Statistics and Computing. 2007. Т. 17. С. 395—416.
10. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* **The elements of statistical learning: data mining, inference and prediction.** 2-е изд. Springer, 2009. URL: <http://www-stat.stanford.edu/~tibs/ElemStatLearn/>.
11. **Кластеризация в scikit-learn.** URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html>.

12. *Steinley D. Properties of the Hubert-Arabie adjusted Rand index.* // Psychol Methods. 2004. Т. 9, № 3. DOI: 10.1037/1082-989X.9.3.386.
13. *Vinh N. X., Epps J., Bailey J. Information Theoretic Measures for Clusterings Comparison: Variants, Properties, Normalization and Correction for Chance.* // Journal of Machine Learning Research. 2010. Т. 11, № 95. С. 2837—2854. URL: <http://jmlr.org/papers/v11/vinh10a.html>.
14. **NbClust: An R Package for Determining the Relevant Number of Clusters in a Data Set.** /. M. Charrad [и др.] // Journal of Statistical Software. 2014. Т. 61, № 6. С. 1—36. URL: <http://www.jstatsoft.org/v61/i06/>.