

# **Дискретная математика**

**ДЗ 19**

**Гольдберг Дмитрий Максимович**

**Группа БПМИ248**

## Задание 1

Какие значения может принимать  $\text{dnf}(f)$  для линейной функции от  $n$  переменных?

### Решение:

---

Если в многочлене Жегалкина 1 ненулевой моном, то в ДНФ будет 1 конъюнкт. Если в многочлене Жегалкина два ненулевых монома, то он имеет вид  $x_1 \oplus x_2$ . Его ДНФ имеет вид  $(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$ . Рассмотрим многочлен Жегалкина  $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$  для трёх ненулевых мономов. Зная ДНФ для  $x_1 \oplus x_2$ , можем вычислить ДНФ для трёх переменных. В нём будет 4 конъюнкта. Таким образом, применяя формулу для двух элементов, можем вычислять ДНФ для произвольного числа переменных. Заметим, что с добавлением ненулевой переменной размер ДНФ увеличивается в 2 раза, так как на каждом шаге в формуле для двух переменных вместо  $x_1$  подставляется ДНФ на предыдущем шаге. Тогда, раскрывая по дистрибутивности, количество конъюнктов увеличивается вдвое. Значит возможные значения от 1 до  $2^{n-1}$ .

### Ответ:

---

от 1 до  $2^{n-1}$

### Задание 3

Булева функция  $g$  от переменных  $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5$  задана формулой:

$$\bigvee_{i=1}^5 (x_i \wedge y_i).$$

Найдите количество ненулевых мономов в многочлене Жегалкина функции  $g$ .

### Решение:

---

Заметим, что мономы с одной переменной и константы не войдут в многочлен Жегалкина (так как при присваиваниях с лишь одной единицей функция 0, а многочлен Жегалкина 1). Рассмотрим мономы с двумя переменными. В многочлен Жегалкина войдут мономы с одинаковыми индексами у переменных  $(x_i y_i)$ , так как на присваиваниях, где  $x_i = y_i = 1$ , а остальные 0, многочлен Жегалкина дает 1 и функция дает 1. Уже есть 5 мономов в многочлене Жегалкина. Заметим, что в многочлен Жегалкина должны входить все возможные произведения мономов с двумя переменными с одинаковыми индексами, чтобы учесть случаи, когда четное число скобок одновременно дают 1 (иначе многочлен Жегалкина дает нули). Получаем  $2^5 - 1 = 31$  ненулевой моном.

### Ответ:

---

31

## Задание 4

В многочлене Жегалкина булевой функции от 2025 переменных есть только слагаемые степени не меньше 2024. Докажите, что такая функция принимает значение 1 не более чем на 2026 наборах аргументов.

### Решение:

---

По условию имеем, что могут быть слагаемые, где пропущена одна переменная, либо слагаемые, в котором все переменные. Заметим, что на присваиваниях, где есть хотя бы 2 нуля, все слагаемые обнуляются. Значит единицу могут дать только присваивания с одним нулем или вообще без нуля. Таких присваиваний ровно 2026. Примером функции, принимающей 2026 единиц, является сумма 2025 слагаемых, в каждом из которых пропущена разная переменная. На всех единицах она дает 1. Если есть один ноль, то все слагаемые зануляются, кроме одного.

### Ответ:

---

Ч.Т.Д

## Задание 2

Найдите  $\text{dnf}(x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_4)$ .

### Решение:

---

Заметим, что функция принимает 1 ровно на 10 присваиваниях (одна переменная 0, остальные 1, и две переменные ноль, остальные 1). Тогда верхняя оценка на ДНФ 10. ДНФ в этом случае может принимать вид

$$(x_1x_2\bar{x}_3) \vee (x_1x_3\bar{x}_2) \vee (x_2x_4\bar{x}_1) \vee (x_2x_3\bar{x}_4) \vee (x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4) \vee (x_3x_4\bar{x}_1\bar{x}_2) \vee (x_2x_4\bar{x}_1\bar{x}_3) \vee \\ \vee (x_2x_3\bar{x}_1\bar{x}_4) \vee (x_1x_4\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (x_1x_3\bar{x}_2\bar{x}_4)$$

Заметим, что 5ый конъюнкт можно убрать, так как он дает 1 только на присваивании 1 1 0 0, а на остальных 0. Но первый конъюнкт дает тоже 1 на этом присваивании. Из аналогичных соображений можно убрать 7ой, 8ой, 10ый конъюнкты. Получаем ДНФ

$$(x_1x_2\bar{x}_3) \vee (x_1x_3\bar{x}_2) \vee (x_2x_4\bar{x}_1) \vee (x_2x_3\bar{x}_4) \vee (x_3x_4\bar{x}_1\bar{x}_2) \vee (x_1x_4\bar{x}_2\bar{x}_3)$$

Здесь 6ый конъюнкт убрать нельзя (иначе на присваивании 1 0 0 1 будет 0), 5ый конъюнкт убрать нельзя (иначе на присваивании 0 0 1 1 будет 0), 4ый конъюнкт убрать нельзя (иначе на присваивании 1 1 1 0 будет 0), 3ий конъюнкт убрать нельзя (иначе на присваивании 0 1 1 1 будет 0), 2ой конъюнкт убрать нельзя (иначе на присваивании 1 0 1 1 будет 0), 1ый конъюнкт убрать нельзя (иначе на присваивании 1 1 0 1 будет 0). Итого должно быть 6 конъюнктов.

### Ответ:

---