Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 22

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Существует ли система векторов в $\mathbb{R}^3$ с матрицей Грама

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 6 & 4 \\ -3 & 4 & 11 \end{pmatrix}?$$

Если существует, то указать её.

Решение:

$G^T = G$, воспользуемся алгоритмом с семинара для поиска соответствующих векторов. Сначала приведем матрицу к диагональному виду, запоминая преобразования, матрица должна быть положительной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 5.5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 5.5 & 6.5 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) - \text{положительная}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3) = \left(\sqrt{2}e_1, \sqrt{5.5}e_2, e_3\right) \cdot C^{-1} = \left(\sqrt{2}e_1, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{\frac{11}{2}}e_2, \frac{-3\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{\frac{11}{2}}e_2 + e_3\right)$$

Ответ:

$(v_1, v_2, v_3) = \left(\sqrt{2}e_1, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{\frac{11}{2}}e_2, \frac{-3\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{\frac{11}{2}}e_2 + e_3\right)$

Задание 2

Существует ли система векторов в $\mathbb{R}^3$ с матрицей Грама

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}?$$

Если существует, то указать её.

Решение:

$G^T = G$, воспользуемся алгоритмом с семинара для поиска соответствующих векторов. Сначала приведем матрицу к диагональному виду, запоминая преобразования, матрица должна быть положительной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & -1.5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1.5 & 1.5 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) - \text{положительная}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3) = \left(\sqrt{2}e_1, \sqrt{1.5}e_2, 0\right) \cdot C^{-1} = \left(\sqrt{2}e_1, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}e_2, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \sqrt{\frac{3}{2}}e_2\right)$$

Ответ:

$(v_1, v_2, v_3) = \left(\sqrt{2}e_1, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}e_2, \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \sqrt{\frac{3}{2}}e_2\right)$

Задание 3

Существует ли система векторов в $\mathbb{R}^3$ с матрицей Грама

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}?$$

Если существует, то указать её.

Решение:

$G^T = G$, воспользуемся алгоритмом с семинара для поиска соответствующих векторов. Сначала приведем матрицу к диагональному виду, запоминая преобразования, матрица должна быть положительной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 2 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 2 & -\frac{8}{3} & 1 \end{array}\right) \text{— матрица неположительная} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{такой системы векторов не существует}$$

Ответ:

не существует

Задание 4

При помощи процесса ортогонализации построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов

$$(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7).$$

Решение:

$$f_1 = (1, 2, 2, -1)$$

$$f_2 = (1, 1, -5, 3) - \frac{((1, 1, -5, 3), (1, 2, 2, -1))}{((1, 2, 2, -1), (1, 2, 2, -1))} \cdot (1, 2, 2, -1) = (1, 1, -5, 3) + (1, 2, 2, -1) = (2, 3, -3, 2)$$

$$f_3 = (3, 2, 8, -7) - \frac{((3, 2, 8, -7), (1, 2, 2, -1))}{((1, 2, 2, -1), (1, 2, 2, -1))} \cdot (1, 2, 2, -1) -$$

$$-\frac{((3, 2, 8, -7), (2, 3, -3, 2))}{((2, 3, -3, 2), (2, 3, -3, 2))} \cdot (2, 3, -3, 2) = (3, 2, 8, -7) - (3, 6, 6, -3) + (2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, -2)$$

Ответ:

$f_1 = (1, 2, 2, -1)$
$f_2 = (2, 3, -3, 2)$
$f_3 = (2, -1, -1, -2)$

Задание 5

1. Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$ подпространства $U \leqslant \mathbb{R}^4$, натянутого на векторы
$$(1,0,2,1),(2,1,2,3),(0,1,-2,1).$$
2. Найти базис ортогонального дополнения $U^\perp$ подпространства $U \leqslant \mathbb{R}^4$, заданного уравнениями
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение:

1. Ортогональное дополнение задаётся ОСЛУ, найдём для него ФСР, это и будет искомый базис
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
2. Найдём ФСР для искомого ОСЛУ, затем для полученных векторов найдем базис ортогонального дополнения
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow U = \langle \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$
$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

1.
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задание 6

Найти базис ортогонального дополнения подпространства $U \leqslant \mathbb{R}^3$, заданного уравнением $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

Решение:

Действуем, аналогично прошлому пункту

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задание 7

1. Проверить, что набор векторов

$$(1, -2, 2, -3), (2, -3, 2, 4)$$

ортогонален и дополнить его до ортогонального базиса $\mathbb{R}^4$.

2. Проверить, что набор векторов

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

ортонормирован и дополнить его до ортонормированного базиса $\mathbb{R}^4$.

Решение:

1. ((1,-2,2,-3), (2,-3,2,4))=0 $\Rightarrow$ ортогонален. Найдём базис ортогонального дополнения и ортоганализуем его

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 17 \\ 0 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — ортогональное дополнение}$$

$$f_1 = (2, 2, 1, 0)$$

$$f_2 = (-17, -10, 0, 1) - \frac{((-17, -10, 0, 1), (2, 2, 1, 0))}{((2, 2, 1, 0), (2, 2, 1, 0))} \cdot (2, 2, 1, 0) = (-17, -10, 0, 1) + 6 \cdot (2, 2, 1, 0) = (-5, 2, 6, 1)$$

$$\Rightarrow \text{можно дополнить векторами } (2, 2, 1, 0), (-5, 2, 6, 1)$$

2. $\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = 0, \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = 1, \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = 1 \Rightarrow$

ортонормирован. Найдём базис ортогонального дополнения и ортоганализуем его.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ — ортнонормированное дополнение}$$

эти векторы ортогональны, значит ими можно дополнить.

Ответ:

1. можно дополнить векторами (2,2,1,0),(-5,2,6,1)
2. можно дополнить векторами $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Задание 8

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

При помощи процесса ортогонализации построить ортогональный базис подпространства $\langle 1,\, x,\, x^2,\, x^3 \rangle$.

Решение:

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 = x$$

$$f_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$f_4 = x^3 - \frac{(x^3, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^3, x)}{(x, x)} \cdot x - \frac{\left(x^3, x^2 - \frac{1}{3}\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

Ответ:

$\langle 1,\, x,\, x^2 - \frac{1}{3},\, x^3 - \frac{3}{5}x \rangle$