Математический анализ 2

ДЗ 2

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Вычислить интеграл:

$$\int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2) dy$$

Решение:

$$\int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2) dy = \int_0^2 \ln(1+y^2) dy \int_0^y x^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \ln(1+y^2) y^3 dy = \frac{1}{6}\int_0^2 \ln(1+t) t dt$$

$$\int \ln(1+t) t dt = \ln(1+t)\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t} dt = \ln(1+t)\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int t - 1 + \frac{1}{t+1} dt =$$

$$= \ln(1+t)\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t) + C = \ln(1+y^2)\frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C$$

$$\frac{1}{6}\int_0^2 \ln(1+t) t dt = \frac{5}{4}\ln 5 - \frac{1}{3}$$

Ответ:

$$\frac{5}{4}\ln 5 - \frac{1}{3}$$

Задание 2

Вычислить интеграл $\iint_D x^2y\ dxdy$, где D – замкнутый треугольник с вершинами $(0,0),(2,1),(1,-2)$.

Решение:

$$\iint_D x^2y\ dxdy = \int_0^1 x^2dx\int_{-2x}^{\frac{1}{2}x} ydy + \int_1^2 x^2dx\int_{3x-5}^{\frac{1}{2}x} ydy = \int_0^1 x^2\left(\frac{x^2}{8} - 2x^2\right)dx + \int_1^2 x^2\left(\frac{x^2}{8} - \frac{(3x-5)^2}{2}\right) =$$
$$= -\frac{3}{8} - \frac{1}{24} = -\frac{5}{12}$$

Ответ:

$$-\frac{5}{12}$$

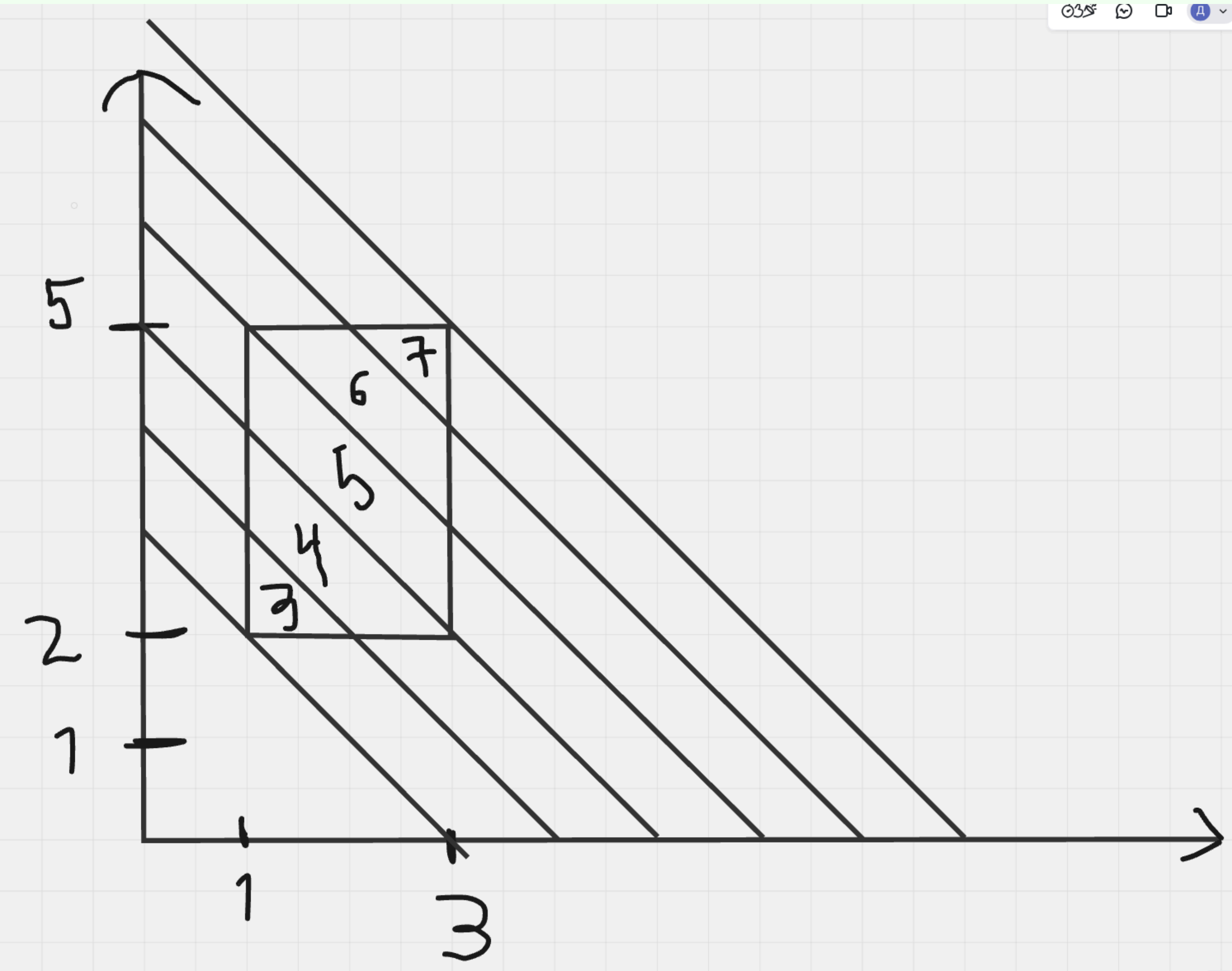
Задание 3

Пусть $f(x) = k$, где $k = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant x\}$. Вычислите интеграл:

$$\iint_{\substack{1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2 \leqslant y \leqslant 5}} f(x+y)\,dxdy$$

Решение:

Разобъём область интегрирования с помощью прямых $x + y = c$, внутри областей напишем значение функции в этой области. Тогда искомый интеграл есть сумма по всем таким областям, где каждое слагаемое есть произведение площади области на значение функции в ней.



$$\iint_{\substack{1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2 \leqslant y \leqslant 5}} f(x+y)\,dxdy = \frac{1}{2} \cdot 3 + 4 \cdot \frac{3}{2} + 5 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{3}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

Ответ:

30

Задание 4

Приведите тройной интеграл $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ к одному из повторных, где $D = \{(x,y,z) \mid y^2 \leqslant z \leqslant 4, x^2+y^2 \leqslant 16\}$

Решение:

$$\begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 4 \\ -\sqrt{z} \leqslant y \leqslant \sqrt{z} \\ -\sqrt{16-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{16-y^2} \end{cases}$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_0^4 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y,z)dx$$

Ответ:

$$\int_0^4 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y,z)dx$$

Задание 5

Используя любой порядок интегрирования, перепишите и вычислите интеграл

$$\iiint_D (xy + z^2) dx dy dz,$$

если $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 3\}$.

Решение:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^3 xy + z^2 dz = \int_0^2 dx \int_0^1 (3xy + 9) dy = \int_0^2 \left(9 + \frac{3}{2}x\right) dx = 18 + 3 = 21$$

Ответ:

21

Задание 6

Вычислите интеграл

$$\int_0^2 dz \int_0^{z^2} dy \int_0^{y-z} (2x-y)dx.$$

Решение:

$$\int_0^2 dz \int_0^{z^2} dy \int_0^{y-z} (2x-y)dx = \int_0^2 dz \int_0^{z^2} ((y-z)^2 - y(y-z))dy = \int_0^2 dz \int_0^{z^2} (z^2 - zy)dy =$$

$$\int_0^2 \left(z^4 - \frac{z^5}{2}\right)dz = \frac{16}{15}$$

Ответ:

$$\frac{16}{15}$$