Теория вероятностей

ДЗ 4

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Покажите, что если $A_n \in F$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где F — некоторая σ-алгебра, то $\limsup A_n, \liminf A_n \in F$.

Решение:

Если $\limsup A_n = \emptyset$, то утверждение тривиально. Пусть $\limsup A_n \neq \emptyset$. Тогда рассмотрим $B_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \Rightarrow B_n \in F$(по определению σ-алгебры). Тогда $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ также лежит в F(по предложению 2.1.7). Заметим, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \limsup A_n$. Действительно, $w \in B_n \Rightarrow \exists k \geqslant n : w \in A_k$. $w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geqslant n : w \in A_k$, что соответствует определению $\limsup A_n$.
Рассмотрим $C_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j . C_n \in F$(предложение 2.1.7). Тогда $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in F$. Заметим, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \liminf A_n$.

Ответ:

ч.т.д

Задание 2

Найдите $\liminf A_n$ и $\limsup A_n$ для $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$.

Решение:

Заметим, что для каждого элемента $w \in \limsup A_n$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $w \in A_k$ и $w \notin A_l \ \forall l < k$. Пусть $T -$ множество всех таких k. Пусть $t = \min\{T\}$. Тогда $\limsup A_n = \bigcup_{j=t}^{\infty} A_j$. Заметим, что в данном случае для $\liminf A_n$ верна та же конструкция, поэтому оба множества равны.

Ответ:

описано в решении)

Задание 3

Покажите, что если A алгебра и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A$ для всяких $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то A является σ-алгеброй.

Решение:

Возьмём произвольную последовательность множеств $B_1, B_2, ... \in A$. Достаточно показать, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in A$. Пусть $C_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i, C_1 = B_1$. $\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \in A$ по определению алгебры. Тогда $B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \in A$ как пересечение B_n и дополнения к $\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$. Множества C_i попарно не пересекаются по построению и $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in A$ по условию $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in A$. Остальные свойства наследуются от свойств алгебры, значит A ещё и σ-алгебра. Приплыли.

Ответ:

Показали

Задание 4

Покажите, что найдётся такой счётный набор $S \subset 2^{\mathbb{R}}$, который породит $B(\mathbb{R}) = \sigma(S)$.

Решение:

В качестве S можно взять множество интервалов с рациональными концами, оно счётное:

$$S = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

Так как каждый элемент из S является открытым множеством, то $\sigma(S) \subseteq B(\mathbb{R})$. Покажем включение в другую сторону. Пусть A – открытое множество. Для произвольного $x \in A$ верно, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Так как множество рациональных чисел всюду плотно, то внутри этого интервала можно выбрать $a < b \in \mathbb{Q} : x \in (a, b) \subset A$. Получаем, что $A = \bigcup\{(a, b) \in S : (a, b) \subset A\}$. Но множество интервал с рациональными концами является подмножеством S, значит A мы представили как счётное объединение элементов из S, значит $A \subseteq \sigma(S)$. Произвольное открытое множество лежит в $\sigma(S) \Rightarrow B(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(S)$.

Ответ:

ч.т.д

Задание 5

Пусть $S = \{(a, b] \cup [-b, -a) \mid a < b\}$. Покажите, что $\sigma(S) < B(\mathbb{R})$.

Решение:

Рассмотрим $s \in \sigma(S)$. $s \in B(\mathbb{R})$, так как любой октрытый интервал лежит в $B(\mathbb{R}) \Rightarrow \sigma(S) \leqslant B(\mathbb{R})$.