Линейная алгебра и геометрия

ИДЗ 6

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов с действительными коэффициентами от переменной x степени не выше 2. Линейное отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ в базисе $(1 + x + x^2, 4 + 3x + x^2, 3 + 2x - 2x^2)$ пространства V и базисе $((4, -1), (1, -1))$ пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Найдите $\varphi(10 + 7x - x^2)$.

Решение:

Пусть $v = 10 + 7x - x^2$. Найдем разложение v по базису V

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Далее найдем $\varphi(v)$ в координатах

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Тогда $\varphi(10 + 7x - x^2)$:

$$18 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 84 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Задание 2

(а) Докажите, что существует единственное линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, переводящее векторы

$$a_1 = (-4,-2,-1,3,3), a_2 = (1,0,0,-3,1), a_3 = (2,-1,1,1,-1), a_4 = (3,0,-4,4,2), a_5 = (-4,-4,1,-2,-1)$$

соответственно в векторы

$$b_1 = (-12,36,-30), b_2 = (32,-26,45), b_3 = (0,6,-3), b_4 = (-31,40,-51), b_5 = (9,-30,24).$$

(б) Найдите базис ядра и базис образа этого линейного отображения. Ответ запишите в стандартном базисе.

Решение:

(а) Рассмотрим матричное уравнение

$$A \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 32 & 0 & -31 & 9 \\ 36 & -26 & 6 & 40 & -30 \\ -30 & 45 & -3 & -51 & 24 \end{pmatrix}, \text{ где } A - \text{ матрица линейного отображения}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) \neq 0 \Rightarrow \text{ решение единственное}$$

$$\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} - \text{ единственное решение, значит } \exists! \text{ линейное отображение}$$

(б) Найдем базис ядра, для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & -7 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 10 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{базис } \operatorname{Ker} \varphi = (-3e_1 - e_2 + e_3, -e_1 - 5e_2 + e_4, -4e_1 - 2e_2 + e_5)$$

Дополним этот базис до базиса $\mathbb{R}^5$, образы дополняющих векторов будут базисом образа

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{5}{18} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ можно дополнить векторами } e_4, e_5$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (7e_1 + 10e_2 - 12e_3, 8e_1 + 4e_2 + 6e_3) - \text{ базис образа}$$

Ответ:

(а) ч.т.д

(б) $(-3e_1 - e_2 + e_3, -e_1 - 5e_2 + e_4, -4e_1 - 2e_2 + e_5);\ (7e_1 + 10e_2 - 12e_3, 8e_1 + 4e_2 + 6e_3)$

Задание 3

Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ в паре стандартных базисов имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -13 & -4 & 3 & -9 & -14 \\ 4 & 3 & -3 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 25 & 0 & 3 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

Постройте какое-нибудь линейное отображение $\psi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, для которого $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$ и $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \psi$, и запишите его матрицу в паре стандартных базисов.

Решение:

Найдем базис ядра и образа φ.

$$\begin{pmatrix} -13 & -4 & 3 & -9 & -14 \\ 4 & 3 & -3 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 25 & 0 & 3 & 19 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 83 & 139 \\ 0 & 0 & 1 & 73 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 8 \\ -83 \\ -73 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ -139 \\ -120 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{базис ядра}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -83 & -73 & 1 & 0 \\ 14 & -139 & -120 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{187}{50} & -\frac{139}{50} & \frac{83}{50} \\ 0 & 1 & \frac{31}{25} & -\frac{7}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можно дополнить векторами } e_3, e_4, e_5 \text{ до } \mathbb{R}^5$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} - \text{базис образа}$$

Полученный базис образа φ есть базис ядра ψ, дополним его до базиса $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -1 & 3 \\ -9 & -2 & 5 & 2 & 19 \\ -14 & 1 & -2 & 5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можно дополнить векторами } e_4, e_5$$

Образы дополняющих векторов есть базис образа ψ, то есть базисные векторы ядра φ. запишем это соотношение

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ -83 & -139 \\ -73 & -120 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{где } A - \text{ матрица линейного отображения}$$

$$\Rightarrow \text{ как } A \text{ можно взять матрицу } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -83 & -139 \\ 0 & 0 & 0 & -73 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

искомое линейное отображение задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -83 & -139 \\ 0 & 0 & 0 & -73 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 4

Линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ имеет в базисах $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ и $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 36 & 6 & 20 \\ -22 & -6 & 30 & -13 & -5 \\ -22 & 19 & -47 & -12 & 12 \\ -8 & -4 & 30 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдите базисы пространств $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^4$, в которых матрица отображения φ имеет диагональный вид D с единицами и нулями на диагонали. Выпишите эту матрицу и соответствующее матричное разложение $A = C_1 D C_2^{-1}$, где C_1, C_2 — невырожденные матрицы.

Решение:

Воспользуемся алгоритмом с семинара. Сначала найдем базис ядра и дополним его до базиса $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} -12 & 10 & 36 & 6 & 20 \\ -22 & -6 & 30 & -13 & -5 \\ -22 & 19 & -47 & -12 & 12 \\ -8 & -4 & 30 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{73}{106} & \frac{17}{106} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{36}{53} & \frac{73}{53} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{53} & \frac{12}{53} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{73}{106} \\ -\frac{36}{53} \\ -\frac{11}{53} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{17}{106} \\ -\frac{73}{53} \\ -\frac{12}{53} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — базис ядра}$$

$$\Rightarrow \text{ можно дополнить векторами } e_3, e_4, e_5$$

Базисом образа являются векторы

$$\begin{pmatrix} 36 \\ 30 \\ -47 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дополним базис образа до базиса $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 36 & 30 & -47 & 30 \\ 6 & -13 & -12 & -2 \\ 20 & -5 & 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{35}{157} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{68}{157} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{30}{157} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ можно дополнить вектором } e_4$$

Тогда в паре базисов

$$\begin{pmatrix} -\frac{73}{106} \\ -\frac{36}{53} \\ -\frac{11}{53} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{17}{106} \\ -\frac{73}{53} \\ -\frac{12}{53} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 36 \\ 30 \\ -47 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица линейного отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C_1 является матрицей перехода

$$\Rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 20 & 0 \\ 30 & -13 & -5 & 0 \\ -47 & -12 & 12 & 0 \\ 30 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C_2 является матрицей перехода 1 $\Rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{73}{106} & -\frac{17}{106} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{36}{53} & -\frac{73}{53} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{53} & -\frac{12}{53} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 20 & 0 \\ 30 & -13 & -5 & 0 \\ -47 & -12 & 12 & 0 \\ 30 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{73}{106} & -\frac{17}{106} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{36}{53} & -\frac{73}{53} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{53} & -\frac{12}{53} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ — пространство многочленов степени не выше 2 от переменной x с действительными коэффицентами. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ — базис пространства V^*, двойственный к базису

$$1 + 2x + 4x^2, 4 - 9x - 13x^2, 2 + 2x - 27x^2$$

пространства V, а (f_1, f_2, f_3) — базис пространства V, для которого двойственным является базис (ρ_1, ρ_2, ρ_3) пространства V^*, где

$$\rho_1(f) = f(1), \rho_2(f) = f'(-1), \rho_3(f) = \frac{3}{2}\int_0^2 f(x)dx.$$

Рассмотрим линейную функцию $\alpha \in V^*$, имеющую в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ координаты $(2, -1, 4)$, и многочлен $h \in V$, имеющий в базисе (f_1, f_2, f_3) координаты $(2, -1, 4)$. Найдите значение $\alpha(h)$.

Решение:

Рассмотрим произвольный многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$. Посмотрим, как на него действуют ρ_i

$$\rho_1(f(x)) = a + b + c$$
$$\rho_2(f(x)) = -2a + b$$
$$\rho_3(f(x)) = 4a + 3b + 3c$$

Далее составим СЛУ, чтобы найти f_1, f_2, f_3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -3 \end{array}\right)$$
$$\Rightarrow (f_1, f_2, f_3) = \left(-3x^2 - 6x + 10, x - 1, x^2 + 2x - 3\right)$$

Разложение h по базису (f_1, f_2, f_3) имеет вид

$$h = -2x^2 - 5x + 9$$

Найдем разложение h в базисе $(1 + 2x + 4x^2, 4 - 9x - 13x^2, 2 + 2x - 27x^2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 9 \\ 2 & -9 & 2 & -5 \\ 4 & -13 & -27 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow h = \frac{653}{179}e_1 + \frac{243}{179}e_2 - \frac{7}{179}e_3, (e_1, e_2, e_3) = \left(1 + 2x + 4x^2, 4 - 9x - 13x^2, 2 + 2x - 27x^2\right)$$

$$\alpha(h) = 2\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h) + 4\varepsilon_3(h) = 2 \cdot \frac{653}{179} - \frac{243}{179} - 4 \cdot \frac{7}{179} = \frac{1035}{179}$$

Ответ:

1035/179