Теория чисел

ДЗ 2

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Докажите равенства

а) $(a, b) = (a + b, [a, b])$;

б) $\frac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2} = \frac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$

Решение:

1. $a = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}; b = p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n}; a + b = p_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot p_n^{\gamma_n}$. Н.У.О, пусть $\alpha_n \geqslant \beta_n \geqslant \gamma_n$

$$(a, b) = (a + b, b) \Rightarrow$$

$$\text{для произвольного простого множителя слева и справа в исходном выражени имеем соотношение}$$

$$p_n^{\min(\gamma_n, \beta_n)} = p_n^{\min(\gamma_n,\, \max(\alpha_n, \beta_n))}$$

$$p_n^{\gamma_n} = p_n^{\min(\gamma_n, \alpha_n)}$$

$$p_n^{\gamma_n} = p_n^{\gamma_n} - \text{ верно} \Rightarrow \text{ ч.т.д}$$

2. $a = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}; b = p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n}; c = p_1^{\gamma_1} \cdot ... \cdot p_n^{\gamma_n}$. Н.У.О, пусть $\alpha_n \geqslant \beta_n \geqslant \gamma_n$

Для произвольного простого множителя слева и справа в исходном выражени имеем соотношение

$$p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n) + \min(\beta_n,\gamma_n) + \min(\gamma_n,\alpha_n) - \min(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)^2} = p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n) + \max(\beta_n,\gamma_n) + \max(\gamma_n,\alpha_n) - \max(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n)^2}$$

$$p_n^{\beta_n + \gamma_n + \gamma_n - 2\gamma_n} = p_n^{\alpha_n + \beta_n + \alpha_n - 2\alpha_n}$$

$$p_n^{\beta_n} = p_n^{\beta_n} - \text{ верно} \Rightarrow \text{ ч.т.д}$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 2

Вычислите, каким количеством нулей оканчивается число 1000!.

Решение:

Нам нужно узнать, с какой степенью в это число входит 10. $10 = 5 \cdot 2 \Rightarrow$ найдем с какой степенью входит 5 и 2

$$\alpha_5 = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{25} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{125} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{625} \rfloor = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

$$\alpha_2 = \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{4} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{8} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{16} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{32} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{64} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{128} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{256} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{512} \rfloor = 500 + 250 + 125 + ... > 249$$

$$\min(\alpha_5, \alpha_2) = 249 \Rightarrow \text{ входит 249 десяток, значит оканчивается 249 нулями.}$$

Ответ:

249

Задание 3

Для $n \in \mathbb{N}$ будем обозначать $\sigma(n)$ сумму натуральных делителей числа n. Докажите, что если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}$, то

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}.$$

Решение:

Заметим, что $\sigma(p^x) = 1 + p + p^2 + ... + p^x = \frac{p^{x+1}-1}{x-1}$.

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot ... \cdot \sigma(p_s^{\alpha_s}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot ... \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1} \Rightarrow \text{ ч.т.д}$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Вычислите $\tau(\sigma(108))$.

Решение:

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$
$$\sigma(108) = \sigma(2^2) \cdot \sigma(3^3) = 7 * 40 = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$\tau(280) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$$

Ответ:

$\tau(\sigma(108)) = 16$

Задание 5

Решите в целых числах уравнение

а) $19x + 88y = 2$;

б) $102x + 165y = 9$

Решение:

1. Воспользуемся алгоритмом с семинара. Приведем матрицу к нужному виду

$$\begin{pmatrix} 19 & 88 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 14 & -9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 14 & -37 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 88 & -37 \\ -19 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -74 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 88 \\ -19 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}$$

2. Воспользуемся алгоритмом с семинара. Приведем матрицу к нужному виду

$$\begin{pmatrix} 102 & 165 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 102 & 63 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 39 & 63 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 39 & 24 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 5 & -8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 13 & -21 \\ -8 & 13 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 55 & -21 \\ -34 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ 39 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 55 \\ -34 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -74 \\ 16 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 88 \\ -19 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63 \\ 39 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 55 \\ -34 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{Z}$$