Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 19

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Выяснить, какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями в пространстве $M_n(F)$:

1. $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$;
2. $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB - BA)$;
3. $f(A, B) = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$;
4. $f(A, B) = \mathrm{tr}(A^T \cdot B)$.

Решение:

1. $f(x_1 + x_2, B) = \mathrm{tr}((x_1 + x_2)B) = \mathrm{tr}(x_1 B + x_2 B) = \mathrm{tr}(x_1 B) + \mathrm{tr}(x_2 B) = f(x_1, B) + f(x_2, B)$

   $f(A, y_1 + y_2) = \mathrm{tr}(A(y_1 + y_2)) = \mathrm{tr}(Ay_1 + Ay_2) = \mathrm{tr}(Ay_1) + \mathrm{tr}(Ay_2) = f(A, y_1) + f(A, y_2)$

   $\Rightarrow$ является билинейной

2. $f(x_1 + x_2, B) = \mathrm{tr}((x_1 + x_2)B - B(x_1 + x_2)) = \mathrm{tr}(x_1 B + x_2 B - Bx_1 - Bx_2) = \mathrm{tr}(x_1 B - Bx_1 + x_2 B - Bx_2) = \mathrm{tr}(x_1 B - Bx_1) + \mathrm{tr}(x_2 B - Bx_2) = f(x_1, B) + f(x_2, B)$

   $f(A, y_1 + y_2) = \mathrm{tr}(A(y_1 + y_2) - (y_1 + y_2)A) = \mathrm{tr}(Ay_1 + Ay_2 - y_1 A - y_2 A) = \mathrm{tr}(Ay_1 - y_1 A) + \mathrm{tr}(Ay_2 - y_2 A) = f(A, y_1) + f(A, y_2)$

   $\Rightarrow$ является билинейной

3. $f(x_1 + x_2, B) = \mathrm{tr}((x_1 + x_2)B^T) = \mathrm{tr}(x_1 B^T + x_2 B^T) = \mathrm{tr}(x_1 B^T) + \mathrm{tr}(x_2 B^T) = f(x_1, B) + f(x_2, B)$

   $f(A, y_1 + y_2) = \mathrm{tr}\Big(A(y_1 + y_2)^T\Big) = \mathrm{tr}(Ay_1^T + Ay_2^T) = \mathrm{tr}(Ay_1^T) + \mathrm{tr}(Ay_2^T) = f(A, y_1) + f(A, y_2)$

   $\Rightarrow$ является билинейной

4. $f(x_1 + x_2, B) = \mathrm{tr}\Big((x_1 + x_2)^T B\Big) = \mathrm{tr}(x_1^T B + x_2^T B) = \mathrm{tr}(x_1^T B) + \mathrm{tr}(x_2^T B) = f(x_1, B) + f(x_2, B)$

   $f(A, y_1 + y_2) = \mathrm{tr}(A^T(y_1 + y_2)) = \mathrm{tr}(A^T y_1 + A^T y_2) = \mathrm{tr}(A^T y_1) + \mathrm{tr}(A^T y_2) = f(A, y_1) + f(A, y_2)$

   $\Rightarrow$ является билинейной

Ответ:

все являются

Задание 2

Выяснить, какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями в пространстве $M_n(F)$:

1. $f(A, B) = \det(AB)$;
2. $f(A, B) = \operatorname{tr}(A + B)$;
3. $f(A, B)$ – коэффициент на месте (i, j) матрицы AB.

Решение:

1. $f(x_1 + x_2, B) = \det((x_1 + x_2)B) = \det(x_1 B + x_2 B)$ – опрежедитель не линеен, значит f не является биленейной функцей
2. $f(x_1 + x_2, B) = \operatorname{tr}((x_1 + x_2) + B) \neq \operatorname{tr}(x_1 + B) + \operatorname{tr}(x_2 + B) \Rightarrow f$ не является биленейной функцей

3.$f(x_1 + x_2, B)$ – коэффициент на месте (i, j) матрицы $(x_1 + x_2)B = x_1 B + x_2 B$, а это коэффициент на месте (i, j) матрицы $x_1 B$ прибавить коэффициент на месте (i, j) матрицы $x_2 B$. Аналогично со вторым аргументом, значит f биленейная функция.

Ответ:

нет,нет,да

Задание 3

Для каждой из биленейных форм $\beta_1(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$ и $\beta_2(A, B) = \operatorname{tr}(A^T B)$ на пространстве $M_2(\mathbb{R})$ найти ее матрицу в базисе из матричных единиц.

Решение:

1. $B_{ij} = \beta_1\left(e_i, e_j\right) = \operatorname{tr}\left(e_i \cdot e_j\right) \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $B_{ij} = \beta_2\left(e_i, e_j\right) = \operatorname{tr}\left(e_i^T \cdot e_j\right) \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

1.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 4

1. Найти матрицу биленейной функции f в новом базисе e', если заданы её матрица в старом базисе e и формулы перехода:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{cases} {e'}_1 = e_1 - e_2 \\ {e'}_2 = e_1 + e_3 \\ {e'}_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

2. Пусть биленейная функция f задана задана в некотором базисе матрицей F. Найти $f(x, y)$, если

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{cases} x = (1, 0, 3) \\ y = (-1, 2, -4) \end{cases}$$

Решение:

1. Найдем матрицу перехода между базисами

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B' = C^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot F \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43$$

Ответ:

1.

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

2. -43

Задание 5

Билинейная форма β на трёхмерном пространстве V над $\mathbb{R}$ в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти базис пространства V, в котором форма β имеет диагональную матрицу, и выписать эту матрицу.

Решение:

Применим симметричного Гаусса, справа запишем единичную матрицу, в ней будет транспонированная матрица перехода

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \text{ искомая диагональная матрица}$$

$$(e_1, -2e_1 + e_2, e_1 - e_2 + e_3) - \text{ искомый базис}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ (e_1, -2e_1 + e_2, e_1 - e_2 + e_3)$$

Задание 6

Тот же вопрос для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} - \text{ искомая матрица}$$

$$\left(e_1 + e_2, -\frac{3}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2, -\frac{1}{5}e_1 - \frac{7}{5}e_2 + e_3\right) - \text{ искомый базис}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}; \left(e_1 + e_2, -\frac{3}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2, -\frac{1}{5}e_1 - \frac{7}{5}e_2 + e_3\right)$$

Задание 7

Тот же вопрос для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \text{ искомая матрица}$$

$$\left(e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, -e_1 + e_2 + e_3\right) - \text{ искомый базис}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \left(e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, -e_1 + e_2 + e_3\right)$$

Задание 8

Модифицировать симметричный алгоритм Гаусса так, чтобы он мог приводить заданную целочисленную симметричную матрицу к диагональному виду не выходя из области целых чисел (то есть элементарные преобразования первого и третьего типа могут быть только с целыми коэффициентами).

Решение:

Заметим, что с помощью обычного алгоритма Гаусса можно привести матрицу к ступенчатому виду, не выходя из целочисленной арифметики(решали соответствующую задачу на 3 семинаре). Рассмотрим расширенную матрицу, в которой слева исходная матрица, справа единичная. Целочисленным Гауссом приведем её к ступенчатому виду. Справа будет матрица U — матрица элементарных преобразований. Тогда искомый диагональный вид можно получить, домножив исходную матрицу слева на U и справа на U^T.

Ответ:

done