Математический анализ 2

ДЗ 9

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на множестве D

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}, D = (-1, 1)$$

Решение:

Заметим, что в точке $x = 1$ ряд расходится, значит он не сходится равномерно на D

Ответ:

Нет

Задание 2

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на множестве D

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(x)\cos(nx)}{\ln(n+x^2)}, D = \mathbb{R}$$

Решение:

$$a_n(x) = \sin(x)\cos(nx)$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(x)\cos(nx)\right| = |\sin(x)|\left|\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)\right| \leqslant |\sin(x)|\frac{1}{\left|\sin(\frac{x}{2})\right|} \leqslant 2$$

$$\frac{1}{\ln(n+x^2)} \text{ монотонно убывает по } n \text{ для любого } x$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{D}\left|\frac{1}{\ln(n+x^2)}\right| = 0 \Rightarrow \text{равномерно сходится к нулю}$$

$$\Rightarrow \text{ряд равномерно сходится по признаку Дирихле}$$

Ответ:

Да

Задание 3

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на множестве D

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1^n)}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}, D = [0, +\infty)$$

Решение:

$$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{x}} > 0$$

a_n монотонно убывает

$$\lim_{n \to \infty} \sup_D a_n(x) = 0$$

$\Rightarrow$ ряд равномерно сходится по признаку Лейбница.

Ответ:

Да

Задание 4

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на множестве D

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2}, D = \mathbb{R}$$

Решение:

Определение равномерной сходимости функционального ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N : \forall x \in D |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что для любого n я могу выбирать $x = n$, при котором соответствующий числовой ряд не сходится, значит исходный функциональный ряд не сходится по определению.

Ответ:

Нет

Задание 5

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\frac{1}{(-2)^{n+1}}$$

Решение:

$$|x| < 1, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\frac{1}{(-2)^{n+1}} = \frac{4}{27}$$

Ответ:

$$\frac{4}{27}$$

Задание 6

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

Решение:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k, S = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$|x| < 1, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{3}{2}$$

Ответ:

$$\frac{3}{2}$$