Теория вероятностей

ДЗ 3

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 2

Пусть F конечное семейство двочных кодов конечной длины. Никакой из кодов данного семейства не является префиксом другого. Пусть N_i — число кодов длины i. Докажите неравенство Крафта:

$$\sum_i \frac{N_i}{2^i} \leqslant 1.$$

Решение:

Заметим, что эти коды образуют дерево Хаффмана. Дополним дерево до сбалансированного. Дальше выберем произвольный лист. Так как дерево сбалансировано, то он находится на глубине, равной глубине всего дерева. Пусть глубина дерева n. Тогда вероятность того, что предок этого листа является кодовым словом, равна $\frac{N_{n-1}}{2^{n-1}}$. Так как никакой из кодов не является префиксом другого, то на пути от листа до корня может быть максимум одно кодовое слово, то есть события вида «предок на глубине $k < n$ является кодовым словом» и «предок на глубине $l < k$ является кодовым словом» взаимоисключающие. Тогда сумма $\sum\limits_i \frac{N_i}{2^i}$ является вероятностью того, что среди предков выбранного листа найдется кодовое слово.

Ответ:

ч. т. д

Задание 3

Зафиксируем $n \geqslant 4$ и рассмотрим семейство n-элементных подмножеств некоторого множества $F \subset \binom{V}{n}$. Зная, что $|F| < \dfrac{4^{n-1}}{3^n}$ докажите, что можно покрасить элементы множества V в четыре цвета так, что каждое множество из семейства F будет содержать элементы всех четырёх цветов.

Решение:

Раскрасим равновероятно каждый элемент множества V. Тогда вероятность того, что в произвольном множестве $A \subset F$ нет хотя бы одного цвета можно оценить как

$$P \leqslant 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(4 цвета, вероятность для каждого элемента быть не фиксированным цветом)

Тогда верояность того, что существует множество A, в котором нет хотя бы одного цвета, равна

$$|F| \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{4^{n-1}}{3^n} \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1$$

Тогда вероятность дополнения к этому событию ненулевая, то есть, верояность события, что любое множество $A \subset F$ содержит все 4 цвета ненулевая.

Ответ:

ч.т.д.

Задание 1

В матрице $n \times n$ элементами являются числа $1, ..., n$. Причем каждое из них встречается ровно n раз. Докажите, что существует строка либо столбец, в котором не менее $\sqrt{n}$ различных чисел.

Решение: