Математический анализ

ДЗ 15

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Возможно ли доопределить следующие функции в точке (0, 0) до непрерывной функции:

$$\text{а) } f(x,y) = x^2 \ln\left(x^2 + y^2\right); \text{ б) } f(x,y) = \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Решение:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 \ln\left(x^2+y^2\right) = \lim\limits_{r\to 0} r^2\cos^2\varphi \cdot 2\ln r = 0 \Rightarrow$ можно доопределить нулем

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y) = \dfrac{x}{|x|} = 1$;-1

$\lim\limits_{\substack{x=y\\ y\to 0}} f(x,y) = \dfrac{y^2}{|y|} = 0 \Rightarrow$ общего предела не существует, значит доопределить нельзя

Ответ:

да, нет

Задание 2

Найдтите матрицы Якоби отображений

$$\text{а) } x = u\cos v, y = u\sin v; \text{ б) } x = uvw, y = uv - uvw, z = v - uv$$

Решение:

а) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos v$; $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = -u\sin v$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \sin v$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} = u\cos v \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix} - \text{матрица Якоби}$$

б) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = vw$; $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = uw$; $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w} = uv$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = v - vw$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} = u - uw$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w} = -uv$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = -v$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}v} = 1 - u$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} vw & uw & uv \\ v - vw & u - uw & -uv \\ -v & 1 - u & 0 \end{pmatrix} - \text{матрица Якоби}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} vw & uw & uv \\ v - vw & u - uw & -uv \\ -v & 1 - u & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Найдите все частные производные 1-го и 2-го порядка у функций

$$\text{а) } f(x,y)=\ln(x+y^2);\ \text{б) } f(x,y,z)=\sin(xy+z^2)$$

Решение:

а) ${f'}_x=\frac{1}{x+y^2}; {f'}_y=\frac{2y}{x+y^2}; {f''}_{xx}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}; {f''}_{xy}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}; {f''}_{yy}=\frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2}$. По теореме Юнга оставшиеся смешанная производная уже посчитана.

б) ${f'}_x=\cos(xy+z^2)y; {f'}_y=\cos(xy+z^2)x; {f'}_z=2z\cdot\cos(xy+z^2); {f''}_{xx}=-y^2\cdot\sin(xy+z^2); {f''}_{xy}=-xy\cdot\sin(xy+z^2)+\cos(xy+z^2); {f''}_{xz}=-2yz\cdot\sin(xy+z^2); {f''}_{yy}=-x^2\cdot\sin(xy+z^2); {f''}_{yz}=-2xz\cdot\sin(xy+z^2); {f''}_{zz}=2\cos(xy+z^2)-4z^2\cdot\sin(xy+z^2)$. По теореме Юнга оставшиеся смешанные производные уже посчитаны.

Задание 4

Найдите

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \text{если } f(x, y) = x\ln(xy)$$

Решение:

$$f'_y = \frac{x}{y}; f''_{yx} = \frac{1}{y}; f'''_{yxx} = 0$$

Ответ:

0