Дискретная математика

ДЗ 20

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Является ли полной система функций $\{0,\ 1,\ \wedge,\ \mathrm{EV}\}$, где $\mathrm{EV}(x, y, z) = 0$ тогда и только тогда, когда количество единиц среди x, y, z чётно?

Решение:

Воспользуемся критерием Поста. $1 \notin T_0, 0 \notin T_1, \mathrm{EV} \notin M$(так как $\mathrm{EV}(1,0,0) = 1, \mathrm{EV}(1,1,0) = 0, (1,0,0) < (1,1,0)), \wedge \notin S$(так как $\neg 0 \wedge \neg 1 \neq \neg(0 \wedge 1)), \wedge \notin L$(так как многочлен Жегалкина для конъюнкции имеет вид xy, а это не линейная функция) $\Rightarrow$ по критерию Поста система функций является полной.

Ответ:

да

Задание 2

При каких $n \geqslant 2$ является полной система функций, состоящая из одной функции

$$1 \oplus \bigoplus_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i \wedge x_j?$$

Решение:

Заметим, что в выражении $1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} n - i = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} + 1$ слагаемых и n переменных. Функция не сохраняет ноль. Функция не будет сохранять единицу, если в ней чётное число слагаемых, то есть $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ должно быть нечётным. Это происходит при $n \equiv 2; 3 \pmod 4$. Далее считаем, что в выражении чётное число слагаемых. Упорядочим переменные по возрастанию индекса. Функция не является монотонной, так как $f(0, 0, ..., 0) = 1, f(0, .., 1, 1) = 0$(одно из слагаемых с переменными равно 1, остальные 0)$, (0, ..., 0) < (0, ..., 1, 1)$. Функция является самодвойственной при $n \equiv 3 \pmod 4$, так как $f(0, ..., 0, ..., 1) = 1, \neg f(1, ..., 1, ..., 0) = 1$(так как $n-1$ чётное и всего $n-1$ слагаемых с последней переменной, которые занулятся, останется чётное число единиц в итоговой сумме, а это ноль, при инвертировании 1). Функция не является самодвойственной при $n \equiv 2 \pmod 4$, так как $f(0, ..., 0, ..., 1) = 1, \neg f(1, ..., 1, ..., 0) = 0$(аналачно с предыдущем рассуждением, $n-1$ нечётное и в итоговой останется нечётное число единиц, а это 1, при инвертировании 0). Функция не является линейной по определению. По критерию Поста система является полной.

Ответ:

при $n \equiv 2 \pmod 4$

Задание 3

Докажите, что $\{1, \oplus\}$ является базисом для L.

Решение:

Заметим, что только единицами не выразить все линейные функции, также через $\oplus$ нельзя выразить все линейные функции, так как единица не выражается через $\oplus$($\oplus$ многих переменных на присваивании, где все переменными 0, даст 0). Через 1 и $\oplus$ можно выразить все линейные функции, так как 0 выражается как $1 \oplus 1$, тогда по определению линейных функций их все можно выразить через $1, 0, \oplus$.

Ответ:

ч.т.д