Математический анализ 2

ДЗ 4

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Вычислите с помощью цилиндрической замены:

$$\int_{-3}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz$$

Решение:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = h$$
$$\int_{-3}^{3} dx \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz = \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{3} dr \int_{0}^{9-r^2} r^2 dz = \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{3} 9r^2 - r^4 dr =$$
$$= \int_{0}^{\pi} \frac{162}{5} d\varphi = \frac{162}{5}\pi$$

Ответ:

$$\frac{162}{5}\pi$$

Задание 2

Вычислите с помощью сферической замены:

$$\int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2z + y^2z + z^3 dz$$

Решение:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$z = r\sin\theta$$
$$\int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} x^2z + y^2z + z^3 dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r\sin\theta \cdot r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r^5 \sin\theta \cdot \sin\varphi dr =$$
$$= \frac{64}{6} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\theta \sin\varphi d\varphi = 0$$

Ответ:

0

Задание 3

Вычислите интеграл:

$$D = \{(x, y, z) |\ x^2 + y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

$$\iiint_D (z - xy) dx dy dz$$

Решение:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$r^2 \leqslant z^2 \Rightarrow 0 \leqslant r \leqslant z$$

$$\iiint_D (z - xy) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z zr - r^3 \cos \varphi \sin \varphi dr = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{z^3}{2} - \frac{z^4}{4} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \pi z^3 dz = \frac{\pi}{4}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{4}$$

Задание 4

Вычислите интеграл:

$$D = \left\{ (x, y, z) \middle| \ \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} \leqslant 4xy; x, y, z \geqslant 0 \right\}$$

$$\iiint_D \frac{xyz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dxdydz$$

Решение:

Задание 5

Вычислите интеграл

$$\iiint_D \cos(y)\frac{x-3z}{2x-z}dxdydz$$

образованный пересечением плоскостей

$$\begin{cases} x-3z=-3 \\ x-3z=-2 \\ 2x-z=1 \\ 2x-z=4 \\ y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Решение:

$$u = x-3z$$
$$v = 2x-z$$
$$w = y$$
$$-3 \leqslant u \leqslant -2$$
$$1 \leqslant v \leqslant 4$$
$$0 \leqslant w \leqslant 1$$
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det(J) = 5 \Rightarrow \det(J^{-1}) = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow dxdydz = \frac{1}{5}dudvdw$$
$$\iiint_D \cos(y)\frac{x-3z}{2x-z}dxdydz = \frac{1}{5}\int_0^1 dw\int_1^4 dv\int_{-3}^{-2}\cos(w)\frac{u}{v}du = \frac{1}{5}\int_0^1 dw\int_1^4 -\frac{5}{2}\frac{\cos(w)}{v}dv =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dw\int_1^4 \frac{\cos(w)}{v}dv = -\frac{1}{2}\ln 4\int_0^1 \cos(w)dw = -\frac{1}{2}\ln 4\sin 1$$

Ответ:

$$-\frac{\ln 4\sin 1}{2}$$

Задание 6

Нарисуйте эскиз и вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой.

$$\left(x^2+y^2\right)^3 = x^3 y$$

Решение:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$r^6 = r^4\cos^3\varphi\sin\varphi$$
$$r^2 = \cos^3\varphi\sin\varphi = \frac{\cos^2\varphi\sin 2\varphi}{2}$$
$$\Rightarrow \sin 2\varphi \geqslant 0 \Rightarrow 2\varphi \in [0+2\pi k, \pi + 2\pi k] \Rightarrow \varphi \in \left[\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$$

Эта кривая симметрична относительно замены $(x, y) \to (-x, -y)$ и не симметрична относительно оси y, значит достаточно посчитать интеграл в первой четверти и удвоить, то есть $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Площадь в первой четверти равна

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos^3\varphi\sin\varphi}} r dr = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\cos\varphi = \frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}$$

Эскизом является петля в первой и третьей четверти.

Ответ:

$$\frac{1}{4}$$