Линейная алгебра и геометрия

ИДЗ 7

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите нормальный вид и какую-нибудь приводящую к нему невырожденную замену координат (выражение старых координат через новые) для следующей квадратичной формы над $\mathbb{R}$:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 25x_1^2 + 3x_2^2 - 9x_3^2 - 20x_1x_2 - 30x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Решение:

Применим симметричного Гаусса для матрицы квадратичной формы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 25 & -10 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -15 & 3 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{3}{5} & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_1' + \frac{2}{5}x_2' - \frac{1}{5}x_3' \\ x_2' - x_3' \\ \frac{1}{3}x_3' \end{pmatrix}$$

$$x_1' - x_2' - x_3' - \text{нормальный вид}$$

Ответ:

$$x_1' - x_2' - x_3' - \text{нормальный вид}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_1' + \frac{2}{5}x_2' - \frac{1}{5}x_3' \\ x_2' - x_3' \\ \frac{1}{3}x_3' \end{pmatrix}$$

Задание 2

Определите нормальный вид квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (b+7)x_2^2 + (b+3)x_3^2 - 8x_1x_2 - 14x_1x_3 + 2(b-4)x_2x_3$$

в зависимости от значения параметра b.

Решение:

Матрица квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -4 & b+7 & b-4 \\ -7 & b-4 & b+3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1; \delta_2 = b-9; \delta_3 = 9b - 610$$

Если $9 < b < \frac{610}{9}$:

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

Если $b > \frac{610}{9}$:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

Если $b = \frac{610}{9}$:

$$z_1^2 + z_2^2$$

Если $b < 9$:

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

Если $b = 9$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -4 & 16 & 5 \\ -7 & 5 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -23 \\ 0 & -23 & -37 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & -60 \\ 0 & -60 & -37 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{949}{23} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

Ответ:

$$b < 9 : z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

$$b = 9 : z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

$$9 < b < \frac{610}{9} : z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

$$b = \frac{610}{9} : z_1^2 + z_2^2$$

$$b > \frac{610}{9} : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

Задание 4

Определите все значения параметров a и b, при которых билинейная форма

$$\beta(x,y) = (-4b+13)x_1y_1 + (-2b+6)x_1y_2 + (-a+2.5)x_1y_3 + (-2b+6)x_2y_1 + 2x_2y_2 + (-2b+4)x_2y_3 + \\ +(-2b+5)x_3y_1 + (-2b+4)x_3y_2 + 3x_3y_3$$

задаёт скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Решение:

Выпишем матрицу билинейной формы:

$$\begin{pmatrix} -4b+13 & -2b+6 & -a+2.5 \\ -2b+6 & 2 & -2b+4 \\ -2b+5 & -2b+4 & 3 \end{pmatrix}$$

Чтобы она задавала скалярное произведение, она должна быть симметричной и положительно определенной, значит

$$-2b+5 = -a+2.5 \Rightarrow a = 2b-2.5$$

$$\delta_1 = -4b+13 > 0 \Rightarrow b < \frac{13}{4}$$

$$\delta_2 = -8b+26-(-2b+6)^2 = -4b^2+16b-10 > 0 \Rightarrow b \in \left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}, \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\delta_3 = \det\left(\begin{pmatrix} -4b+13 & -2b+6 & -2b+5 \\ -2b+6 & 2 & -2b+4 \\ -2b+5 & -2b+4 & 3 \end{pmatrix}\right) = -16b^2+64b-48 > 0 \Rightarrow b \in (1,3)$$

Пересекая все условия, получаем, что

$$b \in (1,3) \Rightarrow a \in (-0.5, 3.5)$$

Ответ:

$a \in (-0.5, 3.5)$

$b \in (1,3)$

Задание 5

Существует ли система из трёх векторов в $\mathbb{R}^3$, матрица Грама которой равна

$$G = \begin{pmatrix} 17 & 12 & -87 \\ 12 & 18 & -90 \\ -87 & -90 & 531 \end{pmatrix}$$

Если существует, то предъявите такую систему, подробно обосновав её поиск. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ предполагается стандартным.

Решение:

$G^T = G$, воспользуемся алгоритмом с семинара для поиска соответствующих векторов. Сначала приведем матрицу к диагональному виду, запоминая преобразования, матрица должна быть положительной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 12 & -87 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 18 & -90 & 0 & 1 & 0 \\ -87 & -90 & 531 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{162}{17} & -\frac{486}{17} & -\frac{12}{17} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{486}{17} & \frac{1458}{17} & \frac{87}{17} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{162}{17} & 0 & -\frac{12}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) - \text{положительная}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{12}{17} & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{по алгоритму } (v_1, v_2, v_3) = \left(\sqrt{17}e_1, \sqrt{\frac{162}{17}}e_2, 0\right) \cdot C^{-1} = \left(\sqrt{17}e_1, \frac{12\sqrt{17}e_1}{17} + \sqrt{\frac{162}{17}}e_2, -\frac{87\sqrt{17}e_1}{17} - \frac{27\sqrt{2}e_2}{\sqrt{17}}\right)$$

Ответ:

$$\left(\sqrt{17}e_1, \frac{12\sqrt{17}e_1}{17} + \sqrt{\frac{162}{17}}e_2, -\frac{87\sqrt{17}e_1}{17} - \frac{27\sqrt{2}e_2}{\sqrt{17}}\right)$$

Задание 3

В векторном пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ рассмотрим функцию

$$Q(f) = \int_0^2 f^2 dx - \int_1^3 f^2 dx.$$

а) Докажите, что Q является квадратичной формой в V.
б) Существует ли такой базис $\mathbb{e} = (e_1, ..., e_4)$, что квадратичная форма Q в координатах $x = (x_1, ..., x_4)$ в этом базисе имеет вид

$$59x_1^2 - 14x_1x_2 - 40x_1x_3 - 92x_1x_4 + 34x_2^2 + 20x_2x_3 + 22x_2x_4 + 6x_3^2 + 30x_3x_4 + 65x_4^2?$$

Если такой базис существует, то предъявите его.

Решение:

а) Рассмотрим произвольный многочлен $x_1x^3 + x_2x^2 + x_3x + x_4$ в координатах (x_1, x_2, x_3, x_4). Вычислим на нём значение функции.

$$Q(x_1x^3 + x_2x^2 + x_3x + x_4) = \int_0^2 (x_1x^3 + x_2x^2 + x_3x + x_4)^2 dx - \int_1^3 (x_1x^3 + x_2x^2 + x_3x + x_4)^2 dx =$$
$$= -294x_1^2 - 100x_1x_2 - 42(2x_1x_3 + x_2^2) - 16(2x_1x_4 + 2x_2x_3) - 6(2x_2x_4 + x_3^2) - 4x_3x_4$$
$$\text{полученное выражение является квадратичной формой}$$

б) Заметим, что если эти квадартичные формы эквивалентны, то выполнено соотношение

$$Q = C^TQ'C, \text{где } Q' - \text{матрица кв. формы в новом базисе}, \det(C) \neq 0$$

Возьмём определитель от обеих частей, получим

$$\det(Q) = \det(C^TQ'C)$$
$$\det(Q) = \det(C^T) \cdot \det(C) \cdot \det(Q')$$
$$\det(Q) = \det(C)^2 \cdot \det(Q')$$

$$\det(Q) = \det\left(\begin{pmatrix} -294 & -50 & -42 & -16 \\ -50 & -42 & -16 & -6 \\ -42 & -16 & -6 & -2 \\ -16 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = 14400$$

$$\det(Q') = \det\left(\begin{pmatrix} 59 & -7 & -20 & -46 \\ -7 & 34 & 10 & 11 \\ -20 & 10 & 6 & 15 \\ -46 & 11 & 15 & 65 \end{pmatrix}\right) = -146689$$

$$\Rightarrow \det(C)^2 = \frac{14400}{-146689} < 0$$

Получили противоречие, так как квадрат числа всегда неотрицательное число. Значит такого базиса не существует.

Ответ:

ч.т.д;неа