Математический анализ 2

ДЗ 3

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Измените порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y} f(x,y,z)dz$$

Решение:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leqslant z \leqslant x^2+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant x^2+\sqrt{1-x^2} \\ \max(0, z-x^2) \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \end{cases} 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y} f(x,y,z)dz = \int_0^1 dx \int_0^{x^2+\sqrt{1-x^2}} dz \int_{\max(0,z-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)dy$$

Ответ:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2+\sqrt{1-x^2}} dz \int_{\max(0,z-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)dy$$

Задание 2

Вычислите интеграл:

$$\int_0^4 dz \int_{-z}^{z} dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2xy^2dy$$

Решение:

$$\int_0^4 dz \int_{-z}^{z} dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2xy^2dy = \frac{1}{3}\int_0^4 dz \int_{-z}^{z} z^2x(z^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Заметим, что функция $z^2x(z^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$ является нечётной относительно x, тогда интеграл по симметричному промежутку $[-z, z]$ является нулём, значит весь интеграл равен 0.

Ответ:

0

Задание 3

Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz.$$

Решение:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \leqslant y \leqslant 1 \\ y \leqslant z \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant z \\ 0 \leqslant x \leqslant y \end{cases}$$

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y e^{z^3} dx = \int_0^1 dz \int_0^z y e^{z^3} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 e^{z^3} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{z^3} d\frac{z^3}{3} =$$

$$= |z^3 = t, dt = 3z^2 dz, z^2 dz = \frac{dt}{3}| = \frac{1}{6} \int_0^1 e^t dt = \frac{e-1}{6}$$

Ответ:

$$\frac{e-1}{6}$$

Задание 4

Вычислите интеграл:

$$D = \big\{(x,y) | \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 49, y \geqslant 0\big\}$$

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy$$

Решение:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$1 \leqslant r^2 \leqslant 49, r\sin\varphi \geqslant 0 \Rightarrow \sin\varphi \geqslant 0 \Rightarrow \varphi \in [0,\pi]$$

$$D = \big\{(x,y) | \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 49, y \geqslant 0\big\}$$

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_1^7 \frac{\ln r}{r} dr = |t = \ln r, dt = \frac{1}{r}dr, dr = rdt| = 2\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\ln 7} tdt =$$

$$= \int_0^{\pi} \ln^2 7 d\varphi = \pi \ln^2 7$$

Ответ:

$$\pi \ln^2 7$$

Задание 5

Вычислите интеграл:

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x} \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy$$

Решение:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$r^2 \leqslant 2r\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi \geqslant 0, r(r-2\cos\varphi) \leqslant 0 \Rightarrow r-2\cos\varphi \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi$$

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x} \frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}dr = |r = 2\sin t, dr = 2\cos t dt| =$$

$$=$$