Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 15

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Подпространства U и W в $\mathbb{R}^4$ заданы как множества решений ОСЛУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

соответственно. Найдите базис в $U \cap W$ и базис в $U + W$

Решение:

Найдем базис в $U \cap W$. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ(так как заданы 2ым способом)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{искомый базис}$$

Найдем базис в $U + W$:

(1) Найдём ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

(2) Найдём ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

(3) Искомый базис — базис в

$$\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Для поиска базиса приводим соответствующую матрицу к УСВ:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ как базис можно взять векторы

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

Базис в $U \cap W$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Базис в $U + W$:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Подпространства U и W в $\mathbb{R}^5$ заданы как множества решений ОСЛУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

соответственно. Найти $\dim(U \cap W)$ и $\dim(U + W)$

Решение:

(1) Найдем размерность U. Для этого найдём число векторов в ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U) = 2$$

(2) Найдем размерность W. Для этого найдём число векторов в ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W) = 2$$

(3) Найдем размерность $U \cap W$. Подпространства заданы вторым способом, поэтому искомая размерность это число векторов в ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 1$$

(4) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$

Ответ:

$\dim(U \cap W) = 1$
$\dim(U + W) = 3$

Задание 3

Найти размерности суммы и пересечения подпространств в $\mathbb{R}^4$:

1. $U = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,3,1,3) \rangle$,
   $W = \langle (1,2,0,2), (1,2,1,2), (3,1,3,1) \rangle$
2. $U = \langle (2,-1,0,-2), (3,-2,1,0), (1,-1,1,-1) \rangle$,
   $W = \langle (3,-1,-1,0), (0,-1,2,3), (5,-2,-1,0) \rangle$

Решение:

1.

(1) Найдём размерность U. Для этого найдём число главных неизвестных в УСВ матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U) = 2$$

(2) Найдём размерность W. Для этого найдём число число главных неизвестных в УСВ матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W) = 3$$

(3) Найдём размерность $U + W$. Для этого найдём число число главных неизвестных в УСВ матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U+W) = 3$$

(4) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U \cap W) = 2$

2.

(1) Найдём размерность U. Для этого найдём число главных неизвестных в УСВ матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U) = 3$$

(2) Найдём размерность W. Для этого найдём число число главных неизвестных в УСВ матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W) = 3$$

(3) Найдём размерность $U + W$. Для этого найдём число число главных неизвестных в УСВ матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U+W) = 3$$

(4) $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U \cap W) = 3$

Ответ:

1. $\dim(U+W) = 3; \dim(U \cap W) = 2$
2. $\dim(U+W) = 3; \dim(U \cap W) = 3$

Задание 4

Пользуясь альтернативным способом, найти базис суммы и базис пересечения линейных оболочек $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, где:

1. $a_1 = (1,2,1),\ a_2 = (1,1,-1),\ a_3 = (1,3,3),$
   $b_1 = (1,2,2),\ b_2 = (2,3,-1),\ b_3 = (1,1,-3)$
   в $\mathbb{R}^3$;
2. $a_1 = (1,1,0,0,-1),\ a_2 = (0,1,1,0,1),\ a_3 = (0,0,1,1,1),$
   $b_1 = (1,0,1,0,1),\ b_2 = (0,2,1,1,0),\ b_3 = (1,2,1,2,-1)$
   в $\mathbb{R}^5$;

Решение:

$U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, W = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

1.

(1) Воспользуемся алгоритмом с семинара для поиска базиса $U \cap W$. Приводим соответствующую матрицу к УСВ

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ:} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Получаем, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ порождает } U \cap W$$

(3) Ищем базис в этой линейной оболочке. Это вектор (3, 5, 1).

(4) Ищем базис $U + W$. Из шага один заключаем вывод, что это векторы a_1, a_2, b_1

2.

(1) Воспользуемся алгоритмом с семинара для поиска базиса $U \cap W$. Приводим соответствующую матрицу к УСВ

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ:} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Получаем, что

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle \text{ порождает } U \cap W$$

(3) Ищем базис в этой линейной оболочке. Это векторы (1, 2, 2, 1, 1) и (2, 2, 2, 2, 0).

(4) Ищем базис $U + W$. Из шага один заключаем вывод, что это векторы a_1, a_2, a_3, b_1

Ответ:

1. Базис $U \cap W$: (3, 5, 1)
   Базис $U + W$: a_1, a_2, b_1
2. Базис $U \cap W$: (1, 2, 2, 1, 1,); (2, 2, 2, 2, 0)
   Базис $U + W$: a_1, a_2, a_3, b_1

Задание 5

Найти базис пересечения подпространств из задачи 4.2, используя переход к заданию подпространств способом II. Сравнить ответ с результатом предыдущей задачи и проверить напрямую, что оба построенных базиса порождают одно и то же подпространство.

Решение:

(1) Найдём ОСЛУ, множество решений которой есть $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Для этого найдем ФСР для следующего ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Как искомое ОСЛУ можно взять

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Найдём ОСЛУ, множество решений которой есть $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$. Для этого найдем ФСР для следующего ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Как искомое ОСЛУ можно взять

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Найдём базис $U \cap W$(обозначения как в прошлой задаче), заданных втором способом. Для этого найдём ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) Линейная оболочка ФСР из пункта 3 и линейная оболочка базиса из 4.2 совпадают, так как

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{они задают одно и то же пространство, но ответы разные}$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 6

Пусть U_1 и U_2 – подпространства в V. Доказать, что если

$$\dim(U_1 + U_2) = 1 + \dim(U_1 \cap U_2),$$

то сумма $U_1 + U_2$ равна одному из этих подпространств, а пересечение $U_1 \cap U_2$ – другому.

Решение:

(1) Исходя из известного соотношения для суммы и пересечения пространств, имеем систему

$$\begin{cases} \dim(U_1 + U_2) = 1 + \dim(U_1 \cap U_2) \\ \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \end{cases}$$

(2) Вычитая из второго уравнения первое, получаем соотношение

$$0 = \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1) + \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_2) + 1,$$

$$\text{при этом в общем случае} \dim(U_1 \cap U_2) \leqslant \dim(U_1) \wedge \dim(U_1 \cap U_2) \leqslant \dim(U_2)$$

(3) Докажем, что $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) \vee \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_2)$

Пусть $\dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_1) \wedge \dim(U_1 \cap U_2) < \dim(U_2)$, тогда $\dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1) \leqslant -1$(так как размерность хотя бы 1). Аналогчино $\dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_2) \leqslant -1$. Получаем, что соотношение из шага 2 не выполняется. Противоречие. Следовательно $\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant \dim(U_1) \vee \dim(U_1 \cap U_2) \geqslant \dim(U_2)$, но строгое неравенство в этом случае невозможно $\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) \vee \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_2)$

(4) Из доказанного в шаге 3 утверждения можно сделать вывод, что $U_1 \simeq U_1 \cap U_2 \vee U_2 \simeq U_1 \cap U_2$. Тогда $U_1 \cap U_2 = U_1 \vee U_1 \cap U_2 = U_2$

(5) Подставим полученное в шаге 4 соотношение во второе уравнение из шага 1. Получаем

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) \ \text{ в случае } U_1 \cap U_2 = U_2. \text{ Тогда } U_1 \simeq U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 = U_1.$$

$$\text{Аналогичные рассуждения для случая } U_1 \cap U_2 = U_1. \text{ Итого исходное утверждение доказано.}$$

Ответ:

убито

Задание 7

Пусть U_1 и U_2 – (n - 1)-мерные подпространства n-мерного пространства V. Доказать, что

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant n - 2$$

Решение:

Используем известное соотношение для размерностей суммы и пересечения

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$
$$\dim(U_1 \cap U_2) = 2n - 2 - \dim(U_1 + U_2), \text{но} \dim(U_1 + U_2) \geqslant n - 1$$

Пусть $\dim(U_1 + U_2) = n - 1$. Тогда $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) = \dim(U_2) \Rightarrow U_1 + U_2 = U_1 = U_2$(см. прошлая задача). В этом случае исходное утверждение верно.

Далее будем считать, что $\dim(U_1 + U_2) \geqslant n$(случай $n - 1$ рассмотрен). Тогда

$$\dim(U_1 \cap U_2) = 2n - 2 - \dim(U_1 + U_2) \geqslant 2n - 2 - n = n - 2.$$

Получили, что исходное утверждение верно

Ответ:

ч.т.д

Задание 8

Решение: