Теория вероятностей

ДЗ 8

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Покажите, что функции являются борелевскими:

1. $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ сопоставляющая матрице ее след
2. $\rho : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, сопоставляющая матрице ее спектральный радиус $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in s(A)\}$
3. $||\cdot||_\infty : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ норма Чебышева

Решение:

1. Заметим, что это отображение линейно, а из курса матанализа известно, что вяское линейное отображение непрерывно, значит функция борелевская.
2. По формуле Гельфанда: $\rho(A) = \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ для любой матричной нормы. Рассмотрим норму Фробениуса. Тогда норма это борелевская функция. Возведение в степень $\frac{1}{n}$ тоже борелевская функция. Предел борелевской функции тоже борелевская функция. Значит и все отображение борелевское.
3. Заметим, что исходную норму можно переписать как $||A||_\infty = \sup\limits_{x:||x||_\infty=1} \max\limits_j \left\{\sum\limits_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i\right\}, |x_i| \leqslant 1.$

$$||A||_\infty = \sup_{x:||x||_\infty=1} \max_j \left\{\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i\right\} \leqslant \sup_{x:||x||_\infty=1} \max_j \left\{\sum_{i=1}^n |a_{ji}| \cdot x_i\right\} \leqslant \sup_{x:||x||_\infty=1} \max_j \left\{\sum_{i=1}^n |a_{ji}|\right\} = \max_j \left\{\sum_{i=1}^n |a_{ji}|\right\}$$

С другой стороны,

$$\sup ||Ax||_\infty \geqslant ||Ax_0||_\infty, x_0 = (\mathrm{sign}(a_1), ..., \mathrm{sign}(a_n)), (a_1, ..., a_n) - \text{такая строка в исходной матрице,}$$
$$\text{у которой сумма модулей максимальна, пусть индекс этой строчки } j$$

Тогда

$$\sup ||Ax||_\infty \geqslant ||Ax_0||_\infty = \sum_{i=1}^n |a_{ji}| \geqslant \max_c \left\{\sum_{i=1}^n |a_{ci}|\right\}$$

Получили, что $||A||_\infty = \max_j \left\{\sum_{i=1}^n |a_{ji}|\right\}$. Но, так как суммирование это борелевская функция, максимум тоже борелевская функция, значит и норма Чебышева тоже борелевская.

Ответ:

Показали

Задание 2

Покажите, следующие множества являются борелевскими:
1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \in \mathbb{Q}\}$
2. $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A - \text{невырождена}\}$
3. $N(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \exists k : A^k = 0\}$

Решение:

1. Рассмотрим функцию $f : E \to B, f((x, y)) = |x| + |y| \Rightarrow B = \mathbb{Q} \in B(\mathbb{R})$. f – борелевская из непрерывности. $f^{-1}(B) = E \Rightarrow E \in B(\mathbb{R})$
2. Рассмотрим функцию $f : E \to B, f(A) = \det(A)$. Функция борелевская, так как определитель как функция это полином. $B = \mathbb{R} \setminus \{0\} \in B(\mathbb{R}), f^{-1}(B) = E \Rightarrow E \in B(\mathbb{R})$. Как E берем искомую группу.
3. Заметим, что существование такого k равносильно тому, что $A^n = 0$. Тогда рассмотрим $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}, f(A) = A^n$. Эта функция борелевская из непрерывности, $N(n) \subseteq f(-1)\left(\mathbb{R}^{n^2}\right) \subseteq B(\mathbb{R})$. Доказали

Ответ:

Показали

Задание 3

Приведите пример несчетного семейства функций $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} : |I| > \aleph_0$ для которых супремум не будет борелевски измерим.

Решение:

Пусть $f_\alpha(x)$ является индикаторной функцией множества $E -$ множества Витали. Тогда супремумом этого семейства также будет являться индикаторная функция множества Витали. Существует множество $\{1\} \in B(\mathbb{R}) : f^{-1}(\{1\}) = E$. Множество Витали не является борелевским, значит супремум не борелевский.

Ответ:

Привел

Задание 4

Пусть $f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ −измеримая функция. Покажите,что ее усечение измеримо.

Решение:

Пусть $C=\{x\subset\Omega: f(x)<-A\}, D=\{x\subset\Omega: f(x)>A\}, E=\{x\subset\Omega: |f(x)|\leqslant A\}$. Тогда $f_A(x)=\chi_C(x)\cdot(-A)+\chi_D(x)\cdot A+\chi_E(x)\cdot f(x)$. Докажем, что каждое слагаемое является борелевской функцией:

1. $\chi_C(x)$ задана на борелевском множестве, значит индикаторная функция измерима. Домножение на константу тоже измеримо. Аналогично оставшиеся два слагаемых также измеримы(домножение на измеримую функцию измеримо). Значит усечение измеримо.

Ответ:

ч.т.д