Алгебра

ДЗ 5

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите наибольший общий делитель многочленов $f, g \in K[x]$, а также его линейное выражение через f и g в следующих случаях:
1. $K = \mathbb{R}, f = x^5 + x^4 + x^2 - 4x - 2, g = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 12$;
2. $K = \mathbb{Z}_7, f = x^5 + x^3 + 3x^2 + 5x + 3, g = 3x^4 + 3x^3 + 6x + 1$.

Решение:

1.

$$f = \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)g + \left(\frac{7}{4}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 7\right)$$

$$r_1 = \frac{7}{4}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 7$$

$$g = \left(\frac{8}{7}x - \frac{20}{7}\right)r_1 + (4x^2 + 8)$$

$$r_2 = 4x^2 + 8$$

$$r_1 = \left(\frac{7}{16}x + \frac{7}{8}\right)r_2 + 0$$

$$\Rightarrow \gcd(f, g) = 4x^2 + 8$$

$$4x^2 + 8 = g - \left(\frac{8}{7}x - \frac{20}{7}\right)r_1 = g - \left(\frac{8}{7}x - \frac{20}{7}\right)\left(f - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)g\right) = a(x)f + b(x)g$$

сорри что не раскрыл скобки, тороплюсь просто

2.

$$f = (5x + 2)g + (2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

$$r_1 = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$g = (5x - 1)r_1 + (-2x^2 + 3x + 2)$$

$$r_2 = -2x^2 + 3x + 2$$

$$r_1 = (-x - 2)r_2 + (3x + 5)$$

$$r_3 = 3x + 5$$

$$r_2 = (-3x - 1)r_3 + 0$$

$$\Rightarrow \gcd(f, g) = 3x + 5$$

$$3x + 5 = r_1 - (-x - 2)r_2 = r_1 - (-x - 2)(g - (5x - 1)r_1) = f - (5x + 2)g - (-x - 2)(g - (5x - 1)(f - (5x + 2)g))$$

$$= a(x)f + b(x)g$$

Задание 2

Разложите многочлен f в произведение неприводимых в кольце $K[x]$ в следующих случаях:

1. $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, f = x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 12$;
2. $K = \mathbb{Z}_5, f = x^5 + x^4 + 3x^2 + x + 3$.

Решение:

1.

$$f = x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 12 = (x^2+3)(x^3-4) = (x^2+3)\left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}\right)$$

Тогда разложение над $\mathbb{R}$:

$$(x^2+3)\left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}\right)$$

Разложение над $\mathbb{C}$:

$$\left(x - i\sqrt{3}\right)\left(x + i\sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt[3]{4}\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt[6]{432}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{\sqrt[6]{432}}{2}i\right)\right)$$

2. Найдем корни из $\mathbb{Z}_5$

$$f(0) \neq 0$$

$$f(1) = 9 \neq 0$$

$$f(2) = 65 = 0 \Rightarrow 2 - \text{корень}$$

$$f(3) = 357 \neq 0$$

$$f(4) = 1335 = 0 \Rightarrow 4 - \text{корень} \Rightarrow$$

$$f = (x-2)(x-4)(x^3 + 2x^2 - x + 1)$$

$$x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x-2)(x^2 + 4x + 2)$$

$$x^2 + 4x + 2 \text{ не имеет корней в } \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \text{неприводим}$$

$$\Rightarrow f = (x-2)^2(x-4)(x^2+4x+2)$$

Задание 3

Перечислите все неприводимые многочлены со старшим коэффициентом 1 и степени не выше 3 над полем $\mathbb{Z}_3$, а также найдите количество таких многочленов степени 4.

Решение:

$$\deg = 1:$$
$$x, x+1, x+2$$
$$\deg = 2:$$
$$f = x^2 + ax + c$$
$$D = a^2 - c < 0 \Rightarrow (a, c) = (0, 1), (0, 2), (1, 2) \Rightarrow$$
$$x^2 + 1, x^2 + 2, x^2 + x + 2$$
$$\deg = 3:$$
$$f = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$f(1) \neq 0, f(2) \neq 0, f(1) \neq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} c \neq 0 \\ 1 + a + b + c \neq 0 \\ 2 + a - b + c \neq 0 \end{cases}$$
$$c = 1 \Rightarrow (a, b, c) = (0, 2, 1), (1, 2, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 1)$$
$$c = 2 \Rightarrow (a, b, c) = (0, 2, 2), (1, 0, 2), (1, 1, 2), (2, 2, 2)$$
$$x^3 + 2x + 1, x^3 + x^2 + 2x + 1, x^3 + 2x^2 + 1, x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$x^3 + 2x + 2, x^3 + x^2 + 2, x^3 + x^2 + x + 2, x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$
$$\deg = 4: f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Задание 4

Пусть $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ —два неприводимых многочлена, имеющие общий комплексный корень. Докажите, что f и g пропорциональны.

Решение:

Пусть $d = \gcd(f, g)$. Так как многочлены имеют общий корень, то d не может быть константой. Но так как f неприводим, то его может делить либо константа, либо многочлен вида $c \cdot f, c \in \mathbb{Q}$, аналогично для g. Получаем, что d делит f и g и является многочленом вида $c \cdot f \Rightarrow d = c_1 \cdot f = c_2 \cdot g \Rightarrow f = \frac{c_2}{c_1} \cdot g \Rightarrow$ они пропорцинальны.

Ответ:

ч.т.д