Математический анализ 2

ДЗ 1

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Вычислите интеграл, рассматривая его как предел интегральной суммы при сеточном разбиении прямоугольника $D = [0,2] \times [0,3]$ на ячейки – квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве ξ_i верхние правые вершины ячеек:

$$\iint_D xy^3 dxdy$$

Решение:

$$f = xy^3$$

$$\sigma(f, T_k, \xi_k) = \sum_{i=1}^{2k} \sum_{j=1}^{3k} \frac{i}{k} \cdot \left(\frac{j}{k}\right)^3 \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^6} \sum_{i=1}^{2k} i \sum_{j=1}^{3k} j^3 = \frac{1}{k^6} \sum_{i=1}^{2k} i \left(\frac{(3k+1) * 3k}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(3k+1) * 3k}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{k^6} \cdot \frac{(2k+1) \cdot 2k}{2} = \frac{162k^3 + 189k^2 + 72k + 9}{4k^3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f, T_k, \xi_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{162k^3 + 189k^2 + 72k + 9}{4k^3} = \frac{81}{2}$$

Ответ:

$$\frac{81}{2}$$

Задание 2

Вычислите двойной интеграл

$$\int_1^2 \int_0^3 xy^3 dy\ dx$$

Решение:

$$\int_1^2 \int_0^3 xy^3 dy\ dx = \int_1^2 x \int_0^3 y^3 dy\ dx = \int_1^2 \frac{81}{4} x dx = \frac{81}{4} \int_1^2 x dx = \frac{81}{4} \cdot \frac{3}{2} = 40.5$$

Ответ:

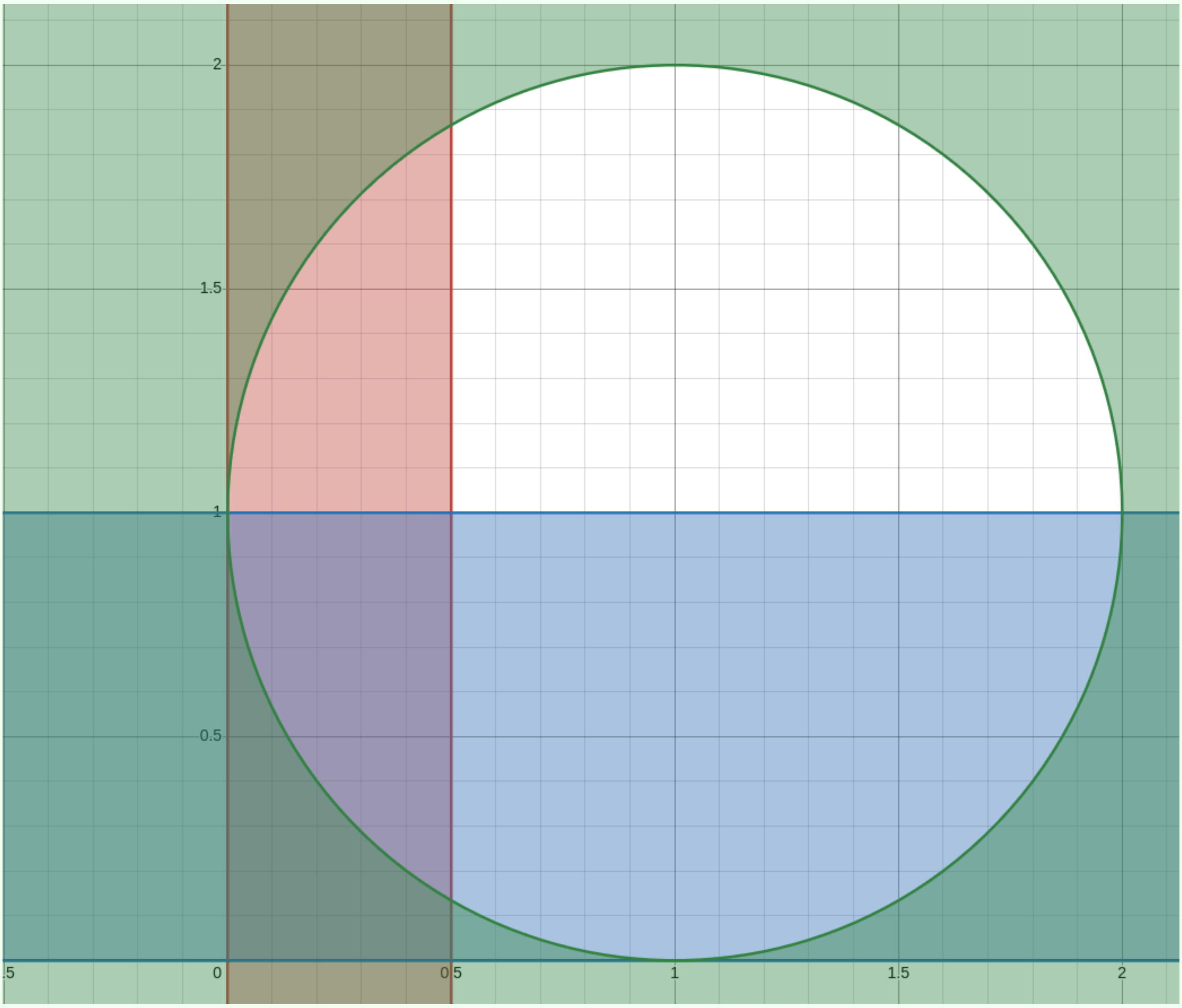
30.375

Задание 3

Привести двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ к повторному во всех возможных порядках, где $D = \left\{(x,y) \mid x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], y \in [0,1], (x-1)^2 + (y-1)^2 \geqslant 1\right\}$

Решение:

D



$$(0.5-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$(y-1)^2 = 0.75$$

$$y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, x = 0.5 - \text{пересечение окружности и прямой}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 0.5 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

$$y = 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{0.5} \int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dydx = \int_0^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_0^{0.5} f(x,y)dxdy + \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \int_{0.5}^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dxdy$$

Ответ:

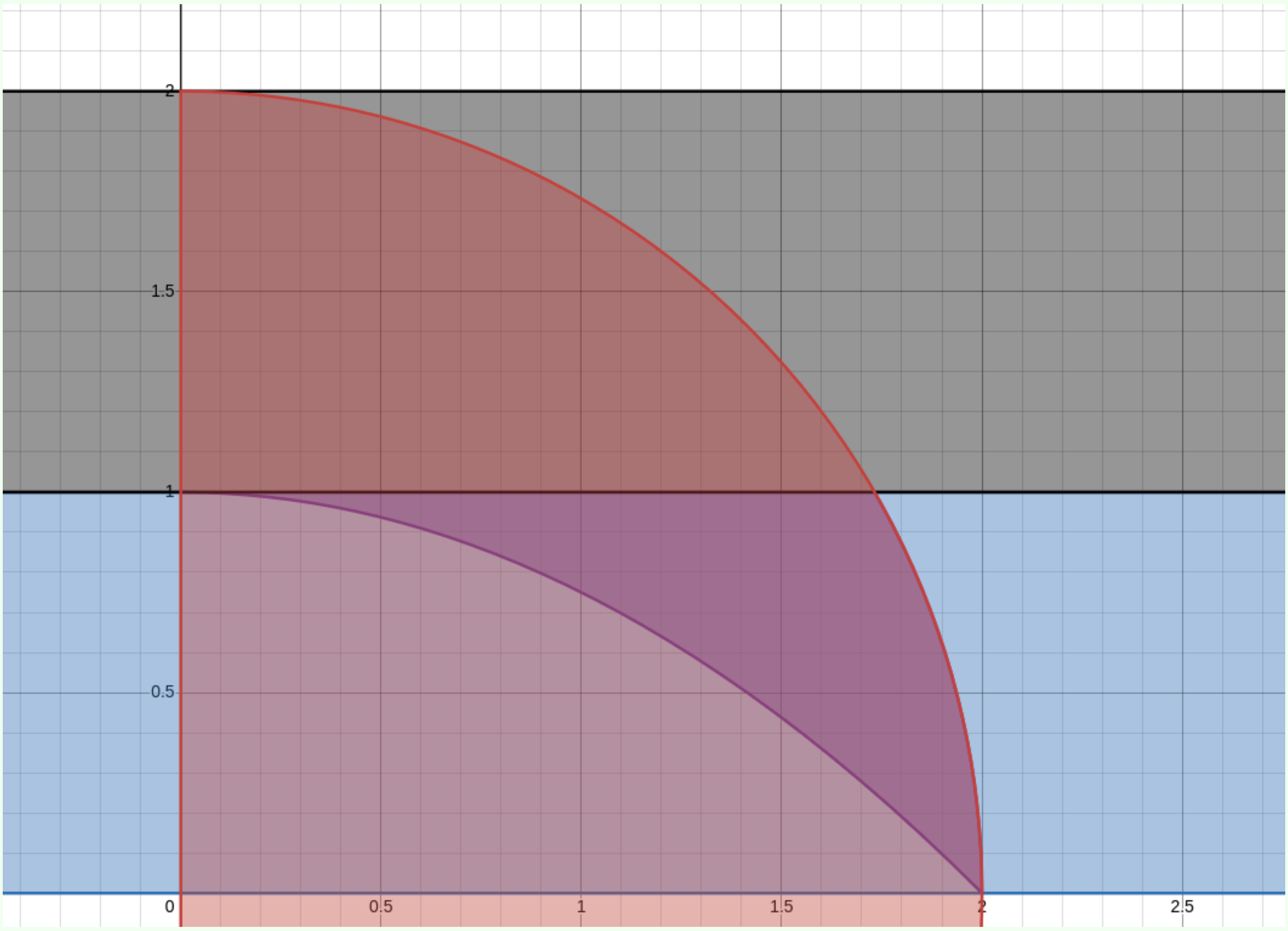
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{0.5}\int_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dydx = \int_0^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{0.5} f(x,y)dxdy + \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\int_{0.5}^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dxdy$$

Задание 4

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{4-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

Решение:



Искомая область это фиолетовая + красная область.

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{4-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx =$$

$$\int_0^2 dx \int_{1-\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$