Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 23

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора

$$x = (4, -1, -3, 4)$$

относительно подпространства $U = \langle a_1,\, a_2,\, a_3 \rangle \leqslant \mathbb{R}^4$, где

$$a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 2, -1), a_3 = (1, 0, 0, 3).$$

Решение:

Найдем базис в линейной оболочке

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{как базис можно взять векторы } a_1, a_2$$

Запишем базис в столбцы матрицы A. Тогда проекция находится по формуле

$$pr_U x = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = y$$

$$ort_U x = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = z$$

Ответ:

$y = (1, -1, -1, 5)$
$z = (3, 0, -2, -1)$

Задание 2

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора

$$x = (7, -4, -1, 2)$$

относительно подпространства $U \leqslant \mathbb{R}^4$, заданного ОСЛУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \langle \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Эти векторы уже являются базисом в линейной оболочке, запишем их по столбцам в матрицу A и найдем проекцию по формуле

$$y = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot x = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$y = (5, -5, -2, -1)$
$z = (2, 1, 1, 3)$

Задание 3

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x^4 относительно подпространства $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$.

Решение:

Построим ортогональный базис. Мы это уже делали в прошлом дз. Ортогональный базис имеет вид

$$\left(1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x\right) \Rightarrow$$

$$prx^4 = \frac{(1, x^4)}{(1,1)} \cdot 1 + \frac{(x, x^4)}{(x, x)} \cdot x + \frac{\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^4\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{\left(x^3 - \frac{3}{5}x, x^4\right)}{\left(x^3 - \frac{3}{5}x, x^3 - \frac{3}{5}x\right)} \cdot \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{6}{7} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{35} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ortx^4 = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

Ответ:

$prx^4 = \frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{35}$
$ortx^4 = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$

Задание 4

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ подпространство U задаётся уравнением

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

а подпространство W натянуто на векторы

$$(2, -1, 1, -2) \text{ и } (-1, 3, 1, 3).$$

Найти вектор $v \in \mathbb{R}^4$, для которого

$$\mathrm{pr}_U v = (2, 5, 7, 4) \text{ и } \mathrm{pr}_W v = (5, 5, 7, 1).$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Эти векторы уже являются базисом в линейной оболочке, запишем их по столбцам в матрицу A и найдем проекцию по формуле

$$A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - x_4 \\ x_2 = 1 + x_4 \\ x_3 = 11 - x_4 \end{cases}$$

Сделаем тоже самое с W

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Векторы линейно независимы. Они образуют базис в линенйой оболочке. Запишем их по столбцам в матрицу A и найдем проекцию по формуле

$$A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot x = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 50 & 50 & 70 & 10 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 = 10 - 0.8x_3 + 0.6x_4 \\ x_2 = 10 - 0.6x_3 - 0.8x_4 \end{cases}$$

Тогда общая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_4 \\ x_2 = 1 + x_4 \\ x_3 = 11 - x_4 \\ x_1 = 10 - 0.8x_3 + 0.6x_4 \\ x_2 = 10 - 0.6x_3 - 0.8x_4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = v$$

Ответ:

$v = (4, 3, 9, 2)$

Задание 5

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найти расстояние от вектора

$$v = (2, 3, 1, 4)$$

до подпространства

$$U = \langle (2, -1, -1, 2),\ (1, -2, 2, 4),\ (5, -1, -5, 2) \rangle.$$

Решение:

Искомое расстояние есть норма ортогональной составляющей. Для этого найдем проекцию вектора v на U.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{первые два вектора образуют базис в линейной оболочке}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{pr}_U v = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{ort}_U v = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{21}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathrm{ort}_U v\| = \frac{\sqrt{530}}{5}$$

Ответ:

$\frac{\sqrt{530}}{5}$

Задание 6

Найти расстояние от вектора

$$v = (2, 4, 0, -1)$$

до подпространства, заданного ОСЛУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{pr}_U v = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{ort}_U v = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\,|\mathrm{ort}_U v\,|\,| = \sqrt{14} - \text{искомое расстояние}$$

Ответ:

$\sqrt{14}$

Задание 7

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Найти расстояние от вектора x^3 до подпространства $\langle 1,\, x,\, x^2 \rangle$.

Решение:

Построим ортогональный базис. Мы это уже делали в прошлом дз. Ортогональный базис имеет вид

$$\left(1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathrm{pr} x^3 = \frac{(1, x^3)}{(1, 1)} \cdot 1 + \frac{(x, x^3)}{(x, x)} \cdot x + \frac{\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^3\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{5}x$$

$$\Rightarrow \mathrm{ort}\ x^3 = x^3 - \frac{3}{5}x \Rightarrow \left|\mathrm{ort}\ x^3\right| = \frac{8}{175} - \text{искомое расстояние}$$

Ответ:

$\frac{8}{175}$

Задание 8

Описать все ортогональные матрицы порядка n, состоящие из неотрицательных элементов.

Решение:

Пусть $A = (a_1, ..., a_n) -$ ортогональная матрица, записанная по столбцам. Её столбцы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \left(a_i, a_j\right) = \delta_{ij} \forall i, j$ и

$$a_{1i}^2 + ... + a_{ni}^2 = 1$$

Зафиксируем i. Пусть в этой сумме есть хотя бы 2 ненулевых слагаемых, тогда в других столбцах на соответствующих позициях обязаны быть нули(иначе скалярное произведение с i-ым вектором не будет нулевым в силу неотрицательных элементов). Тогда в оставшихся $n-1$ столбцах остаётся $n-2$ позиций для произвольных чисел. Даже если в каждом из оставшихся столбцов будет ровно одна ненулевая координата, то по принципу Дирихле найдётся координата, которая ненулевая для двух разных столбцов, а значит их скалярное произведение не нулевое, противоречие. Значит в искомой сумме есть только одно ненулевое слагаемое, то есть на одной позиции 1, а на остальных нули. Искомая матрица тогда получается из перестановок столбцов единичной матрицы. Значит их $n!$.

Ответ:

Все возможные перестановки столбцов единичной матрицы порядка n.