# Линейная алгебра и геометрия

## ДЗ 28

**Гольдберг Дмитрий Максимович**

**Группа БПМИ248**

# Задание 1

Пусть оператор A над $\mathbb{R}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и базисы всех собственных подпространств A. Проверить, что A не диагонализуем.

## Решение:

$$\chi(t) = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2-t & -1 & 2 \\ 5 & -3-t & 3 \\ -1 & 0 & -2-t \end{pmatrix}\right) = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = (t+1)^3 \Rightarrow t = -1 - \text{собственное значение}$$

Для поиска собственного подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$A \cdot v + v = 0$$
$$(A + E) \cdot v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так алгебраическая кратность $-1$ не равна геометрической, то не диагонализуем.

## Ответ:

$$-1, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Задание 2

Пусть оператор A над $\mathbb{R}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и базисы всех собственных подпространств A. Проверить, что A не диагонализуем.

## Решение:

$$\chi(t) = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 0-t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{pmatrix}\right) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (x-2)^3 \Rightarrow t = 2 - \text{собственное значение}$$

Для поиска собственного подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$Av - 2v = 0$$
$$(A - 2E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как алгебраическая кратность 2 не равна геометрической, то не диагонализуем.

## Ответ:

$$2, \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

## Задание 3

Пусть оператор A над $\mathbb{R}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и базисы всех собственных подпространств A. Проверить, что A не диагонализуем.

## Решение:

$$\chi(t) = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 1-t & -3 & 4 \\ 4 & -7-t & 8 \\ 6 & -7 & 7-t \end{pmatrix}\right) = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2 \cdot (t-3) = 0 \Rightarrow t = -1; 3$$

Для поиска собственного подпространства при $t = -1$ подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$Av + v = 0$$
$$(A+E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для поиска собственного подпространства при $t = 3$ подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$Av - 3v = 0$$
$$(A-3E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Так как алгебраическая кратность $-1$ не равна геометрической, то не диагонализуем.

## Ответ:

$$-1, 3$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Задание 4

Пусть оператор A над $\mathbb{R}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все собственные значения и базисы всех собственных подпространств A. Проверить, что A не диагонализуем.

## Решение:

$$\chi(t) = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3-t & -1 & -1 \\ 2 & 0-t & -2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}\right) = t^3 - 4t^2 + 6t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2; 1+i; 1-i - \text{собственное значение}$$

Для поиска собственного подпространства при $t = 2$ подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$Av - 2v = 0$$
$$(A - 2E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Над $\mathbb{R}$ не раскладывается на линейные множители, значит не диагонализуем.

## Ответ:

$$2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Задание 5

Пусть оператор A над $\mathbb{R}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что A диагонализуем. Найти базис, в котором матрица диагональна, выписать эту матрицу и матрицу перехода к новому базису

## Решение:

$$\chi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-t & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-t \end{pmatrix}\right) = (t-2)^3 \cdot (t+2) = 0 \Rightarrow t = 2; -2$$

Ищем базисы собственные подпространств

$$A \cdot v - 2v = 0$$
$$(A - 2E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot v + 2v = 0$$
$$(A + 2E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Раскладывается на линейные множители и алгебраические кратности совпадают с геометрическими, значит диагонализуем в базисе

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

**Ответ:**

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

## Задание 6

Пусть оператор A над $\mathbb{R}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что A диагонализуем. Найти базис, в котором матрица диагональна, выписать эту матрицу и матрицу перехода к новому базису.

## Решение:

$$\chi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 0-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0-t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0-t \end{pmatrix}\right) = (t-1)^2 \cdot (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1; -1$$

Ищем базисы собственные подпространств

$$Av - v = 0$$
$$(A - E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Av + v = 0$$
$$(A + E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Раскладывается на линейные множители и алгебраические кратности совпадают с геометрическими, значит диагонализуем в базисе

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

**Ответ:**

---

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

## Задание 7

Пусть оператор A над $\mathbb{C}$ в некотором базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что A диагонализуем. Найти базис, в котором матрица диагональна, выписать эту матрицу и матрицу перехода к новому базису.

### Решение:

---

$$\chi(t) = (-1)^3 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 3-t & -1 & -1 \\ 2 & 0-t & -2 \\ -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}\right) = t^3 - 4t^2 + 6t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2; 1+i; 1-i - \text{собственное значение}$$

Для поиска собственного подпространства при $t = 2$ подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$Av - 2v = 0$$
$$(A - 2E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для поиска собственного подпространства при $t = 1 + i$ подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$Av - (1+i)v = 0$$
$$(A - (1+i)E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 & -1 \\ 2 & -1-i & -2 \\ -1 & 1 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для поиска собственного подпространства при $t = 1 - i$ подпространства ищем ФСР для ОСЛУ

$$Av - (1-i)v = 0$$
$$(A - (1-i)E)v = 0$$
$$\text{ФСР: } \begin{pmatrix} -i \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Раскладывается на линейные множители, с кратностями все ок, значит диагонализуем в базисе

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\\-2i\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1+i & 0\\0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & i & -i\\1 & 2i & -2i\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

## Ответ:

---

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\2i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\\-2i\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1+i & 0\\0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & i & -i\\1 & 2i & -2i\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

# Задание 8

Пусть А —линейный оператор на $n$-мерном пространстве $V$ над $\mathbb{C}$. Доказать, что любое подпространсто $U \leqslant V$, инвариантное относительно $A$, содержит прямую, инвариантную относительно А.

## Решение:

Рассмотрим оператор А над $U$. Из теоремы алгебры комплексных чисел заключаем, что в $U$ есть собственный вектор $v$ с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$. Рассмотрим подпространство $W = \langle v \rangle$. Проверим, что оно инвариантно относительно А. $\forall w \in W \mathrm{A}(w) = \mathrm{A}(\alpha v) = \alpha \mathrm{A}(v) = \alpha\lambda v \in W$. Доказано.

## Ответ:

ч.т.д

# Задание 9

Пусть $\mathrm{A}$ —линейный оператор на $n$-мерном пространстве $V$ над $\mathbb{C}$. Предположим, что существует только одна прямая, инвариантная относительно $\mathrm{A}$. Доказать, что $V$ неразложимо в прямую сумму двух ненулевых подпространств, инвариантых относительно $\mathrm{A}$.

## Решение:

Пусть $V$ разложимо в прямую сумму $U_1 \oplus U_2, \mathrm{A}(U_1) \subseteq U_1, \mathrm{A}(U_2) \subseteq U_2$. Из задачи 8 следует, что в $U_1$ и $U_2$ существуют одномерные инвариантные подпространства $L_1 \subseteq U_1, L_2 \subseteq U_2$. Получаем, что $L_1$ и $L_2$ две инвариантные прямые в $V$. По условию существует только одна прямая, противоречие, значит неразложимо.

## Ответ:

ч.т.д

## Задание 10

Доказать, что оператор $\mathrm{A}^2$ имеет собственное значение $\lambda^2$, то одно из чисел $\pm\lambda$ является собственным значением оператора A.

### Решение:

Пусть $\lambda^2 \in \operatorname{Spec} \mathrm{A}^2$, тогда для некоторого ненулевого $v$ выполнено

$$\mathrm{A}^2 v = \lambda^2 v$$
$$\mathrm{A}^2 v - \lambda^2 v = 0$$
$$(\mathrm{A}^2 - \lambda^2 E)v = 0$$
$$(\mathrm{A} - \lambda E)(\mathrm{A} + \lambda E)v = 0$$
$$\text{Пусть } (A + \lambda E)v = w, \Rightarrow$$
$$(A - \lambda E)w = 0$$
$$1. w = 0 \Rightarrow -\lambda - \text{собственное значение A}$$
$$2. w \neq 0 \Rightarrow \mathrm{A}w = \lambda w \Rightarrow \lambda - \text{собственное значение A}$$

Доказали.

### Ответ:

ч.т.д.