Математический анализ

ДЗ 22

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 21.4

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)=\frac{d}{dx}F(\cos x)-F(\sin x)=F'(\cos x)\cdot(-\sin x)-F'(\sin x)\cdot\cos x=$$

$$=-\cos(\pi\cos^2 x)\sin x-\cos(\pi\sin^2 x)\cos x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2\right)'}{\left(\left(\int_0^x e^{2u^2}du\right)\right)'}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2=2\int_0^x e^{u^2}du\cdot\frac{d}{dx}\int_0^x e^{u^2}du=2\int_0^x e^{u^2}du\cdot\frac{d}{dx}F(x)-F(0)=$$

$$=2\int_0^x e^{u^2}du\cdot\left(e^{x^2}-1\right)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{2u^2}du=e^{2x^2}-1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2\right)'}{\left(\left(\int_0^x e^{2u^2}du\right)\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{u^2}du\cdot\left(e^{x^2}-1\right)}{e^{2x^2}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{u^2}du\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{u^2}du}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$$

Задание 21.5

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}}{1+x^2}dx=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{e^{-at}}{1+t^2}dt\leqslant\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-at}dt=\lim_{x\to+\infty}e^{-ax}-1-\text{сходится при } a\geqslant 0,$$

$$\text{расходится при } a<0$$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=|t=\sqrt{e^x-1},2tdt=e^x dx,dx=\frac{2tdt}{t^2+1}|=2\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\pi-\text{сходится}$$

$$\int_0^\infty\frac{\arctan\alpha x-\arctan\beta x}{x}dx=\int_0^1\frac{\arctan\alpha x-\arctan\beta x}{x}dx+\int_1^\infty\frac{\arctan\alpha x-\arctan\beta x}{x}dx=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\int_x^1\frac{\arctan\alpha t-\arctan\beta t}{t}dt+\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\arctan\alpha t-\arctan\beta t}{t}dt$$

$$\lim_{x\to 0+0}\int_x^1\frac{\arctan\alpha t-\arctan\beta t}{t}dt\sim\lim_{x\to 0+0}\int_x^1\frac{\alpha t-\beta t}{t}dt=\lim_{x\to 0+0}\int_x^1(\alpha-\beta)dt=c$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\arctan\alpha t-\arctan\beta t}{t}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{-\arctan\frac{1}{\alpha t}+\arctan\frac{1}{\beta t}}{t}dt\sim\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{-\frac{1}{\alpha t}+\frac{1}{\beta t}}{t}dt=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta t^2}dt=c\Rightarrow\text{весь интеграл сходится}$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{(1+x^2)^2}=\int_0^1\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{(1+x^2)^2}+\int_1^\infty\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\int_x^1\frac{t^{\frac{5}{2}}dt}{(1+t^2)^2}+\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{t^{\frac{5}{2}}dt}{(1+t^2)^2}$$

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^1\frac{t^{\frac{5}{2}}dt}{(1+t^2)^2}\sim\lim_{x\to 0+}\int_x^1 t^{\frac{5}{2}dt}-\text{сходится}$$

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{t^{\frac{5}{2}}dt}{(1+t^2)^2} \leqslant \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{t^{\frac{5}{2}}dt}{t^4} = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} - \text{сходится, значит весь интеграл сходится}$$

$$\int_1^\infty \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)dx$$

Так как синус стремится к нулю, логарифм стремится к нулю, значит можем применить эквивалентность

$$\Rightarrow \int_1^\infty \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)dx \sim \int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx \sim \int_1^\infty \frac{1}{x}dx - \text{расходится}$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x^{\frac{4}{3}}} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x^2} - \text{сходится}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx + \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t^p}dt + \lim_{x\to\infty+}\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^p}dt$$

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{\ln(1+t)}{t^p}dt \sim \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{t^{p-1}}dt - \text{сходится при } \ p<2$$

$$\lim_{x\to\infty+}\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^p}dt \leqslant \lim_{x\to\infty+}\int_1^x \frac{t}{t^p} = \lim_{x\to\infty+}\int_1^x \frac{1}{t^{p-1}} - \text{сходится при } p>1$$

значит интеграл сходится при $1<p<2$