Алгебра

ДЗ 7

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Определите все значения параметра $b \in \mathbb{R}$, при которых многочлен $f = x^3y^2z + bxyz^3$ принадлежит идеалу $I = (x^2y + 2z^2, y^2 - yz)$ кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$.

Решение:

Найдём базис Грёбнера

$$L(f_1) = x^2y, L(f_2) = y^2$$

$$m = \text{lcm}(L(f_1), L(f_2)) = x^2y^2$$

$$m_1 = y, m_2 = x^2$$

$$S(f_1, f_2) = y(x^2y + 2z^2) - x^2(y^2 - yz) = 2yz^2 + x^2yz$$

$$2yz^2 + x^2yz \underset{-z}{\overset{f_1}{\to}} 2yz^2 - 2z^3 - \text{остаток, добавляем в систему как } \ f_3$$

$$I = (x^2y + 2z^2, y^2 - yz, 2yz^2 - 2z^3)$$

$$S(f_1, f_2) = 2yz^2 + x^2yz$$

$$2yz^2 + x^2yz \to 0$$

$$S(f_1, f_3) = \frac{2x^2yz^2}{x^2y}(x^2y + 2z^2) - \frac{2x^2yz^2}{2yz^2}(2yz^2 - 2z^3) = 2z^2(x^2y + 2z^2) - x^2(2yz^2 - 2z^3) = 4z^4 + 2x^2z^3$$

$$4z^4 + 2x^2z^3 - \text{остаток, добавляем в систему как } \ f_4$$

$$F = (x^2y + 2z^2, y^2 - yz, 2yz^2 - 2z^3, 4z^4 + 2x^2z^3)$$

$$S(f_2, f_3) = \frac{2y^2z^2}{y^2}(y^2 - yz) - \frac{2y^2z^2}{2yz^2}(2yz^2 - 2z^3) = 2z^2(y^2 - yz) - y(2yz^2 - 2z^3) = -2yz^3 + 2yz^3 = 0$$

$$S(f_1, f_4) = \frac{2x^2yz^3}{x^2y}(x^2y + 2z^2) - \frac{2x^2yz^3}{2x^2z^3}(4z^4 + 2x^2z^3) = 2z^3(x^2y + 2z^2) - y(4z^4 + 2x^2z^3) = 4z^5 - 4yz^4$$

$$4z^5 - 4yz^4 \underset{2z^2}{\overset{f_3}{\to}} 4z^5 - 4yz^4 + 4yz^4 - 4z^5 = 0$$

$$\gcd(f_2, f_4) = c \Rightarrow S(f_2, f_4) \to 0$$

$$S(f_3, f_4) = \frac{2x^2yz^3}{2yz^2}(2yz^2 - 2z^3) - \frac{2x^2yz^3}{2x^2z^3}(4z^4 + 2x^2z^3) = x^2z(2yz^2 - 2z^3) - y(4z^4 + 2x^2z^3) = -2x^2z^4 - 4yz^4$$

$$-2x^2z^4 - 4yz^4 \underset{z}{\overset{f_4}{\to}} -2x^2z^4 - 4yz^4 + 4z^5 + 2x^2z^4 = -4yz^4 + 4z^5 \underset{2z^2}{\overset{f_3}{\to}} -4yz^4 + 4z^5 + 4yz^4 - 4z^5 = 0$$

$$\Rightarrow F = (x^2y + 2z^2, y^2 - yz, 2yz^2 - 2z^3, 4z^4 + 2x^2z^3) - \text{базис}$$

Редуцируем исходный многочлен относительно F, хотим 0

$$x^3y^2z + bxyz^3 \underset{-xyz}{\overset{f_1}{\to}} x^3y^2z + bxyz^3 - x^3y^2z - 2xyz^3 = bxyz^3 - 2xyz^3 = 0 \Rightarrow b = 2$$

Ответ:

2

Задание 2

Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале

$$(y^3 + 3xy, xy^2 + 2x^2 + y, x^2y - y^2) \subseteq \mathbb{R}[x, y]$$

относительно лексикографического порядка, задаваемого условием $x > y$.

Решение:

$$L(f_1) = 3xy, L(f_2) = 2x^2, L(f_3) = x^2y$$

$$S(f_1, f_2) = \frac{6x^2y}{3xy}(y^3 + 3xy) - \frac{6x^2y}{2x^2}(xy^2 + 2x^2 + y) = 2x(y^3 + 3xy) - 3y(xy^2 + 2x^2 + y) = 2xy^3 + 6x^2y - 3xy^3 -$$

$$-6x^2y - 3y^2 = -xy^3 - 3y^2$$

$$-xy^3 - 3y^2 \underset{\frac{1}{3}y^2}{\overset{f_1}{\to}} -xy^3 - 3y^2 + \frac{1}{3}y^5 + xy^3 = -9y^2 + y^5 - \text{остаток, добавляем в систему как } f_4, L(f_4) = y^5$$

$$F = (y^3 + 3xy, xy^2 + 2x^2 + y, x^2y - y^2, -9y^2 + y^5)$$

$$S(f_1, f_3) = \frac{3x^2y}{3xy}(y^3 + 3xy) - \frac{3x^2y}{x^2y}(x^2y - y^2) = x(y^3 + 3xy) - 3(x^2y - y^2) = xy^3 + 3y^2 - \text{уже такой был, скипаем}$$

$$S(f_2, f_3) = \frac{2x^2y}{2x^2}(xy^2 + 2x^2 + y) - \frac{2x^2y}{x^2y}(x^2y - y^2) = xy^3 + 2x^2y + y^2 - 2x^2y + 2y^2 = xy^3 + 3y^2$$

$$S(f_1, f_4) = \frac{3xy^5}{3xy}(y^3 + 3xy) - \frac{3xy^5}{y^5}(-9y^2 + y^5) = y^7 + 3xy^5 + 27xy^2 - 3xy^5 = y^7 + 27xy^2$$

$$y^7 + 27xy^2 \underset{-9y}{\overset{f_1}{\to}} y^7 + 27xy^2 - 9y^4 - 27xy^2 = y^7 - 9y^4 \underset{-y^2}{\overset{f_4}{\to}} 0$$

$$\gcd(f_2, f_4) = c \Rightarrow S(f_2, f_4) \to 0$$

$$S(f_3, f_4) = \frac{x^2y^5}{x^2y}(x^2y - y^2) - \frac{x^2y^5}{y^5}(-9y^2 + y^5) = x^2y^5 - y^6 + 9x^2y^2 - x^2y^5 = 9x^2y^2 - y^6$$

$$9x^2y^2 - y^6 \underset{-3xy}{\overset{f_1}{\to}} 9x^2y^2 - y^6 - 3xy^4 - 9x^2y^2 = -3xy^4 - y^6 \underset{y^3}{\overset{f_1}{\to}} 0 \Rightarrow F - \text{базис Грёбнера}$$

Надо убрать многочлен f_3, так как $L(f_1) \mid L(f_3)$, по 3 задаче с семинара оставшиеся система также будет базисом Грёбнера. Тогда ответ:

$$F = \left(\frac{1}{3}y^3 + xy, \frac{1}{2}xy^2 + x^2 + y, -9y^2 + y^5\right)$$

Ответ:

$$F = \left(\frac{1}{3}y^3 + xy, \frac{1}{2}xy^2 + x^2 + y, -9y^2 + y^5\right)$$

Задание 3

Дан идеал $I = (x^2y + xz - 2z^2, yz - 1) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$. Найдите порождающую систему для идеала $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$.

Решение:

По утверждению с семинара найдём базис Грёбнера при порядке $z > y > x$.

$$L(f_1) = -2z^2, L(f_2) = zy$$

$$S(f_1, f_2) = \frac{-2z^2y}{-2z^2}(x^2y + xz - 2z^2) - \frac{-2z^2y}{zy}(yz - 1) = x^2y^2 + zyx - 2z^2y + 2z^2y - 2z = y^2x^2 + zyx - 2z$$

$$y^2x^2 + zyx - 2z \xrightarrow[-x]{f_2} y^2x^2 + zyx - 2z - zyx + x = y^2x^2 - 2z + x - \text{остаток,добаляем в систему как } \ f_3$$

$$F = (x^2y + xz - 2z^2, yz - 1, y^2x^2 - 2z + x)$$

$$L(f_3) = -2z$$

$$S(f_2, f_3) = \frac{-2zy}{zy}(yz - 1) - \frac{-2zy}{-2z}(y^2x^2 - 2z + x) = -2yz + 2 - y^3x^2 + 2yz - yx = -y^3x^2 + 2 - yx$$

$$-y^3x^2 + 2 - yx - \text{остаток, добавляем в систему как } f_4$$

$$S(f_1, f_3) \to 0$$

$$F = (x^2y + xz - 2z^2, yz - 1, y^2x^2 - 2z + x, -y^3x^2 + 2 - yx)$$

$$L(f_4) = -y^3x^2$$

$$\gcd(f_1, f_4) = c \Rightarrow S(f_1, f_4) \to 0$$

$$S(f_2, f_4) = \frac{-zy^3x^2}{zy}(yz - 1) - \frac{-zy^3x^2}{-y^3x^2}(-y^3x^2 + 2 - yx) = -zy^3x^2 + y^2x^2 + zy^3x^2 - 2z + zyx = y^2x^2 - 2z + zyx$$

$$y^2x^2 - 2z + zyx \xrightarrow[-x]{f_2} y^2x^2 - 2z + zyx - zyx + x = y^2x^2 - 2z + x \xrightarrow{f_3} 0$$

$$\gcd(f_3, f_4) = c \Rightarrow S(f_3, f_4) \to 0$$

$$\Rightarrow F - \text{базис Грёбнера}$$

Так как мы пересекаем с $\mathbb{R}[xy]$, то из F надо оставить многочлены без z, то есть $F = (-y^3x^2 + 2 - yx)$

Ответ:

$$F = (-y^3x^2 + 2 - yx)$$