Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 24

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найти псевдорешение СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

двумя способами: через ортогональную проекцию и по явной формуле.

Решение:

Найдем ортогональную проекцию вектора $(-1, 1, 3, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = (1, 2, 1, 1)$$

$$f_2 = (1, 1, 1, 2) - \frac{6}{7} \cdot (1, 2, 1, 1) = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

$$f_3 = (-3, -2, 1, -3) + \frac{9}{7} \cdot (1, 2, 1, 1) + \frac{16}{13} \cdot \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{8}{7}\right) = \left(-\frac{20}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{32}{13}, -\frac{4}{13}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \left(-\frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{22}{7}, \frac{6}{7}\right) - \text{проекция}$$

Остаётся решить исходное СЛУ для проекции, домножим все на 7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 7 & -21 & -5 \\ 14 & 7 & -14 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 22 \\ 7 & 14 & -21 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{17}{28}, \frac{11}{7}, \frac{27}{28}\right)$$

Теперь вычислим по явной формуле. Столбцы A л/н, так что все корректно.

$$x_0 = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{28} \\ \frac{11}{7} \\ \frac{27}{28} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\left(\frac{17}{28}, \frac{11}{7}, \frac{27}{28}\right)$$

Задание 2

Найти объём параллелепипеда в $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы:

$$1.(1,1,1,1),(1,-1,-1,1),(2,1,1,3);$$
$$2.(1,1,1,1),(1,-1,-1,1),(2,1,1,3),(0,1,-1,0).$$

Решение:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow G = A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{Vol} = |\det(A)| = 4$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Vol} = |\det(A)| = 4$$

Ответ:

1. 4
2. 4

Задание 3

Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

Решение:

Заметим, что диагональ параллелограмма делит его на два равных по площади трекгольника, значит площадь одного равна половине площади параллелограмма.
Введем базовую тройку векторов $x = \overline{AC}, y = \overline{AB}, z = \overline{AD}$. Тогда в силу свойств векторного произведения:

$$\overline{S_{\text{ABD}}} = \frac{1}{2}[y, z]$$

$$\overline{S_{\text{ACD}}} = \frac{1}{2}[z, x]$$

$$\overline{S_{\text{ABC}}} = \frac{1}{2}[x, y]$$

$$\overline{S_{\text{BCD}}} = \frac{1}{2}[x - y, z - y]$$

Здесь каждый вектор является перпендикуляром к соответствующей грани. Тогда их сумма равна

$$\frac{1}{2}([y, z] + [z, x] + [x, y] + [x - y, z - y]) =$$

$$= \frac{1}{2}([y, z] + [z, x] + [x, y] + [x, z - y] + [-y, z - y]) =$$

$$= \frac{1}{2}([y, z] + [z, x] + [x, y] + [x, z] + [x, -y] + [-y, z] + [-y, -y]) = 0(\text{из свойств линейности и кососимм-ти})$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Три вектора $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ связаны соотношениями

$$a = [b, c], b = [c, a], c = [a, b].$$

Найти длины этих векторов и углы между ними.

Решение:

Углы между этими векторами прямые, так как $a \perp b, c; b \perp c, a; c \perp a, b$. Так как длина векторного произведения это площадь параллелограмма(в нашем случае прямоугольника), то

$$\begin{cases} a = bc \\ b = ca \\ c = ab \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |a| = 1 \\ |b| = 1 \\ |c| = 1 \end{cases}.$$

Ответ:

Углы прямые, длина каждого 1

Задание 5

1. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках
$$A(-1,0,1), B(0,2,-3), C(4,4,1).$$
2. Используя векторное произведение, вычислить площадь плоского четырёхугольника с вершинами
$$A(-1,2), B(4,3), C(5,-1), D(2,0).$$

Решение:

1.
$$\overline{AB}(1,2,-4), \overline{AC}(5,4,0)$$
$$\cos(\angle BAC) = \frac{13}{\sqrt{861}}$$
$$\sin(\angle BAC) = \frac{2\sqrt{148953}}{861}$$
$$S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{41} \cdot \frac{2\sqrt{148953}}{861} = \sqrt{173}$$
2. Добавим точкам третью нулевую координату. $S_{\text{ABCD}} = S_{\text{ABD}} + S_{\text{BDC}}$.
$$S_{\text{ABD}} = \frac{1}{2}\left|\left|\left[\overline{AB}, \overline{AD}\right]\right|\right| = \frac{13}{2}$$
$$S_{\text{BDC}} = \frac{1}{2}\left|\left|\left[\overline{BD}, \overline{BC}\right]\right|\right| = \frac{11}{2}$$
$$\Rightarrow S_{\text{ABCD}} = 12$$

Ответ:

1. $\sqrt{173}$
2. 12

Задание 6

Даны два вектора

$$a = (1, 1, 1) \ \text{ и } \ b = (1, 0, 0).$$

Найти единичный вектор c, перпендикулярный вектору a, образующий с вектором b угол в $60°$ и направленный так, чтобы тройка векторов a, b, c была левой.

Решение:

Пусть $c = (x, y, z)$. Тогда из условия перпендикулярность имеем

$$x + y + z = 0$$

Из условия на угол имеем

$$\cos(60°) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = x = \frac{1}{2}(\text{так как вектор должен быть единичной длины})$$

Из условия на единичную длину и перпендикулярность имеем систему

$$\begin{cases} y + z = -\frac{1}{2} \\ y^2 + z^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{aligned} (y_1, z_1) &= \left(\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \\ (y_2, z_2) &= \left(\tfrac{\sqrt{5}-1}{4}, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) \end{aligned} \right.$$

Чтобы тройка векторов была левой, выбираем первое решение(по правилу левой руки).

Ответ:

$$c = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

Задание 7

Даны три вектора

$$a = (8, 4, 1), b = (2, 2, 1), c = (1, 1, 1).$$

Найти единичный вектор d, компланарный векторам a и b, перпендикулярный вектору c и направленный так, чтобы упорялоченные тройки векторов a, b, c и a, d, c имели противоположную ориентацию.

Решение:

Пусть $d = (x, y, z)$. Из условия перпендикулярности имеем

$$x + y + z = 0$$

Условие на компланарность можно записать как СЛУ на коэффициенты при a и b

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z \\ 4 & 2 & y \\ 8 & 2 & x \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z \\ 0 & -2 & y-4z \\ 0 & -6 & x-8z \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z \\ 0 & -2 & y-4z \\ 0 & 0 & x+4z-3y \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 2z-\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & x+4z-3y \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{y}{2}-z \\ 0 & 1 & 2z-\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & x+4z-3y \end{array}\right) \Rightarrow x + 4z - 3y = 0$$

Найдем смешанное произведение векторов a, b, c. Это будет объём параллелепипеда, натянутого на эти векторы

$$(a, b, c) = \det\left(\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 4$$

Векторы a, d, c должны иметь противоположную ориентцию, то есть их смешанное произведение должно быть -4

$$(a, d, c) = \det\left(\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = -3x + 7y - 4z = -4$$

Соединяя все условия, имеем СЛУ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{14}{13}, -\frac{6}{13}, -\frac{8}{13}\right) = d$$

Отнормируем d

$$d = \left(\frac{14}{\sqrt{296}}, -\frac{6}{\sqrt{296}}, -\frac{8}{\sqrt{296}}\right)$$

Ответ:

$$d = \left(\frac{14}{\sqrt{296}}, -\frac{6}{\sqrt{296}}, -\frac{8}{\sqrt{296}}\right)$$

Задание 8

Вычислить объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_!$, зная его вершину $A(1,2,3)$ и концы выходящих из неё рёбер

$$B(9,6,4), D(3,0,4), A_1(5,2,6).$$

Решение:

$$\overline{AB}(8,4,1), \overline{AD}(2,-2,1), \overline{AA_1}(4,0,3)$$

Искомый объём есть смешанное произведение выше описанных векторов

$$\left(\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}\right) = \left|\det\left(\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\right| = 48$$

Ответ:

48