Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 16

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Рассмотрим подпространства

$$U = \langle (1,1,1,1),\, (-1,-2,0,1) \rangle, W = \langle (-1,-1,1,-1),\, (2,2,0,1) \rangle$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$. Доказать, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ и найти проекцию вектора (4,2,4,4) на подпространство U параллельно подпространству W.

Решение:

(1) Докажем, что U и W линейно независимые. Сначала найдем размерность U. Для этого приводим к УСВ соответствующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U) = 2$$

(2) Найдем размерность W. Для этого приводим к УСВ соответствующую матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W) = 2$$

(3) Найдем размерность $U + W$. Для этого приводим к УСВ соответствующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U + W) = 4$$

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) \Rightarrow U \text{ и } W \text{ линейно независимые}$$

(4) Покажем, что векторы стандартного базиса принадлежат $U + W$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 + 2v_3 + 3v_4, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}v_1 - v_2 - \frac{3}{2}v_3 - 2v_4$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - v_3 - v_4, \text{ где } v_1, .., v_4 \text{ векторы из } U + W \text{ соответственно}$$

$\Rightarrow$ векторы стандартного базиса принадлежат линейной оболочке $U + W$, значит $U + W$ порождает $\mathbb{R}^4$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^4 = U \oplus W$

(5) Найдем проекцию $(4, 2, 4, 4)$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u\ \in U} + \underbrace{3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w\ \in W} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ — искомая проекция}$$

Ответ:

ч.т.д

$u = (-1, -3, 1, 3)$

Задание 2

Пусть, как в задаче из семинара, подпространства U и W в $\mathbb{R}^n$ заданы уравнениями

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

соответственно. Для произвольного вектора $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ найти его проекции на каждое из двух подпространств вдоль другого.

Решение:

На семинаре мы доказали, что $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, а также нашли базисы этих подпространств. $e_1 - e_i \ \forall\ i = 2, \dots n$ и $e_1 + \dots + e_n$ соответственно.

Для нахождения проекции составим и преобразуем соответствующую матрицу на коэффициенты

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & a_1 \\ -1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a_n \end{array}\right)$$

Прибавим к первой строке все остальные, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & n & a_1 + \dots + a_n \\ -1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a_n \end{array}\right)$$

Далее из каждой строки, кроме первой, вычтем первую строку с коэффициентом $-\frac{1}{n}$, затем первую строку поделим на n, все остальные строки умножим на -1, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \\ 1 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a_1 + \dots + a_n - n^2 a_n}{n^2} \end{array}\right)$$

Выпишем проекцию на U

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{a_1 + \dots + a_n - n^2 a_i}{n^2} \cdot (e_1 - e_i)$$

Выпишем проекцию на W

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot (e_1 + \dots + e_n)$$

Ответ:

Проекция на U вдоль W

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{a_1 + ... + a_n - n^2 a_i}{n^2} \cdot (e_1 - e_i)$$

Проекция на W вдоль U

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \cdot (e_1 + ... + e_n)$$

Задание 3

Доказать, что пространство матриц $M_n(\mathbb{R})$ является прямой суммой подпространства симметричных матриц и подпространства кососимметричных матриц, и найти проекции матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

на каждое из этих двух подпространств параллельно другому подпространству.

Решение:

Обозначим подпространство симметричных матриц и подпространство кососимметричных матриц как U и W соответственно.
(1) Докажем, что U и W линейно независимые.

Заметим, что U изоморфно пространству верхнетреугольных матриц(так как симметричную матрицу можно однозначно задать по верхнетреугольному куску). W также изоморфно пространству верхнетреугольных матриц(так как кососимметричную матрицу можно однозначно задать по верхнетреугольному куску). Пространство верхнетреугольных матриц в свою очередь изоморфно $\mathbb{R}^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$, значит U и W изоморфно $\mathbb{R}^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$. Заметим, что $U \cap W = \{0\}$, так как матрица попадет в пересечение, только если она была построена по нулевому вектору из $\mathbb{R}^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$, иначе два вектора из $\mathbb{R}^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$ всегда дадут разные матрицы из U и W соответственно. Получили, что U и W линейно независимые.

(2) Докажем, что $M_n(\mathbb{R}) = U + W$

Заметим, что $\dim(U+W) = n\cdot(n-1) = \dim(M_n(\mathbb{R}))(M_n(\mathbb{R})$ изоморфно $\mathbb{R}^{n\cdot(n-1)})$. $U+W$ изоморфно $\mathbb{R}^{n\cdot(n-1)}$. По вектору $v \in U+W$, имеющему размерность $n\cdot(n-1)$, можно однозначно построить квадратную матрицу $\Rightarrow U+W$ порождает пространство квадратных матриц $\Rightarrow$ исходное утверждение доказано.

(3) Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{u\ \in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{w\ \in W} \Rightarrow$$

проекция на U:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

проекция на W:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ответ:

проекция на U вдоль W:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

проекция на W вдоль U:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Задание 4

Рассмотрим в пространстве $M_n(\mathbb{R})$ подпространства U и W, где U состоит из всех симметричных матриц, а W — из всех строго верхнетреугольных (то есть верхнетреугольных с нулями на диагонали) матриц. Доказать, что $M_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$ и найти проекции матрицы из предыдущей задачи 3 на каждое из этих двух подпространств вдоль другого.

Решение:

Очевидно, что $U \cap W = \{0\}$(чтобы в симметричной матрице на диагонали и под диагональю были нули, она должна быть нулевой) $\Rightarrow U$ и W линейно независимые. Не менее очевидно, что $U + W$ порождает $M_n(\mathbb{R})$(любую квадратную матрицу можно получить как сумму симметричной матрицы, в которой под главной диагональю мы берем числа из исходной квадратной матрицы, и строго верхнетреугольной матрицы, в которой над диагональю мы берем такие числа, чтобы в результате суммы получилась исходная квадратная матрицы) $\Rightarrow M_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}}_{u \in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}}_{w \in W} \Rightarrow$$

проекция на U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

проекция на W:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

проекция на U вдоль W:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

проекция на W вдоль U:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^5$ подпространства U_1, U_2 и U_3, где

$$U_1 = \langle (1,1,1,1,0) \rangle, \quad U_2 = \langle (0,1,0,0,-1) \rangle$$

и U_3 задано системой

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Доказать, что $\mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$.

Решение:

(1) Зададим U_3 первым способом. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$U_3 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

(2) Докажем, что U_1 и U_2 линенйно независимые. Для этого найдем размерность $U_1 + U_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = 2$$

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) \Rightarrow U_1 \text{ и } U_2 \text{ линейно независимые}$$

(3) $U_1 \oplus U_2 = \langle (1,1,1,1,0), (0,1,0,0,-1) \rangle$. Докажем, что $U_1 \oplus U_2$ и U_3 линейно независимые. Для этого найдем размерность $(U_1 \oplus U_2) + U_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim((U_1 \oplus U_2) + U_3) = 5$$

$$\Rightarrow \dim((U_1 \oplus U_2) + U_3) = \dim(U_1 \oplus U_2) + \dim(U_3) = 5 \Rightarrow U_1 \oplus U_2 \text{ и } U_3 \text{ линейно независимые}$$

(4) $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 =$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Покажем, что $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ порождает $\mathbb{R}^5$. Рассмотрим матричное уравнение

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{векторы стандартного базиса лежат в нашем пространстве, значит оно порождает } \mathbb{R}^5$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^5 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 6

Пусть U – подпространство в $\mathbb{R}^4$, натянутое на векторы $(1, 1, 1, -1)$, $(2, 1, 1, -2)$, $(0, 1, 1, 0)$.

1. Указать, предъявив базис, какое-нибудь дополнительное к U подпространство $W \subseteq \mathbb{R}^4$(то есть такое, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$)
2. Указать, предъявив базис, какое-нибудь другое дополнительное к U подпространство $W' \subseteq \mathbb{R}^4$(обратите внимание, что предъявление разных базисов ещё не означает, что подпространства разные!).

Решение:

1.
   (1) Найдем базис U

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{как базис берем первые два вектора}$$

   (2) Воспользуемся алгоритмом дополнения линейно независимой системы до базиса всего $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{надо дополнить векторами } e_3, e_4$$

   Тогда дополнительным к U является пространство $W = \langle e_3, e_4 \rangle$. Его базис e_3, e_4

2. Воспользуемся вторым алгоритмом дополнения линейно независимой системы до базиса всего $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{надо дополнить векторами } e_1, e_2$$

   Тогда дополнительным к U является пространство $W = \langle e_1, e_2 \rangle$. Его базис e_1, e_2

Ответ:

1. $W = \langle e_3, e_4 \rangle$
2. $W = \langle e_1, e_2 \rangle$

Задание 7

В пространстве $\mathbb{R}^4$ даны вектор $v = (1, 1, 1, 1)$ и подпространство U, являющееся множеством решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Найти какое-нибудь подпространство $W \subseteq \mathbb{R}^4$ такое, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ и проекция вектора v на U вдоль W равна $(1,\ -1,\ -1,\ 0)$.

Решение:

(1) Зададим U первым способом. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

(2) Заметим, что как W можно взять

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

(3) Покажем, что U и W линейно независимые:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ все переменные главные } \Rightarrow \text{ линейно независимые}$$

(4) Покажем, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Рассмотрим матричное уравнение

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ векторы из стандартного базиса лежат в } \ U \oplus W$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^4 = U \oplus W$$

(5) Проверим, что с проекцией вектора v все ок

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u \in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w \in W} \Rightarrow \text{все ок}$$

Ответ:

$$W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Задание 8

Доказать, что пространство всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ раскладывается в прямую сумму подпространств U и W, где

$$U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$$

и $W = \langle 1 \rangle$(то есть W – это подпространство постоянных функций). Для произвольной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ найти проекции на каждое из этих двух подпространств вдоль другого подпространства.

Решение:

(1) Заметим, что $U \cap W = \{0\}$, так как функции из U и W соответственно могут быть одинаковыми, только если функция из U во всех точках равна нулю и функция из W во всех точках 0. Значит U и W линейно независимые.

(2) Представим функцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ как бесконечномерный вектор ее значений, вида

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & ... \end{pmatrix}, \text{ где } x_0 = f(0)$$

Тогда произвольную функцию можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ ... \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ ... \end{pmatrix}}_{u\ \in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ x_0 \\ ... \end{pmatrix}}_{w\ \in W}$$

Проекция на U

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ ... \end{pmatrix}$$

Проекция на W

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ x_0 \\ ... \end{pmatrix}$$

Ответ:

Проекция на U вдоль W

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_0 \\ x_2 - x_0 \\ ... \end{pmatrix}$$

Проекция на W вдоль U

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ x_0 \\ ... \end{pmatrix}$$