

Математический анализ

ДЗ 12

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Проведя полное исследование (в частности, найдя промежутки монотонности и промежутки выпуклости/вогнутости), постройте графики функций

$$\text{а) } f(x) = (x+1)(x-2)^2; \text{ б) } f(x) = \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3};$$

$$\text{в) } f(x) = \sqrt{x} \ln x; \text{ г) } f(x) = (x-6)e^{-\frac{1}{x}}$$

Решение:

1. $f(x) = (x+1)(x-2)^2$

1.1 $D(f) = \mathbb{R}$

1.2 Функция не является четной, ни нечетной, не является периодической

1.3 Пересечение с Оу: $f(0)=4$

Пересечение с Ох: $-1, 2$

1.4 $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$

1.5 Возрастает при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Убывает при $x \in (0, 2)$

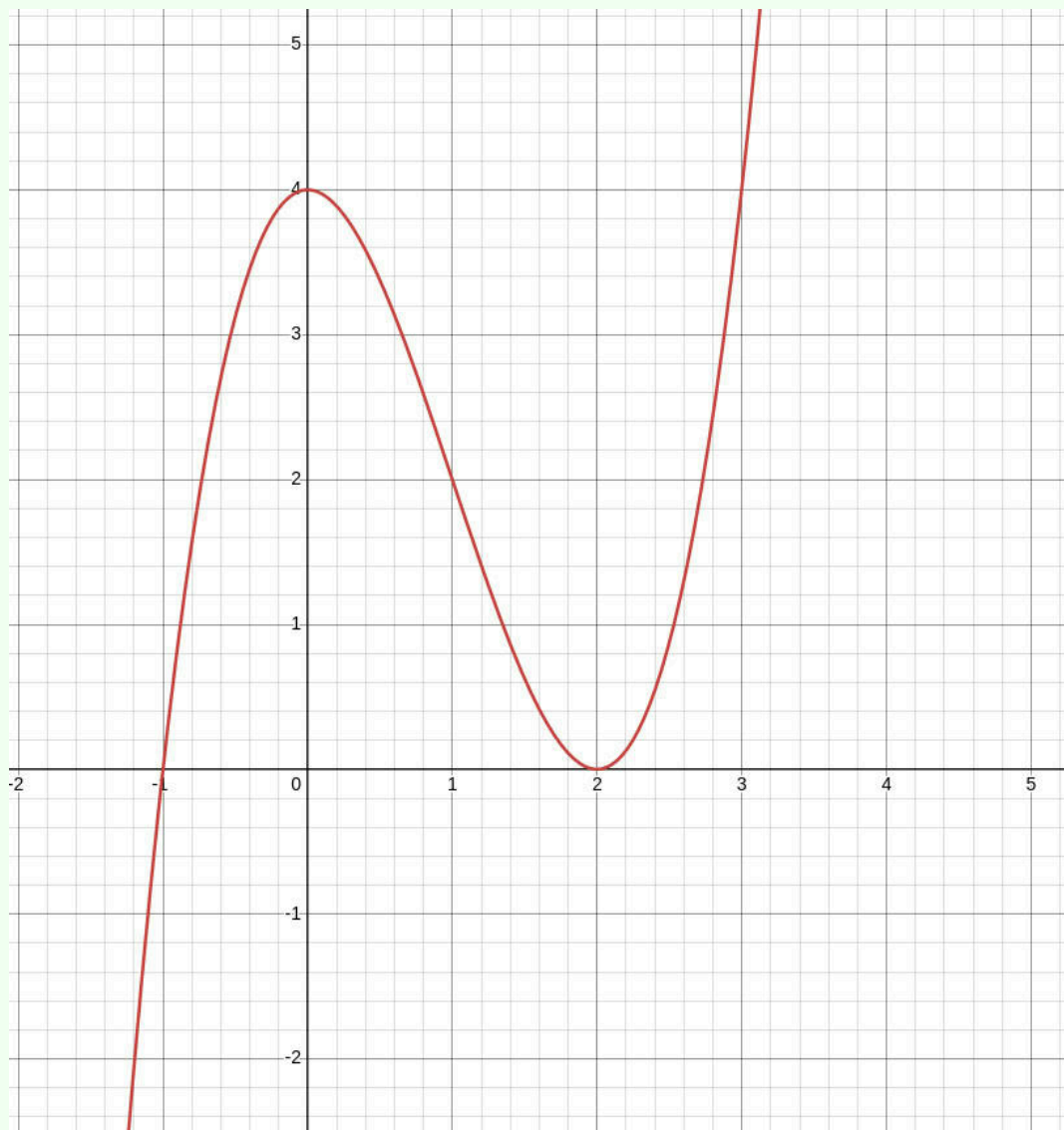
1.6 Выпукла при $x \in (1, +\infty)$

Вогнута при $x \in (-\infty, 1)$

1.7 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; 2$ — точки экстремума

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ — точка перегиба

1.8 Асимптот нет



2. $f(x) = \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$

1.1 $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1.2 Функция не является четной, ни нечетной, не является периодической, в -1 разрыв 2-го рода

1.3 Пересечение с Оу: $f(0)=0$

Пересечение с Ох: $-\frac{4}{3}, 0$

1.4 $f'(x) = \frac{3x^4+12x^3+12x^2}{(x+1)^4}$; $f''(x) = \frac{12x^2+24x}{(x+1)^5}$

1.5 Возрастает при $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Убывает при $x \in \emptyset$

1.6 Выпукла при $x \in (-2, -1) \cup (0, +\infty)$

Вогнута при $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$

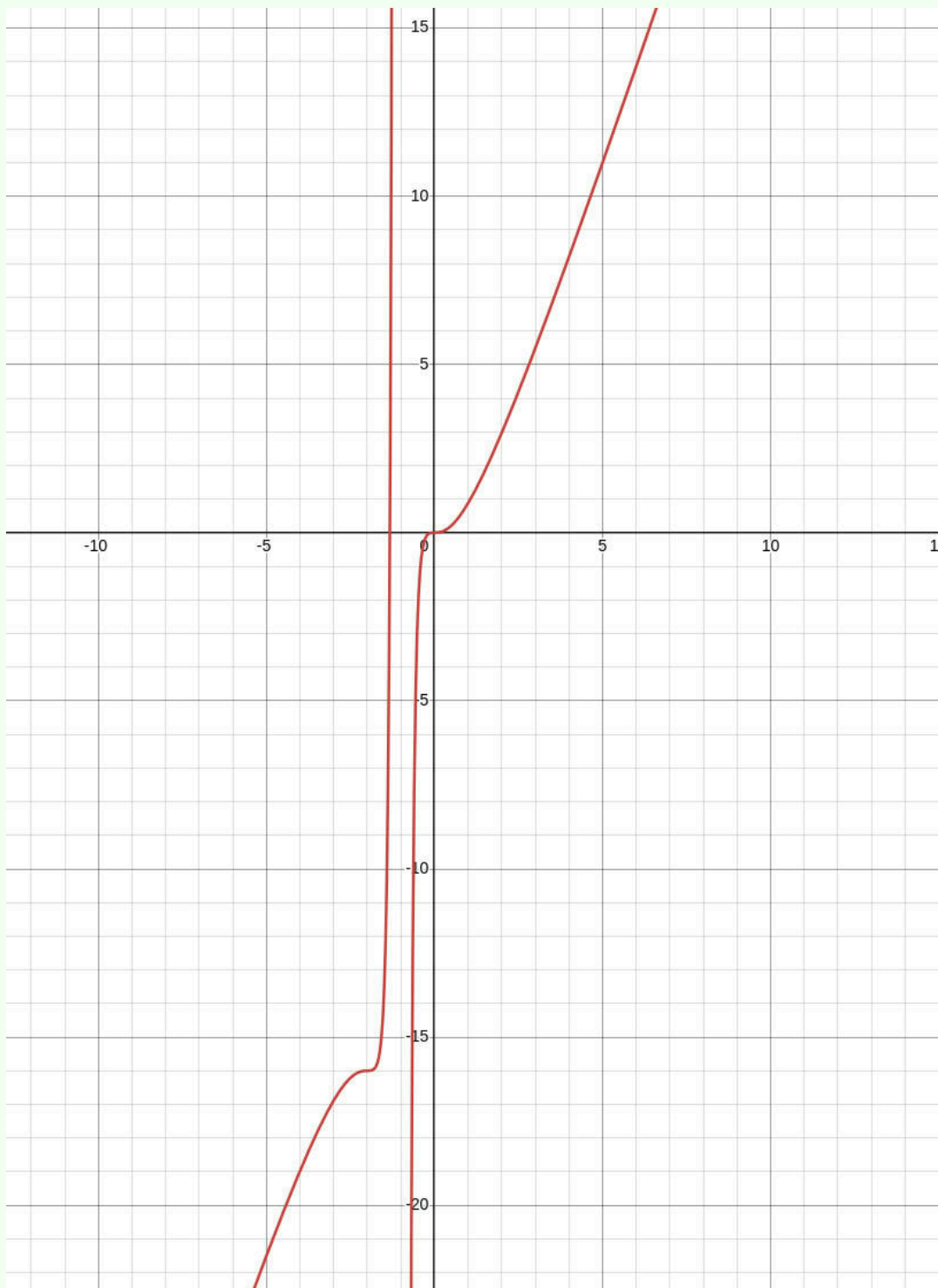
1.7 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2; 0$ — точки экстремума

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2; 0$ — точки перегиба

1.8 $x = -1$ — вертикальная асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(3x+4)}{x(x+1)^3} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3} - 3x = -5 \Rightarrow y = 3x - 5 \text{ наклонная асимптота}$$



3. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

1.1 $D(f) = (0, +\infty)$

1.2 Функция не является четной, ни нечетной, не является периодической, в 0 устранимый разрыв

1.3 Пересечение с Оу: не определено

Пересечение с Ох: 1

1.4 $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}}$

1.5 Возрастает при $x \in (\frac{1}{e^2}, +\infty)$

Убывает при $x \in (0, \frac{1}{e^2})$

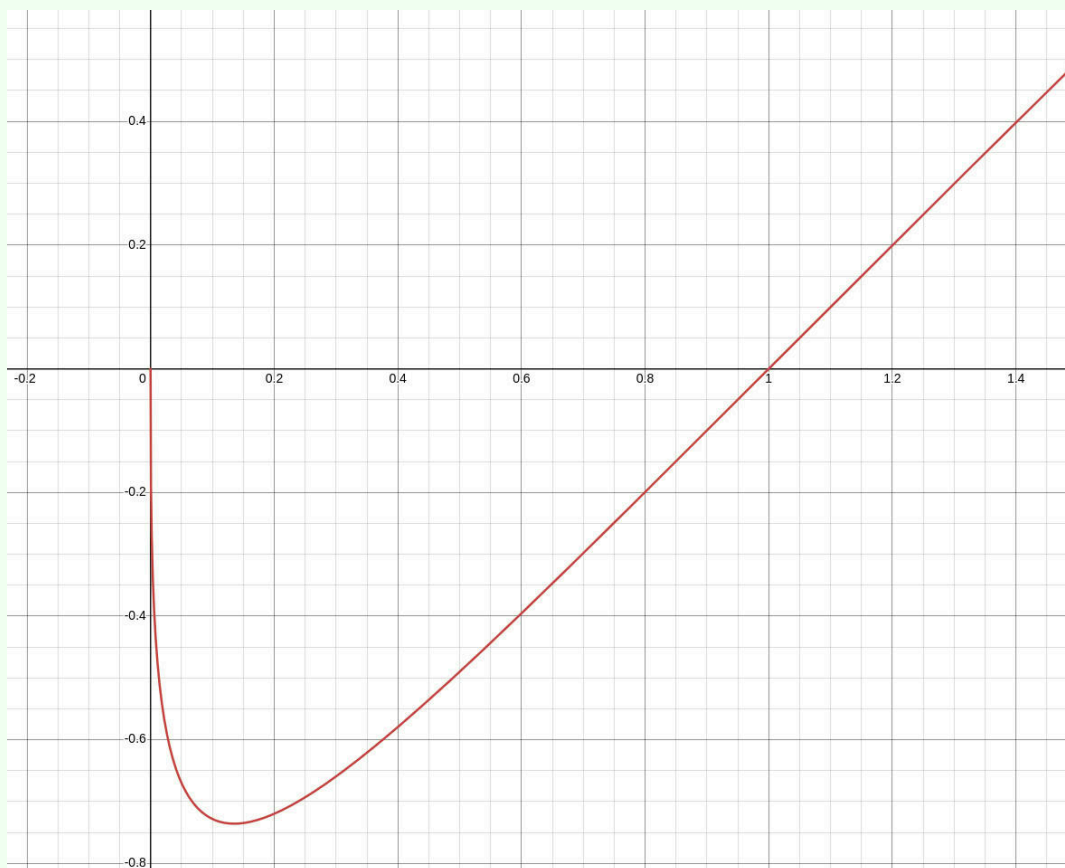
1.6 Выпукла при $x \in (0, 1)$

Вогнута при $x \in (1, +\infty)$

1.7 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e^2}$ — точка экстремума

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ — точка перегиба}$$

1.8 Асимптот нет



4. $f(x) = (x - 6)e^{-\frac{1}{x}}$

1.1 $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.2 Функция не является четной, ни нечетной, не является периодической, в 0 разрыв 2-го рода

1.3 Пересечение с Оу: не определено

Пересечение с Ох: 6

1.4 $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{xe^{-\frac{1}{x}} - 6e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}; f''(x) = \frac{13x-6}{e^{\frac{1}{x}}x^4}$

1.5 Возрастает при $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

Убывает при $x \in (-3, 0) \cup (0, 2)$

1.6 Выпукла при $x \in (\frac{6}{13}, +\infty)$

Вогнута при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{6}{13})$

1.7 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3; 2$ — точки экстремума

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{13}$ — точка перегиба

1.8 $x = 0$ — вертикальная асимптота

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-6)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-6)e^{-\frac{1}{x}} - x = -7 \Rightarrow y = x - 7 \text{ наклонная асимптота}$$

