Алгебра

ДЗ 4

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите все обратимые элементы, все делители нуля, и все нильпотентные элементы в кольце $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ с обычными операциями сложения и умножения.

Решение:

Обратимыми элементами в этом кольце будут все невырожденные матрицы, то есть матрицы, для которых выполнено соотношение $ac \neq 0 \Rightarrow a, c \neq 0$. Рассмотрим произвольный элемент $u \neq 0 \in R$. Он будет левым делителем нуля, если существует такой элемент $b \neq 0 \in R$, что $ub = 0$. Пусть $u = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ b_1 a_2 + c_1 b_2 & c_1 c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a_1 a_2 = 0 \\ b_1 a_2 + c_1 b_2 = 0 \\ c_1 c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Нам подходят матрицы вида } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a = 0, b^2 + c^2 \neq 0 \text{ и}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$$

С правыми делителями получаем вид:

$$\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_2 a_1 & 0 \\ b_2 a_1 + c_2 b_1 & c_2 c_1 \end{pmatrix} = 0$$

Нам подходят матрицы такого же вида как и с левыми делителями

Элемент называется нильпотентным, если существует такое $n \in \mathbb{R}$, что $u^n = 0, u \in R$.

$$u^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ \dots & c^n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = c = 0, b \neq 0 - \text{произвольное число, так как}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{нильпотентами являются матрицы вида}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, b \neq 0$$

Ответ:

Обратимые:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, c \neq 0$$

Делители нуля:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a = 0, b^2 + c^2 \neq 0 \quad \text{и}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$$

Нильпотенты:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, b \neq 0$$

Задание 2

Докажите, что идеал $(x-2, y)$ в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$ не является главным.

Решение:

Пусть данный идеал является главным, тогда по определению

$$(x-2, y) = (f(x, y)), f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$$

Так как $x-2 \in (f(x, y)) \Rightarrow x-2 = f(x, y) \cdot h(x, y) \Rightarrow x-2$ делится на $f(x, y)$. Аналогично y делится на $f(x, y)$, но $x-2$ и y взаимопросты, значит $f(x, y)$ может быть разве что константой. Пусть $f(x, y) = c \Rightarrow (f(x, y)) = \mathbb{Q}[x, y]$, но $(x-2, y) \neq \mathbb{Q}[x, y]$, получили противоречие, значит идеал не главный.

Ответ:

ч.т.д

Задание 3

При помощи теоремы о гомоморфизме для колец установите изоморфизм $\mathbb{C}[x]/(x^2+2x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, где $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ —кольцо с покомпонентными операциями сложения и умножения.

Решение:

Пусть $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \varphi(f) = (f(0), f(-2))$. Это гомоморфизм, так как

$$\varphi(f+g) = ((f+g)(0), (f+g)(-2)) = \varphi((f(0)+g(0), f(-2)+g(-2))) = \varphi(f) + \varphi(g)$$
$$\varphi(f \cdot g) = ((fg)(0), (fg)(-2)) = (f(0) \cdot g(0), f(-2) \cdot g(-2)) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$$

Ядром этого гомоморфизма являются многочлены, котоые делятся на x и на $x+2$, то есть на $x^2+2x \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi = (x^2+2x)$. Этот гомоморфизм сюръективен, так как если $f(0) = z_1, f(-2) = z_2$, то существует многочлен, проходящий через эти точки, например, интерполяционный многочлен Лагранжа, значит $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Тогда по теореме о гомоморфизме $\mathbb{C}[x]/\ \mathrm{Ker}\varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi \Rightarrow \mathbb{C}[x]/(x^2+2x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Ответ:

установили

Задание 4

Пусть R —коммутитивное кольцо и $I \triangleleft R$. Докажите, что факторкольцо R/I является полем тогда и только тогда, когда $I \neq R$ и не существует собственного идеала $J \triangleleft R$ с условием $I \subset J$.

Решение:

Пусть R/I – поле. Если $I = R$, то $R/I = \{0\} \Rightarrow R/I$ не поле, так как в поле $0 \neq 1 \Rightarrow I \neq R$. Пусть J – идеал, $I \subset J \Rightarrow J/I \subset R/I$, но у поля нет совственных идеалов, значит $J/I = R/I \Rightarrow R = J \Rightarrow$ второе условие из утверждения выполняется. В одну сторону доказали, докажем в другую. Пусть $a \in R/I$. Положим J – такой идеал, что $J = (a) + I$. Так как I максимален, то $J = R$. Тогда единицу можно представить как $1 = i + ra, i \in I, r \in R$, то есть переходя к R/I равенство примет вид $1 = 0 + r \cdot a = ra \Rightarrow$ a – обратим, значит R/I поле.

Ответ:

ч.т.д