Дискретная математика

ДЗ 16

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Рассмотрим частичные порядки, в которых ровно 5 минимальных и ровно 5 максимальных элементов. (Определение см. на предыдущей странице.) Найдите наименьшее количество элементов в таких порядках.

Решение:

Заметим, что в таких порядках есть хотя бы 5 элементов. Приведем пример. Возьмем 5 точек, принадлежащих прямой $y = -x$. $(1, -1)$;$(2, -2)$; $(3, -3)$; $(4, -4)$; $(5, -5)$. Они все попарно несравнимы. Тогда по определению каждый из них одновременно является и минимальным элементом, и максимальным. Тогда имеем ровно 5 минимальных и ровно 5 максимальных элементов.

Ответ:

5

Задание 2

Бинарное отношение на множестве из 7 элементов содержит ровно 20 пар. Может ли оно быть а) отношением строгого частичного порядка? б) отношением строгого линейного порядка? (В строгом линейном порядке любая пара различных элементов сравнима.)

Решение:

а) Может, как пример можно взять сравнение чисел от 1 до 7 по величине. Его также можно изобразить в виде полного ациклического графа с 21 ребром. Уберем ребро между 5 и 7. Получаем отношение строгого частичного порядка с 20 ребрами.
б) Заметим, что в ациклический граф будет являться строгим линейным порядком, если в нем проведены все ребра. В таком графе 21 ребро, а в искомом порядке должно быть 20, противоречие. Значит не может.

Ответ:

а) да
б) нет

Задание 3

Рассмотрим частичные порядки на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, в которых существует возрастающая цепь

$$1 < 2 < 3 < ... < 9$$

из 9 элементов и ровно 4 пары элементов порядка несравнимы. Сколько всего таких порядков?

Решение:

Пусть a, b, c, d – произвольные элементы из нашего порядка, несравнимые с нулем. Пусть эти элемнты не подряд идущие. Тогда, без ограничения общности, существует такое число x, что $a < x < b$. x сравним с нулем. Если $x < 0$, то по транзитивности получаем, что $a < 0$, но a нельзя сравнить с нулем(аналогичные рассуждения для b при $x > 0$), получаем противоречие, значит a, b, c, d обязаны идти подряд. Тогда существует ровно 6 порядков.

Ответ:

6

Задание 4

Найдите максимальное количество простых путей между двумя вершинами ориентированного ациклического графа на n вершинах. (Максимум берётся по всех ациклическим графам на n вершинах и всем парам вершин в графах.)

Решение:

Так как граф ациклический, то его вершины можно пронумеровать таким образом, чтобы все ребра вели из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером. Пусть в графе есть ребро между вершинами a и b, если номер a меньше номера b, тогда в таком графе проведены все ребра. В таком графе количество путей из a в b есть количество подмножеств множетсва $\{a+1, a+2, ..., b-1\}$, то есть из a в b можно попасть по любой последовательности вершин с возрастающими номерами. Максимум достигается при $a = 1$; $b = n$(тогда размер множества максимальный). Тогда количество путей равно 2^{n-2}.

Ответ:

2^{n-2}