Теория вероятностей

ДЗ 1

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Доказать формулу Бинома Ньютона: $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$. Вывести отсюда свойство для суммы биномиальных коэффициентов.

Решение:

Заметим, что если раскрыть скобки в данном выражении, то значение коэффициента при k-ой степени полинома есть количество способов выбрать k скобок из n, то есть C_n^k. Остюда получаем исходную формулу. Для вывода формулы суммы биномиальных коэффициентов достаточно подставить 1 в исходную формулу. Имеем:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Ответ:

ч.т.д.

Задание 2

В ящике находится 80 хороших деталей и 20 деталей с дефектом. Найти вероятность того, что среди выбранных 20 деталей не будет дефектных.

Решение:

$\mathbb{P}(\{\text{среди выбранных 20 деталей не будет дефектных}\}) = \dfrac{C_{100}^{20} - (C_{100}^{20} - C_{80}^{20})}{C_{100}^{20}} = \dfrac{C_{80}^{20}}{C_{100}^{20}}$

Из всех возможных перестановок вычитаем количество выбрать хотя бы одну перестановку с дефектной деталью.

Ответ:

$$\frac{C_{80}^{20}}{C_{100}^{20}}$$

Задание 3

Найдите число перестановок множества $[n]$ без фиксированных элементов.

Решение:

Пусть A_i — множество перестановок, в которых i-ый элемент остаётся на i-ом месте. Тогда число искомых перестановок есть

$$n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Из формулы включений-исключений Имеем

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$|A_i| = (n-1)! \Rightarrow \sum_i |A_i| = \binom{n}{1}(n-1)!$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)! \Rightarrow \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)!$$

$$\ldots$$

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| = (n-k)! \Rightarrow \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| = \binom{n}{k}(n-k)!$$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}(n-k)!$$

$$\Rightarrow n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}(n-k)! \text{ — число искомых перестановок}$$

Ответ:

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}(n-k)!$$

Задание 5

Задача о беспорядках: пусть $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ случайная перестановка множества $[n]$ возникающая с вероятностью $\frac{1}{n!}$. Подсчитайте

5.a вероятность того, что в точности $k \leqslant n$ чисел останутся на своих местах

5.b вероятность того, что по крайней мере одно число останется на своем месте

Решение:

а) Всего перестановок $n!$. Перестановок, в которых ровно k позиций зафиксированы:

$$\binom{n}{k}\left(n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\right) \Rightarrow$$

$$P = \frac{\binom{n}{k}\left(n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\right)}{n!}$$

b) Всего перестановок $n!$. Перестановок, где хотя бы одно число останется на своем месте можно вычислить как разница между числом всех перестановок и перестановками, где ни одно число не остаётся на своем месте, то есть

$$n! - \left(n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!}{n!}$$

Ответ:

$$P_1 = \frac{\binom{n}{k}\left(n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\right)}{n!}$$

$$P_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!}{n!}$$

Задание 6

Пусть по n конвертам раскладывается n писем случайным равновероятным образом. Найдите вероятность того, что ровно $m (m \leqslant n)$ писем окажутся в своих конвертах.

Решение:

Эта задача аналогична задаче 5.а, поэтому искомая вероятность есть

$$P = \frac{\binom{n}{m}\Big(n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\Big)}{n!}$$

Ответ:

$$P = \frac{\binom{n}{m}\Big(n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)!\Big)}{n!}$$

Задание 4

Докажите неравенство Куниаса: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \min_k \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i \neq k} \mathbb{P}(A_i \cap A_k)\right\}$

Решение:
