Математический анализ 2

ДЗ 10

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найти множество сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}} x^n$$

Решение:

$$a_n = \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{(n+1)^3+2}} \cdot \frac{3^n\sqrt{n^3+2}}{4^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4}{3}\sqrt{\frac{n^3+2}{(n+1)^3+2}}\right| = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ ряд сходится на интервале $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Проверим границы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}\left(-\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \text{ -- сходится по Лейбницу}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \text{ -- сходится, так как ряд } \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ сходится}$$

$\Rightarrow$ ряд сходится на отрезке.

Ответ:

$$\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

Задание 2

Найти множество сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(x-1)^{5n}$$

Решение:

$$a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\cdot\frac{(n!)^3}{(3n)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = 27$$

$\Rightarrow$ ряд сходится на $\left(1-\frac{1}{\sqrt[5]{27}}, 1+\frac{1}{\sqrt[5]{27}}\right)$. Проверим границы:

$$t = (x-1)^5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3 27^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi 3n}\left(3\frac{n}{e}\right)^{3n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^3 27^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2\pi n} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3(-27)^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2\pi n} - \text{сходится по Лейбницу}$$

$\Rightarrow$ ряд сходится на полуинтервале

Ответ:

$$\left[1-\frac{1}{\sqrt[5]{27}}, 1+\frac{1}{\sqrt[5]{27}}\right)$$

Задание 3

Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Решение:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k, S = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$|x| < 1, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 6$$

Ответ:

6