

# **Теория чисел**

**ДЗ 1**

**Гольдберг Дмитрий Максимович**

**Группа БПМИ248**

## Задание 1

Найдите  $(123456789, 987654321)$

### Решение:

---

Применяя алгоритм Евклида, получаем цепочку равенств

$$(123456789, 987654321) = (123456789, 987654321 - 123456789 \cdot 8) = (123456789, 9) = 9$$

### Ответ:

---

9

## Задание 2

Докажите, что следующие дроби несократимы при всех натуральных значениях  $n$ :

$$\text{а) } \frac{2n+13}{n+7}; \quad \text{б) } \frac{2n^2-1}{n+1}.$$

### Решение:

---

а) Найдем  $(2n+13, n+7)$  применяя алгоритм Евклида

$$(2n+13, n+7) = (n+6, n+7) = 1 \quad (\text{так как НОД соседних чисел всегда } 1) \Rightarrow \text{дробь несократимая}$$

б) Найдем  $(2n^2-1, n+1)$  применяя алгоритм Евклида

$$(2n^2-1, n+1) = (2n^2-1-2(n+1)^2, n+1) = (-4n-3, n+1) = (n, n+1) = 1 \Rightarrow \text{дробь несократимая}$$

### Ответ:

---

Ч.Т.Д

### Задание 3

Докажите, что для нечетных чисел  $a$ ,  $b$ , и  $c$  имеет место равенство

$$\left( \frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2} \right) = (a, b, c)$$

#### Решение:

---

Пусть  $(a, b, c) = d$ , тогда  $a = d \cdot c_1, b = d \cdot c_2, c = d \cdot c_3$ , где  $(c_1, c_2, c_3) = 1, c_1, c_2, c_3$  нечетные числа.

$$\Rightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{d(c_2+c_3)}{2} = dk_1$$

$$\frac{a+c}{2} = \frac{d(c_1+c_3)}{2} = dk_2$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{d(c_1+c_2)}{2} = dk_3, \text{ при этом } (k_1, k_2, k_3) = 1.$$

$$\left( \frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2} \right) = (dk_1, dk_2, dk_3) = d \cdot (k_1, k_2, k_3) = d = (a, b, c) \Rightarrow \text{ч.т.д}$$

#### Ответ:

---

ч.т.д

## Задание 4

Пусть  $a$  и  $b$  — взаимно простые натуральные числа и  $a \geq b$ . Докажите, что биномиальный коэффициент  $\binom{a}{b}$  делится на  $a$ .

### Решение:

---

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a \cdot \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!}}{b}, \text{ но } (a, b) = 1, \text{ при этом } \binom{a}{b} \text{ целое число} \Rightarrow b \mid \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!}$$

иначе  $b$  обязано быть единицей, но тогда утверждение, очевидно, верно.

Разделим  $\frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!}$  на  $b$ . Получим число  $\frac{(a-1)!}{b!(a-b)!}$ . Оно является целым. Тогда исходный биномиальный коэффициент делится на  $a$ , так как полученное на этом шаге число является результатом деления  $\binom{a}{b}$  на  $a$ , а оно целое. Утверждение доказано.

### Ответ:

---

ч.т.д

## Задание 5

Рассмотрим числа Ферма:  $f_k = 2^{2^k} + 1, k \geq 0$ . Докажите, что при  $m \neq n$  выполняется равенство  $(f_n, f_m) = 1$ .

### Решение:

---

$$\begin{aligned} f_k - 2 = 2^{2^k} - 1 &= (2^{2^{k-1}} - 1)(2^{2^{k-1}} + 1) = (2^{2^{k-1}} - 1) \cdot f_{k-1} = ((2^{2^{k-2}} - 1)) \cdot f_{k-2} \cdot f_{k-1} = \dots \\ &= f_0 \cdot f_1 \cdot \dots \cdot f_{k-1} \Rightarrow f_k = f_0 \cdot f_1 \cdot \dots \cdot f_{k-1} + 2 \end{aligned}$$

Пусть  $m > n$ . Тогда  $f_m - 2 = f_0 \cdot \dots \cdot f_n \cdot \dots \cdot f_{m-1} \Rightarrow f_n \mid f_m - 2$ .

Рассмотрим произвольное число  $d$ , такое что  $d \mid f_n$  и  $d \mid f_m$ . Из системы условий

$$\begin{cases} f_n \mid f_m - 2 \\ d \mid f_n \end{cases} \text{ заключаем, что } d \mid f_m - 2. \text{ При этом } d \mid f_m. \text{ Но } \gcd(f_m, f_m - 2) = \gcd(2, f_m) = 1 \Rightarrow d = 1$$

Итого, для произвольного делителя  $d$  получили, что он обязательно равен единице  $\Rightarrow$  ч.т.д

### Ответ:

---

убито