Алгебра

ДЗ 3

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Сколько элементов порялков 2, 5, 10 и 25 в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{25}$?

Решение:

1. Элементы порядка 2 это элементы, для которых выполнено

$$\begin{cases} 2g_1 \equiv 0 \pmod 2 \\ 2g_2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow \text{всего } 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 = 3 \text{ элемента} \\ 2g_3 \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}$$

2. Элементы порядка 5 это элементы, для которых выполнено

$$\begin{cases} 5g_1 \equiv 0 \pmod 2 \\ 5g_2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow \text{всего } 1 \cdot 5 \cdot 5 - 1 = 24 \text{ элемента} \\ 5g_3 \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}$$

3. Элементы порядка 10 это элементы, для которых выполнено

$$\begin{cases} 10g_1 \equiv 0 \pmod 2 \\ 10g_2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow \text{всего } 2 \cdot 10 \cdot 5 - 24 - 3 - 1 = 72 \text{ элемента(вычитаем еще элементы порядков 2 и 5)} \\ 10g_3 \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}$$

4. Элементы порядка 25 это элементы, для которых выполнено

$$\begin{cases} 25g_1 \equiv 0 \pmod 2 \\ 25g_2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow \text{всего } 1 \cdot 5 \cdot 25 - 24 - 1 - = 100 \text{ элеменов(вычитаем еще элементы порядка 5)} \\ 25g_3 \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}$$

Ответ:

3, 24, 72, 100

Задание 2

Сколько подгрупп порядков 3 и 21 в нециклической абелевой группе порядка 63?

Решение:

Пусть $|A| = 63$ —группа из условия. Тогда $A \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$. Пусть $H \subseteq A, |H| = 3 \Rightarrow H \simeq \mathbb{Z}_3$. Групп порядка 3 столько, сколько элементов порядка 3 в группе A делить пополам, так как в $\mathbb{Z}_3$ два элемента порядка 3. Элементов порядка 3 в A 8(ищем по аналогии с первым номером)$\Rightarrow$ 4 подгруппы порядка 3.

Пусть $H \subseteq A, |H| = 21$. $H \simeq \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_3 \simeq Z_{21}$. Найдём количество элементов порядка 21 в $\mathbb{Z}_{21}$. Это есть $\varphi(21) = 12$. Элементов порядка 21 в A ровно $3 \cdot \cdot 3 \cdot 7 - 8 - 7 = 48$(вычитаем элементы порядка 3 и порядка 7). Итого подгрупп порядка 21 ровно $\frac{48}{12} = 4$.

Ответ:

4, 4

Задание 3

При каком наименьшем $n \in \mathbb{N}$ группа $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{20}$ изоморфна прямому произведению n циклических групп?

Решение:

Заметим, что

$$\mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$$
$$\mathbb{Z}_{18} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$$
$$\mathbb{Z}_{20} \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4$$
$$\Rightarrow \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{20} \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \simeq$$
$$\simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_9 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{180}$$

Значит исходная группа изоморфна прямому произведению двух циклических групп. Это и есть наименьшее значение, так как $n \neq 1$. Если $n = 1$, то $\exp(\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{20}) = \text{НОК}(15, 18, 20) = 180$, но порядок группы равен $15 \cdot 18 \cdot 20 \neq 180 \Rightarrow$ группа не является цикличной $\Rightarrow n \neq 1$.

Ответ:

2

Задание 4

Пусть k — наибольший порядок элементов конечной абелевой группы A. Докажите, что порядок любого элемента A делит k.

Решение: