Математический анализ 2

ДЗ 12

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Рассмотрим линейное пространство V таких функций, что $f, f' \in C^2[-\pi, \pi]$, со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cdot \overline{g'(x)} dx$$

Показать, что система векторов $\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортогональной.

Решение:

$$\langle e^{imx}, e^{inx}\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} mne^{i(m-n)x} dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} mne^{i(m-n)x} dx = 2mn \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = 0, m \neq n (\text{интегралы от синуса и косинуса } 0)$$

Ответ:

Показали

Задание 2

Найдите тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right)$$

на указанном отрезке для функции:
1. $f(x) = x$ на $[-c, c], c > 0$
2. $f(x) = x \cos x$ на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Решение:

1.

$$a_0 = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} x \cos\left(\frac{\pi n x}{c}\right) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} x \sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right) dx = \frac{2}{c} \int_{0}^{c} x \sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right) dx = \frac{2}{c} \cdot \frac{c^2}{\pi n} (-1)^{n+1} = \frac{2c}{\pi n} (-1)^{n+1}$$

$$f(x) \sim \frac{2c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right)$$

Задание 3

Разложить функцию $f(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$

Решение:

$$f(x) = \begin{cases} -1, x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ -1, x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(nx)dx\right) = \frac{4\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -1dx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) = 0 (\text{нечетную функцию интегрируем по симметричному промежутку})$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}\cos(nx)$$

Ответ:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(\frac{\pi n}{2})}{\pi n}\cos(nx)$$