Математический анализ 2

ДЗ 6

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найти объём тела, ограниченного поверхностью:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = z\left(x^2+y^2\right)$$

Решение:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$
$$r^4 = r^3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$r = \cos\theta\sin^2\theta$$
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta\sin^2\theta} r^2\sin\theta dr = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin^7\theta d\theta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin^7\theta d\theta = \int_0^1 t^7(1-t^2)dt = \frac{1}{40}$$
$$V = \frac{\pi}{60}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{60}$$

Задание 2

Функция плотности пластины $\rho(x, y) = xy$ определена на области D, задающей форму и расположение данной пластины. Найдите массу и координаты центра масс этой пластины.

Решение:

$$m = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 xydy = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-(1-x)^2)dx = \frac{5}{24}$$

$$x^c = \frac{24}{5}\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 x^2ydy = \frac{24}{10}\int_0^1 x^2(1-(1-x)^2)dx = \frac{18}{25}$$

$$y^c = \frac{24}{5}\int_0^1 dx \int_{1-x}^1 xy^2dy = \frac{24}{15}\int_0^1 x(1-(1-x)^3)dx = \frac{18}{25}$$

Ответ:

$$m = \frac{5}{24}$$

$$x^c = \frac{18}{25}$$

$$y^c = \frac{18}{25}$$

Задание 3

Найдите массу тела, ограниченного параболоидом $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 4$ с функцией плотности $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Решение:

$$x = r\cos\varphi$$
$$z = r\sin\varphi$$
$$y = y$$
$$m = \int_0^4 dy \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{y}} r^2 dr = \frac{1}{3}\int_0^4 dy \int_0^{2\pi} y\sqrt{y} d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^4 y\sqrt{y} dy = \frac{128\pi}{15}$$

Ответ:

$$\frac{128\pi}{15}$$

Задание 4

Найдите площадь параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, лежащую выше плоскости $z = -2$.

Решение:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$z = 1 - r^2 \Rightarrow r \leqslant \sqrt{3}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$
$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1+4r^2}dr$$
$$\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1+4r^2}dr = |t = 1+4r^2, dt = 8rdr, rdr = \frac{dt}{8}| = \frac{1}{8}\int_1^{13}\sqrt{t} = \frac{1}{12}\left(13\sqrt{13}-1\right)$$
$$S = \frac{\pi\left(13\sqrt{13}-1\right)}{6}$$

Ответ:

$$S = \frac{\pi\left(13\sqrt{13}-1\right)}{6}$$

Задание 5

Найдите площадь цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, лежащую выше квадрата с вершинами $A(0,0), B(1,0), C(0,1), D(1,1)$.

Решение:

$$z = \sqrt{4 - x^2}$$

(берем с плюсом, так как нас интересует кусок выше квадрата)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$S = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dy = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$S = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{3}$$