

Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 18

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти пару базисов, в которых отображение ϕ имеет диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали (как на семинаре), и выписать эту матрицу.

Решение:

1. Найдем базис ядра. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Дополним базис ядра до базиса \mathbb{R}^4

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можно дополнить вектором } e_4$$

3. Базисом образа является вектор

$$\phi(e_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Дополним базис образа до базиса \mathbb{R}^3

$$(2 \ 4 \ 6) \Rightarrow \text{УСВ: } (1 \ 2 \ 3) \Rightarrow \text{можно дополнить векторами } e_2, e_3$$

5. В паре базисов

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

матрица линейного отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

Базисы:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти пару базисов, в которых отображение ϕ имеет диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали (как на семинаре), и выписать эту матрицу.

Решение:

1. Найдем базис ядра. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Дополним базис ядра до базиса \mathbb{R}^4

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можно дополнить векторами } e_3, e_4$$

3. Базисом образа являются векторы

$$\phi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\phi(e_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Дополним базис образа до базиса \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можно дополнить вектором } e_3$$

5. В паре базисов

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

матрица линейного отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

Базисы:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Пусть ненулевые линейные функции $\alpha, \beta \in V^*$ таковы, что $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta$. Доказать, что тогда α и β пропорциональны, то есть $\beta = \lambda\alpha$ для некоторого ненулевого скаляра $\lambda \in F$.

Решение:

Заметим, что $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta = \dim(V) - 1$. Выберем такой базис e_1, e_2, \dots, e_n в V , что e_2, \dots, e_n является базисом ядра α . Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Выразим его через базис. $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$$\alpha(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \alpha(e_1) + \dots + x_n \alpha(e_n) = x_1 \alpha(e_1)$$

$$\beta(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \beta(e_1) + \dots + x_n \beta(e_n) = x_1 \beta(e_1)$$

$$\Rightarrow \beta(v) = \frac{\beta(e_1)}{\alpha(e_1)} \cdot \alpha(v) \Rightarrow \lambda = \frac{\beta(e_1)}{\alpha(e_1)}$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Доказать, что для любой ненулевой линейной функции f на n -мерном пространстве V существует базис (e_1, \dots, e_n) пространства V такой, что

$$f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1$$

для любых скаляров x_1, \dots, x_n .

Решение:

Заметим, что

$$f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n),$$

где $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ — матрица линейного отображения

В курсе было доказано, что существует такая пара базисов, что матрица линейного отображения представляет собой диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали, то есть существует такая пара базисов, что

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$\Rightarrow f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ \dots \ 0) = x_1$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 5

Доказать, что всякое k -мерное подпространство n -мерного пространства является пересечением ядер некоторых $n - k$ линейных функций.

Задача огонь, я решал ее где-то 3 часа, за это время я прям прочувствовал всем телом этот линал. Я долго не мог понять что за дичь происходит вообще, но в один момент я прозрел. В решение ниже вложена вся моя душа, наслаждайся)

Решение:

Пусть есть пространство $V, \dim(V) = n$ и подпространство $U, \dim(U) = k$. $V \simeq F^n$; $U \simeq F^k$. Сделаем из векторов из F^k векторы из F^n , добавив к ним $n - k$ нулевых координат (что-то вроде padding'a). Каждый линейный функционал задается матрицей линейного отображения, а ядро соответствующим ОСЛУ. У ФСР для этого ОСЛУ размерность $n - 1$. Возьмем $n - k$ линейно независимых линейных функционалов (то есть система из $n - k$ матриц линейного отображения линейно независима). Пересечением ядер всех этих функционалов будет являться ОСЛУ для матрицы, где на каждой строчке находится отдельный линейный функционал (пересекаем пространства, заданные 2ым способом). У этой матрицы будет k свободных неизвестных ($n - (n - k)$), то есть в ФСР будет ровно k векторов-столбцов из n элементов. Зададим искомые $n - k$ линейных функций матрицами линейного отображения вида

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 \ 0 \ 0 \dots \ 0) \\ a_2 &= (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-k} &= (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0) - \text{единица на позиции } n - k \end{aligned}$$

Тогда ФСР для пересечения ядер будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

То есть векторы, в которых первые $n - k$ координат нули, остальные k координат образуют вектор из стандартного базиса в F^k . Тогда линейная оболочка этих векторов порождает U (берем последние k координат из каждой линейной комбинации)

Ответ:

ч.т.д, я хочу спать

Задание 6

Пусть (e_1, e_2, e_3) — некоторый базис трёхмерного векторного пространства V , а $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ — двойственный ему базис пространства V^*

1. Найти базис пространства V^* , двойственный к базису

$$(3e_1 + e_2 - 2e_3, 2e_1 + e_3, e_1)$$

пространства V .

2. Найти базис пространства V , для которого двойственным является базис

$$(\epsilon_3, 2\epsilon_1 + \epsilon_3, 3\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_3)$$

пространства V^* .

Решение:

1. Рассмотрим произвольную функцию w из V^* . Распишем ее по базису

$$w = x\epsilon_1 + y\epsilon_2 + z\epsilon_3$$

Далее посмотрим как эта функция действует на базисные векторы

$$w(3e_1 + e_2 - 2e_3) = 3x + y - 2z$$

$$w(2e_1 + e_3) = 2x + z$$

$$w(e_1) = x$$

Далее составим СЛУ, чтобы найти координаты в базисе V^*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$(\epsilon_2, 2\epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1 - 7\epsilon_2 - 2\epsilon_3) - \text{искомый базис}$$

2. Рассмотрим произвольный вектор v из V . Распишем его по базису

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Далее посмотрим как базисные функции действуют на векторы

$$\epsilon_3(v) = z$$

$$(2\epsilon_1 + \epsilon_3)(v) = 2x + z$$

$$(3\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_3)(v) = 3x + y - 2z$$

Далее составим СЛУ, чтобы найти координаты в базисе V

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$\Rightarrow (-e_1 + 7e_2 + 2e_3, e_1 - 3e_2, 2e_2) - \text{искомый базис}$$

Ответ:

1. $(\epsilon_2, 2\epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1 - 7\epsilon_2 - 2\epsilon_3)$
2. $(-e_1 + 7e_2 + 2e_3, e_1 - 3e_2, 2e_2)$

Задание 7

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Рассмотрим линейные функции $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in V^*$, где

$$\epsilon_i = f^{(i)}(0)$$

Доказать, что эти функции образуют базис в V^* и найти базис в V , для которого данный базис является двойственным.

Решение:

Заметим, что для каждого ϵ_i матрица линейного отображения (как базис V берем стандартный базис многочленов) имеет вид

$$(0 \quad 0 \quad \dots \quad i! \quad \dots \quad 0)$$

То есть на i -ом месте стоит $i!$, в остальных местах 0. Матрица именно такая, потому что все базисные векторы из V переходят в 0, кроме x^i . Тогда очевидно, что все такие матрицы линейных отображений линейно независимы и их линейная оболочка порождает V^* . Чтобы данный базис являлся двойственным к базису V , как базис V нужно взять векторы $\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\right)$, тогда в матрицах линейных отображений на соответствующих позициях будет стоять единица.

Ответ:

Доказали
Базис V :

$$\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\right)$$

Задание 8

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ и отображение $\alpha^a (a \in \mathbb{R})$ пространства V в \mathbb{R} задано правилом

$$\alpha^a(f) = f(a).$$

Доказать, что система $\alpha^0, \dots, \alpha^n$ является базисом V^* .

Решение:

Заметим, что для каждого α^a матрица линейного отображения (в V берем стандартный базис многочленов) имеет вид

$$(1 \quad a \quad a^2 \quad a^3 \quad \dots \quad a^n)$$

Если записать все матрицы линейного отображения построчно, то получим матрицу Вандермонда, у которой определитель не ноль, значит все строки линейно независимые, то есть матрицы линейных отображений линейно независимы. Так как мы нашли ровно $n + 1$ линейно независимых функционалов, то они образуют базис в V^* ($\dim(V) = \dim(V^*) = n + 1$ и мы нашли $n + 1$ линейно независимых векторов).

Ответ:

Ч.Т.Д

Задание 9

Введем обозначения из предыдущей задачи. Найти базис V , для которого базис $\alpha^0, \dots, \alpha^n$ является двойственным.

Решение:

Как базис V можно взять интерполяционные многочлены Лагранжа, то есть

$$e_j(x) = \prod_{0 \leq m \leq n} \frac{x - m}{j - m}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Тогда в матрицах линейных отображений будет одна единица, и все остальные нули, что нам и надо.

Ответ:

$$e_j(x) = \prod_{0 \leq m \leq n} \frac{x - m}{j - m}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$