Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 21

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Выяснить, при каких значениях λ следующие квадратичные формы являются положительно определенными:

$$1.2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

$$2.x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3.$$

Решение:

1. Выпишем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 2; \delta_2 = 2 - \lambda^2; \delta_3 = 5 - 3\lambda^2$$

$$\begin{cases} 2 - \lambda^2 > 0 \\ 5 - 3\lambda^2 > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda \in \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right) \Rightarrow$$

по критерию Сильвестра при таких λ квадратичная форма положительно определенная.

2. Выпишем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1; \delta_2 = 1 - \lambda^2; \delta_3 = -4\lambda - 5\lambda^2$$

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ 1 - \lambda^2 > 0 \\ -4\lambda - 5\lambda^2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right) \Rightarrow$$

по критерию Сильвестра при таких λ квадратичная форма положительно определенная

Ответ:

1. $\lambda \in \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$
2. $\lambda \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

Задание 2

Найти нормальный вид квадратичной формы

$$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10x_1 x_3 + 6x_2 x_3$$

для каждого значения параметра λ.

Решение:

Сделаем замену координат. Поменяем x_2 и x_3 местами. Тогда матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & \lambda \\ 5 & 1 & 3 \\ \lambda & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 1; \delta_2 = -24; \delta_3 = -105 + 30\lambda - \lambda^2 \Rightarrow$$

$$y_1^2 - 24y_2^2 + \frac{-105 + 30\lambda - \lambda^2}{-24} y_3^2 - \text{канонический вид}$$

$$-105 + 30\lambda - \lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 15 - 2\sqrt{30} \\ \lambda = 15 + 2\sqrt{30} \end{array}\right. \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 - \text{нормальный вид}$$

$$-105 + 30\lambda - \lambda^2 > 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \left(15 - 2\sqrt{30}, 15 + 2\sqrt{30}\right) \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - \text{нормальный вид}$$

$$-105 + 30\lambda - \lambda^2 < 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, 15 - 2\sqrt{30}\right) \cup \left(15 + 2\sqrt{30}, +\infty\right) \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - \text{нормальный вид}$$

Ответ:

$\lambda \in \left(-\infty, 15 - 2\sqrt{30}\right) \cup \left(15 + 2\sqrt{30}, +\infty\right) \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$ — нормальный вид

$\lambda \in \left(15 - 2\sqrt{30}, 15 + 2\sqrt{30}\right) \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ — нормальный вид

$\left[\begin{smallmatrix} \lambda = 15 - 2\sqrt{30} \\ \lambda = 15 + 2\sqrt{30} \end{smallmatrix}\right. \Rightarrow z_1^2 - z_2^2$ — нормальный вид

Задание 3

Найти нормальный вид квадратичной формы

$$\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Решение:

Сделаем замену координат. Поменяем x_1 и x_3 местами. Тогда матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = -3; \delta_2 = 5; \delta_3 = 5\lambda + 3 \Rightarrow$$

$$-3y_1^2 - \frac{5}{3}y_2^2 + \frac{5\lambda+3}{5}y_3^2 - \text{канонический вид}$$

$$5\lambda + 3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow -z_1^2 - z_2^2 - \text{нормальный вид}$$

$$5\lambda + 3 > 0 \Longleftrightarrow \lambda > -\frac{3}{5} \Rightarrow -z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - \text{нормальный вид}$$

$$5\lambda + 3 < 0 \Longleftrightarrow \lambda < -\frac{3}{5} \Rightarrow -z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - \text{нормальный вид}$$

Ответ:

$\lambda < -\frac{3}{5} \Rightarrow -z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ — нормальный вид

$\lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow -z_1^2 - z_2^2$ — нормальный вид

$\lambda > -\frac{3}{5} \Rightarrow -z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$ — нормальный вид

Задание 4

Найти все значения параметров a и b, при которых билинейная форма

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + ax_2y_2 + bx_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$$

задаёт скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Решение:

Билинейная форма задаёт скалярное произведения, если она симметричная и положительно определенная. Выпишем матрицу билинейной формы и сделаем так, чтобы она удовлетворяла этим условиям.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = -1 \text{ для симметрии}$$

$$\delta_1 = 1 > 0$$

$$\delta_2 = a - 1 > 0 \Longleftrightarrow a > 1$$

$$\delta_3 = 2a - 3 > 0 \Longleftrightarrow a > \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a > \frac{3}{2}$$

При $a > \frac{3}{2}$ и $b = -1$ билинейная форма является симметричной и положительно определенной по критерию Сильвестра.

Ответ:

$a > \frac{3}{2}, b = -1$

Задание 5

Найти длины сторон и внутренние углы треугольника, вершины которого заданы своими координатами в $\mathbb{R}^5$:

$$A(2,4,2,4,2), B(4,4,3,4,4), C(5,7,5,7,2).$$

Решение:

$AB = (2,0,1,0,2), AC = (3,3,3,3,0), BC = (1,3,2,3,-2)$

$|AB| = \sqrt{2^2+1+2^2} = 3, |AC| = \sqrt{4\cdot 3^2} = 6, |BC| = \sqrt{1+3^2+2^2+3^2+2^2} = 3\sqrt{3}$

$\cos(\angle BAC) = \frac{(AB,AC)}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAC = 60$

$\cos(\angle ABC) = \frac{(AB,BC)}{|AB|\cdot|BC|} = 0 \Rightarrow \angle ABC = 90$

$\cos(\angle BCA) = \frac{(AC,BC)}{|AC|\cdot|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BCA = 30$

Ответ:

$|AB| = 3, |AC| = 6, |BC| = 3\sqrt{3}, \angle BAC = 60, \angle ABC = 90, \angle BCA = 30$

Задание 6

Найти число диагоналей n-мерного куба, ортогональных к данной диагонали.

Решение:

Пусть $(x_1, ..., x_n)$ —данная вершина, тогда $(a - x_1, ..., a - x_n)$— противоположная вершина. Вектор $(2x_1 - a, ..., 2x_n - a)$ задаёт данную диагональ. Рассмотрим произвольную другую диагональ, заданную вектором $(2x_1' - a, ..., 2x_n' - a)$. Скалярное произведение этих двух векторов должно быть нулевым, то есть

$$(2x_1 - a) \cdot (2x_1' - a) + ... + (2x_n - a) \cdot (2x_n' - a) = 0$$

Так как каждая координата равна 0 или a, то каждое слагаемое равно a^2 или $-a^2$. Заметим, что если n нечётное, то сумма никогда не равна нулю, так как в случае равенства все слагаемые должны разбиваться на пары с противоположными значениями, с нечётным n такое невозможно, значит n чётное. Каждая пара имеет вид $\{(2x_k - a) \cdot (2x_i' - a), (2x_l - a) \cdot (2x_j' - a)\}$, где x_k, x_l фиксированы. Заметим, что, выбирая значение для x_i', x_j' определяется однозначно так, чтобы получилось противоположное значение. Значит достаточно определить значение для половины координат. Это можно сделать $\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}$ способами(при перевороте знаков тоже самое, поэтому делим на два). То есть всего $\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}$ диагоналей, ортогональных данной.

Ответ:

$\frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2}$

Задание 7

1. Найти длину диагонали n-мерного куба с ребром a и предел этой длины при $n \to \infty$.
2. Доказать, что все диагонали n-мерного куба образуют один и тот же угол ϕ_n со всеми его рёбрами. Найти этот угол и его предел при $n \to \infty$. При каком n получим $\phi_n = 60$?

Решение:

1. Аналогично с прошлой задачей вектор $k = (2x_1 - a, ..., 2x_n - a)$ задаёт данную диагональ, где $x_1, ..., x_n \in \{0, a\}$. $|k| = \sqrt{(2x_1 - a)^2 + ... + (2x_n - a)^2} = \sqrt{n \cdot a^2}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a\sqrt{n} = \infty$.
2. Аналогично с прошлым пунктом введём вектор k, задающий диагональ. Рассмотрим произвольную вершину $(y_1, ..., y_n)$ и произвольную соседнюю к ней $(y_1, ..., a - y_i, ..., y_n)$. Тогда ребро задаётся вектором $r = (0, ..., 2y_i - a, ..., 0)$. Выпишем соотношение для косинуса угла между векторами k и r.

$$\cos(\phi_n) = \frac{(r, k)}{|r| \cdot |k|} = \frac{(2x_i - a) \cdot (2y_i - a)}{a\sqrt{n} \cdot (2y_i - a)} = \frac{2x_i - a}{a\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\phi_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

то есть фиксированная диагональ имеет один и тот же угол со всеми рёбрами

$\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\pi}{2}$. При $n = 4$ $\phi_4 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Ответ:

1. $a\sqrt{n}; \infty$
2. ч.т.д.;$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right); \frac{\pi}{2}; 4$

Задание 8

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Найти в этом пространстве угол между векторами x^3 и $x^2 + x + 1$.

Решение:

$$\cos\alpha = \frac{(x^3, x^2+x+1)}{\sqrt{(x^3, x^3)} \cdot \sqrt{(x^2+x+1, x^2+x+1)}} = \frac{\int_0^1 t^3 \cdot (t^2+t+1)dt}{\sqrt{\int_0^1 t^3 \cdot t^3 dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 (t^2+t+1)\cdot(t^2+t+1)dt}} =$$

$$= \frac{\frac{37}{60}}{\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{37}{10}}} = \frac{\sqrt{2590}}{60} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2590}}{60}\right)$$

Ответ:

$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2590}}{60}\right)$