Теория вероятностей

ДЗ 5

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 2

Пусть (X, F, μ) пространство с мерой, $A \in F$ некоторое фиксированное множество. Покажите, что $\mu'(E) = \mu(A \cap E)$ будет мерой на (X, F).
Пусть $\mu_1, ..., \mu_n$ меры на (X, F) и $a_1, ..., a_n$ неотрицательные вещественные числа. Покажите, что

$$\mu(A) = a_1\mu_1(A) + ... + a_n\mu_{n(A)}, A \in F$$

будет мерой на (X, F).

Решение:

a)

$$\mu'(\emptyset) = \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(E_i)$$

$$\Rightarrow \mu' - \text{мера}$$

b)

$$\mu(\emptyset) = a_1\mu_1(\emptyset) + ... + a_n\mu_n(\emptyset) = 0$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + ... + a_n\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = a_1\sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A_i) + ... + a_n\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_1\mu_1(A_i) + ... + a_n\mu_n(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$$\Rightarrow \mu - \text{мера}$$

Ответ:

ч.т.д.

Задание 3

Пусть X несчетное бесконечное множество, $F = 2^X$ σ-алгебра всех подмножеств X. Покажите, что

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, \text{ если } A \text{ не более чем счетное} \\ +\infty, \text{ иначе} \end{cases}$$

является мерой на (X, F).

Решение:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

Если в $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ все A_i не более чем счётные, то счётное объединение не более чем счётных множеств есть не более чем счётное множество, значит $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
Если в $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ есть кто-то более чем счётный, то объединение будет тоже будет более чем счётно, значит $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = +\infty = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
Итого μ является мерой.

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Пусть (X, F, μ) пространство с мерой и пусть $\mathcal{G} = \{A \mid A \in F, \mu(A) = 0\}$. Выясните, является ли $\mathcal{G}$ σ -алгеброй? Пусть $A \in \mathcal{G}, B \in F$. Проверьте, что $A \cap B \in \mathcal{G}$. Проверьте, что $\mathcal{G}$ замкнуто относительно взятия счётных объединений своих элементов.

Решение:

Если $\mu(X) \neq 0 \Rightarrow X \notin \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G}$ не является сигма алгеброй. Если $\mu(X) = 0 \Rightarrow X \in \mathcal{G}$. Так как $\mu(X) = 0$, то $\mathcal{G} = F$, но F сигма алгебра, значит $\mathcal{G}$ сигма алгебра.
Проверим, что $A \cap B \in \mathcal{G}$. $A \cap B \in F \Rightarrow \mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A \cap B) = 0 \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$.
Проверим последнее утверждение. Рассмотрим $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{G}$.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}.$$

Ответ:

ч.т.д.