Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 33

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора А, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\chi(t) = t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = (t-3)^3 \Rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow \text{будет 1 клетка 2 на 2 и 1 клетка 1 на 1}$$

$$\Rightarrow \text{ЖНФ}: \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора A, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\chi(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = (t-1)^4 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 2$$

$$(A - 4E)^2 = 0 \Rightarrow 2 \text{ клетки } 2 \text{ на } 2$$

$$\text{ЖНФ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора A, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\chi(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = (t-1)^4 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 2$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{в жнф 1 клетка 1 на 1 и 1 клетка 3 на 3}$$

$$\text{ЖНФ}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 4

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора A, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\chi(t) = t^5 - 10t^4 + 40t^3 - 80t^2 + 80t - 32 = (t-2)^5 \Rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 2$$

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_2 = 4$$

$\Rightarrow$ в жнф 1 клетка 3 на 3 и 1 клетка 2 на 2

$$\text{ЖНФ:} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора A, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\chi(t) = t^5 - 15t^4 + 90t^3 - 270t^2 + 405t - 243 = (t-3)^5 \Rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 2$$

$$(A - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_2 = 3$$

$\Rightarrow$ в жнф 1 клетка 4 на 4 и 1 клетка 1 на 1

$$\text{ЖНФ: } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 6

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора A, имеющего в некотором базисе матрицу $A = J_n(0)^2$, где

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Решение:

Заметим, что d_1 для A равно 2(очевидно), $d_2 = 3, d_3 = 4, ...$, значит всего есть 2 клетки, при этом количество клеток размера $\geqslant 3 = 2 * 3 - 4 - 2 = 0$. Количество клеток размера $\geqslant 2 = 3 - 2 = 1$. Значит будет одна клетка размера 2 и 1 клетка размера 1.

Задание 7

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора A, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

Решение:

$$\chi(t) = (1-t)^n \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 1$$

значит в жнф 1 здоровая клетка со значением 1

Задание 8

Найти жорданову нормальную форму линейного оператора A, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\chi(t) = (1-t)(2-t)...(n-t) \Rightarrow 1, 2, ..., n - \text{собственные значения}$$

Геометрическая кратнасть каждого собственного значения 1, значит будет n клеток 1 на 1 со значениями $1, 2, ..., n$

Задание 9

Пусть B — нильпотентный оператор на n — мерном векторном пространстве V. Доказать, что $\mathrm{B}^n = 0$