Математический анализ

ДЗ 13

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u$ если:

$$\text{а) } u=\frac{x^3-y}{x^3+y};\ \text{б) } u=\frac{xy}{x^2+y^2};\ \text{в) } u=\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2};\ \text{г) } u=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2};\ \text{д) } u=x+y\sin\frac{1}{x}$$

Решение:

1.

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^3-y}{x^3+y}=1$$

$$(2)\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^3-y}{x^3+y}=-1$$

$$(3)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y}{x^3+y}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^3}}\frac{x^3-y}{x^3+y}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^3-y}{x^3+y}=-1$$

$$\Rightarrow\ \text{предела не существует}$$

2.

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

$$(2)\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

$$(3)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\frac{1}{2}x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow\ \text{предела не существует}$$

3.

$$(1)\ \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}=-1$$

$$(2)\ \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}=1$$

$$(3)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=\frac{1}{2}x}}\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}=-\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow$ предела не существует

4.

$$(1)\ \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

$$(2)\ \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

$$(3)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=\frac{1}{2}x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

$\Rightarrow$ предела не существует

5.

$$(1)\ \lim_{x\to0}\lim_{y\to0}x+y\sin\frac{1}{x}=0$$

$$(2)\ \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}x+y\sin\frac{1}{x}=0$$

$$(3)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}x+y\sin\frac{1}{x}=\lim_{r\to0}r\cos(\varphi)+r\sin(\varphi)\cdot\sin\left(\frac{1}{r\cos(\varphi)}\right)=0$$

Задание 2

Найдите предел функции $f(x,y) = \frac{y-2x^2}{y-x^2}$ в точке $(0,\ 0)$ по прямой $x = \alpha t, y = \beta t, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; докажите, что $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует.

Решение:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\beta t - 2\alpha^2 t^2}{\beta t - \alpha^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\beta - 2\alpha^2 t}{\beta - \alpha^2 t} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{y-2x^2}{y-x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{-x^2}{0} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x^2}} \frac{y-2x^2}{y-x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x^2}} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) \ \text{ не существует}$$

Задание 3

Выяснить, является ли в точке (0, 0) функция

$$u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ если } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, \text{ если } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

а) непрерывной по x; б) непрерывной по y; в) непрерывной

Решение:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow$ непрерывная по x

б) $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow$ непрерывная по y

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{x^2k}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{k^2+1} \neq u((0,0)) \Rightarrow$ не является непрерывной