Дискретная математика

ДЗ 18

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Выразимо ли отрицание $\neg x$ в системе функций $\{x \to y\}$?

Решение:

Нет, так как на присваивании, где все переменные равны 1, значение функции будет равно 1, а не ноль.

Ответ:

Нет

Задание 2

Является ли импликантом функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = ((((x_1 \to x_2) \to x_3) \to x_4) \to x_5)$$

а) конъюнкт $x_1 \wedge (\neg x_2)$? б) конъюнкт $x_3 \wedge (\neg x_4)$?

Решение:

а) Нет, так как существует набор присваиваний $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 1, 1, 0)$, при котором конъюнкт равен 1, а $f = 0$, противоречие с определением импликанта.

б) Да, так как конъюнкт равен 1, только если $x_3 = 1; x_4 = 0$, а при присваиваниях вида $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, 1, 0, x_5)$ функция тождественно равна 1.

Ответ:

нет, да

Задание 3

Найдите наименьшее количество конъюнктов в таких ДНФ, которые представляют булеву функцию, равную 1 ровно для 14 наборов значений переменных.

Решение:

Заметим, что переменных должно быть хотя бы 4. При этом один конъюнкт может быть равен 1 максимум на восьми наборах(для этого в нем должен быть 1 литерал, остается 8 наборов для трех оставшихся переменных). Значит должно быть хотя бы 2 конъюнкта. Приведем пример на 2 конъюнкта.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge x_4)$$

Первый конъюнкт равен 1 при восьми наборах и второй, но они пересекаются по наборам $(1, 1, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 1, 1) \Rightarrow$ 14 наборов для которых функция равна 1.

Ответ:

2

Задание 4

Булева функция g от переменных $x_1, ..., x_5, y_1, ..., y_5$ задана формулой:

$$\bigwedge_{i=1}^{5} (x_i \vee y_i).$$

Найдите $\mathrm{dnf}(g)$.

Решение:

Заметим, что функция принимает значение 1, только если в каждой скобке есть хотя бы одна единица. Задача о минимальном количестве конъюнктов в ДНФ равносильна такому вопросу: каким наименьшим количеством граней покрывается множество единиц функции при условии, что эти грани не покрывают ни одного нуля функции? Заметим, что в каждой грани 10 переменных; чтобы в каждой скобке была хотя бы одна единица, нужно среди этих десяти переменных зафиксировать пять значением 1, при этом у переменных должны быть попарно различные индексы. Тогда,чтобы покрыть все единицы функции, потребуется хотя бы 32 грани(количество способов выбрать 5 переменных с попарно различными индексами, каждая грань задается таким набором). Эти грани не покрывают нулей функции(по построению).

Ответ:

32