Алгебра

ДЗ 8

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1+55\sqrt[3]{7}-8\sqrt[3]{49}}{1-2\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{49}}$ и упростите полученное выражение.

Решение:

$$\alpha = \sqrt[3]{7} \Rightarrow \alpha^3 = 7, \alpha^4 = 7\alpha$$

$$\frac{1+55\alpha-8\alpha^2}{1-2\alpha-4\alpha^2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

$$\mathbb{Q}(\alpha) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^3-7)$$

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \left\{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2\right\}$$

$$1+55\alpha-8\alpha^2 = (1-2\alpha-4\alpha^2)\left(a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2\right) = a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2-2\alpha a_0-2\alpha^2a_1-2\alpha^3a_2-$$

$$-4\alpha^2a_0-4\alpha^3a_1-4\alpha^4a_2 = a_0+\alpha(a_1-2a_0)+\alpha^2(a_2-2a_1-4a_0)+7(-2a_2-4a_1)+7a(-4a_2)$$

$$\begin{cases} a_0-28a_1-14a_2=1 \\ a_1-2a_0-28a_2=55 \\ a_2-2a_1-4a_0=-8 \end{cases} \Longleftrightarrow (a_0,a_1,a_2)=(1,1,-2)$$

$$\Rightarrow 1+55\alpha-8\alpha^2 = \left(1-2\alpha-4\alpha^2\right)\left(1+\alpha-2\alpha^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1+55\alpha-8\alpha^2}{1-2\alpha-4\alpha^2} = \left(1+\alpha-2\alpha^2\right) = 1+\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{49}$$

Ответ:

$1+\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{49}$

Задание 2

Найдите минимальный многочлен для числа $\sqrt{5}-\sqrt{3}+1$ над $\mathbb{Q}$.

Решение:

$$\alpha = \sqrt{5}-\sqrt{3}+1$$
$$\alpha - 1 = \sqrt{5}-\sqrt{3} \mid \hat{}2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 5 - 2\sqrt{15} + 3$$
$$\alpha^2 - 2\alpha - 7 = -2\sqrt{15} \mid \hat{}2$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^3 - 10\alpha^2 + 28\alpha - 11 = 0$$
$$\Rightarrow h(\alpha) = \alpha^4 - 4\alpha^3 - 10\alpha^2 + 28\alpha - 11 \text{ аннулирующий для } \alpha, \text{докажем, что он минимальный}$$

Заметим, что его корнями над $\mathbb{R}$ являются числа:

$$\alpha_1 = \sqrt{5}-\sqrt{3}+1$$
$$\alpha_2 = -\sqrt{5}-\sqrt{3}+1$$
$$\alpha_3 = -\sqrt{5}+\sqrt{3}+1$$
$$\alpha_4 = \sqrt{5}+\sqrt{3}+1$$

Если многочлен приводим над $\mathbb{Q}$, то он разлагается в произведение двух квадратичных многочленов(степень 1 быть не может из-за того, что свободный член линейного множителя будет не из $\mathbb{Q}$). Рассмотрим комбинации линейных многочленов по 2, и покажем, что у них есть коэффициенты не из $\mathbb{Q}$.

1.

$$\Big(\alpha - \big(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\big)\Big)\Big(\alpha - \big(-\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\big)\Big) = \alpha^2 - 1 + 2\sqrt{3}\alpha - 2\alpha - 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\alpha]$$

2.

$$\Big(\alpha - \big(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\big)\Big)\Big(\alpha - \big(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+1\big)\Big) = \alpha^2 - 2\alpha - 7 + 2\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}[\alpha]$$

3.

$$\Big(\alpha - \big(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\big)\Big)\Big(\alpha - \big(\sqrt{5}+\sqrt{3}+1\big)\Big) = \alpha^2 + 3 - 2\sqrt{5}\alpha - 2\alpha + 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}[\alpha]$$

4.

$$\Big(\alpha - \big(-\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\big)\Big)\Big(\alpha - \big(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+1\big)\Big) = \alpha^2 + 3 + 2\sqrt{5}\alpha - 2\alpha - 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}[\alpha]$$

5.

$$\Big(\alpha - \big(-\sqrt{5}-\sqrt{3}+1\big)\Big)\Big(\alpha - \big(\sqrt{5}+\sqrt{3}+1\big)\Big) = \alpha^2 - 2\alpha - 7 - 2\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}[\alpha]$$

6.

$$\Big(\alpha - \big(-\sqrt{5}+\sqrt{3}+1\big)\Big)\Big(\alpha - \big(\sqrt{5}+\sqrt{3}+1\big)\Big) = \alpha^2 - 1 - 2\sqrt{3}\alpha - 2\alpha + 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\alpha]$$

Показали, значит h неприводим над $\mathbb{Q}$, значит h минимален.

Ответ:

$h(\alpha) = \alpha^4 - 4\alpha^3 - 10\alpha^2 + 28\alpha - 11$

Задание 3

Постройте явно поле $\mathbb{F}_8$ и составьте для него таблицы сложения и умножения.

Решение:

$$p = 2, n = 3$$

$$h \in \mathbb{Z}_2[x] - \text{неприводимый}, \ \deg h = 3.$$

$$\text{Например}, h = x^3 + x + 1$$

$$\mathbb{F}_8 = Z_2[x]/(x^3 + x + 1) = \{a + bz + cz^2 \mid a, b \in \{0, 1\}\} = \{0, 1, z, z + 1, z^2, z^2 + z, z^2 + 1, z^2 + z + 1\}$$

+	0	1	z	z+1	z^2	z^2+z	z^2+1	z^2+z+1
0	0	1	z	$z+1$	z^2	z^2+z	z^2+1	z^2+z+1
1	1	0	$z+1$	z	z^2+1	z^2+z+1	z^2	z^2+z
z	z	$z+1$	0	1	z^2+z	z^2	z^2+z+1	z^2+1
$z+1$	$z+1$	z	1	0	z^2+z+1	z^2+1	z^2+z	z^2
z^2	z^2	z^2+1	z^2+z	z^2+z+1	0	1	z	$z+1$
z^2+z	z^2+z	z^2+z+1	z^2	z^2+1	1	0	$z+1$	z
z^2+1	z^2+1	z^2	z^2+z+1	z^2+z	z	$z+1$	0	1
z^2+z+1	z^2+z+1	z^2+z	z^2+1	z^2	$z+1$	z	1	0

$*$	0	1	z	z+1	z^2	z^2+z	z^2+1	z^2+z+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	z	$z+1$	z^2	z^2+z	z^2+1	z^2+z+1
z	0	z	z^2	z^2+z	$z+1$	z^2+z+1	1	z^2+1
$z+1$	0	$z+1$	z^2+z	z^2+1	z^2+z+1	1	z^2	z
z^2	0	z^2	$z+1$	z^2+z+1	0	1	z	$z+1$
z^2+z	0	z^2+z	z^2+z+1	1	1	0	$z+1$	z
z^2+1	0	z^2+1	1	z^2	z	$z+1$	0	1
z^2+z+1	0	z^2+z+1	z^2+1	z	$z+1$	z	1	0

Ответ:

см. решение

Задание 4

Пусть $K \subseteq F$ — расширение полей и $\alpha \in F$. Положим $K[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in K[x]\}$. Докажите, что если $K[\alpha]$ конечномерно как векторное пространство над K, то $K[\alpha] = K(\alpha)$.

Решение:

Заметим, что из конечности K следует, что все элементы поля F являются алгебраическими над K (задача 7 из 11 листка). Значит $\forall \alpha \in F$ найдется минимальный многочлен $h, \deg h = n$. Всякий элемент $K(\alpha)$ можно представить как $\beta_0 + \beta_1\alpha + ... + \beta_{n-1}\alpha^{n-1} = f(\alpha), \beta_i \in K$(утверждение из лекции)$\Rightarrow K[\alpha] = K(a)$.