Математический анализ 2

ДЗ 11

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 2

Разложить функцию в степенной ряд с центром в нуле:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$$

Решение:

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n}$$

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$$

Ответ:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}, |x| \leqslant 1$$

Задание 3

Лень переписывать условие) Давайте считать интегралы

Решение:

$$\langle 1, \cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)\rangle = \int_{-c}^{c} \cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)dx = \frac{c}{\pi n}(\sin(n\pi) - \sin(-\pi n)) = 0$$

$$\langle 1, \sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)\rangle = \int_{-c}^{c} \sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)dx = 0(\text{нечетная функция на симметричном промежутке})$$

$$\langle \cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right), \sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)\rangle = \int_{-c}^{c} \sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)\cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)dx = 0(\text{нечетная функция на симметричном промежутке})$$

$$\Rightarrow \text{система ортогональна по определению}$$

Ответ:

Проверили

Задание 4

В рамках условий предыдущей задачи найти ортонормированную систему линейного пространства.

Решение:

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

$$||1|| = \sqrt{2c} => e_0 = \frac{1}{\sqrt{2c}}$$

$$\left|\left|\cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)\right|\right|^2 = \int_{-c}^{c} \cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} 1dx + \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} \cos\left(2\frac{\pi}{c}nx\right) = c$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)}{\sqrt{c}}$$

$$\left|\left|\sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)\right|\right|^2 = \int_{-c}^{c} \sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} 1dx - \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} \cos\left(2\frac{\pi}{c}nx\right) = c$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)}{\sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow \text{ортонормированная система имеет вид}$$

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2c}}, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)}{\sqrt{c}}, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)}{\sqrt{c}}\rangle$$

Ответ:

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2c}}, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{c}nx\right)}{\sqrt{c}}, \frac{\sin\left(\frac{\pi}{c}nx\right)}{\sqrt{c}}\rangle$$

Задание 5

Рассмотрим пространство многочленов произвольной степени, заданных на отрезке $[-1, 1]$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ и систему векторов $\{1, x, x^2, x^3 ...\}$. Доказать, что она не является ортогональной. С помощью ортогонализации Грама-Шмидта из данной системы получить четыре вектора, которые будут составлять ортонормированную систему.

Решение:

$$\langle 1, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{система не ортогональная по определению}$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 = x$$

$$f_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$f_4 = x^3 - \frac{(x^3, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^3, x)}{(x, x)} \cdot x - \frac{\left(x^3, x^2 - \frac{1}{3}\right)}{\left(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

Теперь отнормируем эту систему:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$||x||^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \Rightarrow e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$\left|\left|x^2 - \frac{1}{3}\right|\right|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} dx = \frac{8}{45}$$

$$\Rightarrow e_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\left|\left|x^3 - \frac{3}{5}x\right|\right|^2 = \int_{-1}^{1} x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2 dx = \frac{8}{175}$$

$$\Rightarrow e_4 = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)$$

Ответ:

$$\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)\rangle$$