Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 27

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Через точку $M(-5, 16, 12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось Ox, другая – ось Oy. Вычислить острый угол между этими плоскостями.

Решение:

Найдем нормаль к первой плоскости. Возьмём две точки на оси абсцисс: $(5, 0, 0)$ и $(1, 0, 0)$. Тогда направляющие векторы имеют вид $(-10, 16, 12)$ и $(-6, 16, 12)$. $n_1 = (-10, 16, 12) \times (-6, 16, 12) = (0, 48, -64)$. Найдем нормаль ко второй плоскости. Возьмём две точки на оси ординат: $(0, 5, 0)$ и $(0, 1, 0)$. Тогда направляющие векторы имеют вид $(-5, 11, 12)$ и $(-5, 15, 12)$. $n_2 = (-5, 11, 12) \times (-5, 15, 12) = (-48, 0, -20)$. Тогда искомы угол есть

$$\cos\alpha = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{4}{13} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{4}{13}\right)$$

Ответ:

$\alpha = \arccos(\frac{4}{13})$

Задание 2

Через линию пересечения плоскостей

$$x + 5y + z = 0 \quad \text{и} \quad x - z + 4 = 0$$

провести плоскость, образующую угол 45° с плоскостью $x - 4y - 8z = 1$.

Решение:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{(n, (1, -4, -8))}{|n| \cdot 9} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пусть нормаль к искомой плоскости имеет вид (a, b, c). Он перпендикулярен вектору $(1, 5, 1) \times (1, 0, -1) = (-5, 2, -5)$. Тогда $-5a + 2b - 5c = 0$. На прямой лежит точка $(-2, 0, 2)$. Пусть нормаль проходит через нее, тогда зафиксируем координату по y, то есть $b = 0 \Rightarrow a = -c \Rightarrow n = (-c, 0, c)$. Подставляем в верхнее уравнение

$$\begin{cases} \frac{a-4b-8c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 9} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -5a + 2b - 5c = 0 \end{cases}$$

Задание 3

Определить угол между следующими парами прямых:

1. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

Решение:

1. $a = (1, -2, 3), b = (5, -1, 0)$

$$\cos\alpha = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{\sqrt{91}}{26} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{91}}{26}\right)$$

2. $a = (3, -4, -2) \times (2, 1, -2) = (10, 2, 11), b = (4, 1, -6) \times (0, 1, -3) = (3, 12, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{98}{195} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{98}{195}\right)$$

Ответ:

$\arccos\left(\frac{\sqrt{91}}{26}\right), \arccos\left(\frac{98}{195}\right)$

Задание 4

Найти угол между прямой

$$x + y - z = 0, 2x - 3y + z = 0$$

и плоскостью $3x + 5y - 4z + 2 = 0$.

Решение:

Направляющий вектор прямой $a = (1, 1, -1) \times (2, -3, 1) = (-2, -3, -5)$. Нормаль к плоскости имеет вид $n = (3, 5, -4)$. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{|(a, n)|}{|a| \cdot |n|} = \frac{\sqrt{19}}{190} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{19}}{160}\right)$$

Ответ:

$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{19}}{160}\right)$

Задание 5

В пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартном скалярным произведением задан тетраэдр с вершинами

$$A(2,-3,3), B(20,-15,9), C(2,-12,-6), D(-18,10,8).$$

Пусть BH-высота грани ABC и AM –медиана грани ACD. Найти угол и расстояние между прямыми BH и AM.

Решение:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{AC}\right) = \frac{1}{2}((-20,13,5) + (0,-9,-9)) = (-10,2,-2)$$

$$\overline{AB} = (18,-12,6)$$

$$n_{ABC} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (1,1,-1)$$

$$\overline{BH} = (x,y,z); \overline{BH} \perp \overline{AC}; \overline{BH} \perp n_{ABC} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \overline{BH} = (2z,-z,z); z=9 \Rightarrow \overline{BH} = (18,-9,9)$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{AM}, \overline{BH}\right)}{\left|\overline{AM}\right| \cdot \left|\overline{BH}\right|} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\rho\left(\overline{AM}, \overline{BH}\right) = \frac{\left(\overline{AM}, \overline{BH}, A-B\right)}{\left|\left[\overline{AM}, \overline{BH}\right]\right|} = 3\sqrt{2}$$

Ответ:

$$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right), 3\sqrt{2}$$

Задание 6

Доказать, что отображение $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданное правилом

$$\phi(x) = (x, a)a,$$

где $a = (1, 2, 3)$, является линейным оператором. Найти его матрицу в стандартном базисе и в базисе

$$b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (2, 0, -1), b_3 = (1, 1, 0).$$

Решение:

Линейность следует из линейности скалярного произведения, замкнутость очевидна, значит линейный оператор.

$$\phi(e_1) = (1, 2, 3); \phi(e_2) = (2, 4, 6); \phi(e_3) = (3, 6, 9) \Rightarrow$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\phi(b_1) = (4, 8, 12); \phi(b_2) = (-1, -2, -3); \phi(b_3) = (3, 6, 9) \Rightarrow$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ 12 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Задание 7

Пусть задана матрица $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(F)$. Рассмотрим два отображения $M_2(F) \to M_2(F)$: умножение на матрицу T слева и справа. Доказать, что оба этих отображения являются линейными операторами и найти их матрицы в базисе из матричных единиц.

Решение:

Замкнутость очевидна, линейность следует из дистрибутивности справа, значит линейные операторы.

$$\varphi_L(e_1) = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_L(e_2) = T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\varphi_L(e_3) = T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_L(e_4) = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_L = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\varphi_R(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_R(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_R(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\varphi_R(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_R = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\varphi_L = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\varphi_R = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

Задание 8

Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

Решение:

Матрица перехода к новому базису имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда новая матрица имеет вид

$$A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Задание 9

Пусть $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ —линейные операторы. В базисе

$$a_1 = (-3, 7), a_2 = (1, -2)$$

оператор φ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$

а оператор ψ в базисе

$$b_1 = (6, -7), b_2 = (-5, 6)$$

имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\varphi\psi$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$.

Решение:

Матрица перехода от базиса a к стандартному базису имеет вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда в стандартном базисе оператор φ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от базиса b к стандартному базису имеет вид

$$C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Тогда в стандартном базисе оператор ψ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица оператора $\varphi\psi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$$