Математический анализ

ДЗ 19

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Исследуйте на условный экстремум функцию
1. $f(x, y, z) = 2x + y - z + 1$ при условии $x^2 + y^2 + 2z^2 = 22$;
2. $f(x, y, z) = xyz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;
3. $f(x, y, z) = xy + yz$ при условии $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2, x > 0, y > 0, z > 0$.

Решение:

1. Используем метод множителей Лагранжа. Получаем систему:

$$L(x, y, z, \lambda) = 2x + y - z + 1 + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 22)$$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ -1 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4}$$

$$\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow (x, y, z) = (-4, -2, 1)$$

$$\lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow (x, y, z) = (4, 2, -1)$$

Проверим найденые точки на достаточное условие. Касательное пространство на векторе h задаётся уравнением:

$$d(x^2 + y^2 + 2z^2 - 22) \cdot h = 0$$

$$xh_1 + yh_2 + 2zh_3 = 0$$

В точке $(-4, -2, 1)$ матрица Гессе имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$2h_1 + h_2 - h_3 = 0$$

$$h_3 = 2h_1 + h_2 - \text{подставляем во второй дифференциал, получаем кв. форму}$$

$$Q(h_1, h_2) = \frac{1}{2}h_1^2 + \frac{1}{2}h_2^2 + (2h_1 + h_2)^2 = \frac{9}{2}h_1^2 + \frac{3}{2}h_2^2 + 4h_1h_2 \Rightarrow$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 2 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow (-4, -2, 1) - \text{условный минимум}$$

В точке $(4, 2, -1)$ матрица Гессе имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$2h_1 + h_2 - h_3 = 0$$

$$h_3 = 2h_1 + h_2 - \text{подставляем во второй дифференциал, получаем кв. форму}$$

$$Q(h_1, h_2) = -\frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 - (2h_1 + h_2)^2 = -\frac{9}{2}h_1^2 - \frac{3}{2}h_2^2 - 4h_1h_2 \Rightarrow$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -2 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow (4, 2, -1) - \text{условный максимум}$$

2. Используем метод множителей Лагранжа. Получаем систему:

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$$

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0 \\ xz + 2\lambda y = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} = 2\lambda \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

Пусть $x = y = z$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow p_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right), p_2 = \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

Проверим найденые точки на достаточное условие. Касательное пространство на векторе h задаётся уравнением:

$$d(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \cdot h = 0$$

$$2xh_1 + 2yh_2 + 2zh_3 = 0$$

В точке $p_1, \lambda = -\frac{a}{2\sqrt{3}}$ матрица Гессе имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} \\ \frac{a}{\sqrt{3}} & \frac{a}{\sqrt{3}} & -\frac{a}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0$$

$$h_3 = -h_1 - h_2 - \text{подставляем во второй дифференциал, получаем кв. форму}$$

$$Q(h_1, h_2) = \frac{-4a}{\sqrt{3}}(h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2)$$

$$Q = -\frac{4a}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$a > 0 \Rightarrow Q < 0 \Rightarrow p_1 - \text{условный максимум}$$

$$a < 0 \Rightarrow Q > 0 \Rightarrow p_1 - \text{условный минимум}$$

Для остальных точек проверяется прям аналагично(я устал)

3. Выражая из второго уравнения z, и подставляя в функцию, получаем:

$$L(x, y, \lambda) = xy + 2y - y^2 + \lambda(2 - x^2 - y^2)$$

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x + 2 - 2y - 2\lambda y = 0 \\ 2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, \lambda) = \left(1, 1, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Матрица Гессе в найденой точке имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow (1, 1, 1) - \text{точка максимума}$$

Задание 3

Вычислите неопределенные интегралы

Решение:

1.

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}dx = \int x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}dx = \frac{x^2}{2}+3x+\ln|x|-\frac{1}{x}+C$$

2.

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\arctan x+C$$

3.

$$\int \frac{2^{2x-1}-3^{2x+2}}{6^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2^{2x}}{6^{2x}}-9\int \frac{3^{2x}}{6^{2x}} = \frac{1}{2}\int 3^{-2x}-9\int 2^{-2x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{-2x}}{2\ln 3}+9\cdot\frac{2^{-2x}}{2\ln 2}+C$$

4.

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx = \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x-1}dx = \int e^{2x}+e^x+1dx = \frac{e^{2x}}{2}+e^x+x+C$$

5.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)} = \int \frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x+C$$

Задание 2

Найдите условные экстремумы функции

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, n > 1$$

относительно уравнения связи

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, a_i > 0.$$

Решение:

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right)$$

$$\begin{cases} 2a_i x_i + \lambda = 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_i = -\frac{\lambda}{2a_i} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Значит критическая точка имеет вид:

$$x_i = \frac{1}{a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}$$

Матрица Гессе в этой точке имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} 2a_1 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 2a_2 & ... & 0 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & ... & 2a_n & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Касательное пространство задаётся уравнением:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 0$$

Тогда квадратичная форма имеет вид:

$$Q(h) = \sum_{i=1}^{n} 2a_i h_i^2$$

Она положительно определенная так так $a_i > 0$, значит найденая точка это условный минимум.