Математический анализ 2

ДЗ 8

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Выясните, сходится ли равномерно функциональная последовательность

$$f_n = \frac{\arctan nx}{n^2}, D = \mathbb{R}$$

Решение:

Проверим супремальный критерий

$$f(x) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n^2} = 0 \Rightarrow$$

супремальный критерий выполняется, значит сходится равномерно

Ответ:

Да

Задание 2

Высните, сходится ли равномерно функциональная последовательность

$$f_n = 2(n+1)x(1-x^2)^n, D = [0,1]$$

Решение:

Проверим супремальный критерий

$$f(x) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} \left|2(n+1)x(1-x^2)^n\right|$$

$$\text{Рассмотрим } x_n = \frac{1}{n+1} \to 0, n \to \infty$$

$$f_n(x_n) = 2(n+1)\frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \to 2, n \to \infty$$

$$\text{Но } \sup|f_n(x)| \geqslant |f_n(x_n)| \to 2 \neq 0 \Rightarrow \text{не сходится равномерно}$$

Ответ:

Нет

Задание 3

Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^3}, D_1 = [0,1], D_2 = [1,+\infty)$$

Решение:

$$f(x) = 0, x \in [0,+\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{D_1} |f_n(x)|$$

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^3x^3) - nx \cdot 3n^3x^2}{(1+n^3x^3)^2} = \frac{n - 2n^4x^3}{(1+n^3x^3)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2}n}$$

$$f_n(x_n) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} > 0 \Rightarrow \text{не сходится равномерно на } D_1.$$

$$x \geqslant 1 \Rightarrow \frac{nx}{1+n^3x^3} \leqslant \frac{nx}{n^3x^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sup_{D_2} |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \text{сходится равномерно}$$

Ответ:

На первом множестве не сходится равномерно, на втором сходится

Задание 4

Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}, D_1 = [0,2], D_2 = [2,+\infty)$$

Решение:

$$f(x) = x^2, x \in [0,+\infty)$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^3}{n+x}$$

$$\left(\frac{x^3}{n+x}\right)' = \frac{3x^2(n+x) - x^3}{(n+x)^2} \geqslant 0, x \in [0,2] \Rightarrow$$

$$\sup_{D_1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{8}{n+2} \to 0 \Rightarrow$$

равномерно сходится по супремальному критерию на D_1

Пусть $x = n \Rightarrow |f_n(n) - f(n)| = \dfrac{n^2}{2} \to +\infty \Rightarrow$ не сходится равномерно на D_2.

Ответ:

Сходится равномерно на первом множестве, неравномерно на втором.

Задание 5

Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве

$$f_n(x) = \arctan(nx), D_1 = [0, 1], D_2 = [1, +\infty)$$

Решение:

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x = 0 \\ \frac{\pi}{2},\ x > 0 \end{cases}$$

$$x = 0 : |f_n(0) - f(0)| = 0$$

$$x \in (0, 1] : |(f_n(x) - f(x))| = \left|\arctan(nx) - \frac{\pi}{2}\right|, \sup_{D_1}\left|\arctan(nx) - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

не сходится равномерно на D_1.

$$\left|\arctan(nx) - \frac{\pi}{2}\right| \to 0, x \geqslant 1, n \to \infty \Rightarrow \text{сходится равномерно на } D_2.$$

Ответ:

Не сходится равномерно на первом множестве, сходится равномерно на втором.

Задание 6

Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx$$

Решение:

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = |t = nx^2, dt = 2nxdx| = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}dx = 0$$

Получаем разные значения, значит переход незаконен.

Ответ:

Неа

Задание 7

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + nx + n^2}, D = (0, +\infty)$$

Решение:

$$a_n(x) = \frac{1}{x^2 + nx + n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} = M_n$$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ – сходится $\Rightarrow$ исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

Ответ:

Сходится