Теория вероятностей

ДЗ 9

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Покажите, что следующие функции являются борелевскими и вычислите интегралы по множеству $A = [0, 2] : f(x) = 2x + 1$, вычислите $\int_A f d\mu$, где μ задана плотностью $g(t) = \frac{d\mu}{d\lambda} = 3t^2$.

Решение:

$$f(x) \in C(A) \Rightarrow f(x) - \text{борелевская.}$$

$$\int_A f d\mu = \int_A f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda = \int_0^2 (2x+1)3x^2 dx = \int_0^2 6x^3 + 3x^2 dx = 32$$

Ответ:

32

Задание 2

Покажите, что следующие функции являются борелевскими и вычислите интегралы по множеству $A = \mathbb{R} : f_1(x) = x, f_2(x) = (x-2)^2$, вычислите $\int_A f_1 d\mu_F, \int_A f_2 d\mu_F$, где мера μ_F задана функцией распределения

$$F(t) = \begin{cases} 0,\ x < 1 \\ \frac{1}{4},\ 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{3}{4},\ 2 \leqslant x < 3 \\ 1,\ x \geqslant 3 \end{cases}$$

Решение:

$$f_1, f_2 \in C(A) \Rightarrow \text{они борелевские}$$

$$F(t) = \mu_F((-\infty, t]) = \text{ё}$$

$$\mu_F(A) = \frac{1}{4}\delta_1(A) + \frac{2}{4}\delta_2(A) + \frac{1}{4}\delta_3(A), \delta_{x_0}(A) - \text{мера Дирака}$$

$$\Rightarrow \int_A f_1 d\mu_F = \frac{1}{4}\int_A f_1 d\delta_1 + \frac{1}{2}\int_A f_1 d\delta_2 + \frac{1}{4}\int_A f_1 d\delta_3 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 2$$

$$\int_A f_2 d\mu_F = \frac{1}{4}\int_A f_2 d\delta_1 + \frac{1}{2}\int_A f_2 d\delta_2 + \frac{1}{4}\int_A f_2 d\delta_3 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ответ:

$$2, \frac{1}{2}$$

Задание 3

Покажите, что следующие функции являются борелевскими и вычислите интегралы по множеству $A = [0,1] : f(x) = \cos(\pi x), T(x) = 2x \bmod 1, \mu(B) = \lambda(T^{-1}(B))$. Вычислите интеграл $\int_A f d\mu$.

Решение:

$$f(x) \in C(A) \Rightarrow f - \text{борелевская}$$

$$\int_A f d\mu = \int_{T^{-1}(A)} f(T(x)) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \cos(\pi(2x \bmod 1)) dx = \int_0^1 \cos(\pi(2x \bmod 1)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi x) dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(\pi(2x-1)) dx = 0$$

Ответ:

0

Задание 4

Пусть $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ и $\forall x \in [0,1]$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ есть поточечный предел. Проверьте можно ли менять интеграл и предел местами $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n d\lambda \overset{?}{=} \int_{[0,1]} f d\lambda$? Объясните почему применимы/не применимы теоремы о монотонной и мажорируемой сходимости.

Решение:

Заметим, что $f(x) = 0$

$$\int\limits_{[0,1]} 0 d\lambda = 0$$

$$\int\limits_{[0,1]} f_n d\lambda = \int_0^1 n^2x(1-x^2)^n dx = |t = 1-x^2, dt = 2xdx, xdx = \frac{dt}{2}| = -\frac{n^2}{2}\int_0^1 t^n dt \neq 0$$

Значит нельзя менять

Заметим, что $f_n(x)$ не ограничена при $n \to \infty$, значит не существует интегрируемой мажоранты, значит не применима теорема о мажорируемой сходимости. Последовательность функций не возрастающая по n, значит не применима теорема о монотонной сходимости.

Ответ:

ч.т.д.

Задание 5

Случайная величина ξ имеет функцию распределения равную:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0.05 + 0.1(2 + x), & -2 \leqslant x < -1 \\ 0.15 + 0.05(1 + e^{x+1}), & -1 \leqslant x < 0 \\ 0.85 + 0.15(1 - e^{-(x-1)}), & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Найдите ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение:

$$\mathbb{E}[\xi] = \int \xi d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_\xi$$

По теореме Лебега о разложении мер, мера $\mathbb{P}_\xi$ разложится в сумму абсолютно-непрерывной меры и дискретной меры. Дискретная мера будет взвешенной суммой мер Дирака. Найдём ее:

$$\mu_D(A) = \delta_2(A) \cdot 0.05 + \delta_{-1}(A) \cdot 0.1 + \delta_0(A) \cdot (0.8 - 0.2e).$$

Теперь найдем абсолютно-непрерывную составляющую. На участках непрерывности производная функции распределения равна производной Радона-Никодима. Вычислим производную Радона-Никодима на каждом участке непрерывности:

$$\rho_1(x) = 0, x < 2$$

$$\rho_2(x) = 0.1, -2 \leqslant x < -1$$

$$\rho_3(x) = 0.05e^{x+1}, -1 \leqslant x < 0$$

$$\rho_4(x) = 0.15e^{-(x-1)}$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \begin{cases} \rho_1(t), & t < 2 \\ \rho_2(t), & -2 \leqslant t < -1 \\ \rho_3(t), & -1 \leqslant t < 0 \\ \rho_4(t), & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Абсолютно непрерывная мера тогда задаётся следующим соотношением:

$$\nu(A) = \int_A \rho(t) d\lambda$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_\xi(A) = \mu_D(A) + \nu(A)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_\xi = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_D + \int_{\mathbb{R}} x d\nu$$

$$\int x d\mu_D = 0.05 \int x d\delta_{-2} + 0.1 \int x d\delta_{-1} + (0.8 - 0.2e) \int x d\delta_0 = -0.2$$

$$\int_{\mathbb{R}} x d\nu = \int_{(-\infty,2)} x d\nu + \int_{[-2,-1)} x d\nu + \int_{[-1,0)} x d\nu + \int_{[0,+\infty)} x d\nu =$$

$$= \int_{(-\infty,2)} x \cdot 0 d\lambda + \int_{[-2,-1)} x \cdot 0.1 d\lambda + \int_{[-1,0)} x \cdot 0.05e^{x+1} d\lambda + \int_{[0,+\infty)} x \cdot 0.15e^{-(x-1)} d\lambda =$$

$$= -\frac{3}{20} + -0.05e + 0.1 + 0.15e + 0.3 = 0.1e - 0.25$$

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_D + \int_{\mathbb{R}} x^2 d\nu$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_D = 0.05 \int x^2 d\delta_{-2} + 0.1 \int x^2 d\delta_{-1} + (0.8 - 0.2e) \int x^2 d\delta_0 = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\nu = -\frac{1}{60} + \frac{2}{5}e$$

$$D[\xi] = -\frac{1}{60} + \frac{2}{5}e - (0.1e - 0.25)^2 = -\frac{e^2}{100} + \frac{53}{240} + 9\frac{e}{20}$$

Ответ:

$$\mathbb{E}[\xi] = 0.1e - 0.25$$

$$D[\xi] = -\frac{e^2}{100} + \frac{53}{240} + 9\frac{e}{20}$$

Задание 6

Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром $p \in [0,1]$. Найдите ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение:

$$\mathbb{P}_\xi(k) = (1-p)^{k-1}p$$

$$\mathbb{E}[\xi] = \int \xi d\mathbb{P} = \int x d\mathbb{P}_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}_\xi(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$$

$$\Rightarrow p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \int x^2 d\mathbb{P}_\xi = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^k$$

Из курса матанализа 2 известно, что сумма это ряда есть:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^k = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3}$$

$$\mathbb{E}[\xi^2] = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\mathbb{D}[\xi] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Ответ:

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{D}[\xi] = \frac{1-p}{p^2}$$

Задание 7

Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью $p = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Выясните, существует ли у этой случайной величины математическое ожидание и дисперсия?

Решение:

$$\mathbb{E}[\xi] = \int \xi d\mathbb{P} = \int x d\mathbb{P}_\xi = \int_{\mathbb{R}} xp(x)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\pi(1+x^2)}d\lambda \sim \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}d\lambda =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\int_0^n \frac{x}{1+x^2}dx = |t = 1+x^2, dt = 2xdx, xdx = \frac{dt}{2}| = \frac{1}{2}\int_1^{n^2+1}\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln(n^2+1)$$

$$\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln(n^2+1) - \text{не существует}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\xi] \text{ не определен}$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}[\xi] \text{ не определена}$$

Ответ:

Не существует

Задание 8

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ вероятностное пространство. Пусть $\mathcal{L}_2 = \left\{\xi : \mathbb{E}\xi^2 < +\infty\right\}$

Задание 9

Выведите классические неравенства для математического ожидания:

1. Неравенство Ляпунова: $(\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^t)^{\frac{1}{t}}, 0 < s < t$
2. Неравенство Гёльдера: $\mathbb{E}|\xi\eta| \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1$
3. Неравенство Минковского: $(1 \leqslant p < \infty) : (\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}$

Решение:

---

1. Рассмотрим функцию $\psi(x) = x^{\frac{t}{s}}$, она выпуклая на $\mathbb{R}_+$. Тогда по неравенству Йенсена следует:

$$\psi\left(\int |\xi|^s d\mathbb{P}\right) \leqslant \int \psi(|\xi|^s) d\mathbb{P}$$

$$\Rightarrow (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{t}{s}} \leqslant \mathbb{E}|\xi|^t$$

$$\Rightarrow (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{1}{s}} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^t)^{\frac{1}{t}}$$

3.

$$|\xi + \eta|^p = |\xi + \eta||\xi + \eta|^{p-1} \leqslant (|\xi| + |\eta|)|\xi + \eta|^{p-1}$$

$$\mathbb{E}|\xi + \eta|^p \leqslant \mathbb{E}\big[|\xi||\xi + \eta|^{p-1}\big] + \mathbb{E}\big[|\eta||\xi + \eta|^{p-1}\big]$$

$$q = \frac{p}{p-1}$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

$\Rightarrow$ По неравенству Гёльдера:

$$\mathbb{E}\big[|\xi||\xi + \eta|^{p-1}\big] \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\mathbb{E}\big[(|\xi + \eta|^{p-1})^q\big]\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{q}}$$

Аналогично для другого слагаемого:

$$\mathbb{E}\big[|\eta||\xi + \eta|^{p-1}\big] \leqslant (\mathbb{E}|\eta|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\mathbb{E}|\xi + \eta|^p \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}) \cdot (\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{q}}$$

Сокращаем на второй множитель:

$$(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}$$