Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 29

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Пусть U, V — евклидовы пространства, $\varphi, \psi : U \to V$ — линейные отображения и $\lambda \in \mathbb{R}$. Доказать следующие утверждения:
1. $(\varphi^*)^* = \varphi$;
2. $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
3. $(\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*$;
4. $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ —самосопряжённые операторы.

Решение:

1. По определению

$$(\varphi(u), v)_V = (u, \varphi^*(v))_U$$

Рассмотрим отображение $(\varphi^*)^*$. Для него выполнено

$$(\varphi^*(v), u)_U = (v, (\varphi^*)^*(u))_V$$

$$\text{Из симметричности имеем}$$

$$(\varphi^*(v), u)_U = (u, \varphi^*(v))_U = (\varphi(u), v)_V = ((\varphi^*)^*(u), v)_V \Rightarrow \varphi = (\varphi^*)^*$$

2. Зафиксируем в U и V произвольные базисы. Тогда

$$A_{(\varphi+\psi)^*} = G^{-1} A^T_{\varphi+\psi} G' = G^{-1} \left(A_\varphi + A_\psi\right)^T G' = G^{-1} \left(A^T_\varphi + A^T_\psi\right) G' = G^{-1} A^T_\varphi G' + G^{-1} A^T_\psi G' = A_{\varphi^*} + A_{\psi^*}$$
$$\Rightarrow (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$$

3.

$$A_{(\lambda\varphi)^*} = G^{-1} A^T_{\lambda\varphi} G' = G^{-1} \lambda A^T_\varphi G' = \lambda A_{\varphi^*} \Rightarrow (\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*$$

4.

$$A_{\varphi^*} = G^{-1} A^T_\varphi G'$$

$$A_{\varphi^*\varphi} = \left(G^{-1} A^T_\varphi G'\right) A_\varphi$$

$$A_{(\varphi^*\varphi)^*} = G^{-1} \cdot \left(\left(G^{-1} A_\varphi G'\right) A_\varphi\right)^T \cdot G = G^{-1} A^T_\varphi G' A_\varphi G^{-1} G = \left(G^{-1} A^T_\varphi G'\right) A_\varphi = A_{\varphi^*\varphi} \Rightarrow \text{самосопряжён}$$

$$\text{Для } \ \varphi\varphi^* \text{ доказывается аналогично}$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 2

Пусть U, V − евклидовы пространства и $\varphi : U \to V$ − линейное отображение. Доказать, что

$$\mathrm{Ker}(\varphi^*) = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp \;\text{ и }\; \mathrm{Im}(\varphi^*) = (\mathrm{Ker}\varphi)^\perp.$$

Решение:

Пусть $v \in \mathrm{Ker}(\varphi^*) \Rightarrow \varphi^*(v) = 0 \Rightarrow (\varphi(u), v)_V = \left(u, \varphi^*(v)\right)_U = (u, 0)_U = 0 \Rightarrow (\varphi(u), v) = 0 \Rightarrow v \in (\mathrm{Im}\varphi)^\perp \Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi^*) \subseteq (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$. С другой стороны, пусть $v \in (\mathrm{Im}\varphi)^\perp \Rightarrow (\varphi(u), v)_V = 0 = \left(u, \varphi^*(v)\right)_U \Rightarrow \varphi^*(v) = 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(\varphi)^* \Rightarrow (\mathrm{Im}\varphi)^\perp \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi^*)$. Итого $\mathrm{Ker}(\varphi^*) = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$. Первое утвержение доказано. Докажем второе.

Заметим, что из первого утверждения следует, что $\mathrm{Im}\varphi = \left(\mathrm{Ker}(\varphi^*)\right)^\perp \Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi^*) = \left(\mathrm{Ker}\left((\varphi^*)^*\right)\right)^\perp = (\mathrm{Ker}\varphi)^\perp$. Доказано.

Ответ:

ч.т.д

Задание 3

Найти оператор A^* , сопряжённый к оператору A проектирования координатной плоскости на ось абсцисс параллельно биссектрисе первой и третьей четвертей. Указать геометрический смысл оператора A^*.

Решение:

Заметим, что оператор A выплевывает координаты точки пересечения с осью абсцисс прямой, проходящей через данную точку, параллельно прямой $y = x$. Если исходная точка имеет координаты (a, b), то $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда сопряжённый оператор проектирует на биссектрису второй и четвертой четверти.

Ответ:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 4

одним словом глина

Решение:

$$\chi(t) = (-1)^3 \cdot \det(A - tE) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 17-t & -8 & 4 \\ -8 & 17-t & -4 \\ 4 & -4 & 11-t \end{pmatrix}\right) = (t-9)^2 \cdot (t-27) \Rightarrow \lambda = 9; 27$$

$$Av = 9v$$

$$(A - 9E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — собственные векторы}$$

$$Av = 27v$$

$$(A - 27E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис из собственных векторов, ортогонализуем его}$$

$$f_1 = (-1, 0, 2)$$

$$f_2 = (1,1,0) - \frac{((1,1,0), (-1,0,2))}{((-1,0,2), (-1,0,2))} \cdot (-1,0,2) = (1,1,0) + \frac{1}{5}(-1,0,2) = \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)$$

$$f_3 = (2,-2,1) - \frac{((2,-2,1), (-1,0,2))}{((-1,0,2), (-1,0,2))} \cdot (-1,0,2) - \frac{\left((2,-2,1), \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)\right)}{\left(\left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right)\right)} \cdot \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}\right) = (2,-2,1)$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{5}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ — ортонормированный базис}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ — матрица перехода}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Привести квадратичную форму

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

к главным осям ортогональным преобразованием, не находя самого этого преобразования.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = -1 \cdot \det(A - tE) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 0-t & 2 & 2 \\ 2 & 3-t & -1 \\ 2 & -1 & 3-t \end{pmatrix}\right) = (t+2)(t-4)^2 \Rightarrow -2; 4$$

$$\Rightarrow Q = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$$

Ответ:

$$Q = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$$

Задание 6

Найти ортогональную замену координат, приводящую форму

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

к каноническому виду и найти этот канонический вид.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 6-t & -2 & 2 \\ -2 & 5-t & 0 \\ 2 & 0 & 7-t \end{pmatrix}\right) = (t-3)(t-6)(t-9) \Rightarrow 3; 6; 9$$

$$Av = 3v$$

$$(A - 3E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$Av = 6v$$

$$(A - 6E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$Av = 9v$$

$$(A - 9E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ — матрица перехода}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$$

Задание 7

Найти ортогональную замену координат, приводящую форму

$$8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

к каноническому виду и найти этот канонический вид.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 8-t & 4 & -1 \\ 4 & -7-t & 4 \\ -1 & 4 & 8-t \end{pmatrix}\right) = (t-9)^2(t+9) \Rightarrow 9; -9$$

$$Av = 9v$$

$$(A - 9E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -16 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ортогонализуем эти два вектора

$$f_1 = (-1, 0, 1)$$

$$f_2 = (4,1,0) - \frac{((4,1,0),(-1,0,1))}{((-1,0,1),(-1,0,1))} \cdot (-1,0,1) = (4,1,0) + 2 \cdot (-1,0,1) = (2,1,2)$$

$$Av = -9v$$

$$(A + 9E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{— матрица перехода}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$$

Задание 8

Найти ортогональную замену координат, приводящую форму

$$9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$$

к каноническому виду и найти этот канонический вид.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 9-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-t & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5-t & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8-t \end{pmatrix}\right) = t(t-9)^3 \Rightarrow 0; 9$$

$$Av = 0$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av = 9v$$

$$(A - 9E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ортогонализуем эти векторы

$$f_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$f_2 = (0, 1, 1, 0) - \frac{((0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0))}{((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0))} \cdot (1, 0, 0, 0) = (0, 1, 1, 0)$$

$$f_3 = (0, -1, 0, 2) - \frac{((0, -1, 0, 2), (0, 1, 1, 0))}{((0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0))} \cdot (0, 1, 1, 0) = (0, -1, 0, 2) + \frac{1}{2}(0, 1, 1, 0) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \text{— матрица перехода}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$Q = +9y_2^2 + 9y_3^2 + 9y_4^2$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$Q = +9y_2^2 + 9y_3^2 + 9y_4^2$$

Задание 9

Привести пример такой матрицы $B \in M_3(\mathbb{R})$, что

$$B^3 = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение: