Линейная алгебра и геометрия

БДЗ 5

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Представьте матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 15 & 17 & -17 \\ -10 & -25 & -13 & -34 & 23 \\ 6 & -7 & -31 & -38 & 33 \\ 13 & 16 & -11 & 4 & 4 \\ -21 & -36 & 3 & -24 & 12 \end{pmatrix}$$

в виде суммы r матриц ранга 1, $r = \mathrm{rk}(A)$.

Решение:

Воспользуемся алгоритмом построения разложения матрицы в сумму матриц ранга 1:
(1) Найдем максимально линейно независимую систему столбцов(базис). Для этого приведем к УСВ матрицу A

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 15 & 17 & -17 \\ -10 & -25 & -13 & -34 & 23 \\ 6 & -7 & -31 & -38 & 33 \\ 13 & 16 & -11 & 4 & 4 \\ -21 & -36 & 3 & -24 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{67}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{первые три столбца - базис}$$

(2) Выразим оставшиеся столбцы через базис

$$A^{(4)} = \frac{67}{11}A^{(1)} - \frac{29}{11}A^{(2)} + 3A^{(3)}$$
$$A^{(5)} = -\frac{1}{11}A^{(1)} - \frac{4}{11}A^{(2)} - A^{(3)}$$

(3) Получаем, что

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 6 \\ 13 \\ -21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{67}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -25 \\ -7 \\ 16 \\ -36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{11} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \\ -31 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = B_1 + B_2 + B_3, \text{ где } \mathrm{rk}(B_1), \mathrm{rk}(B_2), \mathrm{rk}(B_3) = 1, \mathrm{rk}(A) = 3 = r$$

Ответ:

$$A = B_1 + B_2 + B_3, \text{ где } \mathrm{rk}(B_1), \mathrm{rk}(B_2), \mathrm{rk}(B_3) = 1, \mathrm{rk}(A) = 3 = r$$

Задание 2

В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два базиса $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ и $\mathbb{e}' = (e_1', e_2', e_3')$, где $e_1 = (3, -2, 1), e_2 = (-1, 3, 1), e_3 = (3, 2, 1), e_1' = (-3, 7, 5), e_2' = (-5, 9, 3), e_3' = (3, 5, 11)$ и вектор v, имеющий в базисе $\mathbb{e}$ координаты (-1,2,5).

(а) Докажите, что наборы векторов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ действительно являются базисами в $\mathbb{R}^3$.

(б) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbb{e}$ к базису $\mathbb{e}'$.

(в) Найдите координаты вектора v в базисе $\mathbb{e}'$.

Решение:

(а)

(1) Докажем, что векторы из $\mathbb{e}$ линейно независимы, для этого найдем ранг соответствующей матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ранг 3, а значит векторы из } \mathbb{e} \text{ линейно независимые}$$

(2) Покажем, что векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ есть линейные комбинации векторов из $\mathbb{e}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}e_1 - \frac{1}{4}e_2 + \frac{5}{16}e_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{4}e_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{11}{16}e_1 + \frac{3}{4}e_2 - \frac{7}{16}e_3$$

Получили, что векторы стандартного базиса $\mathbb{R}^3$ принадлежат линейной оболочке $\mathbb{e} \Rightarrow \mathbb{e}$ порождает $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{e}$ действительно базис.

(3) Докажем, что векторы из $\mathbb{e}'$ линейно независимы, для этого найдем ранг соответствующей матрицы

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 7 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ранг 3, а значит векторы из } \mathbb{e}' \text{ линейно независимые}$$

(4) Покажем, что векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ есть линейные комбинации векторов из $\mathbb{e}'$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{21}{16}e'_1 + \frac{13}{16}e'_2 + \frac{3}{8}e'_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e'_1 + \frac{3}{4}e'_2 + \frac{1}{4}e'_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{13}{16}e'_1 - \frac{9}{16}e'_2 - \frac{1}{8}e'_3$$

Получили, что векторы стандартного базиса $\mathbb{R}^3$ принадлежат линейной оболочке $\mathbb{e}' \Rightarrow \mathbb{e}'$ порождает $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{e}'$ действительно базис.

(б) Матрица перехода является решением соответствующего матричного уравнения $\mathbb{e} \cdot x = \mathbb{e}'$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 3 & -3 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & \frac{1}{8} & \frac{49}{8} \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{11}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{21}{8} \end{pmatrix}$$

(в) Пусть C – матрица перехода из пункта (б). Для того, чтобы найти координаты вектора в базисе $\mathbb{e}'$, решим СЛУ

$$(C \mid v)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{15}{8} & \frac{1}{8} & \frac{49}{8} & -1 \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} & 2 \\ -\frac{11}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{21}{8} & 5 \end{array}\right) \Rightarrow v' = \begin{pmatrix} -\frac{105}{4} \\ \frac{73}{4} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Ответ:

(а) ч.т.д

(б)

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{8} & \frac{1}{8} & \frac{49}{8} \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{11}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{21}{8} \end{pmatrix}$$

(в)

$$\begin{pmatrix} -\frac{105}{4} \\ \frac{73}{4} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

Задание 3

Найдите базис и размерность каждого из подпространств $L_1, L_2, U = L_1 + L_2, W = L_1 \cap L_2$ пространства $\mathbb{R}^5$, если L_1 – линейная оболочка векторов

$$a_1 = (1, -4, -2, 2, -1), a_2 = (5, -20, 5, -2, 4), a_3 = (-1, 4, -3, 2, -2), a_4 = (-3, -4, 2, -2, -2),$$

а L_2 — линейная оболочка векторов

$$b_1 = (3, -12, -1, 2, 0), b_2 = (-7, -4, 6, -6, 3), b_3 = (-9, 23, -3, -8, 4), b_4 = (-3, -1, -5, -4, 4).$$

Решение:

(1) Найдем базис L_1. Для этого приведем к УСВ соответствующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -3 \\ -4 & -20 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ как базис можно взять векторы } a_1, a_2, a_4 \Rightarrow \dim(L_1) = 3$$

(2) Найдем базис L_2. Для этого приведем к УСВ соответствующую матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -9 & -3 \\ -12 & -4 & 23 & -1 \\ -1 & 6 & -3 & -5 \\ 2 & -6 & -8 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ как базис можно взять векторы } b_1, b_2, b_3 \Rightarrow \dim(L_2) = 3$$

(3) Найдем базис $L_1 + L_2$. Так как пространства заданы первым способом, то достаточно рассмотреть УСВ следующей матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -3 & 3 & -7 & -9 & -3 \\ -4 & -20 & 4 & -4 & -12 & -4 & 23 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 2 & -1 & 6 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -6 & -8 & -4 \\ -1 & 4 & -2 & -2 & 0 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ как базис можно взять векторы } a_1, a_2, a_4, b_2, b_3 \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 5$$

(4) Пользуясь альтернативным способом, найдем базис $L_1 \cap L_2$. Найдем ФСР(как в алгоритме) для ОСЛУ

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -1 & -3 & 3 & -7 & -9 & -3 \\ -4 & -20 & 4 & -4 & -12 & -4 & 23 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 2 & -1 & 6 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -6 & -8 & -4 \\ -1 & 4 & -2 & -2 & 0 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{ ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следуя алгоритму,получаем, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ порождает } L_1 \cap L_2$$

Вектор $(3, -12, -1, 2, 0)$ является базисом $L_1 \cap L_2 \Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 1$

Ответ:

L_1:
  Базис: a_1, a_2, a_4,
  Размерность: 3.
L_2:
  Базис: b_1, b_2, b_3,
  Размерность: 3.
$L_1 + L_2$:
  Базис: a_1, a_2, a_4, b_2, b_3,
  Размерность: 5.
$L_1 \cap L_2$:
  Базис: $(3, -12, -1, 2, 0)$,
  Размерность: 1.

Задание 4

Пусть U — подпространство в $\mathbb{R}^5$, порожденное векторами

$$v_1 = (-7, 14, -3, -7, -10), v_2 = (-14, -9, -6, -12, -13), v_3 = (12, -7, -12, 0, 7), v_4 = (12, -44, -12, 2, 14).$$

Укажите базис какого-нибудь подпространства $W \subset \mathbb{R}^5$, такого что $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ и W не представимо в виде линейной оболочки одних лишь векторов стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^5$. Ответ обоснуйте.

Решение:

(1) Найдем базис U. Для этого приводим к УСВ матрицу

$$\begin{pmatrix} -7 & -14 & 12 & 12 \\ 14 & -9 & -7 & -44 \\ -3 & -6 & -12 & -12 \\ -7 & -12 & 0 & 2 \\ -10 & -13 & 7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ как базис можно взять векторы } v_1, v_2, v_3$$

(2) Как было доказано на семинаре, W доп. к $U \Leftrightarrow \exists u_1, ..., u_k \in U : W = \langle e_{j_1} + u_1, ..., e_{j_k} + u_k \rangle \Rightarrow$ как W можно взять

$$\left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ -3 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ -8 \\ -6 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ эти векторы линейно независимы, берем их как базис}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ -3 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ -8 \\ -6 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Задание 5

В пространстве $\mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R})$ рассмотрим подпространства $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ и $W = \langle v_3, v_4 \rangle$, где

$$v_1 = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -11 & -15 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -8 & 14 \\ -13 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Докажите, что $\mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

(б) Найдите проекцию вектора

$$\xi = \begin{pmatrix} 49 & 1 \\ 59 & -19 \end{pmatrix}$$

на подпространство W вдоль подпространства U.

Решение:

Так как $\mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$, то перепишем векторы как

$$v_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ -15 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -14 \\ 11 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -13 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Докажем, что U и W линейно независимые. Сначала найдем $\dim(U)$

$$\begin{pmatrix} -8 & -11 \\ 13 & -15 \\ -4 & -10 \\ -8 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U) = 2$$

2. Найдем $\dim(W)$

$$\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -11 & 14 \\ -14 & -13 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W) = 2$$

3. Найдем $\dim(U + W)$

$$\begin{pmatrix} -8 & -11 & -7 & -8 \\ 13 & -15 & -11 & 14 \\ -4 & -10 & -14 & -13 \\ -8 & 14 & 11 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U + W) = 4$$

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) = 4 \Rightarrow U \text{ и } W \text{ линейно независимые}$$

4. Проверим, что базисные векторы лежат в $U + W$. Решим матричное уравнение

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -8 & -11 & -7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & -15 & -11 & 14 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -10 & -14 & -13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 14 & 11 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{961}{12813} & -\frac{357}{4271} & -\frac{394}{12813} & -\frac{728}{4271} \\ -\frac{1243}{12813} & \frac{236}{4271} & \frac{1397}{12813} & \frac{565}{4271} \\ \frac{908}{12813} & -\frac{516}{4271} & -\frac{2041}{12813} & -\frac{801}{4271} \\ \frac{274}{12813} & \frac{484}{4271} & \frac{259}{12813} & \frac{652}{4271} \\ \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{базисные векторы лежат в } \ U + W \Rightarrow \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$$

5.

$$\begin{pmatrix} 49 \\ 1 \\ 59 \\ -19 \end{pmatrix} = -\frac{9970}{4271} \cdot v_1 - \frac{3327}{4271} \cdot v_2 - \frac{10606}{4271} \cdot v_3 - \frac{2335}{4271} \cdot v_4 \Rightarrow$$

$$-\frac{10606}{4271} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -14 \\ 11 \end{pmatrix} - \frac{2335}{4271} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 14 \\ -13 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{92922}{4271} \\ \frac{83976}{4271} \\ \frac{178839}{4271} \\ -\frac{114331}{4271} \end{pmatrix} - \ \text{проекция на} \ \ W$$

Ответ:

1. ч.т.д
2.

$$\begin{pmatrix} \frac{92922}{4271} & \frac{83976}{4271} \\ \frac{178839}{4271} & -\frac{114331}{4271} \end{pmatrix}$$