Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 31

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Пусть $\sigma_1, ..., \sigma_m$ — сингулярные значения матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), m \leqslant n)$. Найти все сингулярные значения матрицы $(A|E_m) \in \mathrm{Mat}_{m\times(n+m)}(\mathbb{R})$.

Решение:

$$A = U\Sigma V^T - \text{SVD}$$
$$\Rightarrow (A|E_m) = (U\Sigma V^T|E_m) = U(\Sigma V^T|U^T)$$
$$\Rightarrow U^T(A \mid E_m) = (\Sigma V^T \ |U^T)$$

Так так домножение ортогональную матрицу не меняет сингулярных значений, то сингулярные значения матрицы $(A \mid E_m)$ равны сингулярным значениям матрицы $(\Sigma V^T \mid U^T)$, найдем их.

$$(\Sigma V^T \mid U^T)\begin{pmatrix} V\Sigma^T \\ U \end{pmatrix} = \Sigma\Sigma^T + E_m = \begin{pmatrix} \sigma_1^2+1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2+1 & ... & 0 \\ ... & ... & \sigma_m^2+1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения этой матрицы равны $\sigma_i^2 + 1 \Rightarrow$ сингулярные $\sqrt{\sigma_i^2+1}$.

Ответ:

$$\sqrt{\sigma_i^2+1} \ \forall i = 1, ..., m$$

Задание 2

Найти усечённое сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B ранга 1, наиболее близкую к A по норме Фробениуса, и вычислить $||A - B||$.

Решение:

$$C = AA^T = \begin{pmatrix} 40 & -30 \\ -30 & 85 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^2 - 125t + 2500 = (t-25)(t-100)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 5$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Cv = 25v$$

$$(C - 25E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 15 & -30 \\ -30 & 60 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = u_2$$

$$Cv = 100v$$

$$(C - 100E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -60 & -30 \\ -30 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = u_1$$

$$v_1 = \frac{A^T u_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{A^T u_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \text{— усечённое разложение}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$||A - B|| = \sqrt{\sigma_2^2} = 5$$

Ответ:

см. конец решения

Задание 3

Найти усечённое сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B ранга 1, наиболее близкую к A по норме Фробениуса, и вычислить $||A - B||$.

Решение:

$$C = AA^T = \begin{pmatrix} 41 & 2 \\ 2 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^2 - 85t + 1800 = (t-40)(t-45)$$

$$\sigma_1 = 3\sqrt{5}, \sigma_2 = 2\sqrt{10}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$Cu = 45u$$

$$(C - 45E)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = u_1$$

$$Cu = 40u$$

$$(C - 40E)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = u_2$$

$$v_1 = \frac{A^T u_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{A^T u_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ — усеченное разложение}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$||A - B|| = 2\sqrt{10}$$

Ответ:

см. конец решения

Задание 4

Найти усечённое сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 1 \\ -8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы B и C рангов 2 и 1 соответственно, наиболее близких к A по норме Фробениуса, и вычислить $||A - B||$ и $||A - C||$.

Решение:

$$D = AA^T = \begin{pmatrix} 186 & -96 & -42 \\ -96 & 132 & 96 \\ -42 & 96 & 186 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^3 - 504t^2 + 63504t - 1679616 = (t-36)(t-144)(t-324)$$

$$\sigma_1 = 18, \sigma_2 = 12, \sigma_1 = 6$$

$$Du = 324u$$

$$(D - 324E)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} -138 & -96 & -42 \\ -96 & -192 & 96 \\ -42 & 96 & -138 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = u_1$$

$$Du = 144u$$

$$(D - 144E)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} 42 & -96 & -42 \\ -96 & -12 & 96 \\ -42 & 96 & 42 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = u_2$$

$$Du = 36u$$

$$(D - 36E)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} 150 & -96 & -42 \\ -96 & 96 & 96 \\ -42 & 96 & 150 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = u_3$$

$$v_1 = \frac{A^T u_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{A^T u_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{A^T u_3}{\sigma_3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} - \text{усеченное разложение}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$||A - B|| = 6$$

$$||A - C|| = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$$

Ответ:

см. конец решения

Задание 5

Привести пример матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2, для которой ближайшей по норме Фробениуса матрицей ранга 1 будет матрица

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} \end{pmatrix} \text{— усечённое свд,}$$

тогда можно взять матрицу с произвольным вторым сингулярным значением, меньшим $2\sqrt{15}$, например

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{6\sqrt{30}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} & \frac{-3\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{15} \\ -1 - \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{-2\sqrt{30}}{5} + \frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 - \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{6\sqrt{30}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} & \frac{-3\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{15} \\ -1 - \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{-2\sqrt{30}}{5} + \frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix}$$