Теория чисел

ДЗ 1

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите (123456789, 987654321)

Решение:

Применяя алгоритм Евклида, получаем цепочку равенств

(123456789, 987654321) = (123456789, 987654321 - 123456789*8) = (123456789, 9) = 9

Ответ:

9

Задание 2

Докажите, что следующие дроби несократимы при всех натуральных значениях n:

$$\text{а) } \frac{2n+13}{n+7}; \qquad \text{б)} \frac{2n^2-1}{n+1}.$$

Решение:

а) Найдем $(2n+13,\ n+7)$ применяя алгоритм Евклида

$$(2n+13,\ n+7) = (n+6, n+7) = 1 \ \ \text{(так как НОД соседних чисел всегда 1)} \Rightarrow \text{дробь несократимая}$$

б) Найдем $(2n^2-1, n+1)$ применяя алгоритм Евклида

$$(2n^2-1, n+1) = (2n^2-1-2(n+1)^2, n+1) = (-4n-3, n+1) = (n, n+1) = 1 \Rightarrow \text{дробь несократимая}$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 3

Докажите, что для нечетных чисел a, b, и c имеет место равенство

$$\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) = (a, b, c)$$

Решение:

Заметим, что $a = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b+c)$; $b = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(c+c)$; $c = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(c+b) - \frac{1}{2}(b+a) \Rightarrow \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \mid a, b, c$ (по свойству НОДа) $\Rightarrow \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \mid (a, b, c)$.

С другой стороны, если некоторое число k делит a, b, c, то оно также делит и их линейные комбинации(в частности $\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}$). Как k можно взять $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$. Получаем, что $(a, b, c) \mid \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Итого, имеем

$$\begin{cases} \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \mid (a, b, c) \\ (a, b, c) \mid \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right) = (a, b, c)$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа и $a \geqslant b$. Докажите, что биномиальный коэффициент $\binom{a}{b}$ делится на a.

Решение:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a \cdot \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!}}{b}, \text{ но } (a,b) = 1, \text{ при этом } \binom{a}{b} \text{ целое число} \Rightarrow b \mid \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!}$$

$$\text{иначе } b \text{ обязано быть единицей, но тогда утверждение, очевидно, верно.}$$

Разделим $\frac{(a-1)!}{(b-1)!\cdot(a-b)!}$ на b. Получим число $\frac{(a-1)!}{b!(a-b)!}$. Оно является целым. Тогда исходный биномиальный коэффициент делится на a, так как полученное на этом шаге число является результатом деления $\binom{a}{b}$ на a, а оно целое. Утверждение доказано.

Ответ:

ч.т.д

Задание 5

Рассмотрим *числа Ферма*: $f_k = 2^{2^k} + 1, k \geqslant 0$. Докажите, что при $m \neq n$ выполняется равенство $(f_n, f_m) = 1$.

Решение:

$$f_k - 2 = 2^{2^k} - 1 = \left(2^{2^{k-1}} - 1\right)\left(2^{2^{k-1}} + 1\right) = \left(2^{2^{k-1}} - 1\right) \cdot f_{k-1} = \left(\left(2^{2^{k-2}} - 1\right)\right) \cdot f_{k-2} \cdot f_{k-1} = \ldots$$
$$= f_0 \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k-1} \Rightarrow f_k = f_0 \cdot f_1 \cdot \ldots \cdot f_{k-1} + 2$$

Пусть $m > n$. Тогда $f_m - 2 = f_0 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot \ldots \cdot f_{m-1} \Rightarrow f_n \mid f_m - 2$.

Рассмотрим произвольное число d, такое что $d \mid f_n$ и $d \mid f_m$. Из системы условий

$\begin{cases} f_n \mid f_m - 2 \\ d \mid f_n \end{cases}$ заключаем, что $d \mid f_m - 2$. При этом $d \mid f_m$. Но $\gcd(f_m, f_m - 2) = \gcd(2, f_m) = 1 \Rightarrow d = 1$

Итого, для произвольного делителя d получили, что он обязательно равен единице $\Rightarrow$ ч.т.д

Ответ:

убито