Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 26

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:

1. $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 2 - 2u + 4v \\ z = 1 + u + 3v \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 4u \\ y = 3u + v \\ z = 4 + 2u + 2v \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -1 + 2u + v \\ y = u + 2v \\ z = 1 + 3v \end{cases}$;

Решение:

1.

Направляющими пространстави являются $\langle(1,1,1), (1,0,-1)\rangle$ и $\langle(2,-2,1), (0,4,3)\rangle$. Они не совпадают, значит плоскости пересекаются.

2.

Направляющими пространстави являются $\langle(1,1,1), (1,0,-1)\rangle$ и $\langle(4,3,2), (0,1,2)\rangle$. Они совпадают, значит плоскости равны или параллельны. Подставим точку $(1, 2, 3)$ из первой системы во вторую, получим, что $u = 0, v = 2, 4 + 4 \neq 3 \Rightarrow$ плоскости параллельны, но не пересекаются.

3.

Направляющими пространстави являются $\langle(1,1,1), (1,0,-1)\rangle$ и $\langle(2,1,0), (1,2,3)\rangle$. Они совпадают, значит плоскости равны или параллельны. Подставим точку $(1, 2, 3)$ из первой системы во вторую, получим, что $v = \frac{2}{3}, u = \frac{2}{3}, -1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow$ плоскости совпадают.

Ответ:

пересекаются, параллельны, совпадают

Задание 2

Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

1. $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ и $3x+5y-z-2=0$;
2. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ и $3x-3y+2z-5=0$;
3. $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ и $x+2y-4z+1=0$.

Решение:

1. $a=(4,3,1), n=(3,5,-1); (a,n)\neq 0 \Rightarrow$ прямая пересекает плоскость.
2. $a=(2,4,3), n=(3,-3,2); (a,n)=0 \Rightarrow$ прямая либо лежит, либо параллельна плоскости. Подставим точку (-1, 3, 0) в уравнение плоскости, получим $-17\neq 0 \Rightarrow$ прямая параллельна плоскости.
3. $a=(8,2,3), n=(1,2,-4); (a,n)=0 \Rightarrow$ прямая либо лежит, либо параллельна плоскости. Подставим точку (13, 1, 4) в уравнение плоскости, получим $0=0 \Rightarrow$ прямая лежит в плоскости.

Ответ:

пересекает, параллельна, лежит

Задание 3

Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

1. $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$ и $y + 4z + 17 = 0$;
2. $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0 \\ 5x + 3y + z - 16 = 0 \end{cases}$ и $2x - y - 4z - 24 = 0$;

Решение:

1. $n_1 = (2, 3, 6), n_2 = (1, 1, 1) \Rightarrow a = n_1 \times n_2 = (-3, 4, -1)$ – направляющий вектор прямой. $n = (0, 1, 4)$ – нормаль к плоскости. $(a, n) = 0$. Возьмём точку $(-25, 20, 0)$ на прямой и подставим в уравнение плоскости, получим $37 \neq 0 \Rightarrow$ прямая параллельна плоскости.
2. $n_1 = (1, 2, 3), n_2 = (5, 3, 1) \Rightarrow a = n_1 \times n_2 = (-7, 14, -7)$ –направляющий вектор прямой. $n = (2, -1, -4)$ – нормаль к плоскости.$(a, n) = 0$. Возьмём точку $(8, -8, 0)$ на прямой и подставим в уравнение плоскости, получим $0 = 0 \Rightarrow$ прямая лежит в плоскости.

Ответ:

параллельна, лежит

Задание 4

Установить взаимное расположение (скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают) следующих пар прямых. Если прямые параллельны, составить уравнение плоскости, их содержащей; если прямые пересекаются, написать уравнение плоскости, их содержащей, а также найти их точку пересечения.

1. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t; \\ z = -2 + t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t. \\ z = 4 \end{cases}$

Решение:

1. $a_1 = (2, 1, 4), a_2 = (3, -2, 1)$. Они линейно независимые, значит прямые либо пересекаюся, либо скрещиваются. $r_2 - r_1 = (5, -8, -5); (a_1, a_2, r_2 - r_1) = 0 \Rightarrow$ прямые пересекаются в точке. Тогда $r_1 + \lambda_1 a_1 = r_2 + \lambda_2 a_2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ удовлетворяют СЛУ

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -8 \\ 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

Значит они пересекаются в точке (-3, 5, -5). Найдем уравнение плоскости, $a_1 \times a_2 = (9, 10, -7) \Rightarrow 9x + 10y - 7z - 58 = 0$

2. $a_1 = (2, 2, -1), a_2 = (-2, 3, 0)$. Они линейно независимые, значит прямые либо пересекаюся, либо скрещиваются. $r_2 - r_1 = (-1, -7, 4); (a_1, a_2, r_2 - r_1) = 23 \Rightarrow$ прямые скрещиваются.

Ответ:

пересекаются, скрещиваются

Задание 5

Установить взаимное расположение (скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают) следующих пар прямых. Если прямые параллельны, составить уравнение плоскости, их содержащей; если прямые пересекаются, написать уравнение плоскости, их содержащей, а также найти их точку пересечения.

1. $\begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x = t \\ y = -8 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

Решение:

1. $a_1 = (9, 5, 1), a_2 = (2, -3, -3) \times (1, -2, 1) = (-9, -5, -1)$. Направляющие векторы коллинеарны, значит прямые либо параллельны, либо совпадают. $r_1 = (0, 0, -3)$, как r_2 можно взять $(0, 0, -3)$, значит прямые совпадают.
2. $a_1 = (1, -4, -3), a_2 = (1, 1, -1) \times (2, -1, 2) = (1, -4, -3)$. Направляющие векторы коллинеарны, значит прямые либо параллельны, либо совпадают. $r_1 = (0, -8, -3)$, как r_2 можно взять $(0, 0, 0)$. a_1 и $r_2 - r_1$ линейно независимые, значит прямые параллельны. Плоскость содержит точки $(0, 0, 0)$ и $(0, -8, -3)$, то есть как направляющие векторы можно взять $(1, -4, -3)$ и $(0, 8, 3)$. Тогда $n = (1, -4, -3) \times (0, 8, 3) = (12, -3, 8)$. Тогда уравнение плоскости имеет вид $12x - 3y + 8z = 0$

Ответ:

совпадают, параллельны

Задание 6

Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(2, 3, 1)$ и пересекающей каждую из двух прямых

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z + 4 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Решение:

Найдём уравнение плоскости, проходящей через данную точку и первую прямую. $n_1 = (1, 1, 0), n_2 = (1, -1, 1) \Rightarrow n = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$ —направляющий вектор прямой. На прямой лежит точка $(0, 0, -4)$. Тогда второй направляющий вектор плоскости есть $(-2, -3, -5)$. $d = (1, -1, -2) \times (-2, -3, -5) = (-1, 9, -5)$ —нормаль к искомой плоскости. Тогда уравнение плоскости имеет вид $-x + 9y - 5z - 20 = 0$. Найдем, в какой точке она пересекает вторую прямую, искомые координаты есть решение СЛУ

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \\ -x + 9y - 5z - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{76}{17}, \frac{31}{17}, \frac{3}{17}\right)$$

Эта точка лежит на искомой прямой, тогда по двум точкам найдём уравнение прямой. Оно имеет вид

$$\frac{x - 2}{-6\frac{8}{17}} = \frac{y - 3}{-1\frac{3}{17}} = \frac{z - 1}{-\frac{14}{17}}$$

Ответ:

$$\frac{x - 2}{-6\frac{8}{17}} = \frac{y - 3}{-1\frac{3}{17}} = \frac{z - 1}{-\frac{14}{17}}$$

Задание 7

Даны вершины тетраэдра

$$A(0,0,2), B(3,0,5), C(1,1,0), D(4,1,2).$$

Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Решение:

Найдем уравнение плоскости, проходящей чере грань ABC. Есть три точки, тогда уравнение плоскости имеет вид $x-3y-z+2=0, n=(1,-3,-1)$. Тогда расстояние от точки D до плоскости можно вычислить как $h=\frac{|1\cdot 4-3\cdot 1-1\cdot 2+2|}{\sqrt{1+9+1}}=\frac{1}{\sqrt{11}}$.

Ответ:

$\frac{1}{\sqrt{11}}$

Задание 8

Найти расстояние от точки $(1, 2, 5)$ до каждой из следующих прямых:

1. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t; \\ z = 3 + t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 4x - 3z + 3 = 0 \end{cases}.$

Решение:

1. $a = (1, -2, 1). Pr_0 = (-1, -1, -2)$. Тогда $\rho(P, l) = \dfrac{|[Pr_0, a]|}{|a|} = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$
2. $a = (1, 1, -1) \times (4, 0, -3) = (-3, -1, -4), r_0 = (0, -1, 1), Pr_0 = (-1, -3, -4)$. Тогда $\rho(P, l) = \dfrac{|[Pr_0, a]|}{|a|} = \dfrac{4\sqrt{78}}{13}$

Ответ:

$\sqrt{\frac{35}{6}}, \frac{4\sqrt{78}}{13}$

Задание 9

Найти расстояние между следующими парами прямых:

1. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 3t; \\ z = 3t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ 2x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$.

Решение:

---

1. $a_1 = (1, -1, 2), a_2 = (-1, 3, 3), r_1 - r_2 = (3, -1, 2)$. Тогда $\rho(l_1, l_2) = \dfrac{|(a_1, a_2, r_1 - r_2)|}{|[a_1, a_2]|} = \dfrac{18}{\sqrt{110}}$
2. $a_1 = (1, 1, -1) \times (1, 1, 0) = (1, -1, 0), a_2 = (1, -2, 3) \times (2, -1, 3) = (-3, 3, 3), r_1 = (0, 0, 1), r_2 = (0, 0, 2)$. Тогда $\rho(l_1, l_2) = \dfrac{|(a_1, a_2, r_1 - r_2)|}{|[a_1, a_2]|} = 0$