Алгебра

ДЗ 6

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Рассмотрим факторкольцо $F = \mathbb{Q}[z]/(z^3 - z^2 + 1)$ и обозначим через α класс элемента в нём. Докажите, что F является полем, и представьте элемент $\dfrac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} \in F$ в виде $f(\alpha), f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f \leqslant 2$.

Решение:

F является полем, если многочлен $z^3 - z^2 + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$, то есть у него нет корней. Его рациональными корнями могут быть только делители 1, но 1 и -1 не корни, значит многочлен неприводим, значит F поле.

$$F = \{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$$

При этом имеем соотношение:

$$\alpha^3 - \alpha^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = \alpha^2 - 1 \Leftrightarrow \alpha^4 = \alpha^3 - \alpha = \alpha^2 - \alpha - 1$$

$$\frac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

$$2\alpha^2 - 8\alpha + 9 = (a\alpha^2 + b\alpha + c)(\alpha^2 - 3\alpha + 1) = (-a - 2b + c)\alpha^2 + (-a + b - 3c)\alpha + (2a - b + c)$$

$$\begin{cases} -a - 2b + c = 2 \\ -a + b - 3c = -8 \Rightarrow (a, b, c) = (3, -2, 1) \\ 2a - b + c = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = 3\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

Ответ:

$$\frac{2\alpha^2 - 8\alpha + 9}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = 3\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

Задание 2

Найдите остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$, где

$$g = x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2, f = x_2^4x_3 - 2x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2.$$

Решение:

$$x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + x_1^2x_2^2 \underset{-x_1}{\rightarrow} x_2^4x_3^5 + 2x_1x_2^4x_3 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_1x_2^4x_3 = x_2^4x_3^5 + x_1x_2^4x_3 + 2x_1^2x_2x_3^2 \underset{-x_2^2x_3}{\rightarrow}$$

$$x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 + 2x_1x_2^3x_3^3 - x_2^6x_3^2 \underset{-2x_2x_3^3}{\rightarrow} x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 + 4x_1x_2^2x_3^5 - 2x_2^5x_3^4 \underset{-4x_3^5}{\rightarrow}$$

$$x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 + 8x_1x_2x_3^7 - 4x_2^4x_3^6$$

Ни один моном не делится на $x_1x_2^2 \Rightarrow$ получили остаток

Ответ:

$$x_2^4x_3^5 + 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 - 2x_2^5x_3^4 + 8x_1x_2x_3^7 - 4x_2^4x_3^6$$

Задание 3

Выясните, является ли множество $\{f_1, f_2, f_3\}$ системой Грёбнера, где

$$f_1 = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2, f_2 = 4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 + 4, f_3 = x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3.$$

Решение:

$$L(f_1) = 2x_1x_2; L(f_2) = 4x_1x_3^2; L(f_3) = x_2^2x_3^3$$

$$m = \text{НОК}(L(f_1), L(f_2)) = 4x_1x_2x_3^2$$

$$m_1 = \frac{m}{L(f_1)} = 2x_3^2$$

$$m_2 = \frac{m}{L(f_2)} = x_2$$

$$S(f_1, f_2) = 2x_3^2(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) - x_2(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 + 4) = 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 - 4x_2$$

$$8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 - 4x_2 \xrightarrow[-2x_3]{f_2} -x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3 \xrightarrow[1]{f_3} -4x_2 - 8x_3 + 4x_2 + 8x_3 = 0 \Rightarrow$$

редуцируется к нулю, проверяем пару $\{f_1, f_3\}$

$$m = 2x_1x_2^2x_3^3$$

$$m_1 = x_2x_3^3; m_2 = 2x_1$$

$$S(f_1, f_3) = x_2x_3^3(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) - 2x_1(x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3) = 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3$$

$$4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 \xrightarrow[-x_2x_3^2]{f_2} -8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 4x_2x_3^2 \xrightarrow[4]{f_1} 0 \Rightarrow$$

редуцируется к нулю, проверяем пару $\{f_2, f_3\}$

$$m = 4x_1x_2^2x_3^3$$

$$m_1 = x_2^2x_3; m_2 = 4x_1$$

$$S(f_2, f_3) = x_2^2x_3(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 + 4) - 4x_1(x_2^2x_3^3 + 4x_2 + 8x_3) = x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3$$

$$x_2^3x_3^4 + 4x_2^2x_3 - 16x_1x_2 - 32x_1x_3 \xrightarrow[-x_2x_3]{f_3} -16x_1x_2 - 32x_1x_3 - 8x_2x_3^2 \xrightarrow[8]{f_1} 0 \Rightarrow$$

редуцируется к нулю

По критерию Бухбергера F является системой Грёбнера.

Ответ:

ага

Задание 4

Докажите, что множество $F \subseteq K[x] \setminus \{0\}$ является системой Грёбнера тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $f \in F$, который делит любой многочлен из F.

Решение:

Пусть F – система Грёбнера. Рассмотрим $f \in F$ с минимальной старшей степенью. Поделим произвольный многочлен $g \in F$ на f. Если f не делит g, то существует остаток $r \in F, r = g - hf, \deg(r) < \deg(f)$, получаем противоречие с минимальной старшей степенью f, значит f делит произвольный g, в одну сторону доказали.