Алгебра

ДЗ 1

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Докажите, что формула $m \circ n = 3mn - 3m - 3n + 4$ задаёт бинарную операцию на множестве $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ и что $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой.

Решение:

Покажем, что данная формула задаёт отображение $\mathbb{R} \setminus \{1\} \times \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Для этого возьмём два произвольных элемента из $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ и посмотрим, может ли их произведение равняться 1.

$$3ab - 3a - 3b + 4 = 1$$
$$ab - a - b + 1 = 0$$
$$a \cdot (b-1) - (b-1) = 0$$
$$(b-1) \cdot (a-1) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Но $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ значит произведение никогда не равняется 1. Значит данная формула задаёт бинарную операцию. Теперь докажем, что это группа:

$$(a \circ b) \circ c = (3ab - 3a - 3b + 4) \circ c = 9abc - 9ac - 9bc + 9c - 9ab + 9a + 9b - 8$$
$$a \circ (b \circ c) = a \circ (3bc - 3b - 3c + 4) = 9abc - 9ac - 9bc + 9c - 9ab + 9a + 9b - 8$$
$$\text{значит есть ассоциативность}$$
$$e = \frac{4}{3}$$
$$a \circ e = 4a - 3a - 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = a$$
$$e \circ a = 3 \cdot \frac{4}{3} a - 3 \cdot \frac{4}{3} - 3a + 4 = a$$
$$\text{есть нейтральный элемент}$$
$$a \circ a^{-1} = 3a \cdot a^{-1} - 3a - 3a^{-1} + 4 = \frac{4}{3} \Rightarrow a^{-1} = \frac{9a-8}{9a-9}$$
$$a^{-1} \cdot a = 3a \cdot \frac{9a-8}{9a-9} - 3 \cdot \frac{9a-8}{9a-9} - 3a + 4 = \frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow a^{-1} = \frac{9a-8}{9a-9} - \text{обратный элемент}$$

Все три аксиомы выполняются, значит это группа.

Ответ:

ч.т.д

Задание 2

Пусть $G-$ группа из предыдущего задания. Определите все значения параметра $a \geqslant 1, a \in \mathbb{R}$, при которых подмножество $H_a = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ является подгруппой в G.

Решение:

Пусть $x_1, x_2 > a; x_1, x_2 \in H_a$

$$\text{Хотим } x_1 \circ x_2 = x_3 \in H_a \Rightarrow$$

$$x_3 = 3x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 4 > 3a^2 - 3a - 3a + 4 = 3a^2 - 6a + 4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 > a \\ x_3 > 3a^2 - 6a + 4 \end{cases} \Longleftrightarrow 0 > 3a^2 - 7a + 4 \Longleftrightarrow a \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$$

При найденом a, $e = \frac{4}{3} \in H_a$

$$x^{-1} = \frac{9x-8}{9x-9} \geqslant \frac{9 \cdot \frac{4}{3} - 8}{9 \cdot \frac{4}{3} - 9} = \frac{4}{3} \Rightarrow x^{-1} \in H_a$$

Три аксиомы подгруппы выполняются при $a \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$.

Ответ:

$a \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$

Задание 3

Для каждого элемента группы $(\mathbb{Z}_{17} \setminus \{0\}, \times)$ найдите его порядок и его обратный элемент.

Решение:

Заметим, что порядок каждого элемента делит $\varphi(17) = 16$, поэтому порядки будем искать среди делителей 16. Пойдём по порядочку:

1. $\mathrm{ord}(1) = 1, 1^{-1} = 1$
2. $\mathrm{ord}(2) = 8, 2^{-1} = 9$
3. $\mathrm{ord}(3) = 16, 3^{-1} = 6$
4. $\mathrm{ord}(4) = 4, 4^{-1} = 13$
5. $\mathrm{ord}(5) = 16, 5^{-1} = 7$
6. $\mathrm{ord}(6) = 16, 6^{-1} = 3$
7. $\mathrm{ord}(7) = 16, 7^{-1} = 5$
8. $\mathrm{ord}(8) = 8, 8^{-1} = 15$
9. $\mathrm{ord}(9) = 8, 9^{-1} = 2$
10. $\mathrm{ord}(10) = 16, 10^{-1} = 12$
11. $\mathrm{ord}(11) = 16, 11^{-1} = 14$
12. $\mathrm{ord}(12) = 16, 12^{-1} = 10$
13. $\mathrm{ord}(13) = 4, 13^{-1} = 4$
14. $\mathrm{ord}(14) = 16, 14^{-1} = 11$
15. $\mathrm{ord}(15) = 8, 15^{-1} = 8$
16. $\mathrm{ord}(16) = 2, 16^{-1} = 16$

Ответ:

см. решение

Задание 4

Докажите, что всякая подгруппа циклической группы является циклической.

Решение:

Пусть $G-$ циклическая группа. $H \subseteq G$. Покажем, что H является циклической. Пусть $G = \langle g \rangle$ для некоторого $g \in G$. Если $g \in H$, то H является циклической и g её образующий элемент. Далее пусть $g \notin H$. Заметим, что каждый элемент из H можно представить как g^m. Рассмотрим множество $H_k = \{k \in \mathbb{N} \mid g^k \in H\}$. Если H_k пустое, то $H = \{e\}$ $-$циклическая. Иначе в H_k можно выбрать минимальный элемент d. С одной стороны, $\langle g^d \rangle \subseteq H$. С другой стороны, рассмотрим произвольный элемент $h = g^k \in H$ и поделим k на d с остатком.Тогда $k = ud + r, 0 \leqslant r < d$. Тогда $g^r = g^{k-ud} = g^k \left(g^d\right)^{-u} \in H$. Так как $d-$ минимальное такое число, что $g^d \in H$ и $0 \leqslant r < d$, то r может равняться только нулю. Значит $k = ud \Rightarrow h = g^{ud} = \left(g^d\right)^u$. То есть произвольный элемент из H есть степень g^d. Значит $H \subseteq \langle g^d \rangle \Rightarrow H = \langle g^d \rangle \Rightarrow H$ циклическая.

Ответ:

ч.т.д