Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 18

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти пару базисов, в которых отображение ϕ имеет диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали (как на семинаре), и выписать эту матрицу.

Решение:

1. Найдем базис ядра. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Дополним базис ядра до базиса $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ можно дополнтить вектором } e_4$$

3. Базисом образа является вектор

$$\phi(e_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Дополним базис образа до базиса $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ можно дополнить векторами } e_2, e_3$$

5. В паре базисов

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

матрица линейного отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

Базисы:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти пару базисов, в которых отображение ϕ имеет диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали (как на семинаре), и выписать эту матрицу.

Решение:

1. Найдем базис ядра. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Дополним базис ядра до базиса $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можно дополнить векторами } e_3, e_4$$

3. Базисом образа являются векторы

$$\phi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(e_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Дополним базис образа до базиса $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ можно дополнить вектором } \ e_3$$

5. В паре базисов

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

матрица линейного отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

Базисы:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Пусть ненулевые линейные функции $\alpha, \beta \in V^*$ таковы, что $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta$. Доказать, что тогда α и β пропорциональны, то есть $\beta = \lambda\alpha$ для некоторого ненулевого скаляра $\lambda \in F$.

Решение:

Заметим, что $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta = \dim(V) - 1$. Выберем такой базис $e_1, e_2, ..., e_n$ в V, что $e_2, ..., e_n$ является базисом ядра α. Рассмотрим произвольный вектор $v \in V$. Выразим его через базис. $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$

$$\alpha(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1\alpha(e_1) + ... + x_n\alpha(e_n) = x_1\alpha(e_1)$$

$$\beta(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1\beta(e_1) + ... + x_n\beta(e_n) = x_1\beta(e_1)$$

$$\Rightarrow \beta(v) = \frac{\beta(e_1)}{\alpha(e_1)} \cdot \alpha(v) \Rightarrow \lambda = \frac{\beta(e_1)}{\alpha(e_1)}$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Доказать, что для любой ненулевой линейной функции f на на n-мерном пространстве V существует базис $(e_1, ..., e_n)$ пространства V такой, что

$$f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = x_1$$

для любых скаляров $x_1, ..., x_n$.

Решение:

Заметим, что

$$f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} - \text{ матрица линейного отображения}$$

В курсе было доказано, что существует такая пара базисов, что матрица линейного отображения представляет собой диагональную матрицу с единицами и нулями на диагонали, то есть существует такая пара базисов, что

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = x_1$$

Ответ:

ч.т.д

Задание 5

Доказать, что всякое k-мерное подпространство n-мерного пространства является пересечением ядер некоторых $n-k$ линейных функций.

Задачка огонь, я решал ее где-то 3 часа, за это время я прям прочувстовал всем телом этот линал. Я долго не мог понять что за дичь происходит вообще, но в один момент я прозрел. В решение ниже вложена вся моя душа, наслаждайся)

Решение:

Пусть есть пространство $V, \dim(V) = n$ и подпространство $U, \dim(U) = k$. $V \simeq F^n$; $U \simeq F^k$. Сделаем из векторов из F^k векторы из F^n, добавив к ним $n-k$ нулевых координат(что-то вроде padding'a). Каждый линейный функционал задается матрицей линейного отображения, а ядро соотвествующим ОСЛУ. У ФСР для этого ОСЛУ размерность $n-1$. Возьмем $n-k$ линейно независимых линейных функционалов(то есть система из $n-k$ матриц линейного отображения линейно независима). Пересечением ядер всех этих функционалов будет являться ОСЛУ для матрицы, где на каждой строчке находится отдельный линейный функционал(пересекаем пространства, заданные 2ым способом). У этой матрицы будет k свободных неизвестных$(n-(n-k))$, то есть в ФСР будет ровно k векторов-столбцов из n элементов. Зададим искомые $n-k$ линейных функций матрицами линейного отображения вида

$$a_1 = (1 \quad 0 \quad 0 ... \quad 0)$$
$$a_2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad ... \quad 0)$$
$$.......................$$
$$a_{n-k} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad .... \quad 0) - \text{ единица на позиции } n-k$$

Тогда ФСР для пересечения ядер будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ... , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

То есть векторы, в которых первые $n-k$ координат нули, остальные k координат образуют вектор из стандартного базиса в F^k. Тогда линейная оболочка этих векторов порождает U(берем последние k координат из каждой линейной комбинации)

Ответ:

ч.т.д, я хочу спать

Задание 6

Пусть (e_1, e_2, e_3) — некоторый базис трёхмерного векторного пространства V, а $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ — двойственный ему базис пространства V^*

1. Найти базис пространства V^*, двойственный к базису

$$(3e_1 + e_2 - 2e_3,\ 2e_1 + e_3, e_1)$$

пространства V.

2. Найти базис пространства V, для которого двойственным является базис

$$(\epsilon_3, 2\epsilon_1 + \epsilon_3, 3\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_3)$$

пространства V^*.

Решение:

1. Рассмотрим произвольную функцию w из V^*. Распишем ее по базису

$$w = x\epsilon_1 + y\epsilon_2 + z\epsilon_3$$

Далее посмотрим как эта функция действует на базисные векторы

$$w(3e_1 + e_2 - 2e_3) = 3x + y - 2z$$
$$w(2e_1 + e_3) = 2x + z$$
$$w(e_1) = x$$

Далее составим СЛУ, чтобы найти координаты в базисе V^*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$(\epsilon_2, 2\epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1 - 7\epsilon_2 - 2\epsilon_3) - \text{ искомый базис}$$

2. Рассмотрим произвольный вектор v из V. Распишем его по базису

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Далее посмотрим как базисные функции действуют на векторы

$$\epsilon_3(v) = z$$
$$(2\epsilon_1 + \epsilon_3)(v) = 2x + z$$
$$(3\epsilon_1 + \epsilon_2 - 2\epsilon_3)(v) = 3x + y - 2z$$

Далее составим СЛУ, чтобы найти координаты в базисе V

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow (-e_1 + 7e_2 + 2e_3, e_1 - 3e_2, 2e_2) - \text{ искомый базис}$$

Ответ:

1. $(\epsilon_2, 2\epsilon_2 + \epsilon_3, \epsilon_1 - 7\epsilon_2 - 2\epsilon_3)$
2. $(-e_1 + 7e_2 + 2e_3, e_1 - 3e_2, 2e_2)$

Задание 7

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$. Рассмотрим линейные функции $\epsilon_0, \epsilon_1, ..., \epsilon_n \in V^*$, где

$$\epsilon_i = f^{(i)}(0)$$

Доказать, что эти функции образуют базис в V^* и найти базис в V , для которого данный базис является двойственным.

Решение:

Заметим, что для каждого ϵ_i матрица линейного отображения(как базис V берем стандартный базис многочленов) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & i! & ... & 0 \end{pmatrix}$$

То есть на i-ом месте стоит $i!$, в остальных местах 0. Матрица именно такая, потому что все базисные векторы из V переходят в 0, кроме x^i. Тогда очевидно, что все такие матрицы линейных отображений линейно независимые и их линейная оболочка порождает V^*. Чтобы данный базис являлся двойственным к базису V, как базис V нужно взять векторы $\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, ..., \frac{x^n}{n!}\right)$, тогда в матрицых линейных отображений на соотвествующих позициях будет стоять единица.

Ответ:

Доказали
Базис V:

$$\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, ..., \frac{x^n}{n!}\right)$$

Задание 8

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ и отображение $\alpha^a (a \in \mathbb{R})$ пространства V в $\mathbb{R}$ задано правилом

$$\alpha^a(f) = f(a).$$

Доказать, что система $\alpha^0, ..., \alpha^n$ является базисом V^*.

Решение:

Заметим, что для каждого α^a матрица линейного отображения(в V берем стандартный базис многочленов) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & ... & a^n \end{pmatrix}$$

Если записать все матрицы линейного отображения построчно, то получим матрицу Вандермонда, у которой определитель не ноль, значит все строки линейно независимые, то есть матрицы линейных отображений линейно независимы. Так как мы нашли ровно $n+1$ линейно независимых функционалов, то они образуют базис в $V^*(\dim(V) = \dim(V^*) = n+1$ и мы нашли $n+1$ линейно независимых векторов).

Ответ:

ч.т.д

Задание 9

Введем обозначения из предыдущей задачи. Найти базис V, для которого базис $\alpha^0, ..., \alpha^n$ является двойственным.

Решение:

Как базис V можно взять интерполяционные многочлены Лагранжа, то есть

$$e_j(x) = \Pi_{0 \leqslant m \leqslant n} \frac{x - m}{j - m},\ j = 0, 1, .., n$$

Тогда матрицах линейных отображений будет одна единицы, и все остальные нули, что нам и надо.

Ответ:

$$e_j(x) = \Pi_{0 \leqslant m \leqslant n} \frac{x - m}{j - m},\ j = 0, 1, .., n$$