Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 30

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Пусть V — евклидово пространство и $\varphi : V \to V$ — некоторое отображение, причём

$$(\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v)$$

для всех $u, v \in V$. Доказать, что φ линейно, а значит является ортогональным оператором на V.

Решение:

Заметим, что $||\varphi(u)|| = ||u|| \ \forall u \in V$(следует из сохранения скалярного произведения)

$$||\varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi(v)||^2 = (\varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi(v), \varphi(u+v) - \varphi(u) - \varphi(v)) =$$

$$= (\text{раскрываем по линейности и пользуемся свойством из условия}) = ||u+v||^2 - ||u||^2 -$$

$$-||v||^2 - 2(u, v) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

Остаётся доказать, что $||\varphi(\lambda v) - \lambda\varphi(v)||^2 = 0.$ Доказывается аналогично предыдущему пункту,

то есть раскрываем по линености скалярное произведение и получаем 0.

$\Rightarrow$ Отображение линейное

Ответ:

ч.т.д

Задание 2

Доказать, что если два вектора u, v в евклидовом пространстве V имеют одинаковую длину, то существует ортогональный оператор A на V, переводящий u в v.

Решение:

Пусть $u' = \dfrac{u}{||u||}$, дополним u' до ортонормированного базиса в V. Так как оператор ортогональный, то образы нормированных вектор также образуют ортонормированный базис, также он сохраняет длины векторов. Пусть $\varphi(u') = \dfrac{v}{||v||}$. Так как у векторов одинаковые длины по условию, то такое отображение корректно. Образазых остальных векторов могут быть тождественными. Таким образом мы указали образы базисных векторов, то есть построили оператор. Доказано.

Ответ:

ч.т.д

Задание 3

Найти канонический вид и соответствующую ортогональную замену для ортогональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - t & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - t & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - t \end{pmatrix}\right) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t-1)^2(t+1) \Rightarrow 1; -1 - \text{соб. значения}$$

$$Av = 1v$$

$$(A - E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ортогонализуем этот наборчик

$$f_1 = (-1, 0, 1)$$

$$f_2 = (2, 1, 0) - \frac{((2,1,0), (-1,0,1))}{((-1,0,1), (-1,0,1))}(-1, 0, 1) = (2, 1, 0) + (-1, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$Av = -1v$$

$$(A + E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{канонический вид: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ортогональная замена : } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Задание 4

Найти канонический вид и соответствующую ортогональную замену для ортогональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-t & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-t & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0-t \end{pmatrix}\right) = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t^2+1) \Rightarrow 1 - \text{соб. значение}$$

$$Av = 1v$$

$$(A-E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \perp e_0 \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = [e_0, e_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = (Ae_1, e_1) = 0$$

$$\sin\alpha = (Ae_1, e_2) = ((0,0,-1),(0,0,1)) = -1$$

$$\Rightarrow \text{канонический вид:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ортогональная замена :} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Найти канонический вид и соответствующую ортогональную замену для ортогональной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{7} - t & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} - t & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} - t \end{pmatrix}\right) = t^3 - \frac{9}{7}t^2 + \frac{9}{7}t - 1 = \frac{1}{7}(t-1)\left(7t^2 - 2t + 7\right) \Rightarrow 1 - \text{соб. значение}$$

$$Av = 1v$$

$$(A - E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \perp e_0 \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = [e_0, e_1] = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = (Ae_1, e_1) = \frac{1}{7}$$

$$\sin\alpha = (Ae_1, e_2) = \frac{8}{7\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \text{канонический вид: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{8}{7\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{7\sqrt{3}} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{ортогональная замена : } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{8}{7\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{7\sqrt{3}} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Задание 6

Ортогональный оператор A на $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе имеет матрицу

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти ортонормированный базис, в котором матрица оператора A имеет канонический вид и выписать эту матрицу. Указать ось и угол поворота, определяемого оператором A.

Решение:

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - t & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - t & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - t \end{pmatrix}\right) = t^3 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + 1 = \frac{1}{3}(t+1)(3t^2 - 4t + 3) \Rightarrow -1 - \text{соб. значение}$$

$$Av = -1v$$

$$(A+E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$e_1 \perp e_0 \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$e_2 = [e_0, e_1] = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = (Ae_1, e_1) = \frac{2}{3}$$

$$\sin\alpha = (Ae_1, e_2) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Rightarrow \text{канонический вид: } \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\{e_0, e_1, e_2\} - \text{искомый базис}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{ось вращения} - \langle(2, 1, 0)\rangle$$

Ответ:

см. решение

Задание 7

Найти полное и усечённое сингулярные разложения матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ с семинара, используя матрицу $A^T A$.

Решение:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 10-t & 10 & 10 \\ 10 & 20-t & 0 \\ 10 & 0 & 20-t \end{pmatrix}\right) = t^3 - 50t^2 + 600t = t(t-20)(t-30) \Rightarrow 0; 20; 30 - \text{соб. значения}$$

$$Av = 20v$$
$$(A - 20E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Av = 30v$$
$$(A - 30E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -20 & 10 & 10 \\ 10 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{20}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{30}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & \sqrt{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{— усеченное разложение}$$

Для полного свд надо дополнить систему v вектором $v_3 \in \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{— полное разложение}$$

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & \sqrt{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{20} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Задание 8

Найти полное и усечённое сингулярные разложения матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 50 & -20 & 0 \\ -20 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = -1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 50-t & -20 & 0 \\ -20 & 10-t & 10 \\ 0 & 10 & 50-t \end{pmatrix}\right) = t^3 - 110t^2 + 3000t = t(t-50)(t-60)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{60}, \sigma_2 = \sqrt{50}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{50} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Av = 60v$$
$$(A - 60E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -10 & -20 & 0 \\ -20 & -50 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$Av = 50v$$
$$(A - 50E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -20 & 0 \\ -20 & -40 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{60} & 0 \\ 0 & \sqrt{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ — усечённое разложение}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{50} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \text{ — полное разложение}$$

Ответ:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{60} & 0 \\ 0 & \sqrt{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ — усечённое разложение}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{50} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \text{ — полное разложение}$$

Задание 9

Найти усечённое сингулярное разложение вектора-строки.

Решение:

Пусть A — исходный вектор-строка, тогда $AA^T = a \in \mathbb{R}$, число $\sqrt{a}$ будет сингулярным значением, при этом U в соответствии с алгоритмом получится единичной порядка 1, $\Sigma = (\sqrt{a})$. $v_i = \dfrac{A^T \cdot 1}{\sqrt{a}}$. Значит итоговое SVD будет иметь вид:

$$A = (1) \cdot \left(\sqrt{AA^T}\right) \cdot \left(\frac{A^T}{\sqrt{AA^T}}\right)^T$$

Ответ:

$$A = (1) \cdot \left(\sqrt{AA^T}\right) \cdot \left(\frac{A^T}{\sqrt{AA^T}}\right)^T$$

Задание 10

Рассмотрим матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{n\times 2}(\mathbb{R})$ и обозначим через a_1, a_2 её столбцы. Пусть $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$ — сингулярные значения матрицы A. Доказать, что

$$\sigma_1 \geqslant |a_1| \geqslant \sigma_2 \quad \text{и} \quad \sigma_1 \geqslant |a_2| \geqslant \sigma_2.$$

Решение:

Сингулярные значения есть есть корни из собственных значений матрицы $A^T A = \begin{pmatrix} |a_1|^2 & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & |a_2|^2 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} |a_1|^2 - t & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & |a_2|^2 - t \end{pmatrix}\right) = t^2 - t\Big(|a_1|^2 + |a_2|^2\Big) + \Big(|a_1|^2 \cdot |a_2|^2 - (a_1, a_2)^2\Big)$$

Из теоремы Виета имеем:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 \\ \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 = |a_1|^2 \cdot |a_2|^2 - (a_1, a_2)^2 \end{cases}$$