Математический анализ

ДЗ 11

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите промежутки монотонности и точки экстремума и определите их характер для функций:

$$\text{а) } f(x) = \frac{3x-7}{\left(x^2-1\right)^2};\ \text{б) } f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}};\ \text{в) } f(x) = \frac{2x}{1+x^2};\ \text{г) } f(x) = x^2 - \ln x^2$$

Решение:

а) $f'(x) = \frac{-4x(3x-7)}{\left(x^2-1\right)^3} + \frac{3}{\left(x^2-1\right)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9}; 3 - \text{ экстремумы}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{9}\right) \cup (1, 3) - \text{ возрастает}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{9}, 1\right) \cup (3, \infty) - \text{ убывает}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}; 3 - \text{ локальные максимумы}$$

б) $f'(x) = -0.5\frac{\ln(x)^2}{x^{1.5}} + 2\frac{\ln(x)}{x^{1.5}}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1; e^4 - \text{ экстремумы}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(1, e^4\right) - \text{ возрастает}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 1) \cup \left(e^4, +\infty\right) - \text{ убывает}$$

$$\Rightarrow 1 - \text{ локальный минимум}; e^4 - \text{ локальный максимум}$$

в) $f'(x) = \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1; 1 - \text{ экстремумы}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1) - \text{ возрастает}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) - \text{ убывает}$$

$$\Rightarrow -1 - \text{ локальный минимум}; 1 - \text{ локальный максимум}$$

г) $f'(x) = \frac{2x^2-2}{x}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1; 1 - \text{ экстремумы}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow (-1, 0) \cup (1, +\infty) - \text{ возрастает}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow (-\infty, -1) \cup (0, 1) - \text{ убывает}$$

$$\Rightarrow -1; 1 - \text{ локальные минимумы}$$

Задание 2

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ на отрезках

$$\text{а) } [-4, 2];\ \text{б) } [-1, 0];\ \text{в) } [-6, 4]$$

Решение:

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3; 1 - \text{ экстремумы}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) - \text{ возрастает}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-3, 1) - \text{ убывает}$$

$$\Rightarrow 1 - \text{ локальный минимум}; -3 - \text{ локальный максимум}$$

а) $f(-3) = 29 -$ наибольшее значение. $f(1) = -3 -$ наименьшее значение

б) $f(-1) = 13 -$ наибольшее значение. $f(0) = 2 -$ наименьшее значение

в) $f(4) = 78 -$ наибольшее значение. $f(-6) = -52 -$ наименьшее значение

Задание 3

Докажите неравенства

$$\text{а) } 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2},\ x>0;$$

$$\text{б) } e^{x-1}+\ln x-2x+1\geqslant 0,\ x\geqslant 1;$$

$$\text{в) } \frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a},\ 0<a<b$$

Решение:

а) $f(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\sqrt{1+x}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x}(2-x)-2}{4\sqrt{1+x}}<0 \ \text{ при } x>0\Rightarrow f(x) \ \text{ монотонно убывает при } x>0$$

$$f(0)=0\leqslant 0\Rightarrow f(x)\leqslant 0\Rightarrow 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leqslant\sqrt{1+x}$$

$g(x)=\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}$

$$g'(x)=\frac{1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}<0 \ \text{ при } x>0\Rightarrow g(x) \ \text{ монотонно убывает при } x>0$$

$$g(0)=0\leqslant 0\Rightarrow g(x)\leqslant 0\Rightarrow\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}\Rightarrow$$

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}$$

б) $f(x)=e^{x-1}+\ln x-2x+1$

$$f'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x}-2$$

$$f''(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x^2}\geqslant 0 \ \text{ при } x\geqslant 1\Rightarrow f'(x) \ \text{ монотонно возрастает}$$

$$f'(1)=0\geqslant 0\Rightarrow f'(x)\geqslant 0\Rightarrow \ \text{монотонно возрастает}$$

$$f(1)=0\geqslant 0\Rightarrow f(x)\geqslant 0\Rightarrow e^{x-1}+\ln x-2x+1\geqslant 0$$

в) Заметим, что $e^x>1+x$(доказано на семинаре) $\Rightarrow x>\ln(1+x)$.
Пусть $1+x=\frac{b}{a}\Rightarrow x=\frac{b-a}{a}\Rightarrow$

$$\frac{b-a}{a}>\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Пусть $1+x=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\frac{a-b}{b}\Rightarrow$

$$\frac{a-b}{b}>\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{b-a}{b}<-\ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$