Математический анализ

ДЗ 16

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, если $f(x, y, z) = \sin(xy + z^2)$.

Решение:

$$f'_z = \cos(xy + z^2) \cdot 2z$$
$$f''_{zy} = -2z \cdot \sin(xy + z^2) \cdot x$$
$$f'''_{zyx} = -2z \cdot \sin(xy + z^2) - 2xyz \cdot \cos(xy + z^2)$$

Ответ:

$$-2z \cdot \sin(xy + z^2) - 2xyz \cdot \cos(xy + z^2)$$

Задание 2

Найдите дифференциалы $\mathrm{d}f$ и $\mathrm{d}^2 f$ функций

$$\text{а) } f(x,y) = x^2 + y^2;\ \text{б) } f(x,y) = x^y + y^x;\ \text{в) } f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение:

1. $\mathrm{d}(x^2+y^2) = d(x^2) + d(y^2) = 2xdx + 2ydy$

   $d(2xdx + 2ydy) = d(2xdx) + d(2ydy) = 2d^2x + 2d^2y$

2. $f'_x = x^{y-1}y + y^x \cdot \ln(y); f'_y = \ln(x) \cdot x^y + xy^{x-1} \Rightarrow J_f{}' = \begin{pmatrix} x^{y-1}y + y^x \cdot \ln(y) & \ln(x) \cdot x^y + xy^{x-1} \end{pmatrix}$

   $f''_{xx} = x^{y-2}y^2 - x^{y-2}y + \ln(y)^2 \cdot y^x; f''_{xy} = x^{y-1}y \cdot \ln(x) + x^{y-1} + xy^{x-1} \cdot \ln(y) + y^{x-1}$

   $f''_{yy} = \ln(x)^2 \cdot x^y + x^2y^{x-2} - xy^{x-2} \Rightarrow J_{f''} = \begin{pmatrix} x^{y-2}y^2 - x^{y-2}y + \ln(y)^2 \cdot y^x & x^{y-1}y \cdot \ln(x) + x^{y-1} + xy^{x-1} \cdot \ln(y) + y^{x-1} \\ x^{y-1}y \cdot \ln(x) + x^{y-1} + xy^{x-1} \cdot \ln(y) + y^{x-1} & \ln(x)^2 \cdot x^y + x^2y^{x-2} - xy^{x-2} \end{pmatrix}$

3. $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow J_f{}' = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

   $f''_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}; f''_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}; f''_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} \Rightarrow J_{f''} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} & -\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$

Задание 3

Найдите $d^4 f$, если $f(x, y, z) = \ln(x^x y^y z^z)$

Решение:

$f'_x = 1 + \ln(x); f'_y = 1 + \ln(y); f'_z = 1 + \ln(z)$

$f''_{xx} = \frac{1}{x}; f''_{yy} = \frac{1}{y}; f''_{zz} = \frac{1}{z}$

$f'''_{xxx} = -\frac{1}{x^2}; f'''_{yyy} = -\frac{1}{y^2}; f'''_{zzz} = -\frac{1}{z^2}$

$f''''_{xxxx} = \frac{2}{x^3}; f''''_{yyyy} = \frac{2}{y^3}; f''''_{zzzz} = \frac{2}{z^3}$

Все смешанные производные нулевые $\Rightarrow$

$$d^4 f = \frac{2}{x^3} d^4 x + \frac{2}{y^3} d^4 y + \frac{2}{z^3} d^4 z$$