Математический анализ 2

ДЗ 7

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Вычислить сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(4n^2-1\right)^2}$$

Решение:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n}{\left(4n^2-1\right)^2} = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{(2n-1)^2 \cdot (2n+1)^2} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \to \infty \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(4n^2-1\right)^2} = \frac{1}{8}$$

Ответ:

$$\frac{1}{8}$$

Задание 2

Исследовать ряды на сходимость:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n; n\to\infty\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \nrightarrow 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right); \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

$$3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n+3}{n(\ln^2 n+2)} \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \sim \int_2^{\infty}\frac{1}{n\ln n}dn, \int\frac{1}{n\ln n}dn = \ln\ln n \Rightarrow$$

расходится по интегральному признаку

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{сходится по Даламберу}$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\arctan^n\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}; \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arctan^n\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow$$

расходится по радикальному признаку Коши

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$$

Задание 3

Исследовать ряды на сходимость:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{3n-2};\, b_n=\frac{\sqrt{n}}{3n-2}-\text{убывает, проверим монотонность.}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{3x-2}\right)'=\frac{-3x-2}{2\sqrt{x}(3x-2)^2}<0, x\geqslant 1, n\to\infty\Rightarrow b_n\to 0\Rightarrow\text{сходится по признаку Лейбница}$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n+\ln n};\sum_{n=1}^{N}\cos n<M;\frac{1}{n+\ln n}\to 0, n\to\infty$$

$$\left(\frac{1}{x+\ln x}\right)'<0, x\geqslant 1\Rightarrow\text{сходится по признаку Дирихле}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n+n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\text{сходится}\Rightarrow\text{исходный ряд сходится}$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 2n}{\sqrt{n+6}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n\cdot\sin 2n}{\sqrt{n+6}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n(\pi+2))}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n(2-\pi))}{\sqrt{n+6}},$$

оба ряда сходятся по признаку Вейерштрасса, значит исходный ряд сходится