Теория вероятностей

ДЗ 2

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Биба и Боба подбрасывают симметричную монету n раз независимо друг от друга.
Какова вероятность, что у Бибы выпало столько же орлов, сколько и у Бобы?
Какова вероятность, что у Бибы выпало больше орлов, чем у Бобы?

Решение:

Вероятность того, что ровно в k бросках из n выпал орёл, равна

$$\binom{n}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{n-k} = \binom{n}{k} 0.5^n$$

Тогда искомая вероятность есть

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 0.5^n \cdot \binom{n}{k} 0.5^n = 0.25^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = 0.25^n \cdot \binom{2n}{n}$$

Сумма квадратов биномиальных коэффициентов доказывается комбинаторно. Пусть у нас есть n мальчиков и n девочек. Мы хотим выбрать n человек в команду. С одной стороны $\binom{2n}{n}$ способов это сделать. С другой стороны мы можем выбирать в команду k девочек и соответственно $n-k$ мальчиков. Сумма по всем таким k как раз даст искомое количество способов.

Пусть у Бибы выпало A орлов, у Бобы B. Тогда заметим, что

$$\mathbb{P}(A > B) + \mathbb{P}(A = B) + \mathbb{P}(A < B) = 1$$

$$\mathbb{P}(A > B) = \mathbb{P}(A < B) \Rightarrow P(A > B) = \frac{1 - P(A = B)}{2} =$$

$$= \frac{1 - 0.25^n \cdot \binom{2n}{n}}{2}$$

Ответ:

$$0.25^n \cdot \binom{2n}{n}$$

$$\frac{1 - 0.25^n \cdot \binom{2n}{n}}{2}$$

Задание 2

Проводится n двукратных бросаний симметричной монеты.
Найдите вероятность того, что среди этих n двукратных бросаний ровно k раз выпадет пара с одинаковыми значениями.
Найдите вероятность того, что количество двукратных бросаний с одинаковыми значениями будет больше, чем количество двукратных бросаний с разными значениями.

Решение:

Вероятность того, что ровно в k бросках из n выпала пара с одинаковыми значениями, равна

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot 0.5^n$$

Пусть A бросаний с одинаковыми значениями, B бросаний с разными значениями, тогда

$$\mathbb{P}(A > B) + \mathbb{P}(A = B) + \mathbb{P}(A < B) = 1$$

$$\mathbb{P}(A > B) = \mathbb{P}(A < B) \Rightarrow \mathbb{P}(A > B) = \frac{1 - \mathbb{P}(A = B)}{2}$$

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 0.5^n \cdot \binom{n}{k} 0.5^n = 0.25^n \cdot \binom{2n}{n}$$

$$\mathbb{P}(A > B) = \frac{1 - 0.25^n \cdot \binom{2n}{n}}{2}$$

Ответ:

$$\binom{n}{k} \cdot 0.5^n$$

$$\frac{1 - 0.25^n \cdot \binom{2n}{n}}{2}$$

Задание 3

Рассмотрим матрицы 2×2 над полем $\mathbb{Z}_2$.
С какой вероятностью матрица невырождена?
Какое матожидание определителя матрицы?

Решение:

Выпишем все вырожденные матрицы:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Невырожденные матрицы:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

Тогда матрица невырождена с вероятностью $2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p)$. Найдем матожидание определителя. Определитель может быть равен 0, -1, 1. Так как в поле $\mathbb{Z}_2 - 1 = 1$, то матожидание равно $0 \cdot (...) + 1 \cdot (p^2(1-p)^2 + 2p^3(1-p)) + 1 \cdot (p^2(1-p)^2 + 2p^3(1-p)) = 2(p^2(1-p)^2 + 2p^3(1-p))$

Ответ:

$$2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p)$$
$$2\big(p^2(1-p)^2 + 2p^3(1-p)\big)$$

Задание 4

Рассмотрим граф с фиксированным множеством вершин и рёбрами появляющимися с вероятностью $p \in [0,1]$. Найдите матожидание количества циклов длины 4.

Решение:

Вершины для циклов длины 4 можно выбрать $\binom{n}{4}$ способами. Число способов образовать цикл на этих вершинах есть $\frac{(4-1)!}{2} = 3$. Тогда всего циклов длины 4: $3\binom{n}{4}$. Каждый возникает с вероятностью p^4. Значит матожидание равно $3\binom{n}{4}p^4$.

Ответ:

$$3\binom{n}{4}p^4$$