Линейная алгебра и геометрия

ИДЗ 8

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Дополните вектор $v = \frac{1}{13}(-4, -9, -6, 6)$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^4$.

Решение:

Найдем базис ортогонального дополнения к v. Ищем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} -4 & -9 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ортогонализуем этот набор векторов

$$f_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right)$$

$$f_2 = \left(-\frac{3}{2}, 0, 1, 0\right) - \frac{\left(-\frac{3}{2}, 0, 1, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right)}{\left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right)} \cdot \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right) = (0, 0, 1, 1)$$

$$f_3 = \left(-\frac{9}{4}, 1, 0, 0\right) - \frac{\left(-\frac{9}{4}, 1, 0, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right)}{\left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right)} \cdot \left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right) - \frac{\left(-\frac{9}{4}, 1, 0, 0\right), (0, 0, 1, 1)}{(0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1)} \cdot (0, 0, 1, 1) =$$

$$= \left(0, 1, 0, \frac{3}{2}\right)$$

Ответ:

$$\frac{1}{13}(-4, -9, -6, 6), \frac{2}{\sqrt{13}}\left(\frac{3}{2}, 0, 0, 1\right), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1), \frac{2}{\sqrt{13}}\left(0, 1, 0, \frac{3}{2}\right)$$

Задание 2

Подпространство U евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ задано системой уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Для вектора $v = (-4, 4, 0, -2)$ найдите его проекцию на U, его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

Решение:

Найдем ФСР для исходной ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{pr}_U v = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot v = (-3, 2, -2, -3) \Rightarrow$$

$$\mathrm{ort}_U v = (-1, 2, 2, 1) \Rightarrow |\mathrm{ort}_U v| = \sqrt{10}$$

Ответ:

$$(-3, 2, -2, -3), (-1, 2, 2, 1), \sqrt{10}$$

Задание 3

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, даны два подпространства $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, где $u_1 = (1, 2, 2, 1), u_2 = (1, -3, -3, 1), w_1 = (1, 2, 2, -1), w_2 = (1, -1, -3, 3)$. Найти вектор v для которого $\mathrm{pr}_U v = (-10, 0, 0, -10)$ и $\mathrm{ort}_W v = (6, 0, -8, -10)$.

Решение:

Обозначим искомый вектор за x. Найдем его проекцию на U.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot x = (-10, 0, 0, -10)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot x = (-10, 0, 0, -10) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = -20 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем ортогональную составляющую относительно W

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 2 & -3\\ -1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot\left(A^T\cdot A\right)^{-1}\cdot A^T\cdot x=x-(6,0,-8,-10)$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0\\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot x=x-(6,0,-8,-10)$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0\\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot x-x=(-6,0,8,10)$$

$$\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0\\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}-E\right)\cdot x=(-6,0,8,10)$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{10}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & 0\\ 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot x=(-6,0,8,10)\iff\begin{cases}x_1-\frac{4}{3}x_3-\frac{5}{3}x_4=\frac{100}{3}\\ x_2-\frac{5}{3}x_3-\frac{4}{3}x_4=\frac{80}{3}\end{cases}$$

Пересекая две полученные системы, получаем, что $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,-20)$.

Ответ:

$$(0,0,0,-20)$$

Задание 4

В пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$, снабжённом структурой евклидова пространства относительно некоторого скалярного произведения, объём параллелепипеда, натянутого на векторы $-4+5x-x^2, 16-18x+3x^2, 8-14x+3x^2$, равен 5. Найти объём параллелепипеда, натянутого на векторы $-3+3x-4x^2, -3-x-7x^2, 6-9x+10x^2$.

Решение:

Перейдем к координатам в $\mathbb{R}^3$, тогда первая система векторов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 8 \\ 5 & -18 & -14 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вторая система векторов имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 3 & -1 & -9 \\ -4 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$G_A = A^T \cdot A$$

$$\text{Vol } A = \sqrt{\det(G_A)} = \sqrt{\det(A^T \cdot A)} = 5$$

Найдем матрицу перехода между заданными базисами

$$A \cdot C = B \Rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{71}{2} & \frac{155}{2} & -82 \\ \frac{55}{8} & \frac{119}{8} & -\frac{65}{4} \\ \frac{29}{8} & \frac{69}{8} & -\frac{31}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{Vol } B = \sqrt{\det(G_B)} = \sqrt{\det(B^T \cdot B)} = \sqrt{\det(C^T \cdot A^T \cdot A \cdot C)} = \sqrt{\det(A^T \cdot A)} \cdot \sqrt{\det(C^T \cdot C)}$$

$$\Rightarrow \text{Vol} B = 5 \cdot \frac{51}{8} = \frac{255}{8}$$

Ответ:

$$\frac{255}{8}$$

Задание 5

Пусть L — трёхмерная плоскость в $\mathbb{R}^5$, проходящая через точки $v_0 = (2, 3, 8, -7, -6), v_1 = (3, 10, 0, -11, -13), v_2 = (-2, -4, 8, -8, -13), v_3 = (-5, 4, 8, -14, -2)$. Найдите в L точку, ближайшую к точке $v = (-8, 1, 0, -10, -2)$, и расстояние от неё до v.

Решение:

Зададим L как линейное многообразие

$$L = v_0 + \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0 \rangle$$
$$v_1 - v_0 = (1, 7, -8, -4, -7)$$
$$v_2 - v_0 = (-4, -7, 0, -1, -7)$$
$$v_3 - v_0 = (-7, 1, 0, -7, 4)$$

Тогда искомое расстояние от линейного многообразия до v есть расстояние от вектора $v - v_0 = (-10, -2, -8, -3, 4)$ до $U = \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0 \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ 7 & -7 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -7 \\ -7 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{pr}_U v - v_0 = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot (v - v_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1216}{179} \\ \frac{208}{179} \\ \frac{1432}{179} \\ -\frac{1314}{179} \\ -\frac{1018}{179} \end{pmatrix}$$

Тогда ближайшая точка в L есть $p = v_0 + \mathrm{pr}_U v - v_0 = \left(-\frac{858}{179}, \frac{745}{179}, \frac{2864}{179}, -\frac{2567}{179}, -\frac{2092}{179}\right)$, а искомое расстояние есть $||v - p|| = \frac{\sqrt{11955357}}{179}$.

Ответ:

$$\left(-\frac{858}{179}, \frac{745}{179}, \frac{2864}{179}, -\frac{2567}{179}, -\frac{2092}{179}\right), \frac{\sqrt{11955357}}{179}$$