Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 32

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Привести уравнение кривой к каноническому виду в декартовой системе координат и определить тип кривой:

1. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$
2. $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$
3. $6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$
4. $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0.$

Решение:

1.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 - 1 - 9 - 5 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 15$$
$$(x')^2 + (y')^2 = 15$$
$$\frac{(x')^2}{15} + \frac{(y')^2}{15} = 1 - \text{эллипс}$$

2.

$$x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$$
$$(x+4)^2 + 2y^2 - 16 - 4 = 0$$
$$(x+4)^2 + 2y^2 = 20$$
$$\frac{(x')^2}{20} + \frac{(y')^2}{10} = 1 - \text{эллипс}$$

3.

$$6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$$
$$6(x+1)^2 - 6 - 5(y+1)^2 + 5 + 31 = 0$$
$$6(x+1)^2 - 5(y+1)^2 = -30$$
$$6(x')^2 - 5(y')^2 = -30$$
$$\frac{(x')^2}{5} - \frac{(y')^2}{6} = -1 - \text{гипербола}$$

4.

$$x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 - 4y + 29 = 0$$
$$(x-3^2) - 4y + 20 = 0$$
$$(x-3)^2 - 4(y-5) = 0$$
$$(x')^2 - 4y' = 0$$
$$(x')^2 = 4y' - \text{парабола}$$

Задание 2

Привести уравнение кривой

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

к какноническому виду в декартовой системе координат и определить тип кривой.

Решение:

Сначала приведём квадратичную форму к главным осям

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 5-t & 2 \\ 2 & 8-t \end{pmatrix}\right) = t^2 - 13t + 36 = (t-4)(t-9) \Rightarrow 4; 9 \text{ — собственные значения}$$

$$Av = 4v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$Av = 9v$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

$$9(y')^2 + 4(x')^2 + \frac{8\sqrt{5}}{5}x' - \frac{144\sqrt{5}}{5}(y') + 80 = 0$$

$$\left(3y' - \frac{24\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(2x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 36$$

$$(y'')^2 + (x'')^2 = 36$$

$$\frac{(x'')^2}{36} + \frac{(y'')^2}{36} = 1 \text{ — эллипс}$$

Задание 3

Привести уравнение кривой

$$6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$$

к какноническому виду в декартовой системе координат и определить тип кривой.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 0-t & 3 \\ 3 & -8-t \end{pmatrix}\right) = (t-1)(t+9) \Rightarrow 1; -9 - \text{собственные значения}$$

$$Av = 1v$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} - \text{собственный вектор}$$

$$Av = -9v$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} - \text{собственный вектор}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{10}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$$

$$(x')^2 - 9(y')^2 + \sqrt{10}x' - 9\sqrt{10}y' - 11 = 0$$

$$\left(x' + \sqrt{5}\right)^2 - \left(3y' + 3\sqrt{5}\right)^2 + 29 = 0$$

$$\frac{(x'')^2}{29} - \frac{(y'')^2}{29} = -1 - \text{гипербола}$$

Задание 4

Привести уравнение кривой

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$$

к какноническому виду в декартовой системе координат и определить тип кривой.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 4-t & -2 \\ -2 & 1-t \end{pmatrix}\right) = t(t-5) \Rightarrow 0; 5 - \text{собственные значения}$$

$$Av = 0v$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} - \text{собственный вектор}$$

$$Av = 5v$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} - \text{собственный вектор}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

$$5(y')^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0$$

$$5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 6 - 6\sqrt{5}x' = 0$$

$$5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 6\sqrt{5}\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

$$(y'')^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x'' - \text{парабола}$$

Задание 5

Привести уравнение кривой к каноническому виду в декартовой системе координат и определить тип кривой:
1. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$
2. $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$
3. $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$.

Решение:

1.

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$$
$$(x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 9(z-2)^2 = 49$$
$$(x')^2 + 4(y')^2 + 9(z')^2 = 49$$
$$\frac{(x'')^2}{49} + \frac{(y'')^2}{49} + \frac{(z'')^2}{49} = 1 - \text{эллипсоид}$$

2.

$$4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$$
$$4(x+4)^2 - (z+6)^2 - y^2 = -16$$
$$4(x')^2 - (z')^2 - (y')^2 = -16$$
$$(x'')^2 - (z'')^2 - (y'')^2 = -16$$
$$-\frac{(x'')^2}{16} + \frac{(z'')^2}{16} + \frac{(y'')^2}{16} = 1 - \text{однополостный гиперболоид}$$

3.

$$3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0$$
$$3(x-3)^2 - (y-5)^2 + 3(z+2)^2 = 0$$
$$3(x')^2 - (y')^2 + 3(z')^2 = 0$$
$$(x'')^2 - (y'')^2 + (z'')^2 = 0 - \text{конус}$$

Задание 6

Привести уравнение поверхности

$$2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$$

к каноническому виду в декартовой системе координат и определить тип поверхности.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = -t(t-1)(t+1) \Rightarrow 0; 1; -1 - \text{собственные значения}$$

$$Av = 0v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор}$$

$$Av = 1v$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор}$$

$$Av = -1v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = x' \end{cases}$$

$$(y')^2 - (z')^2 + 2\sqrt{2}y' + 2x' = 1$$

$$\left(y' + \sqrt{2}\right)^2 - (z')^2 + 2\left(x' - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$(y'')^2 - (z'')^2 + 2x'' = 0$$

$$-(y'')^2 + (z'')^2 = 2x'' - \text{гиперболический параболоид}$$

Задание 7

Привести уравнение поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$$

к каноническому виду в декартовой системе координат и определить тип поверхности.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^3 - 3t^2 + 2t = t(t-1)(t-2) \Rightarrow 0; 1; 2 \text{ — собственные значения}$$

$$Av = 0v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$Av = 1v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$Av = 2v$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$$

$$(y')^2 + 4(z')^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}z' - 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$$

$$\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 + 4\left(z' + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{1}{16}\right) = 0$$

$$(y'')^2 + 4(z'')^2 - 2x'' = 0$$

$$(y''')^2 + (z''')^2 = 2x''' \text{ — эллиптический параболоид}$$

Задание 8

Привести уравнение поверхности

$$8x^2 - 28xy - 13y^2 - z^2 - 44x + 2y - 37 = 0$$

к каноническому виду в декартовой системе координат и определить тип поверхности.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -14 & 0 \\ -14 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = t^3 + 6t^2 - 295t - 300 = (t-15)(t+1)(t+20) \Rightarrow 15; -1; -20 \text{ — собственные значения}$$

$$Av = 15v$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -14 & 0 \\ -14 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$Av = -1v$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -14 & 0 \\ -14 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$Av = -20v$$

$$\begin{pmatrix} 28 & -14 & 0 \\ -14 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — собственный вектор}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}z' \\ z = y' \end{cases}$$

$$-20(z')^2 + 15(x')^2 + 18\sqrt{5}x' - 8\sqrt{5}z' - (y')^2 - 37 = 0$$

$$15\left(x' + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 20\left(z' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - (y')^2 = 60$$

$$15(x'')^2 - 20(z'')^2 - (y'')^2 = 60$$

$$(x''')^2 - (z''')^2 - (y''')^2 = 60$$

$$-\frac{(x''')^2}{60} + \frac{(z''')^2}{60} + \frac{(y''')^2}{60} = -1 \text{ — двуполостный гиперболоид}$$

Задание 9

Докажите, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят ровно две прямые,целиком лежащие на нём.

Решение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \text{искомая поверхность}$$

$$l = r_0 + at - \text{прямая, где } r_0 \text{ лежит на поверхности}$$

Чтобы прямая лежала на поверхности, должно выполняться следущее соотношение при любых t:

$$\frac{(x_0 + a_x t)^2}{a^2} + \frac{\left(y_0 + a_y t\right)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + a_z t)^2}{c^2} = 1$$

$$t^2\left(\frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{b^2} - \frac{a_z^2}{c^2}\right) + 2t\left(\frac{x_0 a_x}{a^2} + \frac{y_0 a_y}{b^2} - \frac{z_0 a_z}{c^2}\right) = 0$$

Коэффициенты при t должны быть нулевыми:

$$\begin{cases} \frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{b^2} - \frac{a_z^2}{c^2} = 0 \\ \frac{x_0 a_x}{a^2} + \frac{y_0 a_y}{b^2} - \frac{z_0 a_z}{c^2} = 0 \end{cases}$$