Математический анализ

ДЗ 14

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найдите значение дифференциала функции
а) $f(x, y) = \sqrt[3]{4x^2 + y^2}$ в точке (1, 2) на векторе (-0.2, 0.3); б) $f(x, y) = x^3y - xy^3$ в точке (1, 2) на векторе (-0.5, 0.8)

Решение:

а) $\nabla f = \left(\frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2+y^2)^2}}, \frac{2y}{3\sqrt[3]{(4x^2+y^2)^2}}\right) \Rightarrow \nabla f(1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left(\nabla f(1,2), (-0.2, 0.3)^T\right) = \frac{2}{3} \cdot (-0.2) + \frac{1}{3} \cdot (0.3) = -\frac{1}{30}$

б) $\nabla f = \left(3x^2y - y^3, x^3 - 3xy^2\right) \Rightarrow \nabla f(1,2) = (-2, -11) \Rightarrow \left(\nabla f, (-0.5, 0.8)^T\right) = -2 \cdot (-0.5) + (-11) \cdot 0.8 = -7.8$

Ответ:

$-1/30$, -7.8

Задание 2

Пусть $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$. Вычислите производную по направлению $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ в точке (1, 1). Для какого α эта проищводная а) максимальна; б) минимальна; в) равна нулю.

Решение:

$\nabla f = (2x - y, 2y - x) \Rightarrow \nabla f(1, 1) = (1, 1) \Rightarrow \left(\nabla f(1, 1), (\cos\alpha, \sin\alpha)^T\right) = \cos\alpha + \sin\alpha$. Из вида и свойств графика функции $y = \sin x + \cos x$ заключаем, что максимум достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, минимум при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, ноль при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ:

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

Задание 3

Найти касательную плоскость к поверхности $z = x^3 + 3xy^2$ в точке (1, 2, 13)

Решение:

${F_x}' = 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow {F_x}'(1, 2, 13) = 15$
${F_y}' = 6xy \Rightarrow {F_y}'(1, 2, 13) = 12$
${F_z}' = -1$
$\Rightarrow$ уравнение касательной имеет вид

$$15(x-1) + 12(y-2) - (z-13) = 0$$

Ответ:

$$15(x-1) + 12(y-2) - (z-13) = 0$$