# Линейная алгебра и геометрия

## ДЗ 25

**Гольдберг Дмитрий Максимович**

**Группа БПМИ248**

# Задание 1

Составить СЛУ, множеством решений которой будет плоскость в $\mathbb{R}^4$, проходящая через точки

$$A(-3,4,1,2), B(1,2,3,3), C(5,4,-3,3).$$

## Решение:

СЛУ будет выглядеть так(ОСЛУ)

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

## Ответ:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

## Задание 2

Найти расстояние от точки

$$p = (4, 2, -5, 1)$$

до линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}.$$

## Решение:

Найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U$$

$$p_0 = (1, 1, 1, 4) - \text{частное решение} \Rightarrow \prod = p_0 + U$$

Тогда искомое расстояние есть расстояние от $p - p_0 = (3, 1, -6, -3) = v$ до $U$. Найдём это расстояние

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{pr}_U v = A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot v = (1, -3, -4, -2) \Rightarrow$$
$$|\mathrm{ort}_U v| = |(2, 4, -2, -1)| = 5$$

## Ответ:

5

# Задание 3

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку (1,8).
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$M_1(2,3,1), M_2(3,1,4), M_3(2,1,5).$$

## Решение:

1. $y = 8x$
2. 

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ y-3 & -2 & 0 \\ z-1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = -2x + 1 + y$$

## Ответ:

1. $y = 8x$
2. $-2x + y + 1 = 0$

# Задание 4

1. Составить параметрическое уравнение прямой
$$3x + 6y + 5 = 0.$$
2. Составить общее уравнение прямой
$$x = 2 + 5t, y = 4 - 7t.$$

## Решение:

1.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$
2.
$$t = \frac{x-2}{5} \Rightarrow y = 4 - \frac{7x - 14}{5}$$
$$-\frac{7}{5}x - y + \frac{34}{5} = 0$$

## Ответ:

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $-\frac{7}{5}x - y + \frac{34}{5} = 0$

## Задание 5

Даны вершины тетраэдра

$$A(5,1,3), B(1,6,2), C(5,0,4), D(4,0,6)$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро $AB$ параллельно ребру $CD$.

## Решение:

Заметим, что вектор нормали перпендикулярен вектору $CD$. Их этого имеем систему

$$\begin{cases} 5a+b+3c+D=0 \\ a+6b+c+D=0 \\ -a+2c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a,b,c,D)=(2c,2c,c,-15c) \Rightarrow \text{уравнение имеет вид}$$

$$2x+2y+z-15=0$$

## Ответ:

$2x+2y+z-15=0$

# Задание 6

Составить общее уравнение плоскости по её параметрическому уравнению:

1. $x = u + v, y = u - v, z = 5 + 6u - 4v$;
2. $x = 1 + 2v, y = -2, z = 1 - u$.

## Решение:

1. Направляющими векторами являются векторы $v_1 = (1, 1, 6), v_2 = (1, -1, 4)$. Построим по этим векторам плоскость

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 6 & 4 \end{pmatrix}\right) = 10x + 2y - 2z$$

Так как плоскость еще проходит через точку (0,0,5), то итоговое уравнение имеет вид:

$$10x + 2y - 2z + 10 = 0$$

2. Направляющими векторами являются векторы $v_1 = (0, 0, -1), v_2 = (2, 0, 0)$. Построим по этим векторам плоскость

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -2y$$

Так как плоскость еще проходит через точку (1,-2,1), то итоговое уравнение имеет вид:

$$-2y - 4 = 0$$

## Ответ:

1. $10x + 2y - 2z + 10 = 0$
2. $-2y - 4 = 0$

# Задание 7

1. Составить параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}.$$

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A$ и $B$, в каждом из следующих случаев:
   1. $A(2, 3, 1), B(4, 6, 9)$;
   2. $A(7, -1, 2), B(5, -1, 4)$;
   3. $A(1, 5, 1), B(1, -5, 1)$.

## Решение:

1. $r_0 = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, 1\right)$. Для поиска направляющего вектора ищем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$r = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.
   1. Как направляющий вектор берем разность координат этих точек, получаем уравнение

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{8}$$

   2. Как направляющий вектор берем разность координат этих точек, получаем уравнение

$$\frac{x-7}{-2} = \frac{z-2}{2}, y = -1$$

   3. Как направляющий вектор берем разность координат этих точек, получаем уравнение

$$x = 1, z = 1, y \in \mathbb{R}$$