Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 17

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Пусть $L = F[x]_{\leqslant 1}$ и $M = M_2(F)$. Найти матрицу линейного отображения $\phi : L \to M$, заданную правилом $\phi(f) = f(S)$, где $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — фиксированная матрица, если в L выбран базис $(1, x)$, а в M — базис $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ из матричных единиц

Решение:

Найдем образы базисных векторов из L и запишем их в матрицу по столбцам, это и будет искомая матрица линейного отображения

$$\phi(f) = f(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(f) = f(S) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ где } f(x) = x$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

Задание 2

Рассмотрим отображение $\phi : M_2(F) \to M_2(F), X \to X^T$. Доказать, что это отображение линейно, и найти его матрицу в базисах e и f, где $e = f$ — это базис из матричных единиц.

Решение:

Докажем, что отображение линейное. Рассмотрим произвольные матрицы $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$. Проверим равенство $\phi(X_1 + X_2) = \phi(X_1) + \phi(X_2)$ и $\phi(\lambda X_1) = \lambda\phi(X_1)$

$$\phi(X_1 + X_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_3 + y_3 \\ x_2 + y_2 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

$$\phi(X_1) + \phi(X_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_3 + y_3 \\ x_2 + y_2 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\lambda X_1) = \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ \lambda x_3 & \lambda x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_3 \\ \lambda x_2 & \lambda x_4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\phi(X_1) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_3 \\ \lambda x_2 & \lambda x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ отображение линейное}$$

Для поиска матрицы отображения найдем отображения базисных векторов

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{ искомая матрица}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}^2$, действующие по правилу $f \mapsto (f(-1), f'(1))$. Доказать, что это отображение линейно, и найти его матрицу в базисах e и f, где $e = (1, x, x^2, x^3)$, а f — стандартный базис в $\mathbb{R}^2$.

Решение:

Докажем, что отображение линейно

$$\phi(a+b) = ((a+b)(-1), (a+b)'(1)) = (a(-1)+b(-1), a'(1)+b'(1)) = \phi(a)+\phi(b)$$
$$\phi(\lambda a) = ((\lambda a)(-1), (\lambda a)'(1)) = (\lambda(a)(-1), \lambda(a)'(1)) = \lambda\phi(a)$$
$$\Rightarrow \text{ отображение линейно}$$

Найдем отображения базисных векторов

$$f(x) = 1 : \phi(f(x)) = (1, 0)$$
$$f(x) = x : \phi(f(x)) = (-1, 1)$$
$$f(x) = x^2 : \phi(f(x)) = (1, 2)$$
$$f(x) = x^3 : \phi(f(x)) = (-1, 3)$$
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 4

Пусть линейное отображение $\phi : V \to W$ в базисах (e_1, e_2, e_3) пространства V и (f_1, f_2) пространства W имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу отображения ϕ в базисах $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ и $(f_1, f_1 + f_2)$.

Решение:

Найдем матрицы перехода для данных базисов. Для этого решим матричные уравнения $(e_1, e_2, e_3) \cdot x = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$; $(f_1, f_2) \cdot y = (f_1, f_1 + f_2)$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = y^-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Пусть $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ и линейное отображение $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ в базисе $(2x + x^2, x, 1 - x)$ пространства V и базисе ((3,2), (1,1)) пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Найти $\phi(3 + 2x + x^2)$

Решение:

Найдем координаты вектора в базисе V

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда координаты в другом базисе

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(3 + 2x + x^2) = -5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Задание 6

Линейное отображение $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ в паре стандартных базисов имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти базис ядра и базис образа этого линейного отображения.

Решение:

Найдем базис ядра. Для этого найдем ФСР для ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{базис ядра: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем векторы, которые дополняют базис ядра до базиса $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{можно дополнить векторами } e_3, e_4$$

Базисом образа являются образы векторов e_3, e_4(согласно алгоритму с семинара)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(e_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

Базис ядра:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Базис образа:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задание 7

Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\phi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\phi(X) = AX$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем матрицу линейного отображения. Для этого найдем образы базисных векторов из $M_2(\mathbb{R})$(как базисные векторы возьмем матричные единицы)

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \text{ искомая матрица}$$

Найдем базис ядра

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ ФСР: } \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{ базис ядра: } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дополним ФСР до базиса всего $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ можно дополнить векторами } e_3, e_4$$

Базис образа образуют образы векторов e_3, e_4, то есть

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ:

Базис ядра:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Базис образа:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Задание 8

Доказать, что всякое подпространство L конечномерного векторного пространства V является ядром некоторого линейного отображения $\phi : V \to W$(W можете сами выбрать) и образом некоторого линейного отображения $\psi : U \to V$(U сами выбираем).

Решение:

Как W можно выбрать пространство, состоящее только из нулевого вектора, тогда $\phi(v) = 0\ \forall v \in L \Rightarrow$ L является ядром линейного отображения ϕ.

Пусть $(u_1, ..., u_k)$ – базис в U, $(v_1, ..., v_n)$ – базис в L и возьмем отображение ψ, действующее по правилу $\psi(u_i) = v_i$, тогда $\mathrm{Im}\ \psi = \langle v_1, ..., v_n \rangle = L$. Итого показали, что L ядро некоторого отображения, и L образ некоторого отображения.

Ответ:

ч.т.д

Задание 9

Пусть U, W и W' – подпространства в F^n, причем W и W' дополнительные к U. Обозначим $k = \dim(W) = \dim(W')$. Используя задачи с семинара, доказать следующие утверждения.

1. Существует такой базис $w_1, ..., w_k$ пространства W и такие векторы $v_1, ..., v_k \in U$, что

$$W' = \langle w_1 + v_1,\ ..., w_k + v_k \rangle$$

2. Если

$$\langle w_1,\ ..., w_k \rangle = W = W' = \langle w_1 + v_1,\ ..., w_k + v_k \rangle,$$

то $v_1 = ... = v_k = 0$.

Решение:

2. Так как обе линейные оболочки образуют одно и то же пространство, то выразим вектор второй линейной оболочки через линейную комбинация векторов первой линейной оболочки

$$w_i + v_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \cdot w_j$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \cdot w_j - w_i$$

$$\text{но вектор } v_i \in U, \text{выражение справа} \in W, \text{при этом } U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{ равенство возможно, только если } v_i = 0 \Rightarrow \text{доказали}$$