Линейная алгебра и геометрия

ДЗ 20

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Найти билинейную симметричную форму, ассоциированную с квадратичной функцией:
1. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$;
2. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

Решение:

1. Матрица квадратичной формы имеет вид(это же матрица соответствующей билинейной формы)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Матрица квадратичной формы имеет вид(это же матрица соответствующей билинейной формы)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Найти билинейную симметричную форму, ассоциированную с квадратичной функцией $q(x) = f(x, x)$, где:
1. $f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3$;
2. $f(x, y) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$

Решение:

1. $q(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_1 - 5x_2x_3 + x_3^2$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 & -2 \\ -1.5 & 0 & -2.5 \\ -2 & -2.5 & 1 \end{pmatrix} - \text{ матрица соответствующей билинейной формы}$$

2. $q(x) = -x_1x_2 + x_2x_1 - 2x_2^2 + 3x_2x_3 - x_3x_1 + 2x_3^2$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1.5 \\ -\frac{1}{2} & 1.5 & 2 \end{pmatrix} - \text{ матрица соответствующей билинейной формы}$$

Ответ:

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1.5 & -2 \\ -1.5 & 0 & -2.5 \\ -2 & -2.5 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 1.5 \\ -\frac{1}{2} & 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Найти нормальный вид квадратичной формы

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Решение:

Выпишем матрицу квадратичной формы и приведем ее к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \text{ нормальный вид}$$

$$y_1 = x_1; y_2 = \sqrt{3}x_2; y_3 = \sqrt{\frac{8}{3}}x_3$$

Ответ:

$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

Задание 4

Найти нормальный вид квадратичной формы

$$x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

Решение:

Выпишем матрицу квадратичной формы и приведем ее к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 - \text{ нормальный вид}$$

Ответ:

$x_1^2 - x_2^2$

Задание 5

Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

к нормальному виду, выписать полученный нормальный вид и выписать базис, в котором этот вид принимается, а также выписать соответствующую замену координат (выражение старых координат через новые).

Решение:

Выпишем матрицу квадратичной формы и приведем ее к диагональному виду, запоминая преобразования

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1.5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -0.5 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.25 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - \text{нормальный вид}$$

$$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{4}}; y_2 = x_2; x_3 = \frac{y_3}{\sqrt{0.25}}$$

$$(e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}e_1, e_2 + e_3, -e_1 - e_2 + e_3\right) - \text{новый базис}$$

Ответ:

$y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$
$x_1 = \frac{y_1}{\sqrt{4}}; y_2 = x_2; x_3 = \frac{y_3}{\sqrt{0.25}}$
$\left(\frac{1}{2}e_1, e_2 + e_3, -e_1 - e_2 + e_3\right)$

Задание 6

Выяснить, к каким из квадратичных форм задач 3, 4 и 5 применим метод Якоби. Для тех форм, к которым метод Якоби применим, найти с его помощью нормальный вид.

Решение:

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = 1; \delta_2 = -3; \delta_3 = 8 \Rightarrow \text{применим}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ базис} : Q(y) = y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{8}{3}y_3^2 \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - \text{нормальный вид}$$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = 1; \delta_2 = -1; \delta_3 = 0 \Rightarrow \text{применим}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ базис} : Q(y) = y_1^2 - y_2^2 \Rightarrow z_1^2 - z_2^2 - -\text{нормальный вид}$$

5. $$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1.5 \\ 2 & -1.5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 = 4; \delta_2 = 0 \Rightarrow \text{ не применим}$$

Ответ:

в 3 и 4 применим, в 5 нет

Задание 7

Привести квадратичную форму

$$x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$$

к нормальному виду, выписать полученный нормальный вид и выписать базис, в котором этот вид принимается, а также выписать соответствующую замену координат (выражение старых координат через новые).

Решение:

Выпишем матрицу квадратичной формы и приведем ее к диагональному виду, запоминая преобразования

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - \text{нормальный вид}$$

$$x_1 = y_1; x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{\frac{1}{4}}}; x_3 = \frac{y_3}{\sqrt{2}}$$

$$(e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left(e_1 + e_2, -e_1 + e_2, -\frac{2}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right) - \text{новый базис}$$

Ответ:

$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

$x_1 = y_1; x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{\frac{1}{4}}}; x_3 = \frac{y_3}{\sqrt{2}}$

$\left(e_1 + e_2, -e_1 + e_2, -\frac{2}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\right)$

Задание 8

Привести квадратичную форму

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$$

к нормальному виду, выписать полученный нормальный вид и выписать базис, в котором этот вид принимается, а также выписать соответствующую замену координат (выражение старых координат через новые).

Решение:

Выпишем матрицу квадратичной формы и приведем ее к диагональному виду, запоминая преобразования

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow y_1^2 - y_2^2 - \text{нормальный вид}$$

$$x_1 = y_1; x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$$

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 + e_2, e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_2 + e_4) - \text{новый базис}$$

Ответ:

$y_1^2 - y_2^2$
$x_1 = y_1; x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$
$(e_1 + e_2, e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_2 + e_4)$