Математический анализ 2

ДЗ 5

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Нарисуйте эскиз и вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой.

$$\left(x^2+y^2+y\right)^2=x^2+y^2$$

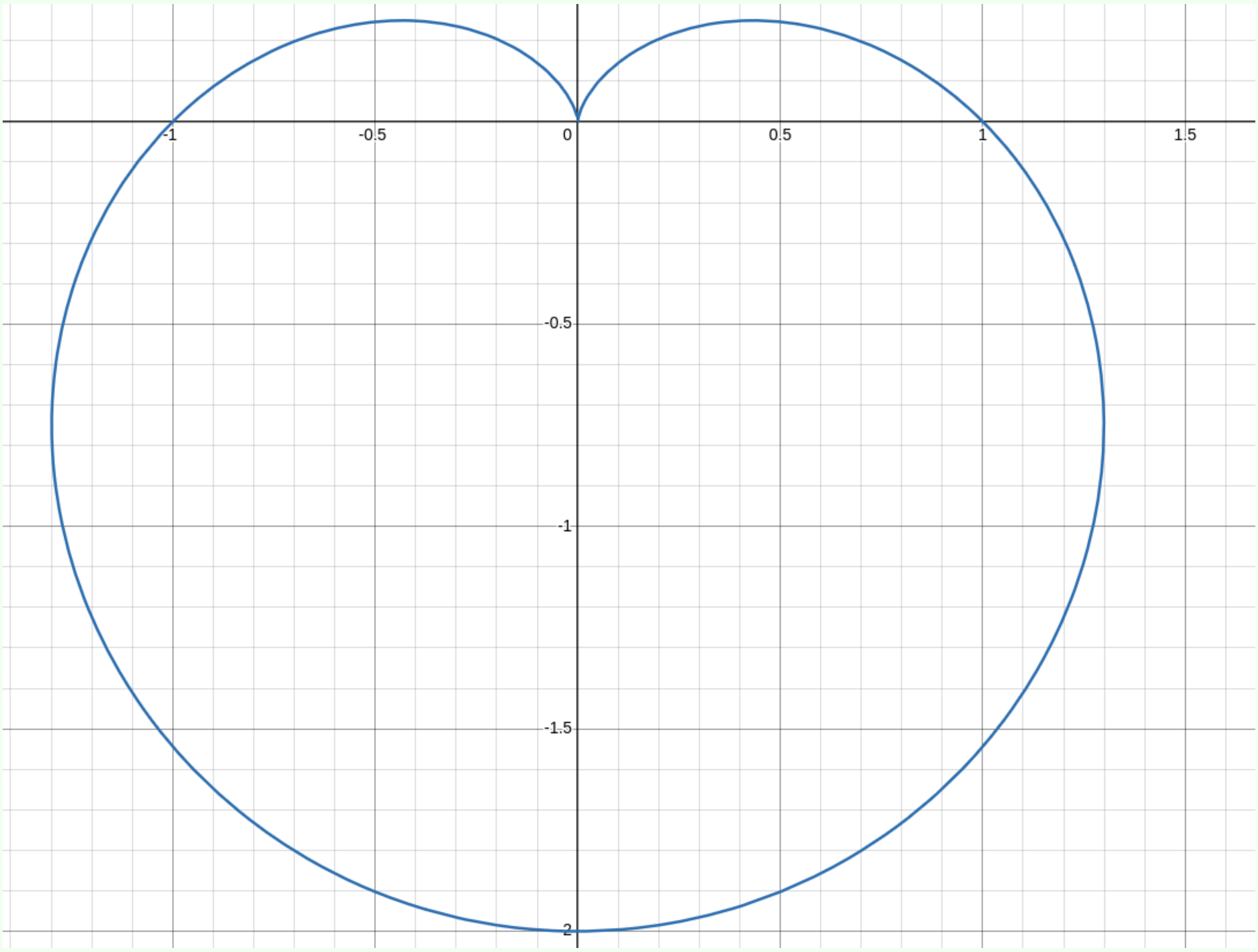
Решение:

$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi$$
$$\left(r^2+r\sin\varphi\right)^2=r^2\Rightarrow r^4+2r^3\sin\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2\Rightarrow r^2+2r\sin\varphi+\sin^2\varphi=1\Rightarrow$$
$$(r+\sin\varphi)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}r=1-\sin\varphi\\ r=-1-\sin\varphi\end{array}\right.\Rightarrow 0\leqslant r\leqslant 2,\varphi\in[0,2\pi]$$

Достаточно вычислить интеграл $S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1-\sin\varphi}rdr$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1-\sin\varphi}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}(2\pi+0+\pi)=\frac{3\pi}{2}$$
$$\Rightarrow S=\frac{3\pi}{2}$$

Эскизом является попка, пересекающая ось Ox в 1 и -1 и 0.



Ответ:

$$\frac{3\pi}{2}$$

Задание 2

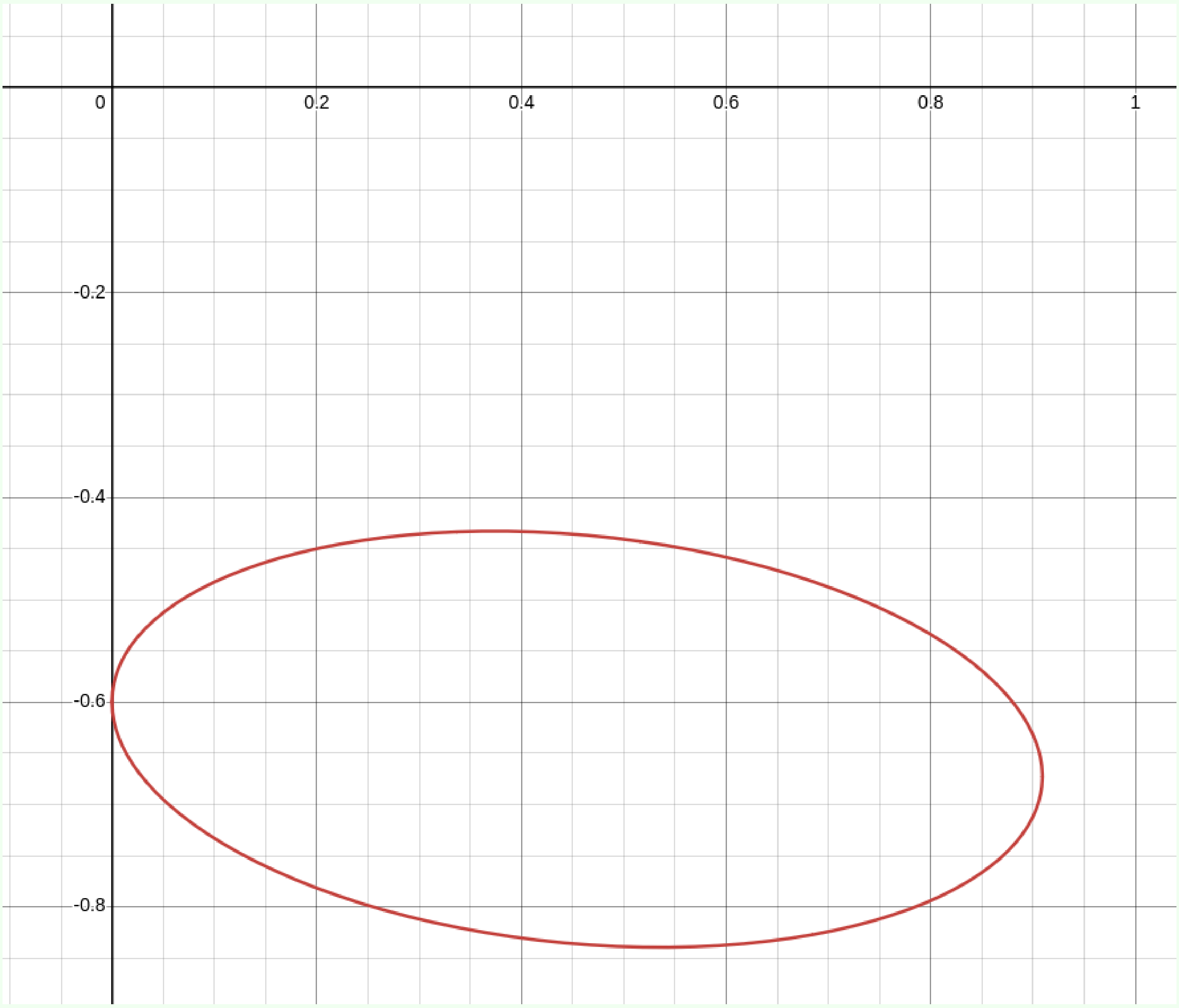
Нарисуйте эскиз и вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой.

$$(2x + 3y + 1)^2 + (x - 4y - 3)^2 = 1$$

Решение:

$$u = 2x + 3y + 1$$
$$v = x - 4y - 3$$
$$u^2 + v^2 = 1$$
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\left|\det(J^{-1})\right| = \frac{1}{11} \Rightarrow S = \frac{\pi}{11}$$

Это уравнение задаёт повёрнутый эллипс. Угол и коэффициенты находятся через поиск собственных значений квадратичной формы(долго считать). Эскиз выглядит следующим образом:



Задание 3

Найдите объём тела, заданного неравенствами

$$x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$$

Решение:

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$
$$z = z$$
$$r^2 \leqslant z \leqslant r$$
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{r} r dz = 2\pi \int_0^1 r^2 - r^3 dr = \frac{\pi}{6}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{6}$$

Задание 4

Найдите объём тела, заданного неравенствами

$$\sqrt{x^2+y^2} \geqslant z, x^2+y^2+z^2 \leqslant z$$

Решение:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$\Rightarrow r \geqslant z$$
$$r^2 \leqslant z - z^2 \Rightarrow r \leqslant \sqrt{z-z^2}, z \in [0,1]$$
$$z \leqslant \sqrt{z-z^2} \Rightarrow z^2 \leqslant z - z^2 \Rightarrow 2z^2 - z \leqslant 0 \Rightarrow z \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$
$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0.5} dz \int_z^{\sqrt{z-z^2}} rdr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{0.5} z - 2z^2 dz = \pi \int_0^{0.5} z - 2z^2 dz = \frac{\pi}{24}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{24}$$

Задание 5

Найти объём пирамиды:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i} \leqslant 1, x_i \geqslant 0\right\} a_i > 0$$

Решение:

Введём замену:

$$t_i = \frac{x_i}{a_i}, x_i = t_i a_i$$

$$\det(J) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Тогда в новых координатах пирамида задаётся соотношением:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1^-$$

На семинаре было доказано, что объём такой фигуры равен $\frac{1}{n!}$. Тогда искомы объём есть $\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} a_i$

Ответ:

$$\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} a_i$$

Задание 1(c)

Надо досчитать интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 4v - 4v^2 dv$$

Решение:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 4v - 4v^2 dv = \frac{1}{3}$$

Ответ:

$$\frac{1}{3}$$