Дискретная математика

ДЗ 14

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

В левой доле двудольного графа 300 вершин, в правой — 400 вершин. Степени всех вершин в левой доле равны 4, а всех вершин в правой доле равны 3. Докажите, что в таком графе есть паросочетание размера 300.

Решение:

Возьмем произвольное подмножество из левой доли мощностью k. Тогда максимальное количество соседей у этого подмножества $4k$, не учитывая повторы. Но каждый сосед максимум может повторяться 3 раза, значит количество соседей хотя бы $\frac{4k}{3}$. $\frac{4k}{3} \geqslant k \Rightarrow$ выполняется условие теоремы Холла $\Rightarrow$ существует паросочетание размера 300.

Ответ:

ч.т.д

Задание 2

В неориентированном графе на 101 вершине есть независимое множества размера 52. Докажите, что в этом графе нет паросочетания размера 50.

Решение:

Пусть существует паросочетание размера 50. Даже если это паросочетание совершенное, то максимальный размер независимого множества будет равен 51(берем 50 вершин из одной из долей паросочетания и 1 одну оставшуюся вершину, больше мы набрать,очевидно, не можем, так как тогда придется в независимое множество включить вершину из оставшейся доли паросочетания, тогда оно перестанет быть независимым, противоречие). $51 < 52 \Rightarrow$ получили противоречие, значит паросочетания размера 50 не существует.

Ответ:

ч.т.д

Задание 3

В неориентированном графе на n вершинах есть вершинное покрытие размера 10. Докажите, что в таком графе нет простого пути длины 21. (В простом пути все вершины разные, длина пути — количество рёбер в нём.)

Решение:

Так как в простом пути каждые две соседние вершины образуют ребро, то хотя бы одна из этих вершин должна входить в вершинное покрытие, иначе ребро не покроется. Для построения простого пути длиной 21 нужно 22 вершины. Имеем всего 21 пару последовательных вершин, даже если в каждой паре ровно 1 вершина из вершинного покрытия, то вершинное покрытие из 10 вершин не покроет 1 ребро в простом пути размером 21(так как в каждых последовательных двух парах участвует 1 вершина из вершинного покрытия, итого покроется 20 ребер). Получили противоречие с размером вершинного покрытия, значит простого пути длины 21 не существует.

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Пусть G — двудольный граф, в котором по n вершин в каждой доле, и степень каждой вершины равна 3 или 4. Докажите, что в G есть паросочетание размера не меньше $\frac{6n}{7}$.

Решение:

Пусть l_3, l_4, r_3, r_4 — количество вершин степени 3 и 4 в левой и правой долях соответственно. Тогда верно соотношение

$$3l_3 + 4l_4 = 3r_3 + 4r_4, \text{ но } l_4 = n - l_3; r_4 = n - r_3 \Rightarrow$$
$$3l_3 + 4n - 4l_3 = 3r_3 + 4n - 4l_3$$
$$l_3 = r_3 \Rightarrow l_4 = r_4$$