Математический анализ

ДЗ 17

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Пусть $u = f(xyz)$. Покажите, что $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = g(xyz)$ и найдите g.

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'(xyz) \cdot xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = f''(xyz) \cdot xz \cdot xy + f'(xyz) \cdot x = f''(xyz) \cdot x^2yz + f'(xyz) \cdot x$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = f'''(xyz) \cdot yz \cdot x^2yz + 2xyz \cdot f''(xyz) + f''(xyz) \cdot xyz + f'(xyz) =$$

$$= f'''(xyz) \cdot x^2y^2z^2 + 3xyz \cdot f''(xyz) + f'(xyz) = g(xyz)$$

Ответ:

$$g(xyz) = f'''(xyz) \cdot x^2y^2z^2 + 3xyz \cdot f''(xyz) + f'(xyz)$$

Задание 2

Найдите матрицу Якоби отображения $(p(u,v,w), q(u,v,w), r(u,v,w))$, если $p = xy, q = \frac{x}{y}, r = \arctan\frac{x}{y}; x = u^2 - w^2, y = u^2 - v^2$.

Решение:

Найдем J_1 — матрицу Якоби отображения $(u,v,w) \to (x,y)$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u; \frac{\partial x}{\partial v} = 0; \frac{\partial x}{\partial w} = -2w$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2u; \frac{\partial y}{\partial v} = -2v; \frac{\partial y}{\partial w} = 0 \Rightarrow$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2u & 0 & -2w \\ 2u & -2v & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем J_2 — матрицу Якоби отображения $(x,y) \to (p,q,r)$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = y; \frac{\partial p}{\partial y} = x;$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{y}; \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{y^2+x^2}; \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{x}{y^2+x^2} \Rightarrow$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ \frac{y}{y^2+x^2} & -\frac{x}{y^2+x^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J = J_2 \cdot J_1$$

Ответ:

$J_2 \cdot J_1$

Задание 3

Найдите дифференциалы df и d^2f для функций а) $f(x,y,z) = \varphi(x, xy, xyz)$; б) $f(x,y,z) = \varphi(x^2 + y^2, y^2+z^2, z^2+x^2)$.

Решение:

1. Пусть $u = x, v = xy, w = xyz$. Найдем матрицу Якоби для отображения $(x,y,z) \to (u,v,w)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y; \frac{\partial v}{\partial y} = x; \frac{\partial v}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = yz; \frac{\partial w}{\partial y} = xz; \frac{\partial w}{\partial z} = xy \Rightarrow$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Якоби для отображения $(u,v,w) \to f$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = J_2 \cdot J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot y + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot yz & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot x + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot xz & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot xy \end{pmatrix}$$

2. Пусть $u = x^2 + y^2, v = y^2 + z^2, w = z^2 + x^2$. Найдем матрицу Якоби для отображения $(x,y,z) \to (u,v,w)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial y} = 2y; \frac{\partial v}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x; \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \frac{\partial w}{\partial z} = 2z \Rightarrow$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу Якоби для отображения $(u,v,w) \to f$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$J = J_2 \cdot J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot 2x & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot 2y & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot 2z + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot 2z \end{pmatrix}$$