Теория вероятностей

ДЗ 6

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Вычислите функцию распределения, задающую меру с плотностью: $p(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Найдите меру отрезка $[0,\ 1]$.

Решение:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu([0,1]) = F(1) - F(0\,-) = 1 - e^{-\lambda}$$

Ответ:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mu([0,1]) = 1 - e^{-\lambda}$$

Задание 2

Вычислите функцию распределения, задающую меру с плотностью: $p(t) = \dfrac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + t^2)}$. Найдите меру отрезка [0, 1].

Решение:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^x \frac{\sigma}{\pi(\sigma^2+t^2)}dt = \lim_{a\to-\infty} \frac{\sigma}{\pi}\left(\frac{1}{\sigma}\arctan\frac{x}{\sigma} - \frac{1}{\sigma}\arctan\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{2}$$

$$\mu([0,1]) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{\sigma}$$

Ответ:

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\sigma} + \frac{1}{2}$$

$$\mu([0,1]) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{\sigma}$$

Задание 3

Пусть F_1, F_2 две функции распределения, которые равны всюду кроме множества лебеговой меры нуль. Докажите, что порожденные ими меры совпадают.

Решение:

Обозначим за Z множество меры нуль. Рассмотрим произвольную точку x на вещественной прямой. Заметим, что в любом интервале $(x, x+\varepsilon)$ найдётся точка y из дополнения к Z. Иначе этот интервал полностью бы лежал в Z, но Z меры нуль, противоречие. Рассмотрим последовательность $y_n \downarrow x, y_n \in Z^c$. Из условия следует, что $F_1(y_n) = F_2(y_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда из непрерывности справа следует:

$$F_1(x) = \lim_{n\to\infty} F_1(y_n) = \lim_{n\to\infty} F_2(y_n) = F_2(x)$$

Тогда по лемме 2.5.2 меры, порожденные F_1 и F_2, совпадают.

Ответ:

ч.т.д

Задание 4

Покажите, что функция распределения имеет не более чем счетное число точек разрыва.

Решение:

Заметим, что функция распределения может иметь разве что разрывы 1 рода, так как функция непрерывна справа, существование предела слева следует из ограниченности функции распределения и неубывания. Колебание функции в точке x можно записать как

$$w(x) = F(x) - F(x-)$$

Рассмотрим множество $D_n = \left\{x \in \mathbb{R} : w(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Для произвольного набора $x_1 < x_2 < ... < x_k \in D_n$

$$\sum_{i=1}^{k} w(x_i) \leqslant M$$

$$\text{(из ограниченности } F\text{)}$$

Получаем, что $k \cdot \frac{1}{n} \leqslant M \Rightarrow k \leqslant Mn \Rightarrow D_n$ конечно. Тогда множество всех точек разрыва есть $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Но счетное объединение конечных множеств не более чем счетное. Доказали.

Ответ:

ч.т.д