Линейная алгебра и геометрия

ИДЗ 9

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Составьте уравнение прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости $4x - 3y - z = -3$, проходящей через точку $(-11, -6, -14)$ и пересекающей прямую $x = 4t - 16, y = -4t - 18, z = -3t - 29$.

Решение:

Обозначим направляющий вектор искомой прямой за (a, b, c). Тогда из параллельности имеем соотношение:

$$(a, b, c) \perp (4, -3, -1) \Rightarrow$$
$$4a - 3b - c = 0$$

Направляющий вектор прямой, которую пересекает искомая прямая: $(4, -4, -3)$
Стационарная точка: $(-16, -18, -29)$
Из условия пересечения прямых заключаем, что векторы $(a, b, c), (4, -4, -3), (-11, -6, -14) - (-16, -18, -29)$ лежат в одной плоскости, то есть смешанное произведение 0:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & -4 & -3 \\ 5 & 12 & 15 \end{pmatrix}\right) = -24a - 75b + 68c = 0$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} 4a - 3b - c = 0 \\ -24a - 75b + 68c = 0 \end{cases}$$
$$c = 4a - 3b$$
$$-24a - 75b + 272a - 204b = 0$$
$$248a - 279b = 0$$
$$a = \frac{9}{8}b$$
$$c = \frac{9}{2}b - 3b = \frac{3}{2}b$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{8}b, b, \frac{3}{2}b\right) \Rightarrow (9, 8, 12) - \text{направляющий вектор искомой прямой}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} t$$

Задание 2

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 16. Точка F — середина ребра BB', а точка E лежит на ребре BB', причём $BE : EB' = 3 : 5$. Найдите угол и расстояние между прямыми AE и $D'F$.

Решение:

Зафиксируем базис AB, AD, AA', тогда $A(0,0,0), D'(0,16,16)$. $3x + 5x = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow |BE| = 6 \Rightarrow E(16,0,6), F(16,0,8), AE(16,0,6), D'F(16,-16,-8) \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{(AE, D'F)}{|AE| \cdot |D'F|} = \frac{13\sqrt{73}}{219} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{13\sqrt{73}}{219}\right)$$

$$AE = (0,0,0) + (16,0,6)t$$
$$D'F = (0,16,16) + (16,-16,-8)t$$
$$\Rightarrow \rho(AE, D'F) = \frac{|((16,0,6),(16,-16,-8),(0,-16,16))|}{|[(16,0,6),(16,-16,-8)]|} = \frac{7680}{32\sqrt{122}} = \frac{120\sqrt{122}}{61}$$

Ответ:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{13\sqrt{73}}{219}\right)$$
$$\rho = \frac{120\sqrt{122}}{61}$$

Задание 3

1. Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите все собственные значения оператора φ и базисы всех его собственных подпространств. Выясните, является ли φ диагонализуем. Если является, то выпишите базис, в котором его матрица диагональна, и саму эту матрицу.

2. Тот же вопрос для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ -5 & -6 & -5 \\ 12 & 18 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1.

$$\chi(t) = -1 \cdot \begin{pmatrix} 4-t & 1 & -2 \\ 4 & 6-t & -4 \\ 4 & 3 & -2-t \end{pmatrix} = t^3 - 8t^2 + 20t - 16 = (t-2)^2(t-4) \Rightarrow 2; 4 - \text{собственные значения}$$

$$Av = 2v$$
$$(A - 2E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{базис собственного подпространства}$$

$$Av = 4v$$
$$(A - 4E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{базис собственного подпространства}$$

Оператор не диагонализуем, так как алгебраическая кратность 2 не совпадает с геометрической

2.

$$\chi(t) = -1 \cdot \begin{pmatrix} -3-t & -8 & -5 \\ -5 & -6-t & -5 \\ 12 & 18 & 14-t \end{pmatrix} = t^3 - 5t^2 + 2t + 8 = (t+1)(t-2)(t-4) \Rightarrow -1; 2; 4 - \text{соб. значения}$$

$$Av = -1v$$
$$(A+E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} -2 & -8 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \\ 12 & 18 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$Av = 2v$$
$$(A-2E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} -5 & -8 & -5 \\ -5 & -8 & -5 \\ 12 & 18 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$Av = 4v$$
$$(A-4E)v = 0$$
$$\begin{pmatrix} -7 & -8 & -5 \\ -5 & -10 & -5 \\ 12 & 18 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

У всех корней геометрическая кратность совпадает с алгебраической и все корни есть,значит диагонализуем

$$\text{Тогда в базисе } \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ оператор имеет матрицу}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ:

в решении

Задание 4

Определите канонический вид, к которому квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 20x_1x_3 + 20x_2x_3$$

приводится ортогональным преобразованием, и найдите это ортогональное преобразование.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 10 \\ 1 & 7 & 10 \\ 10 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(t) = -1 \cdot \begin{pmatrix} 7-t & 1 & 10 \\ 1 & 7-t & 10 \\ 10 & 10 & -2-t \end{pmatrix} = t^3 - 12t^2 - 180t + 1296 = (t-6)(t+12)(t-18) \Rightarrow 6; -12; 18 - \text{соб. знач.}$$

$$Av = 6v$$
$$(A - 6E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av = -12v$$
$$(A + 12E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 1 & 10 \\ 1 & 19 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av = 18v$$
$$(A - 18E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 1 & 10 \\ 1 & -11 & 10 \\ 10 & 10 & -20 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР:} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ортогональным преобразованием

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

форма приводится к виду

$$Q = 6y_1^2 - 12y_2^2 + 18y_3^3$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = 6y_1^2 - 12y_2^2 + 18y_3^3$$

Задание 5

Ортогональный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите угол поворота, определяемого оператором φ.

Решение:

$$\chi(t) = -1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} - t & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} - t & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} - t \end{pmatrix} = t^3 + \frac{5}{7}t^2 - \frac{5}{7}t - 1 = \frac{1}{7}(t-1)(7t^2 + 12t + 7) \Rightarrow 1 - \text{соб. значение}$$

$$Av = 1v$$
$$(A - E)v = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{13}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{9}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ФСР: } \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \text{соб. вектор}$$

$$\Rightarrow e_0 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(0, 2, 3) \perp (0, -3, 2) \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = [e_0, e_1] = (-1, 0, 0)$$

$$\cos\alpha = (Ae_1, e_1) = \left(\left(-5\frac{\sqrt{13}}{91}, 24\frac{\sqrt{13}}{91}, 6\frac{\sqrt{13}}{91} \right), \left(0, \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right) \right) = \frac{66}{91}$$

$$\sin\alpha = (Ae_1, e_2) = \left(\left(-5\frac{\sqrt{13}}{91}, 24\frac{\sqrt{13}}{91}, 6\frac{\sqrt{13}}{91} \right), (-1, 0, 0) \right) = 5\frac{\sqrt{13}}{91}$$

$$\Rightarrow \{e_0, e_1, e_2\} - \text{искомый базис}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{66}{91} & -5\frac{\sqrt{13}}{91} \\ 0 & 5\frac{\sqrt{13}}{91} & \frac{66}{91} \end{pmatrix} - \text{канонический вид}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{66}{91}\right)$$

Ответ:

см. решение