Теория вероятностей

ДЗ 7

Гольдберг Дмитрий Максимович

Группа БПМИ248

Задание 1

Пусть μ мера на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, инвариантная к сдвигу. Покажите, что найдётся такая константа c, что $\mu(A) = c\lambda(A)$.

Решение:

Пусть $\mu([0,1]) = c$. Рассмотрим меру $w(A) = \dfrac{\mu(A)}{c}$. Она также является инвариантной к сдвигу, так как $w(A+x) = \dfrac{\mu(A+x)}{c} = \dfrac{\mu(A)}{c} = w(A)$. $w([0,1]) = \dfrac{\mu([0,1])}{c} = 1 \Rightarrow w$ является мерой лебега, значит $\mu(A) = \lambda(A)c$

Ответ:

ч.т.д

Задание 2

Вычислите меру Лебега веселых множеств

Решение:

1) Так как степенных рядов с целыми коэффициентами счётное число, значит множество алгебраических чисел счётно, значит его мера Лебега 0.
2) Мера Канторова множества 0, значит $\lambda(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{A})) = 0$, $\lambda(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow \lambda(([0,1] \setminus C) \cap \mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow$ мера объединения также 0.
3) Заметим, что в A есть трансцендентные числа и алгебраические, пересекая с трансцендентными, мы убираем счётное число точек, то есть мера Лебега не меняется, значит итоговая мера есть $b - a$.

Ответ:

$$0$$
$$0$$
$$b - a$$

Задание 3

Покажите, что если $\emptyset \neq X \in B(\mathbb{R})$ открыто, то $\lambda(X) > 0$. Что можно сказать о борелевском множестве с непустой внутренностью? Покажите, что если $K \in B(\mathbb{R})$ компакт, то $\lambda(K) < +\infty$.

Решение:

1) Внутри открытого множества можно выбрать интервал $(a, b) \Rightarrow \lambda(X) \geqslant \lambda((a, b)) = b - a > 0$.
2) Внутри множества есть точка, которая лежит внутри множества вместе со своей окрестностью, то есть $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in X \Rightarrow \lambda(X) \geqslant \lambda((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = 2\varepsilon > 0$.
3) Так как $K -$ компакт, то оно ограничено, значит $K \in [-N, N] \Rightarrow \lambda(K) \leqslant \lambda([-N, N]) = 2N < +\infty$

Ответ:

показали

Задание 5

Постройте функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у которой множество точек разрыва имеет положительную меру Лебега.

Решение:

Как пример можно рассмотреть функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Мера множества точек разрыва есть мера отрезка $[0, 1]$, то есть 1

Задание 3

Найдите меру Лебега множества чисел $x \in [0, 1]$, в десятичной записи которых нет цифр 2 и 3.

Решение:
