a) $\dot{q} = f(q,p)$ Puntos fijos: $f(q_0, p_0) = 0$

$\dot{p} = g(q,p)$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial p} \\ \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial p} \end{pmatrix}$$

→ Si se considera un sistema dinámico descrito por Hamilton:

$H(q,p)$, por Taylor alrededor del punto fijo (q_0, p_0):

Si $f(q_0,p_0) = 0$, $g(q_0,p_0) = 0$ → $H(q,p) \approx H(q_0,p_0) + \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_{(q_0,p_0)} (q-q_0) + \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{(q_0,p_0)} (p-p_0)$

$\Rightarrow \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_{(q_0,p_0)} = 0$, y $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$, Así $H(q,p) \approx H(q_0,p_0)$

$E(q,p) = H(q,p) - H(q_0,p_0) \approx H(q_0,p_0) - H(q_0,p_0) = 0 \Rightarrow E(q,p)$ cte en el punto / alrededor del punto fijo.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(H(q,p) - H(q_0,p_0)\right) = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} f(q,p) + \frac{\partial H}{\partial p} g(q,p)$$

Si $\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dp}{dt}$ y $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dq}{dt}$ $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{dp}{dt} f(q,p) + \frac{dq}{dt} g(q,p) = g(q,p) f(q,p) + f(q,p) g(q,p)$

$\frac{dE}{dt} = 0$ cerca del punto fijo, es decir constante

$$\frac{dE}{dt} = M\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial f(q_0,p_0)}{\partial p} \\ \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial q} & \frac{\partial g(q_0,p_0)}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_q \\ E_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DD | MM | AA

b) $x' = 2x - y$

$y' = x + 2y$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Puntos fijos

$\Rightarrow f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$ $\Rightarrow$ $x' = 0$, $y = 2x$

$y' = 0$, $x + 2y = x + 4x = 0$, $x = 0$ y $y = 0$

Así el punto fijo es $(0,0)$ y M estable es:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2$ $\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.)

dm a una distancia r desde el eje de rotación tiene un momento de inercia de $dm \cdot r^2$

$\Rightarrow$: $dm = \rho\, dA$ y $dA = r\,dr\,d\alpha$

$\Rightarrow I_{disco} = \iint r^2 dm = \int^{\pi} \int^{A} \rho \cdot r^3 dr\, d\alpha$

$y' = x + 2y$

Puntos fijos

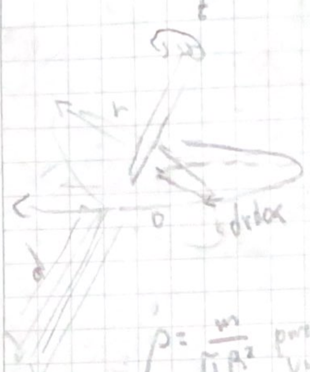
$\Rightarrow f(x_0, y_0) = 0 \; y \; g(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = 0,\; y = 2x$

$y' = 0,\; x + 2y = x + 4x = 0,\; x = 0 \; y \; y = 0$

Así el pnto fijo es $(0,0)$ y M estable es:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2,\; \frac{\partial f}{\partial y} = -1,\; \frac{\partial g}{\partial x} = 1,\; \frac{\partial g}{\partial y} = 2 \quad \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3)



dm a una distancia r desde el eje de rotación tiene un momento de inercia de $dm \cdot r^2$.

ρ: $dm = \rho\, dA$ y $dA = r\,dr\,d\alpha$

$\Rightarrow I_{disco} = \iint r^2 dm = \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho \cdot r^3 \, dr \, d\alpha$

Así $I = \rho \int_0^{\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^R d\theta = \rho \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \theta \Big|_0^{\pi} = \rho \frac{R^4}{4} \cdot \pi$

$\rho = \frac{m}{\pi R^2}$ para disco uniforme

$I_0 = \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4 \pi}{4} = \frac{mR^2}{4}$

Así por ejes paralelos:

$I_0 = \frac{mR^2}{4} + md^2$

c) $\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \frac{1}{2} I_0 (2\dot\phi \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z \cdot 2 (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi) = \dot\phi (I_0 \sin^2\theta + I_z \cos^2\theta) + I_z \dot\psi \cos\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = 0 + \frac{1}{2} I_z 2 (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi) = I_z (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)$

$L = \frac{1}{2} I_0 (\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_z (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)^2 - mgd\cos\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{\partial}{\partial \dot\theta} \left(\frac{1}{2} I_0 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_z (\dot\phi \cos(\theta) + \dot\psi)^2 \right) = I_0 \dot\theta$

E