Евстигнеев Д.М. R3242
Отчет за 2 семестр

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 11-\lambda & -7 \\ -7 & 11-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 22\lambda + 72 = (\lambda-4)(\lambda-18)$

$(-\lambda+11)(-\lambda+11) - (-7)(-7) = \lambda^2 - 22\lambda + 72$

$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = 18$

2. $(A - \lambda E)V = 0 \qquad A - \lambda_1 E = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -7 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x_1 = x_2$

$x = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, пусть $x_2 = 1$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = V_1$

$A - \lambda_2 E = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c} -7 & -7 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x_1 = -x_2$

$x = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, пусть $x_2 = 1 \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -\lambda+2 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda+18 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda+2 \end{vmatrix} = (-\lambda+2)(-\lambda+18)(-\lambda+2) + 0 - 2(-\lambda+18)\cdot 2 =$

$= -\lambda^3 + 22\lambda^2 - 72\lambda = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-18)$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 4 \qquad \lambda_3 = 18$

4. $\lambda_3 = 18$

$$\begin{bmatrix} -16 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -16x + 2z = 0 \\ 2x - 16z = 0 \end{cases}$$

$$x = z = 0 \Rightarrow \underline{V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 18y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x = -z \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{V_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ 14y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. $\sigma_1 = 0$

$\sigma_2 = 2$

$\cancel{1}\sigma_3 = \sqrt{18}$

Левые сингулярности вектора:

$$V_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \\ 0/\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \\ 1/\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Правые сингулярные вектора

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{1^2+1^2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

6. Range $A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\right)$ в матр. Σ два ненулевых числа

Nullspace $A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

7. $A^{+} = V \Sigma^{+} U^{T}$

$$\Sigma^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/6 & 1/4 \\ 1/4 & 1/6 & 1/4 \end{bmatrix}$$

8. $\begin{cases} x+y=8 \\ -3x+3y=12 \\ x+y=16 \end{cases} \xRightarrow{\text{МНК}} \begin{cases} x^{*}=4 \\ y^{*}=8 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^{*} \\ y^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/6 & 1/4 \\ 1/4 & 1/6 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

① $$\det(A-\lambda E) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 4 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 6-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) + (-1)\cdot 0\cdot 0 + 4\cdot 0\cdot(-1) -$$

$$- 4\cdot(5-\lambda)\cdot 0 - (-1)\cdot 0\cdot(6-\lambda) - (2-\lambda)\cdot 0\cdot(-1) =$$

$$= (2-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 5 \quad \lambda_3 = 6$$

② $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 4 \\ 0 & 5-2 & 0 \\ 0 & -1 & 6-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x \in R \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & -1 & 4 \\ 0 & 5-5 & 0 \\ 0 & -1 & 6-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -3x - y + 4z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y = z \\ x = z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x \in R \\ y \in R \\ z \in R \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 6$

$$\begin{bmatrix} 2-6 & -1 & 4 \\ 0 & 5-6 & 0 \\ 0 & -1 & 6-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x - y + 4z = 0 \\ -y = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y = 0 \\ x = z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 6 \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$B=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \lambda_{1,2}=2 \\ \lambda_{3,4}=5 \end{array}$$

④ $Geom(\lambda_{1,2}) = nullity\,(A-2I) =$

$$= nullity\begin{bmatrix} 5-2 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1-2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 6-2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} =$$

$$= nullity\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4-3=1$$

$Geom(\lambda_{3,4}) = nullity\,(A-5I) =$

$$= nullity\begin{bmatrix} 5-5 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1-5 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 6-5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2-5 \end{bmatrix} =$$

$$= nullity\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 4-2=2$$

⑤ $$(A-2I) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \text{נכון}$$

$$(A-2\lambda)^2 = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -9 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$ – обобщ собств вектор

$$(A-5\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ – собств вектор

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$ – собств вектор

6) Жордановые клетки:

$\lambda = 2$, $k = 2$ $\qquad$ $\lambda = 5$, $k = 1$ $\qquad$ $\lambda = 5$, $k = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(7)

$\lambda = 2 - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\lambda = 5 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\lambda = 5 - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$B = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

(8) $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 8$ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(9) $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 1 - i$
$\lambda_3 = 1 + i$
$\lambda_4 = 2 - i$
$\lambda_5 = 2 + i$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(10) $\det D = 1(1-i)(1+i)(2-i)(2+i) = 10$

$\operatorname{trace} D = 1 + (1-\cancel{i}) + (1+\cancel{i}) + (2-\cancel{i}) + (2+i) = 7$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$f \downarrow \qquad f \downarrow \qquad f \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y_1 + y_2) \\ (x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

$$f \downarrow \qquad f \downarrow$$

$$\alpha \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha y \\ \alpha x \end{bmatrix}$$

② $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x + (-1) \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

③ a. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$y = A_1 x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \ x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Range } A_1 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{rank } A_1 = 1$

$$\text{Nullspace } A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -(2x_2+3x_3) \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -(2a+3b) \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ nullity $A_1 = 3$

Б

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = A_2 x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_2 = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}$

$$\text{Range } A_2 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ rank $A_2 = 1$

$$\text{Nullspace } A_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow \text{nullity } A_2 = 1$$

8 $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$Y = A_3 X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -5x_2 \end{cases}$$

$$\text{Range } A_3 = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \text{rank } A_3 = 2$$

$$\text{Nullspace } A_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ -5x_2 \end{bmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ -5a \end{bmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}\right) \to \text{nullity } A_3 = 1$$

4 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = P^{-1} x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det P} \cdot \tilde{P}^{T}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 0 -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 & -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) & 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) & 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 & -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 & -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix}^{T} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 11 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 11 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 3 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 2 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 3 \\ (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & (-1)\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 & (-1)\cdot 3 + 1\cdot 3 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

(6) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A = B^{-1}CB$, $\det B \neq 0$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 6\cdot 0 + 1\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 0 -$$

$$- 0\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 1 = 2 + 3 - 6 = -1$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 6 & -(3\cdot 1 - 0\cdot 6) & 3\cdot 1 - 0\cdot 2 \\ -(0\cdot 1 - 1\cdot 1) & 1\cdot 1 - 0\cdot 1 & -(1\cdot 1 - 0\cdot 0) \\ 0\cdot 6 - 2\cdot 1 & -(1\cdot 6 - 3\cdot 1) & 1\cdot 2 - 3\cdot 0 \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1}CB = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 1+(-1)\cdot 0+2\cdot 0 & 4\cdot 0+(-1)\cdot 1+2\cdot 1 & 4\cdot 0+(-1)\cdot 1+2\cdot 1 \\ 3\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 0 & 3\cdot 0+(-1)\cdot 1+3\cdot 1 & 3\cdot 0+(-1)\cdot 1+3\cdot 1 \\ (-3)\cdot 1+1\cdot 0+(-2)\cdot 0 & (-3)\cdot 0+1\cdot 1+(-2)\cdot 1 & (-3)\cdot 0+1\cdot 1+(-2)\cdot 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 0 & 4\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 1 & 4\cdot 1+1\cdot 6+1\cdot 1 \\ 3\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 0 & 3\cdot 0+2\cdot 2+2\cdot 1 & 3\cdot 1+2\cdot 6+2\cdot 1 \\ (-3)\cdot 1+(-1)\cdot 3+(-1)\cdot 0 & (-3)\cdot 0+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 1 & (-3)\cdot 1+(-1)\cdot 6+(-1)\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 9 & 6 & 17 \\ -6 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

7 $\det(MN) = 32$

$\det(M^{-1}) + \det(N^{-1})$ — ?

- определители подобных матриц равны
- $\det(A\cdot B) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

$\det(MN) = \det N \cdot \det M = 32 \Rightarrow \det M = \det N = \sqrt{32}$

$$\det(M^{-1}) + \det(N^{-1}) = \frac{1}{\det M} + \frac{1}{\det N} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{2}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{4}{32}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

8

$$\text{Range } X = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{Nullspace } X = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$