



*Национальный исследовательский университет ИТМО
(Университет ИТМО)*

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина: Теория автоматического управления

Отчет по лабораторной работе №6.

«Устойчивость систем с запаздыванием»

Вариант 20

Студент:
Евстигнеев Д.М.
Группа: *R33423*
Преподаватель:
Парамонов А.В.

Санкт-Петербург
2021-2022

- **Цель работы**

Анализ устойчивости замкнутых линейных систем с запаздыванием.

- **Ход работы**

№	a_2	a_1	a_0	b_1	b_0
20	1	9	7	4	6

Система без запаздывания:

$$y'' + 9y' + 7y = 4u' + 6u$$

ПФ разомкнутой системы:

$$W(s) = K * \frac{4s + 6}{s^2 + 9s + 7}$$

ПФ замкнутой системы:

$$W(s) = K * \frac{4s + 6}{s^2 + 9s + 7 + 4s + 6} = K * \frac{4s + 6}{s^2 + 13s + 13}$$

Частотная ПФ разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= K * \frac{4wj + 6}{-\omega^2 + 9\omega j + 7} \\ &= K * \frac{30\omega^2 + 42}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49} - K * \frac{j(4\omega^3 + 26\omega)}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49} \end{aligned}$$

АЧХ разомкнутой системы:

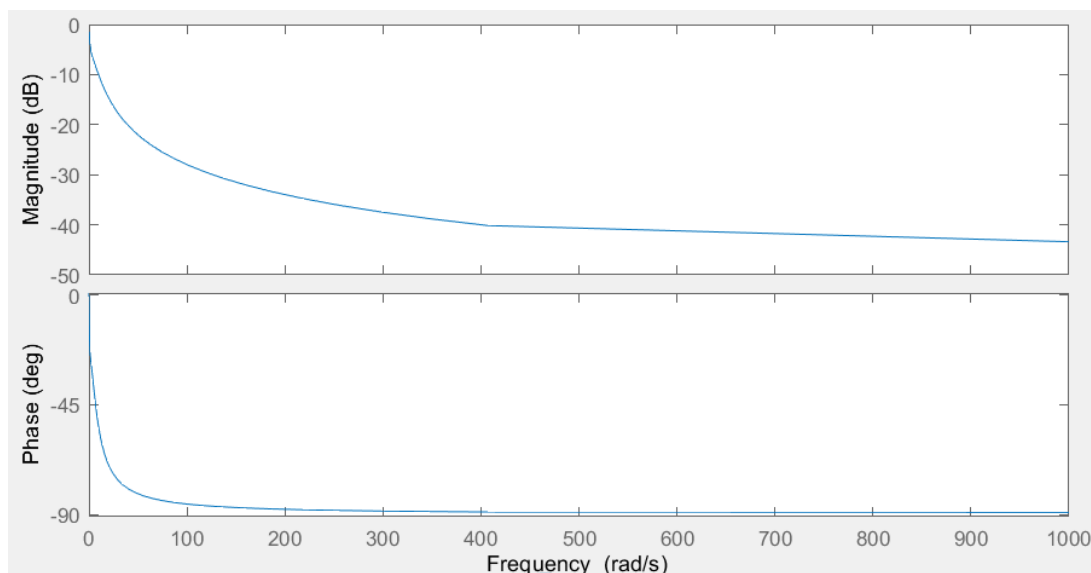
$$A(\omega) = K * \sqrt{\left(\frac{30\omega^2 + 42}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49}\right)^2 + \left(\frac{4\omega^3 + 26\omega}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49}\right)^2}$$

ФЧХ разомкнутой системы:

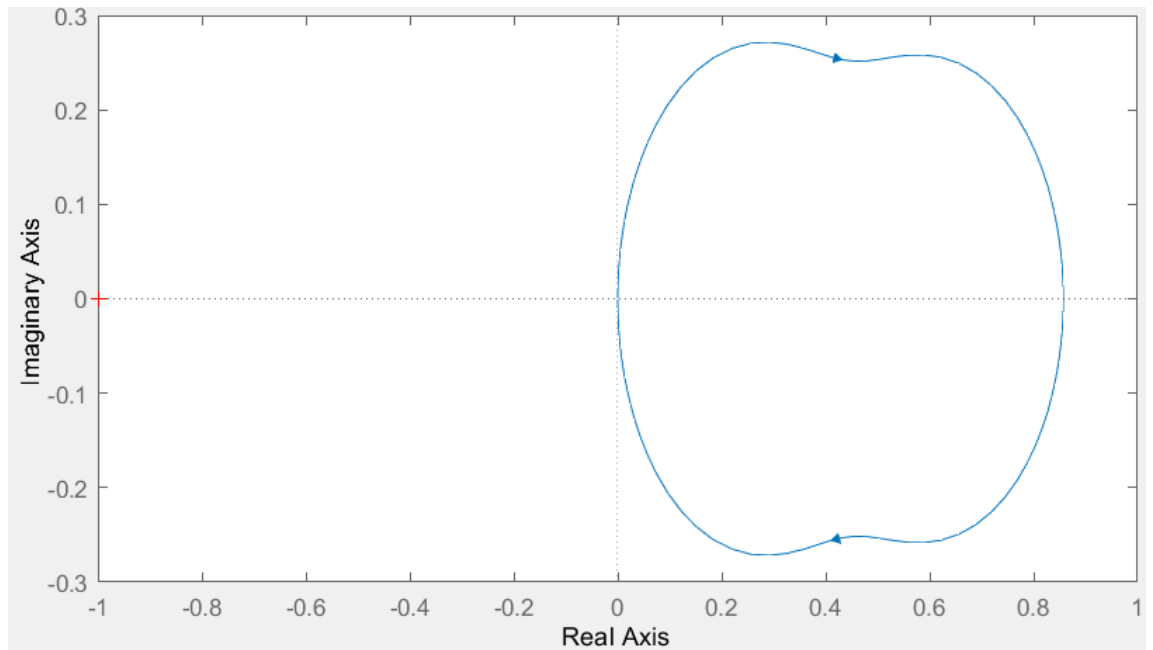
$$\phi(\omega) = -\arctg\left(\frac{4\omega^3 + 26\omega}{30\omega^2 + 42}\right)$$

K=1

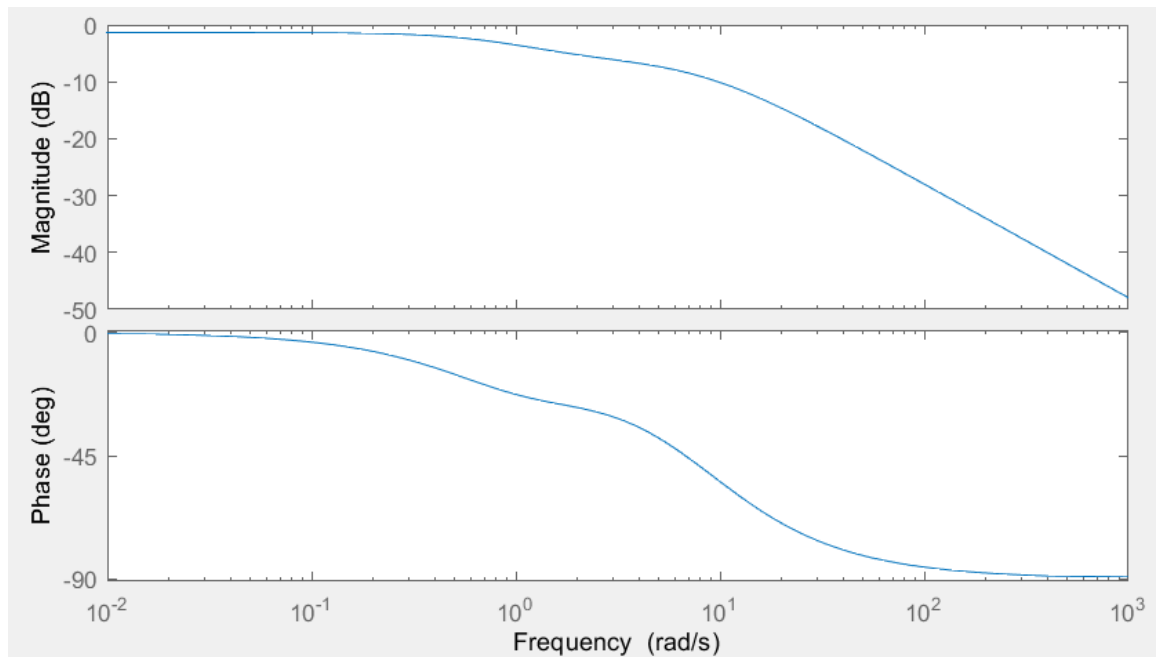
АЧХ и ФЧХ:



АФЧХ:



ЛАФЧХ:



Запас устойчивости по фазе и амплитуде, критическое значение запаздывания:

Field ▲	Value
<input type="checkbox"/> GainMargin	[]
<input type="checkbox"/> GMFrequency	[]
<input type="checkbox"/> PhaseMargin	[]
<input type="checkbox"/> PMFrequency	[]
<input type="checkbox"/> DelayMargin	[]
<input type="checkbox"/> DMFrequency	[]
<input checked="" type="checkbox"/> Stable	1

Как мы видим, все искомые значения равны бесконечности.

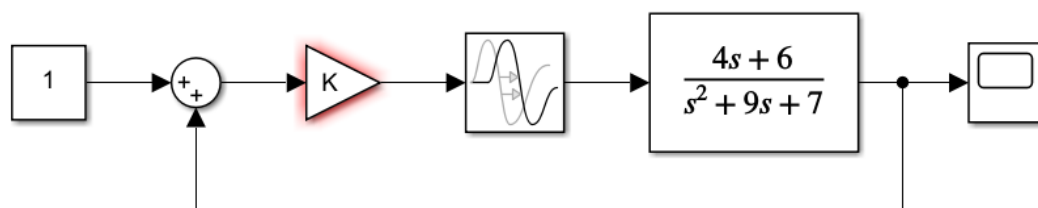
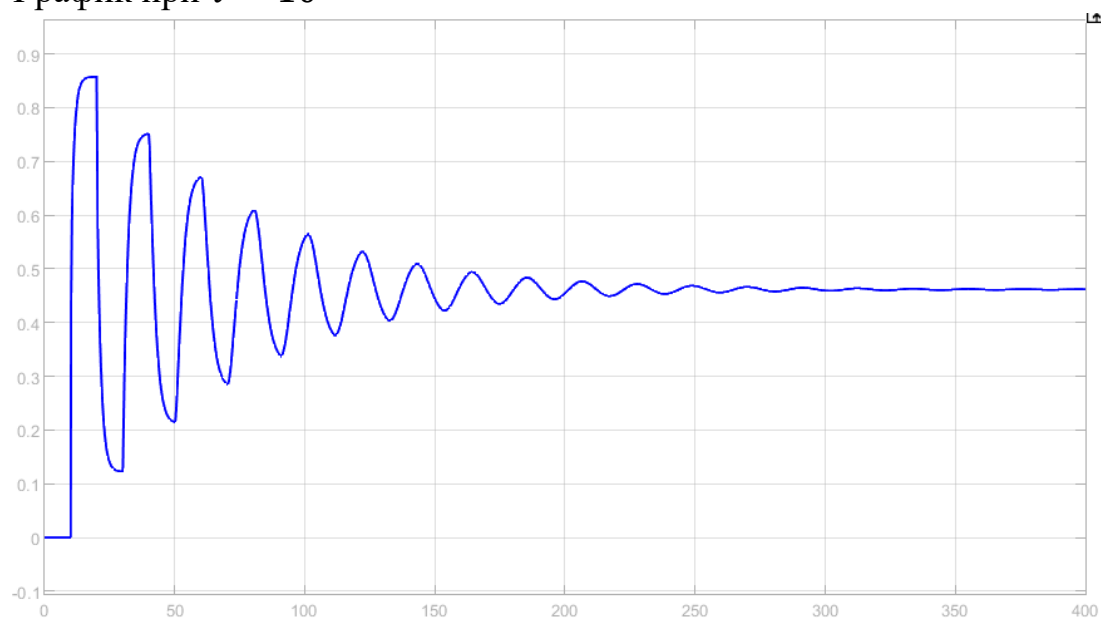
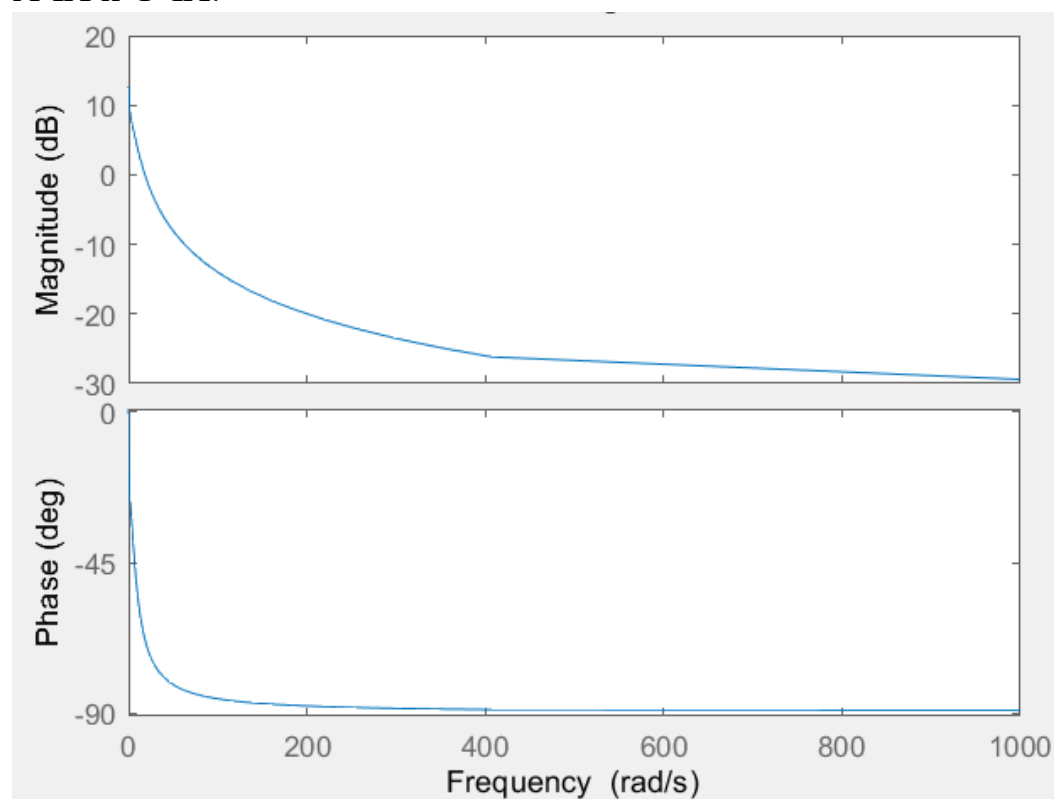


График при $\tau = 10$

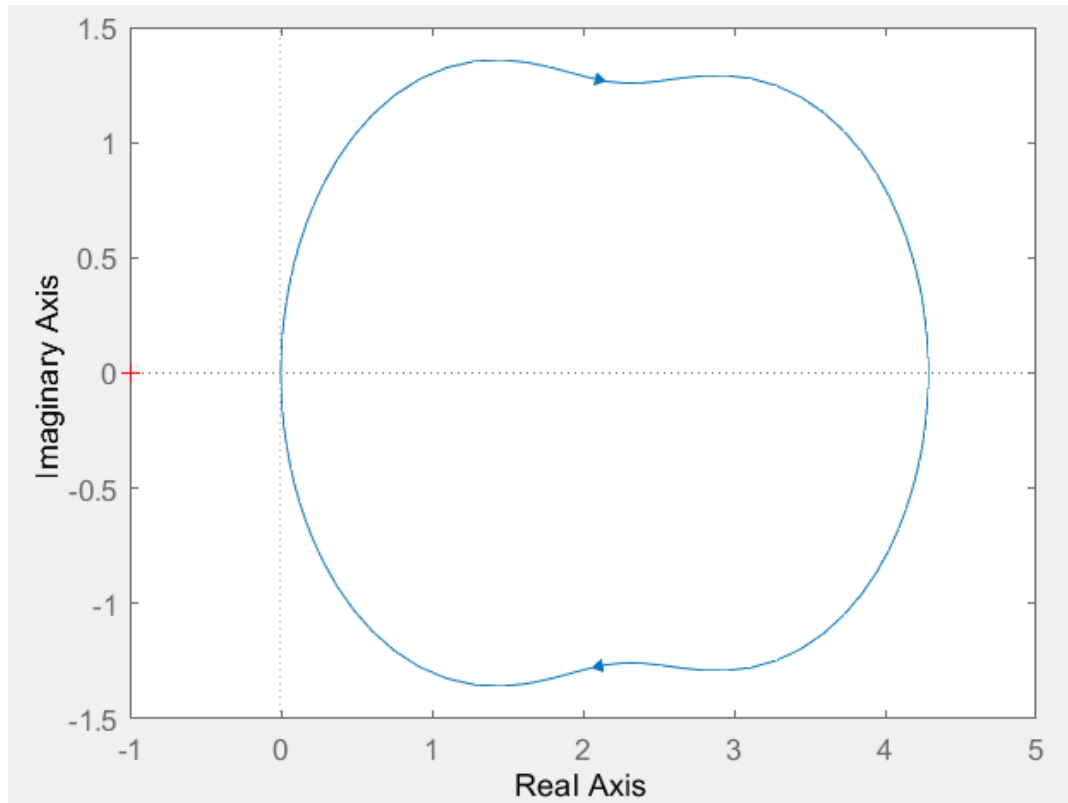


$K=5$

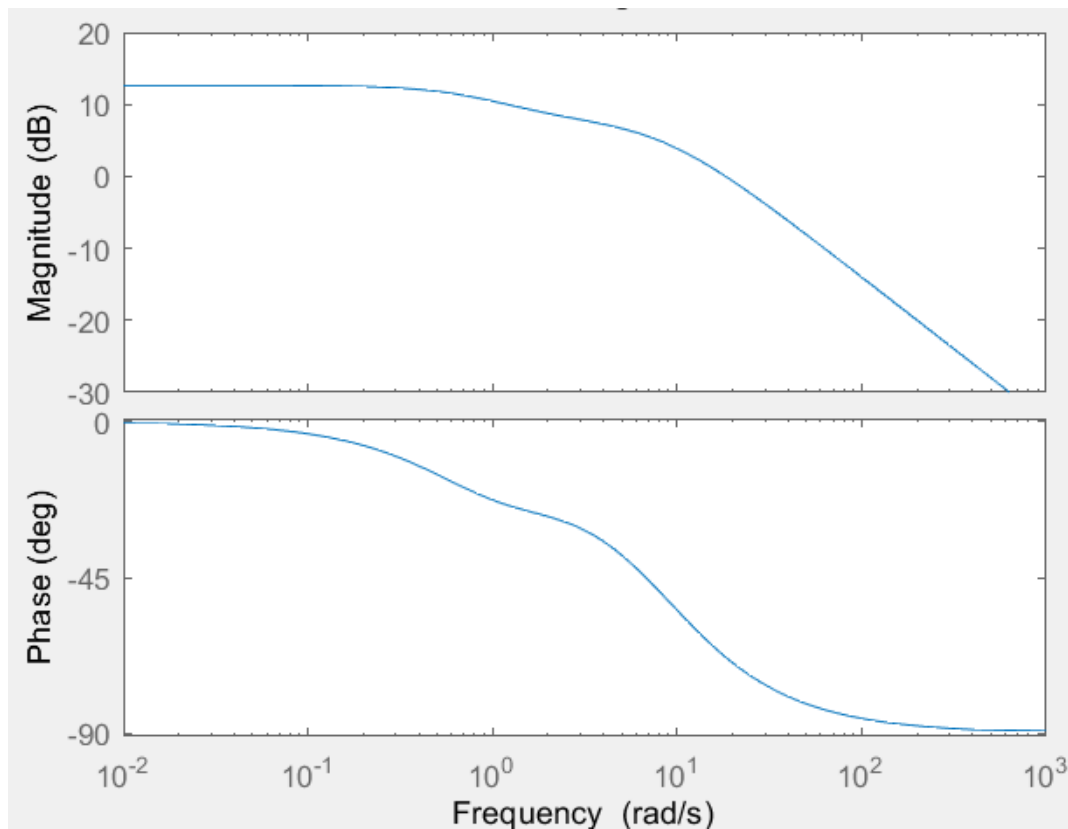
АЧХ и ФЧХ:



АФЧХ:



ЛАФЧХ:



Запас устойчивости по фазе и амплитуде, критическое значение запаздывания:

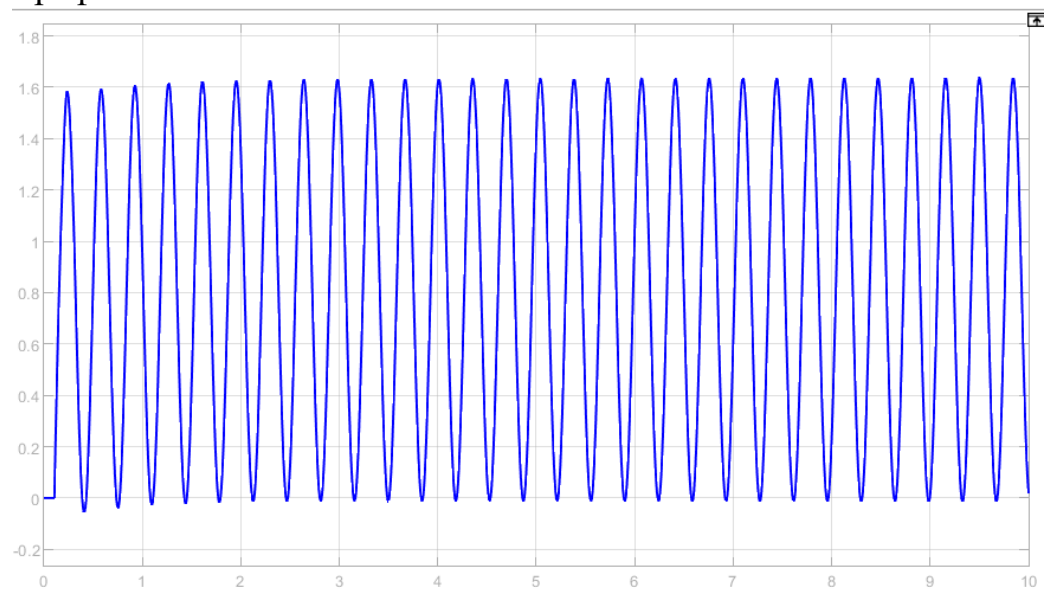
Field ▲	Value
GainMargin	[]
GMFrequency	[]
PhaseMargin	111.9663
PMFrequency	18.3173
DelayMargin	0.1067
DMFrequency	18.3173
<input checked="" type="checkbox"/> Stable	1

Запас устойчивости по фазе = 111.9663

Запас устойчивости по амплитуде = ∞

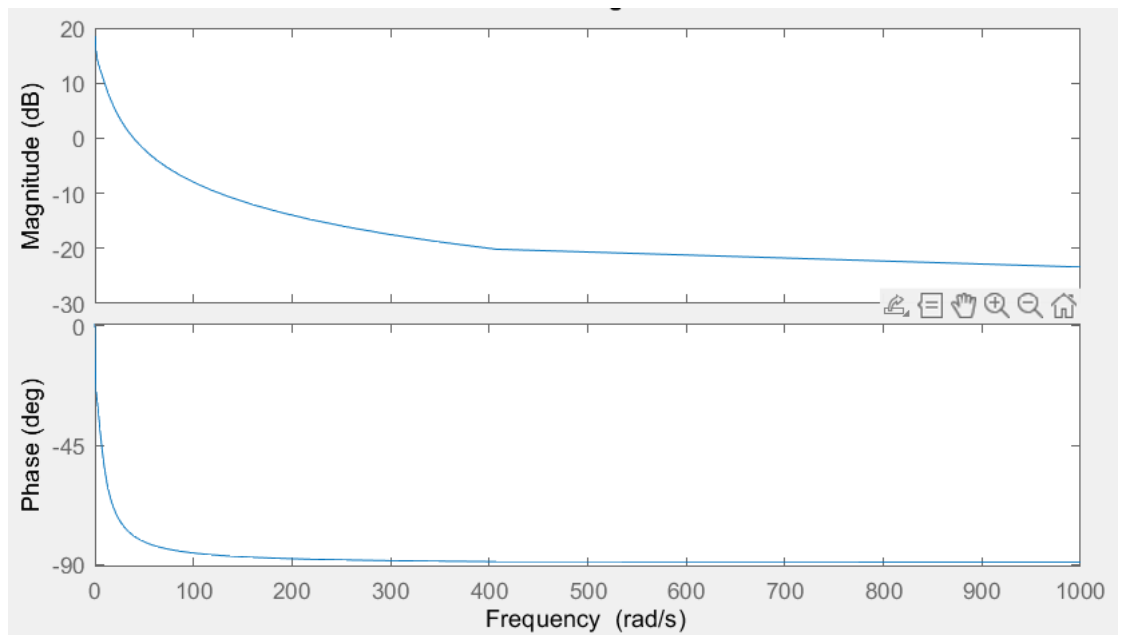
Критическое значение запаздывания = 0.1067

График:

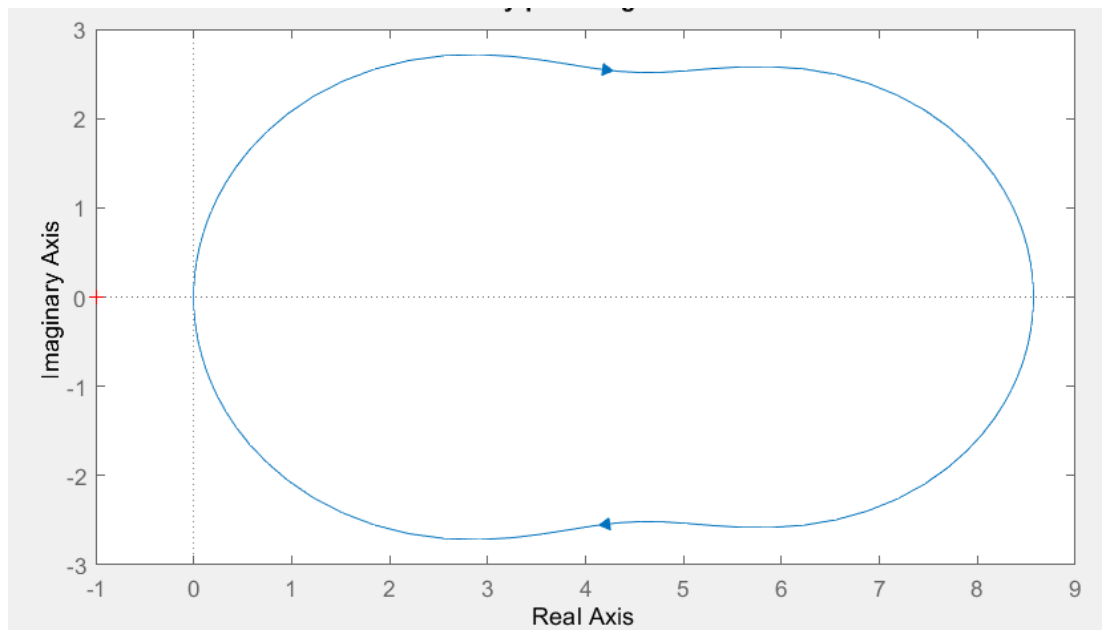


K=10

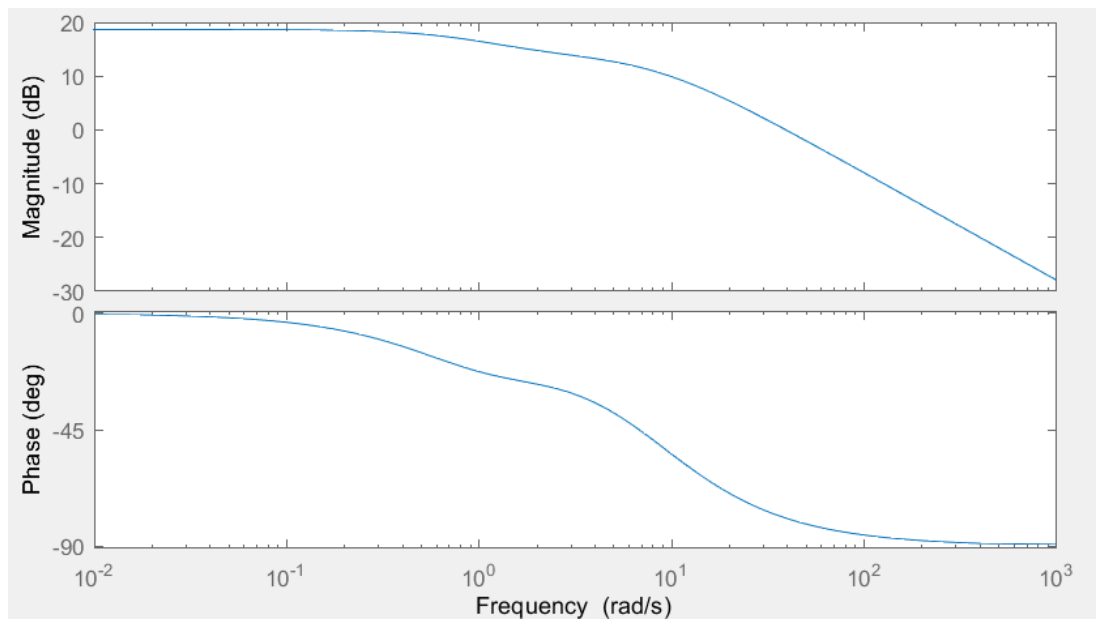
АЧХ и ФЧХ:



ΑΦΥΧ:



ΛΑΦΥΧ:



Запас устойчивости по фазе и амплитуде, критическое значение запаздывания:

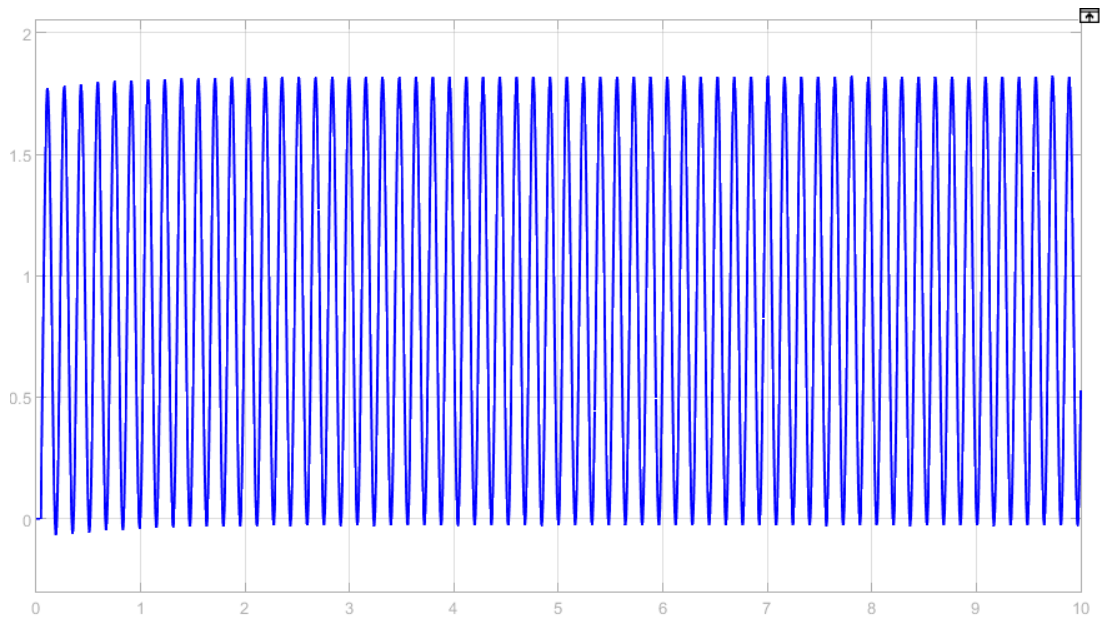
Field ▲	Value
<input type="checkbox"/> GainMargin	[]
<input type="checkbox"/> GMFrequency	[]
<input type="checkbox"/> PhaseMargin	100.8009
<input type="checkbox"/> PMFrequency	39.1831
<input type="checkbox"/> DelayMargin	0.0449
<input type="checkbox"/> DMFrequency	39.1831
<input checked="" type="checkbox"/> Stable	1

Запас устойчивости по фазе = 100.8009

Запас устойчивости по амплитуде = ∞

Критическое значение запаздывания = 0.0449

График:



Формируем передаточную функцию разомкнутой и замкнутой системы с запаздыванием:

ПФ разомкнутой системы:

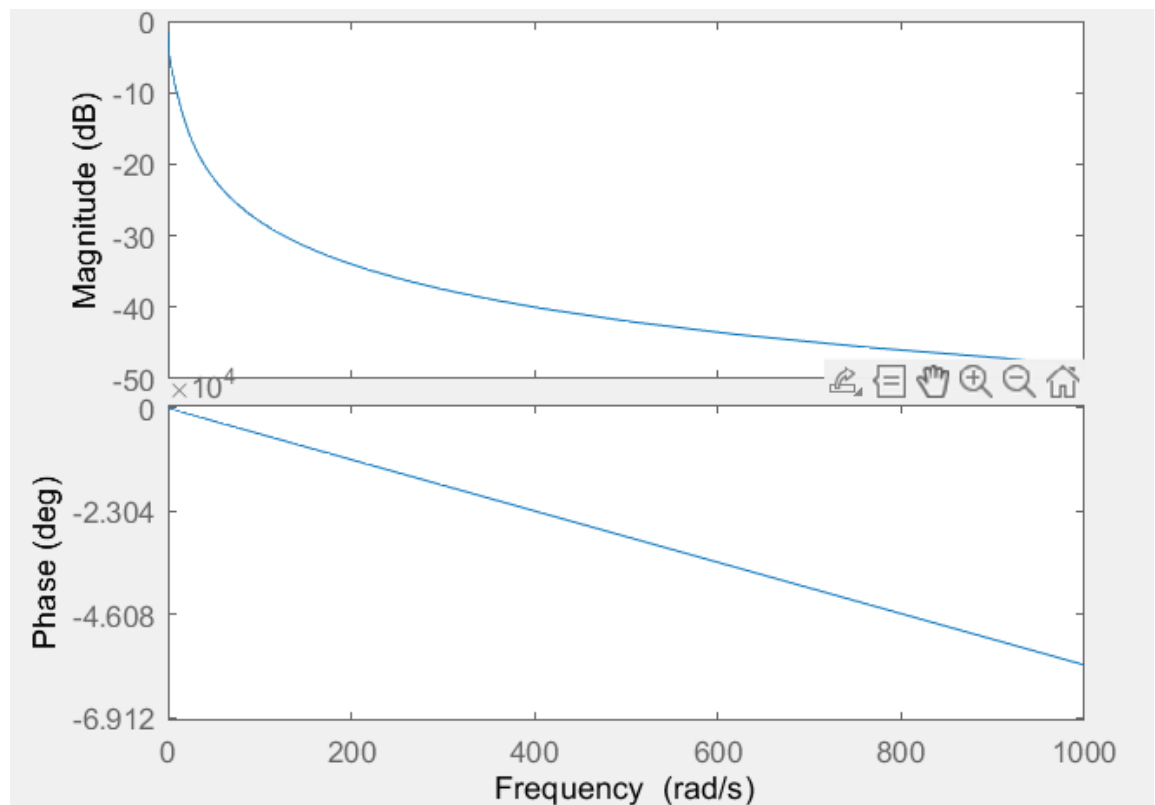
$$W(s) = K * \frac{4s + 6}{s^2 + 9s + 7} * e^{-\tau s}$$

ПФ замкнутой системы:

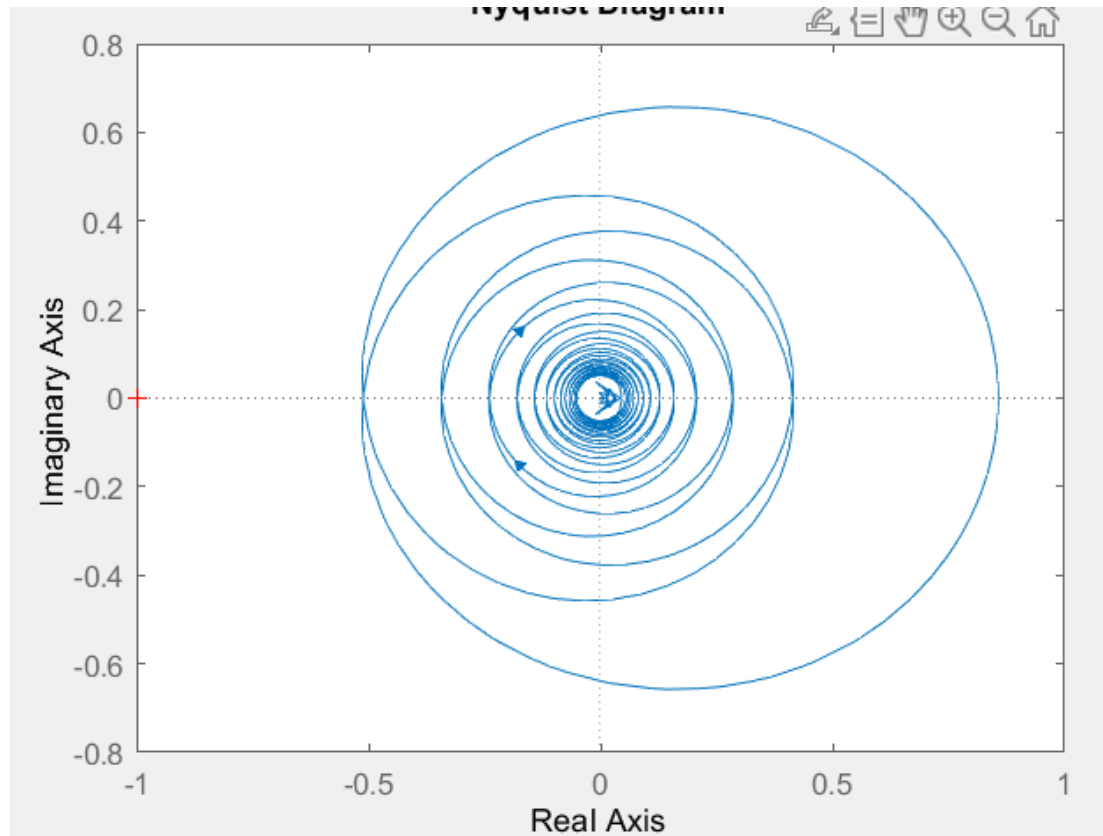
$$W(s) = K * \frac{(4s + 6)e^{-\tau s}}{s^2 + 9s + 7 + (4s + 6)e^{-\tau s}}$$

$$\tau = 1$$

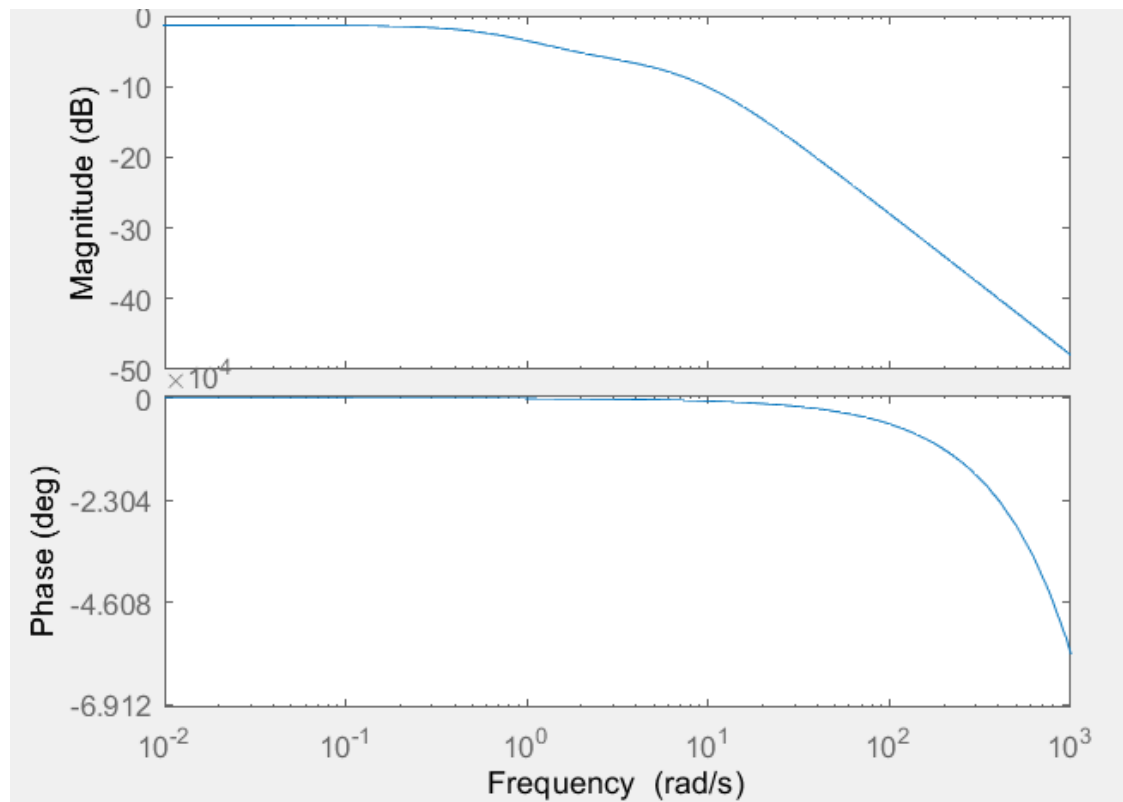
АЧХ и ФЧХ:



АФЧХ:



ЛАФЧХ:



Запас устойчивости по фазе и амплитуде, критическое значение запаздывания:

Field ▲	Value
GainMargin	1x48 double
GMFrequency	1x48 double
PhaseMargin	[]
PMFrequency	[]
DelayMargin	[]
DMFrequency	[]
Stable	1

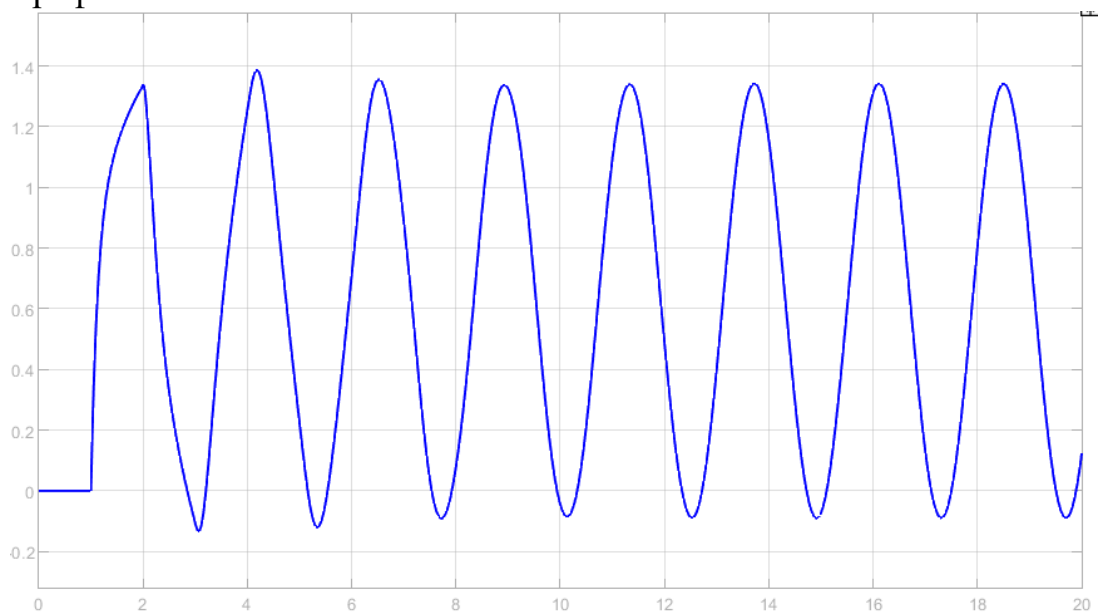
s.GainMargin	
	1
1	1.9539

Запас устойчивости по фазе = ∞

Запас устойчивости по амплитуде = 1.9539

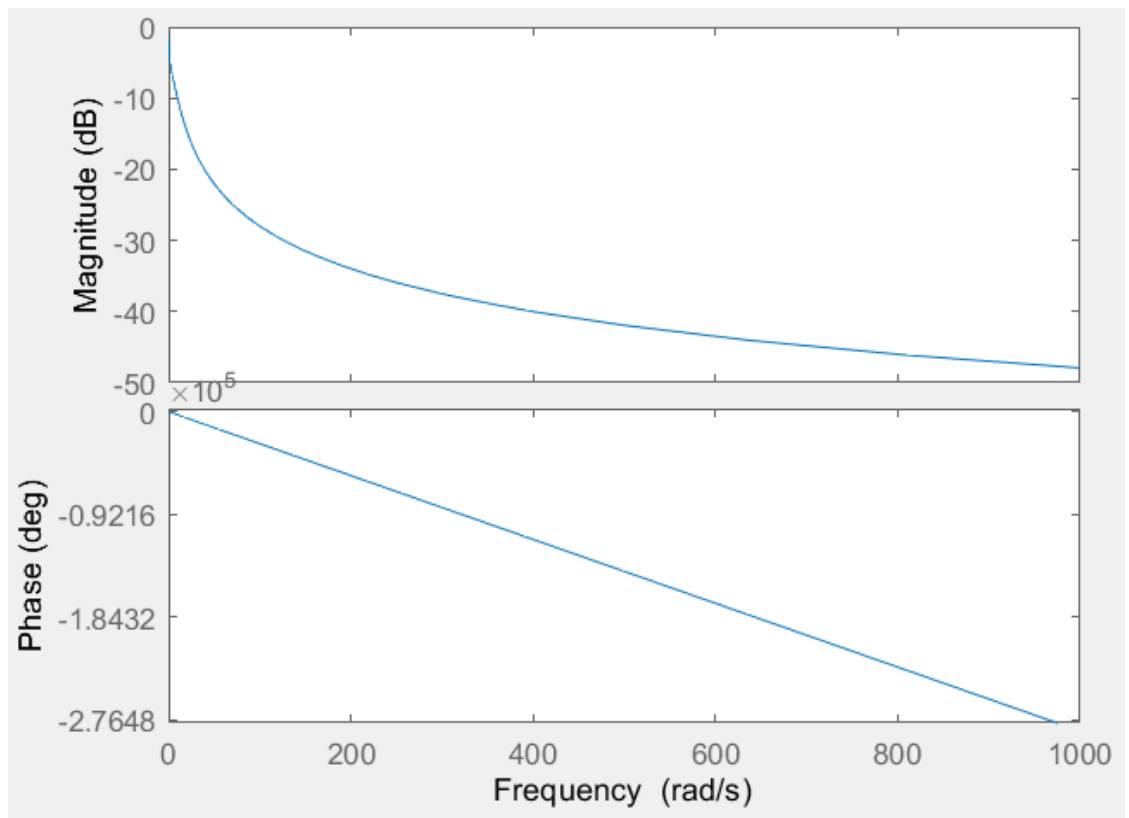
Критическое значение запаздывания = ∞

График:

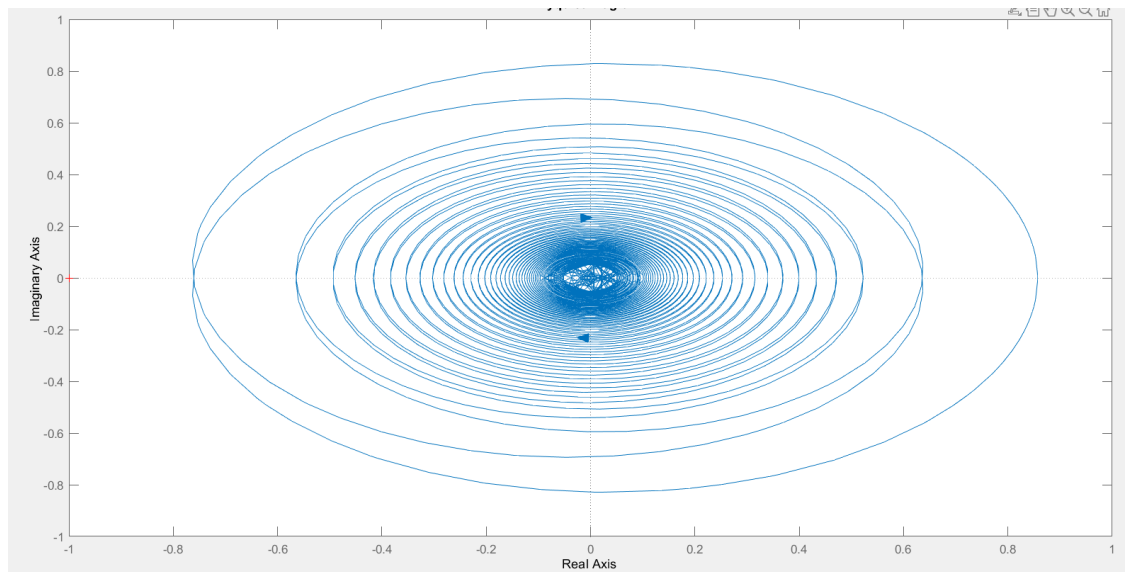


$\tau = 5$

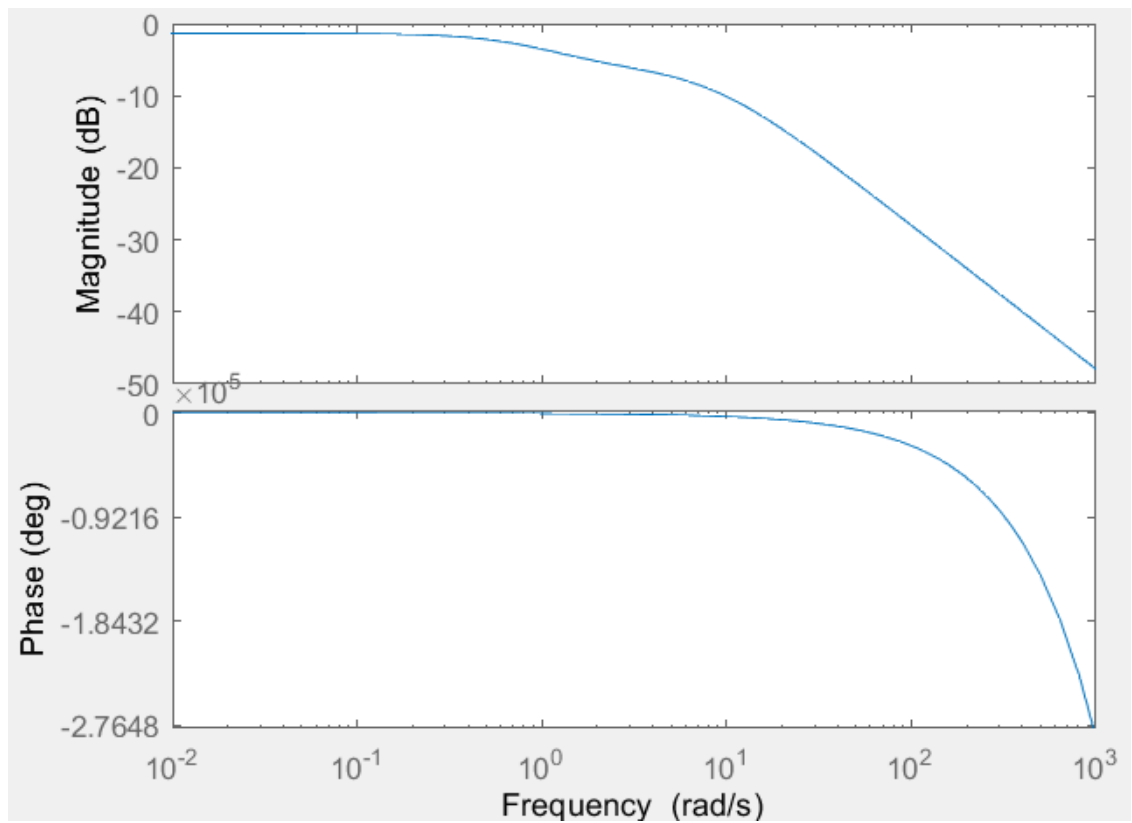
АЧХ и ФЧХ:



ΑΦЧХ:



ЛАФЧХ:



Запас устойчивости по фазе и амплитуде, критическое значение запаздывания:

Field ▲	Value
<input type="checkbox"/> GainMargin	<i>1x43 double</i>
<input type="checkbox"/> GMFrequency	<i>1x43 double</i>
<input type="checkbox"/> PhaseMargin	<i>[]</i>
<input type="checkbox"/> PMFrequency	<i>[]</i>
<input type="checkbox"/> DelayMargin	<i>[]</i>
<input type="checkbox"/> DMFrequency	<i>[]</i>
<input checked="" type="checkbox"/> Stable	1

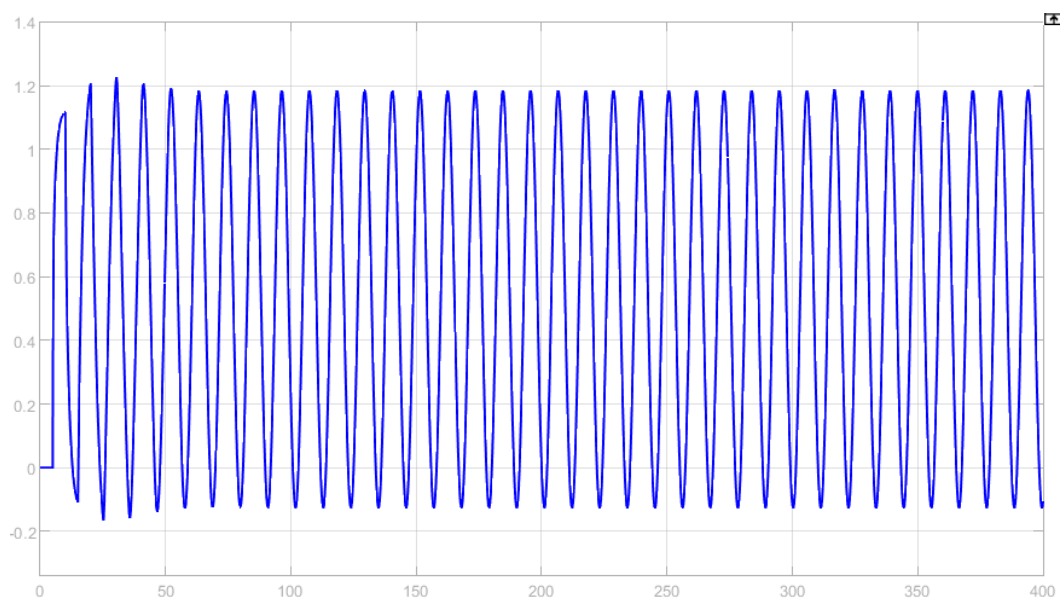
s.GainMargin	
	1
1	1.3116

Запас устойчивости по фазе = ∞

Запас устойчивости по амплитуде = 1.3116

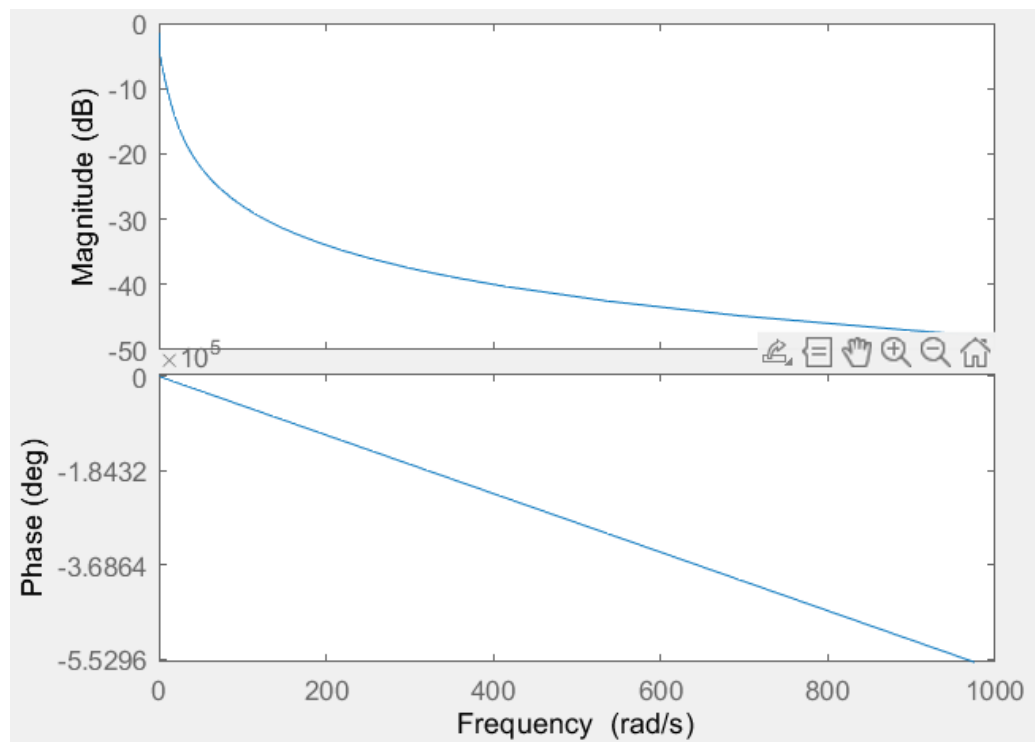
Критическое значение запаздывания = ∞

График:

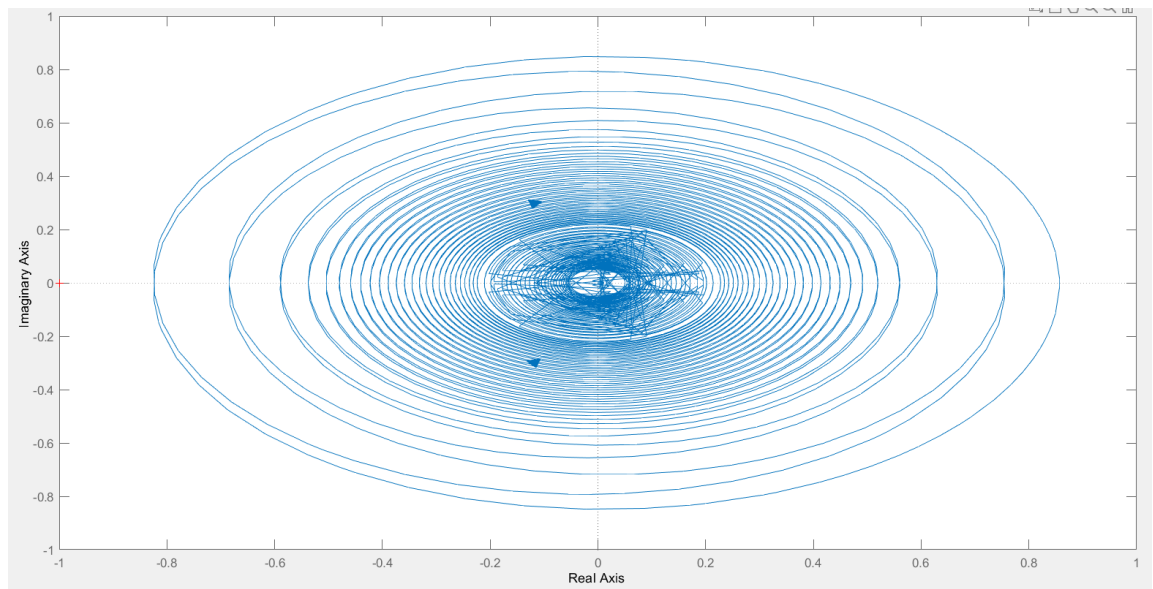


$$\tau = 10$$

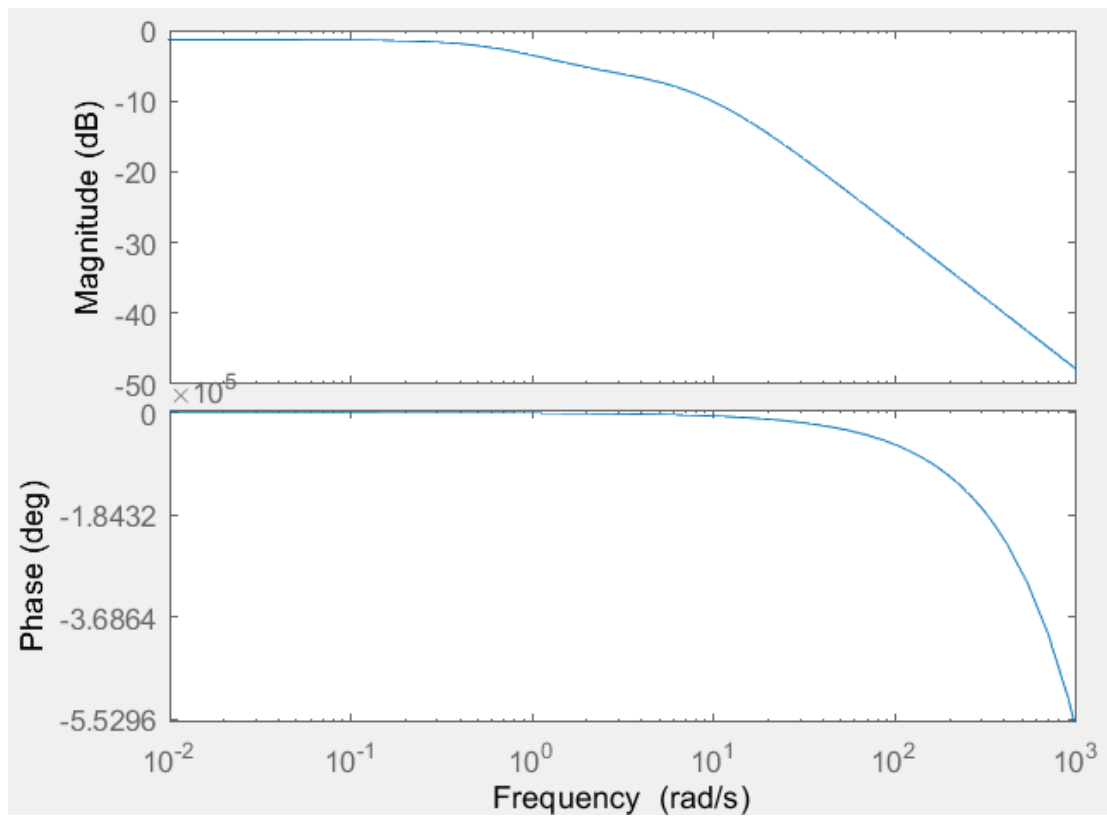
АЧХ и ФЧХ:



АФЧХ:



ЛАФЧХ:



Запас устойчивости по фазе и амплитуде, критическое значение запаздывания:

Field ▲	Value
GainMargin	1x42 double
GMFrequency	1x42 double
PhaseMargin	[]
PMFrequency	[]
DelayMargin	[]
DMFrequency	[]
<input checked="" type="checkbox"/> Stable	1

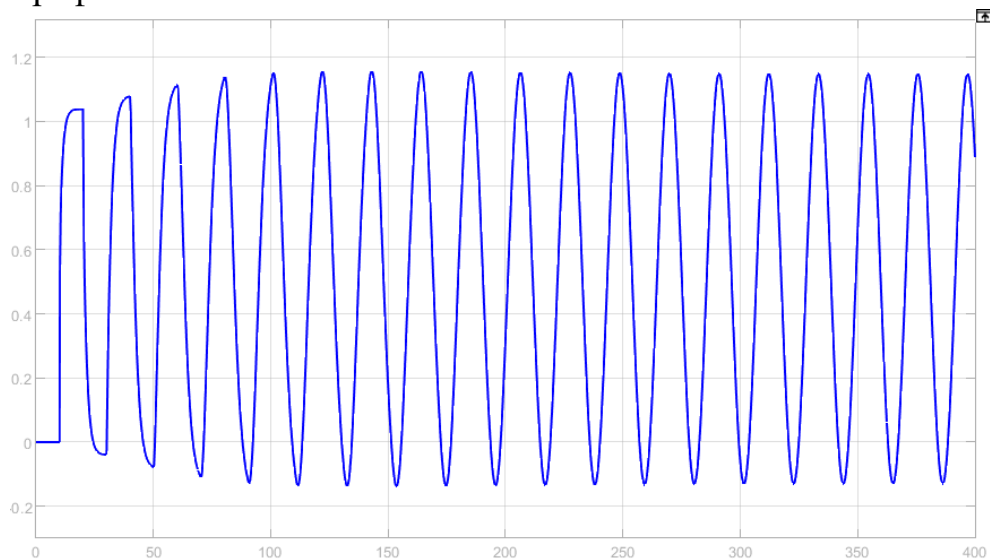
	s.GainMargin
	1
1	1.2115

Запас устойчивости по фазе = ∞

Запас устойчивости по амплитуде = 1.2115

Критическое значение запаздывания = ∞

График:



Выведем аналитически зависимость критического запаздывания от коэффициента усиления для заданной системы:

Амплитуда системы с запаздыванием при критических значениях коэффициента усиления и запаздывания равна единице, получаем:

$$A(\omega) = K * \sqrt{\left(\frac{30\omega^2 + 42}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49}\right)^2 + \left(\frac{4\omega^3 + 26\omega}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49}\right)^2} = 1$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{30\omega^2 + 42}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49}\right)^2 + \left(\frac{4\omega^3 + 26\omega}{\omega^4 + 67\omega^2 + 49}\right)^2}}$$

Input interpretation

solve	$k = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{30w^2+42}{w^4+67w^2+49}\right)^2 + \left(\frac{4w^3+26w}{w^4+67w^2+49}\right)^2}}$	for	w
-------	--	-----	---

Results

Approximate fo

$$w = - \frac{\sqrt{16k^2 - \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293}} - 67}{\sqrt{2}}$$

$$w = \frac{\sqrt{16k^2 - \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293}} - 67}{\sqrt{2}}$$

$$w = - \frac{\sqrt{16k^2 + \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293}} - 67}{\sqrt{2}}$$

$$w = \frac{\sqrt{16k^2 + \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293}} - 67}{\sqrt{2}}$$

Выберем уравнение с положительной w, с максимальным диапазоном решений в области действительных значений. В моем случае это уравнение 4.

$$\tau_{cr} = \frac{\pi + \phi(\omega)}{w}, \quad w = \frac{\pi - \arctg\left(\frac{4\omega^3 + 26\omega}{30\omega^2 + 42}\right)}{\tau_{cr}}$$

Подставим найденную зависимость частоты от коэффициента усиления в уравнение зависимости запаздывания от частоты, чтобы найти аналитическую зависимость запаздывания от коэффициента усиления:

Input interpretation

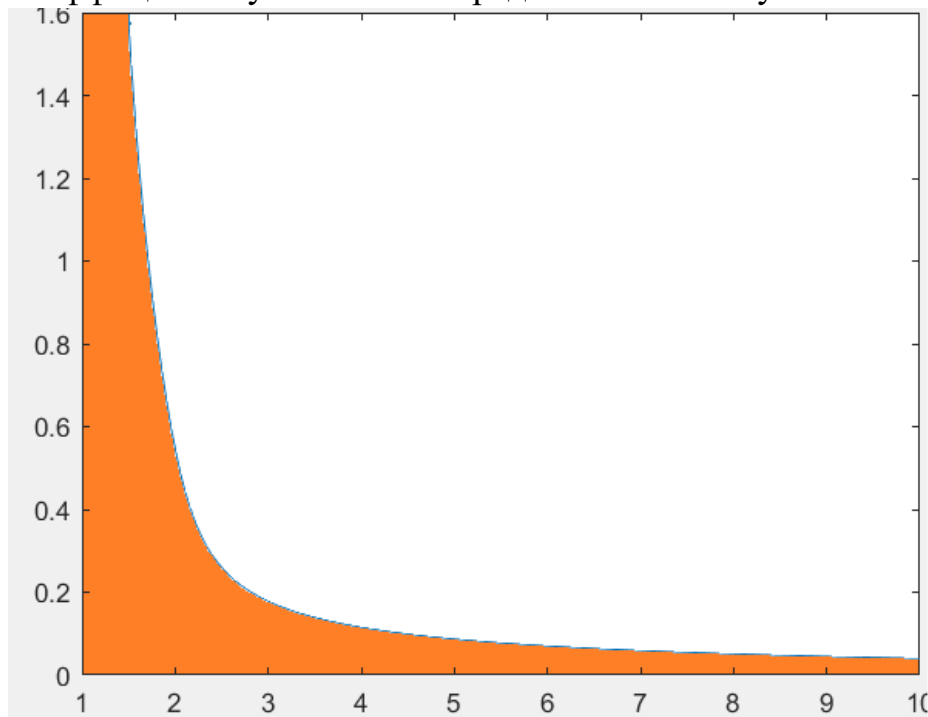
$$t = \frac{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4w^3 + 26w}{30w^2 + 42}\right)}{w} \text{ where } w = \frac{\sqrt{16k^2 + \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293} - 67}}{\sqrt{2}}$$

$\tan^{-1}(x)$

Result

$$t = \left(\sqrt{2} \left(\pi - \tan^{-1} \left(\left(\sqrt{2} \left(16k^2 + \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293} - 67 \right)^{3/2} + \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 13\sqrt{2} \sqrt{16k^2 + \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293} - 67} \right) / \right. \right. \\ \left. \left. \left(15 \left(16k^2 + \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293} - 67 \right) + 42 \right) \right) \right) \right) / \\ \left(\sqrt{16k^2 + \sqrt{256k^4 - 2000k^2 + 4293} - 67} \right)$$

Построим график зависимости критического запаздывания от коэффициента усиления и определить область устойчивости:



Вывод: В ходе выполнения данной работы был произведен анализ устойчивости замкнутых линейных систем с запаздыванием. Были найдены критические значения запаздывания и коэффициента усиления при различных значениях τ и K . Помимо этого, была получена зависимость критического запаздывания от коэффициента усиления, найдена область устойчивости.