Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Отчет по лабораторной работе №1

«Устойчивость линейных систем»

по дисциплине «Моделирование динамических систем»

Вариант 1

Выполнили: студенты гр. R33423

Кулижников Е., Евстигнеев Д., Троицкий М.,

Сорокин Д., Матасова Л.

Преподаватель: Семенов Д.М.

Санкт-Петербург

2022

Задание 1.

Дано: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Найти: «Вход-выход», передаточную функцию

Решение:

Для начала определим характеристический многочлен матрицы A:

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 3$$

Основываясь на полученном многочлене $a(\lambda)$ и системе многочленов, получим следующее:

$$a(1)(A) = A^2 + 3A + 4I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a(2)(A) = A^2 + 3I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$a(3)(A) = I$$

$$Ca(1)(A)B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$Ca(2)(A)B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 4$$

$$Ca(3)(A)B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

Получаем уравнение в функциональной форме «вход-выход»

$$\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + 3 = 3\ddot{u} + 4\dot{u} + 2u$$

Теперь найдем передаточную функцию исследуемой системы, основываясь на модели«вход-выход»:

$$W(\lambda) = \frac{3\lambda^2 + 4\lambda + 2}{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 3}$$

Аналогично можно найти передаточную функцию исходной системы в пространстве состояний:

$$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 3} \begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 2 & x+1 & -1 \\ -1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 & -\lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda + 2 & \lambda^2 + 2x + 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\lambda^2 + 2x + 1}{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 3}$$

Задание 2.

Дано: $\dddot{y} - 4\ddot{y} + 6\dot{y} - 6y = 2\dot{u} + u$

Найти: Переход от функциональной модели непрерывной системы в форме «вход-выход» к канонической модели в пространстве состояний

Решение:

Введем переменные состояния:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y} - 4y$$

$$x_3 = \ddot{y} - 4\dot{y} + 6y - 2u$$

Дифференцируем полученные уравнения:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 + 4y = x_2 + 4x_1$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} - 4\dot{y} = x_3 - 6y + 2u = x_3 - 6x_1 + 2u$$

$$\dot{x}_3 = \dddot{y} - 4\ddot{y} + 6\dot{y} - 2\dot{u} = 6y + u = 6x_1 + u$$

Перейдем к матричной форме:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx,$$

где $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Задание 3.

Дано: $\dot{x} = Ax + Bu\ A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Найти: Промоделировать данную систему в среде Matlab без управления. Вывести графики каждой переменной в зависимости от времени. Найти собственные числа матрицы А, убедиться в неустойчивости данной системы. Найти границу коэффициента усиления k^* такую, что при любых $k < k^*$ регулятор вида $u = kx$ будет обеспечивать асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Найти собственные числа матрицы замкнутой системы и построить графики решения.

Решение:

Найдем собственные числа матрицы А:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1-\lambda & -3 & -4 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda + 3$$

$$= (-\lambda - 1) * \left(\lambda - \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) * \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \approx 3.791$$

$$\lambda_3 = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \approx -0.791$$

Отсюда $k^* = -\max(1, 3.791, -0.791) = -3.791$

Тогда собственные числа замкнутой системы при $k = k^* - 1 = -4.791 < k^*$ *будут равны:*

$$\widetilde{\lambda_1} = -3.791$$

$$\widetilde{\lambda_2} = -1$$

$$\widetilde{\lambda_3} = -4.582$$

Теперь промоделируем систему в MATLAB:

```
[t,y] = ode45(@func, [0,8], [10,4,-2]);
plot(t, y(:, 1), '-*'); hold on;
plot(t, y(:, 2), '-'); hold on;
plot(t, y(:, 3), '-o'); hold on;
grid on;
xlabel('Время, с');
ylabel('Переменная состояния');
```

```
function dxdt = func(t, x)
    dx(1) = -1 * x(1) - 3 * x(2) - 4 * x(3) - 4.791 * x(1);
    dx(2) = 0 * x(1) + 2 * x(2) - 5 * x(3) - 4.791 * x(2);
    dx(3) = 0 * x(1) - 1 * x(2) + 1 * x(3) - 4.791 * x(3);
    dxdt = [dx(1); dx(2); dx(3)];
end
```

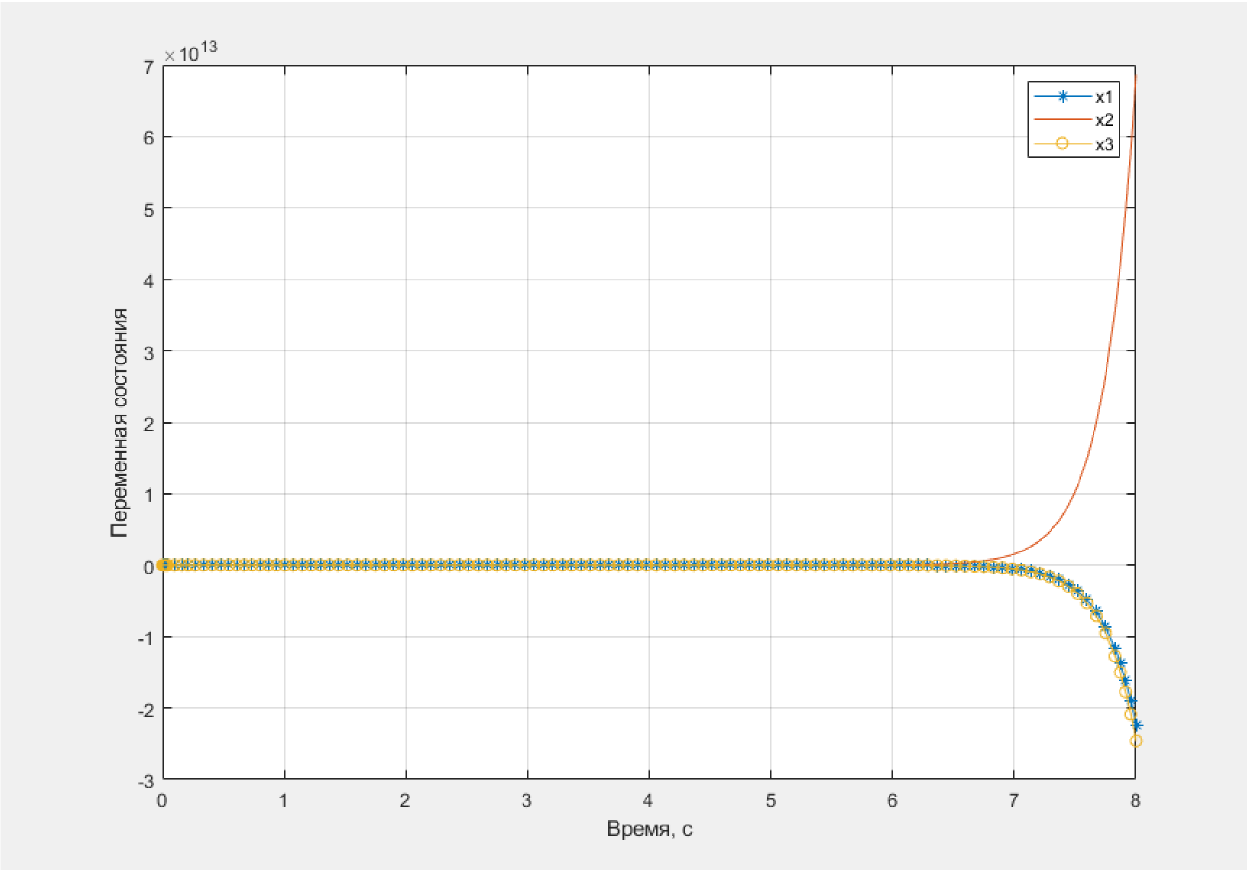

Рисунок 1. Динамика исследуемой системы без управления

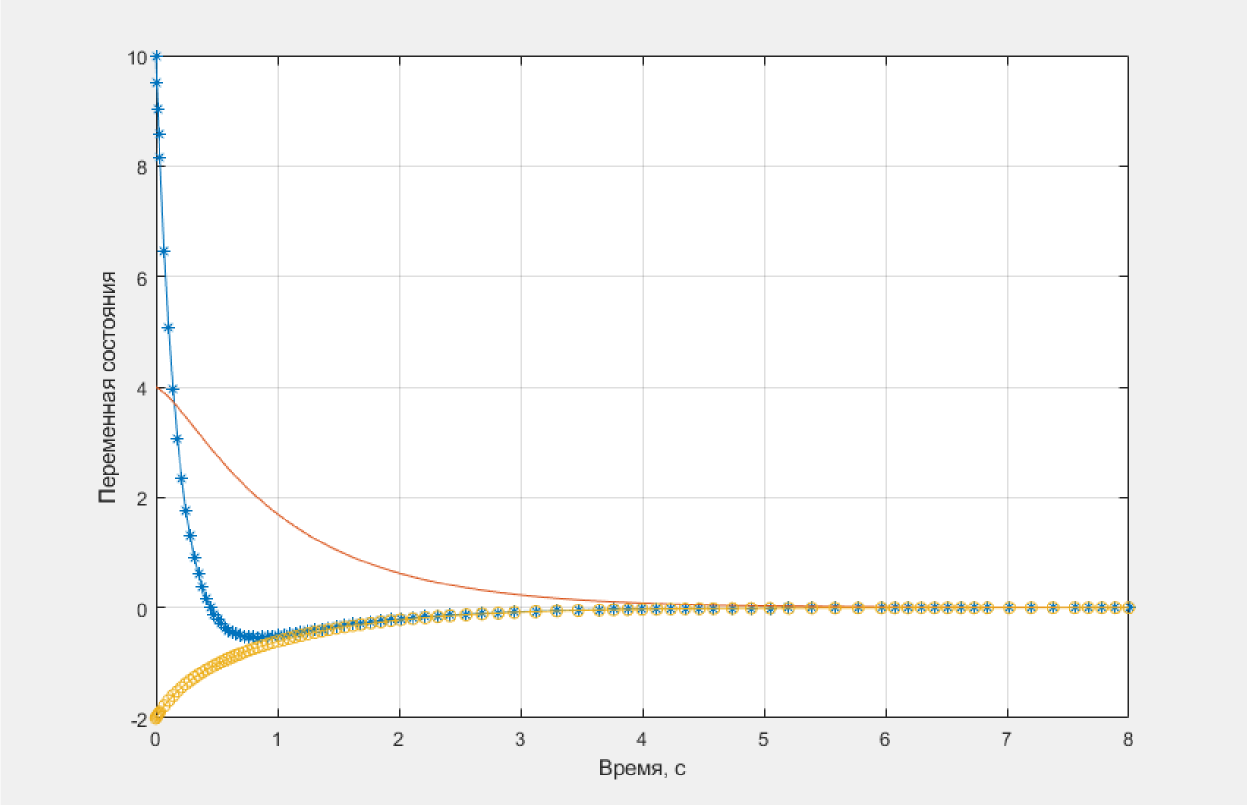

Рисунок 2. Динамика исследуемой системы без управления

Вывод: В ходе выполнения практической работы мы выполнили взаимный переход между формами записи систем «вход-выход» и «вход-состояние-выход», выполнили моделирование динамической системы с управлением и без (разомкнутая и замкнутая линейным регулятором система), а также рассчитан критический коэффициент k^*.