УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Национальный исследовательский университет ИТМО
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина: Теория автоматического управления

Отчет по лабораторной работе №2.

«Канонические формы представления динамических систем»

Вариант 20

Студент:
Евстигнеев Д.М.
Группа: *R33423*
Преподаватель:
Парамонов А.В.

Санкт-Петербург
2021

Цель.

Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

Данные.

20	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Вариант	17	18	19	20
m_{11}	3	1	1,5	7
m_{12}	1	2	0	0
m_{21}	0	0	1	2
m_{22}	2	3	9	2,5

№	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20	3	1	7	7	9	9

Коэффициенты: a_1=3 a_2=1 a_3=7 b_0=7 b_1=9 b_2=9

Линейная модель вход-выход одноканальной стационарной динамической системы, представленная обыкновенным дифференциальным уравнением

вида: $\dddot{y} + 3\ddot{y} + 1\dot{y} + 7y = 7\ddot{u} + 9\dot{u} + 9u$

Каноническая управляемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Каноническая наблюдаемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Передаточная функция: W(p)= $\frac{7p^2+9p+9}{p^3+3p^2+1p+7}$

Матрица J в Жордановой нормальной форме: J=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Матрица V имеет вид: V=$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Вычислим матрицы $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$:

$$\widehat{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{C} = CV =$$

$$[7 \quad 9 \quad 9] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & \frac{35}{4} \end{bmatrix}$$

Жорданова форма для данной системы имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 8 & \frac{35}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

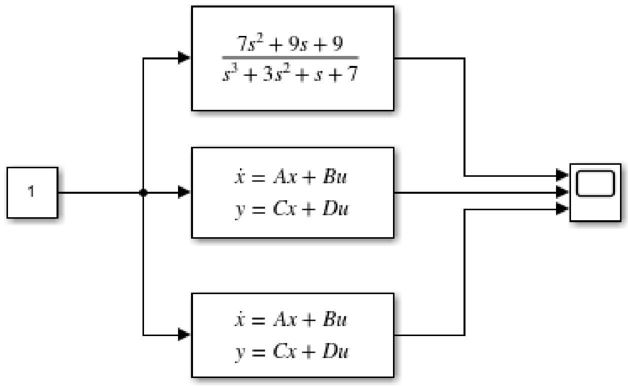

рис. 1. Модель симуляции

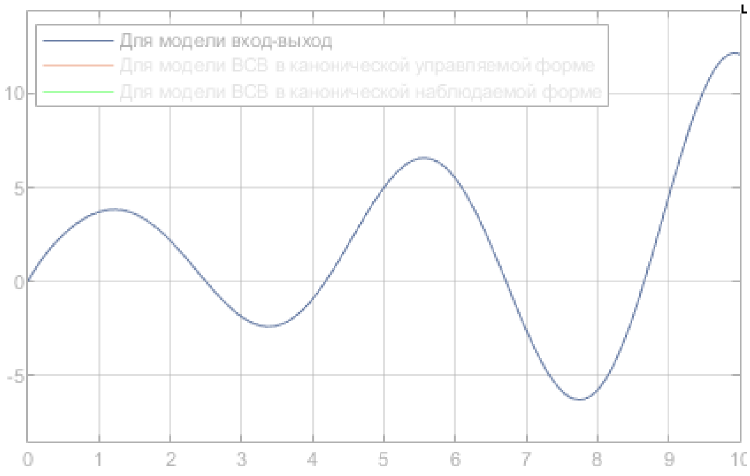

рис. 2. Снятые показания симуляции

2. Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (5 \quad 1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x_2} = -7x_1 - 9x_2 + u_1 \\ y_1 = 5x_1 + x_2 \end{cases}$$

Переход к модели вход-выход через передаточную функцию:

W(p)=C(pI-A)$^{-1}$B

$$W(p) = [5 \quad 1] \left[\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -9 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [10 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{p+9}{p^2+9p+14} & \frac{-14}{-7p^2-63p-98} \\ \frac{7}{-p^2-9p-14} & \frac{p}{p^2+9p+14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{140}{-98 - 63\,p - 7\,p^2} + \frac{p}{14 + 9\,p + p^2} = \frac{20+p}{p^2+9p+14}$$

Модель в форме вход-выход:

$$\ddot{y} + 9\dot{y} + 14y = 1\dot{u} + 20u$$

Каноническая управляемая форма:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -14 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Каноническая наблюдаемая форма:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -14\\ 1 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 20\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

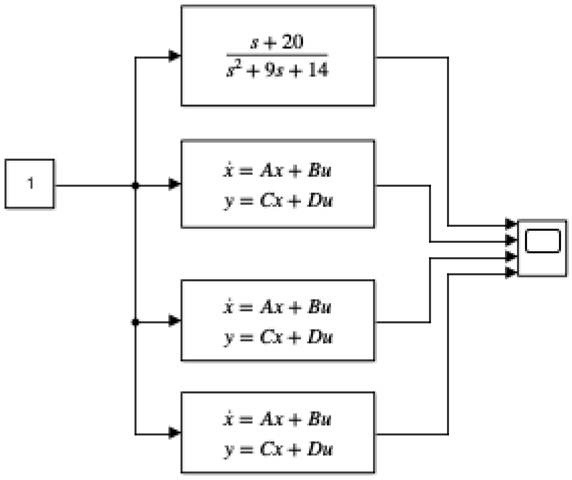

рис. 3. Модель симуляции

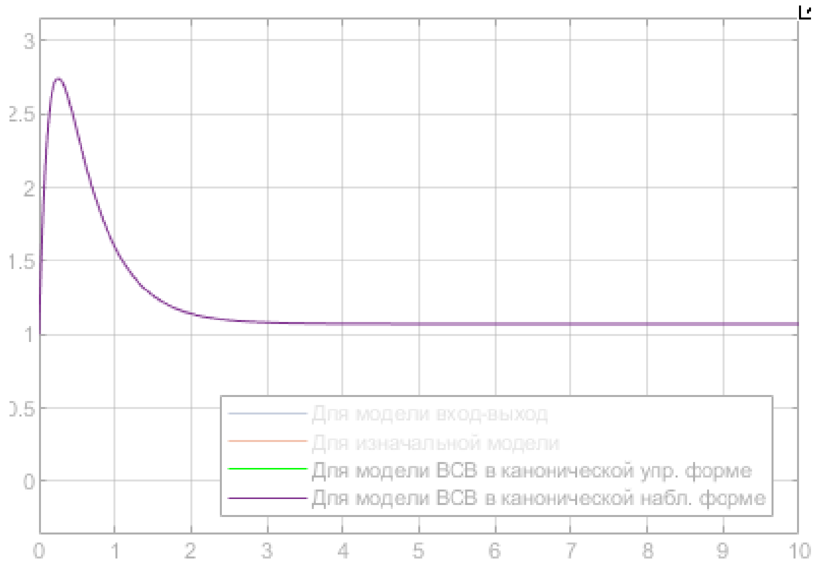

рис. 4. Снятые показания

<u>Рассчет передаточной матрицы многоканальной системы:</u>

20	$\begin{matrix}0 & -7\\ 1 & -9\end{matrix}$	$\begin{matrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{matrix}$	$\begin{matrix}4 & 6\\ 7 & 1\end{matrix}$

$$A = \begin{pmatrix}0 & -7\\ 1 & -9\end{pmatrix} B = \begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}4 & 7\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

W(p)=C(pI-A)$^{-1}$B

$$W(p) = \begin{bmatrix}4 & 7\\ 6 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & -7\\ 1 & -9\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}4 & 7\\ 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{p+9}{p^2+9p+7} & \dfrac{-7}{p^2+9p+7}\\ \dfrac{-1}{-(p^2+9p+7)} & \dfrac{p}{p^2+9p+7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\dfrac{19p+101}{p^2+9p+7} & \dfrac{-7(-8-27)}{p^2+9p+7}\\ \dfrac{19p+123}{p^2+9p+7} & \dfrac{46p+217}{p^2+9p+7}\end{bmatrix}$$

Рассчет матриц преобразования исходной модели к каноническим формам:

$$N_y = B \vdots AB = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}1 & 2\\-7 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & -9\end{bmatrix}$$

$$\widehat{N}_y = \hat{B} \vdots \hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix}0 & 1\\-14 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -9\end{bmatrix}$$

$M = N_y \times \widehat{N}_y^{-1}$-матрица преобразованная в каноническую управляемую.

$$M = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -9\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$M = N_N^{-1} \times \widetilde{N_N}$-матрица преобразованная в каноническую наблюдаемую.

$N_N = \begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 1\\14 & 17\end{bmatrix}$ $\widetilde{N_N} = \begin{bmatrix}\tilde{C}\\\tilde{C}\tilde{A}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix}5 & 1\\14 & 17\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{17}{71} & \frac{-1}{71}\\\frac{-14}{71} & \frac{5}{71}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-1}{71} & \frac{19}{71}\\\frac{5}{71} & \frac{-24}{71}\end{bmatrix}$$

3. Замена базиса в пространстве состояний

Матрица преобразования координат: $M = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 2.5 \end{bmatrix}$

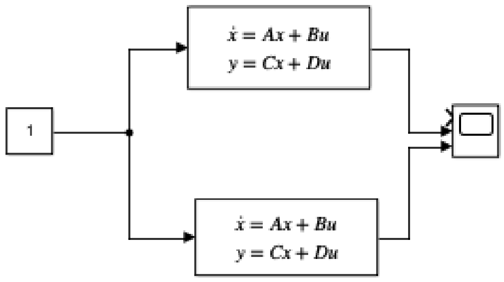

рис. 5. Модель симуляции

$$\hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{4}{35} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{982}{35} & -\frac{67}{7} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{4}{35} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CM = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 2.5 \end{bmatrix}$$

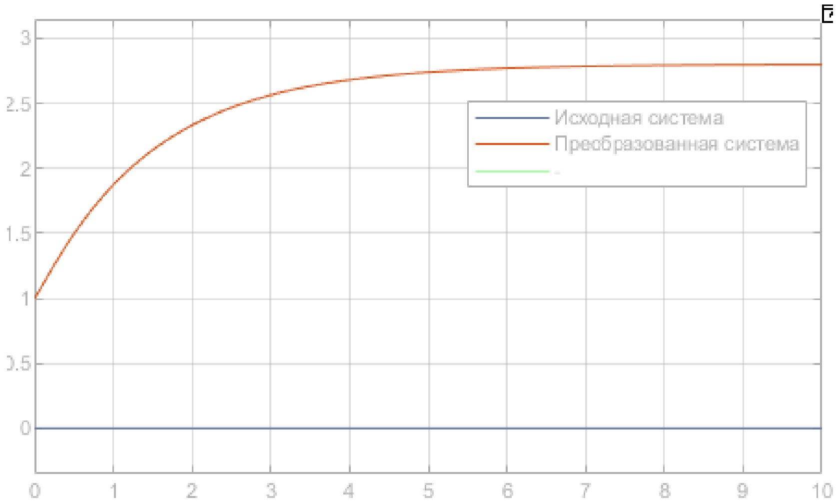

рис. 6. Графики нач. и преобр. системы

Вывод: В данной работе мы познакомились с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход. Наглядно продемонстрировали возможность перехода между моделями ВВ и ВСВ динамических систем. Также были получены дополнительные навыки работы с пакетом Simulink.