Национальный исследовательский университет ИТМО
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина: Нелинейные системы управления
Отчет по выполнению задания №1.

Студент:
Евстигнеев Д.М.
Группа: *R34423*
Преподаватель:
Зименко К.А.

Санкт-Петербург
2022

Задача: для каждой системы найти все точки равновесия и определить тип каждого изолированного состояния. Численно построить фазовый портрет и сравнить с полученными результатами.

Дано:

1) $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 - x_2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 x_1 \\ \dot{x_2} = -x_2 + x_2^2 + x_2 x_1 - x_1^3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + x_2 - x_1^2 x_2 + 0.1 x_1^4 x_2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x_1} = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x_2} = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2^3 \end{cases}$

Выполнение:

№1.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

Найдем точки равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 2x_2^3 + x_2 = 0 \\ \dot{x_2} = -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа через Якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_1}}{x_2} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_2}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

подставим значения v в J

$$J_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4.828$$

$$\lambda_2 = -0.828$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 4.828$$

$$\lambda_2 = -0.828$$

Значит:

Положение v_0 − устойчивый фокус , $v_{1,2}$ − седло

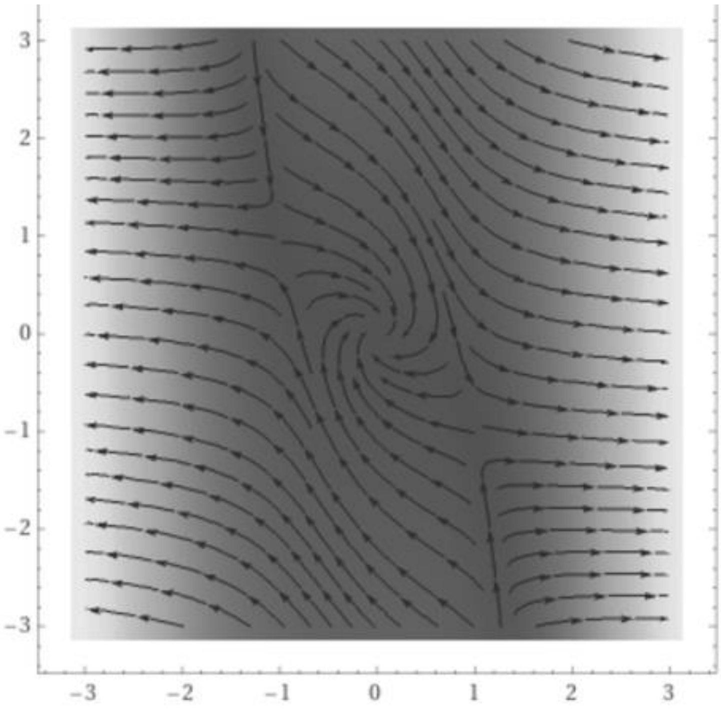

Рисунок 1 – Фазовый портрет

№2.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 x_1 \\ \dot{x_2} = -x_2 + x_2^2 + \ x_2 x_1 - x_1^3 \end{cases}$$

Найдем точки равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 x_1 = 0 \\ \dot{x_2} = -x_2 + x_2^2 + \ x_2 x_1 - x_1^3 = 0 \end{cases}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа через Якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{x_1}}{x_1} & \dfrac{\partial \dot{x_1}}{x_2} \\ \dfrac{\partial \dot{x_2}}{x_1} & \dfrac{\partial \dot{x_2}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ x_2 - 3x_1^2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

подставим полученные *v* в *J*

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \ 2$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} - 1 \pm 1.732i$$

Значит:

Положение v_2 – устойчивый фокус , v_1 – неустойчивый узел, v_0 – седло,

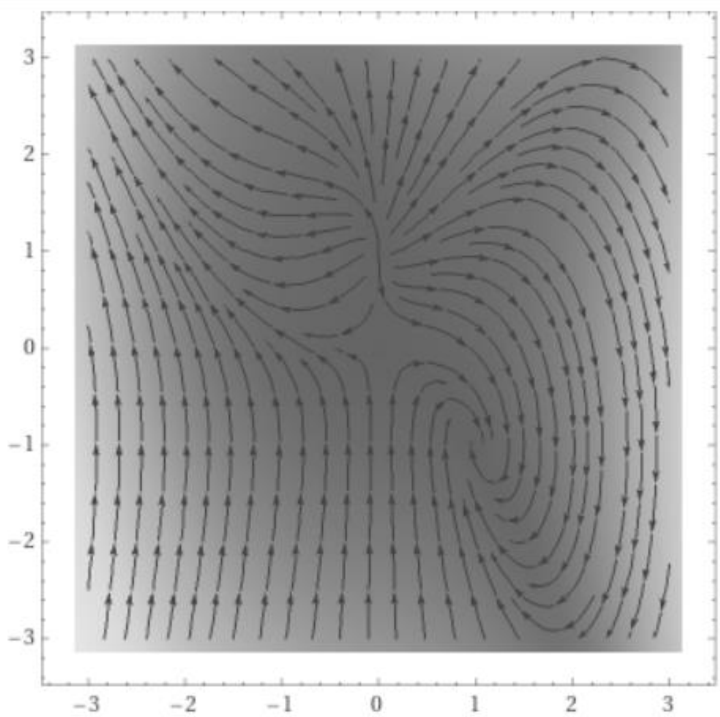

Рисунок 2 – Фазовый портрет

№3.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + x_2 - x_1^2 x_2 + 0.1 x_1^4 x_2 \end{cases}$$

Найдем точки равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_2 = 0 \\ \dot{x_2} = -x_1 + x_2 - x_1^2 x_2 + 0.1 x_1^4 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа через Якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_1}}{x_2} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_2}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 - 2x_2 x_1 + 0.4 x_1^3 x_2 & 1 - x_1^2 + 0.1 x_{,1}^4 \end{bmatrix}$$

подставим значение v в J

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.618, \lambda_2 = 1.618$$

Значит:

Положение v_0 – седло

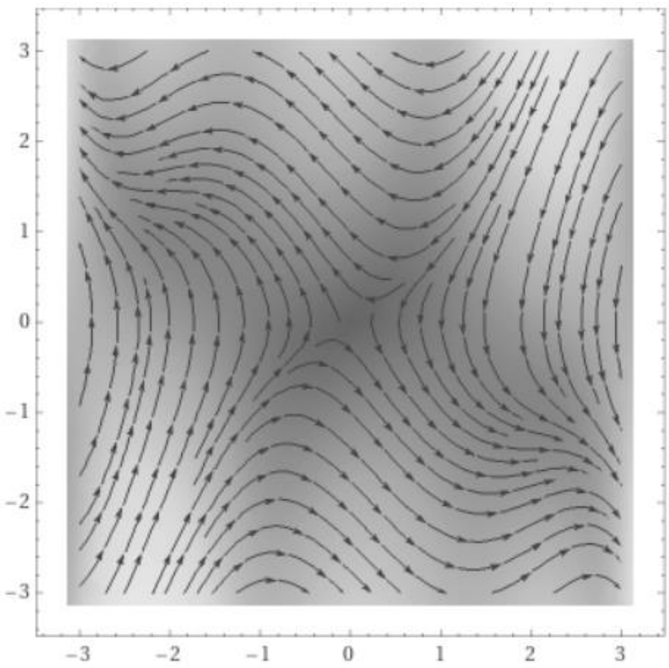

Рисунок 3 – Фазовый портрет

№4.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = (x_1 - x_2)(1 - \ x_1^2 - x_2^2 \ ) \\ \dot{x_2} = (x_1 + x_2)(1 - \ x_1^2 - x_2^2 \ ) \end{cases}$$

Найдем точки равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = (x_1 - x_2)(1 - \ x_1^2 - x_2^2 \ ) = 0 \\ \dot{x_2} = (x_1 + x_2)(1 - \ x_1^2 - x_2^2 \ ) = 0 \end{cases}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа через Якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_1}}{x_2} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_2}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \ x_1^2 - x_2^2 - 2x_1(x_1 - x_2) & -1 + \ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2(x_1 - x_2) \\ 1 - \ x_1^2 - x_2^2 - 2x_1(x_1 + x_2) & 1 - \ x_1^2 - x_2^2 - 2x_2(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

подставим значения v в J

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3.237$$

$$\lambda_2 = \ 1.236$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3.237$$

$$\lambda_2 = \ 1.236$$

Значит:

Положение v_0 − неустойчивый фокус, $v_{1,2}$ − седло

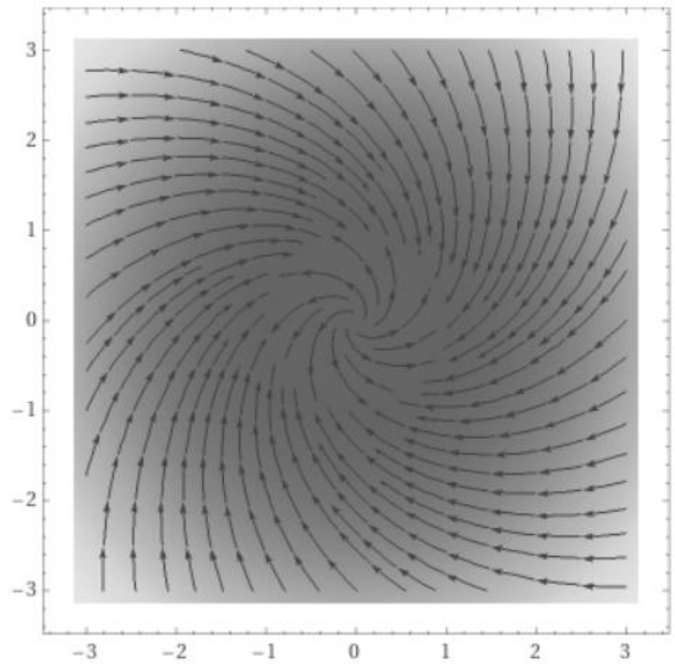

Рисунок 4 – Фазовый портрет

№5.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2^3 \end{cases}$$

Найдем точки равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1^3 + x_2 = 0 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа через Якобиан:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x_1}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_1}}{x_2} \\ \frac{\partial \dot{x_2}}{x_1} & \frac{\partial \dot{x_2}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ 1 & 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -2$$

Значит:

Положение $v_{1,2}$ – устойчивый узел, v_0 – седло

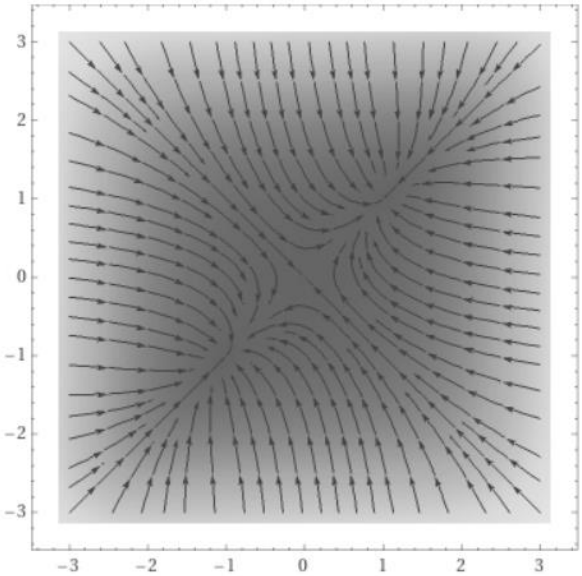

Рисунок 5 – Фазовый портрет

Вывод:

В ходе выполнения данной работы, для каждой системы нашли все точки равновесия и определили тип каждого изолированного состояния