Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет

по Лабораторной работе №11

«Синтез системы управления с помощью метода внутренней (встроенной) модели на безе уравнений Франкиса-Дэвисона»

по дисциплине «**Теория автоматического управления**»

Вариант №6

Авторы: Кулижников Е.Б.

Евстигнеев Д.М.

Факультет: СУиР

Группа: R33423

Преподаватель: Парамонов А.В.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург, 2021

Цель работы:

Освоение управления линейными объектами с помощью метода внутренней модели на базе уравнений Франкиса-Дэвисона (комбинированный регулятор, регулятор с прямыми связями).

Исходные данные:

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ \ C = [6 \quad 0]; D = -1; x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

№	B_f	λ_1^* λ_2^*	$g(t)$	$f(t)$	$t_{пн}$,с	σ_H,%	Наблюдатель возмущения по входу	Наблюдатель возмущения по выходу
6	$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$	−10 −7	$3\cos 4t$	$5\sin(2t+3)$	1,1	6	редуцированный	расширенный

Ход работы:

1. Задача слежения

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

1.1. Проверка объекта управления на свойство полной управляемости:

$$N_y = [B \vdots AB] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$rang(N_y) = 2 \rightarrow$ выполняется условие полной управляемости

1.2. Формирование модели задающего воздействия $g(t)$ на основе метода последовательного дифференцирования в виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_g = \Gamma_g \xi_g \\ g = H_g \xi_g \end{cases}, \qquad \xi_g(0) = \xi_{g0}$$

$$z_1 = g(t) = 3cos4t$$

$$\dot{z_1} = z_2 = -12sin4t$$

$$\dot{z_2} = -48cos4t = -16z_1$$

$$\Gamma_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 0 \end{bmatrix};\ H_g = [1 \quad 0];\ \xi_g(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.3.Конструирование эталонной модели по желаемым корням λ_1^*, λ_2^*:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma\xi \\ v = H\xi \end{cases}$$

$\lambda_1^* = -10; \lambda_2^* = -7$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix};\ H = [1 \quad 1]$$

1.4. Нахождение матрицы M и матрицы линейных стационарных обратных связей K из уравнений:

$$\begin{cases} BH = M\Gamma - AM \\ K = -HM^{-1} \end{cases}$$

Вычисления в MatLab:

```
>> M

M =

   -0.0833   -0.1250
   -0.1250   -0.1250

>> K

K =

     0     8
```

1.5. Вычисление матрицы M_g и матрицы прямых связей L_g на основе уравнения типа Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} BL_g = M_g\Gamma_g - (A - BK)M_g \\ H_g = (C - DK)M_g + DL_g \end{cases}$$

Вычисления в MatLab:

```
Mg =

    0.0829    0.0101
    0.2120    0.0162


Lg =

    1.1934    0.1902
```

Найдем модель ошибок слежения:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = Ae(t) - Bu(t) + BL_g\xi_g(t) \\ \varepsilon(t) = Ce(t) - Du(t) + DL_g\xi_g(t) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dot{e}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} e(t) - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1.1934 & 0.1902 \\ 2.3868 & 0.3804 \end{bmatrix} \xi_g(t) \\ \varepsilon(t) = [6 \quad 0]e(t) + u(t) + [-1.1934 \quad -0.1902]\xi_g(t) \end{cases}$$

1.6. Вычисление собственных чисел матрицы замкнутой системы и сравнение их с корнями требуемого характеристического полинома.

$\lambda_1^* = -10; \lambda_2^* = -7$ – желаемые корни

Вычисления в MatLab:

```
>> F = A-B*K

F =

    -1     -6
     9    -16

>> eig(F)

ans =

    -7
   -10
```

1.7. Для наблюдателя состояния сигнала построим матрицу $\bar{G}$, на основе требуемых показателей качества $t_{пн} = 1.1$ и $\sigma_H = 6\%$

Желаемое перерегулирование не нулевое, поэтому воспользуемся полиномом Батерворта второго порядка:

$a(s) = s^2 + 1.414\omega s + \omega^2$, где $\omega = \frac{t_{пн}^*}{t_{пн}} = \frac{2.9}{1.1} = 2.64$

$a(s) = s^2 + 3.73s + 6.97$

$\bar{G} = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6.97 \\ 1 & -3.73 \end{bmatrix}$

1.8. При синтезе наблюдателя состояния сигнала задания решается матричное уравнение типа Сильвестра:

$$\bar{M}_g \Gamma_g - \bar{G} M_g = \bar{L} H_g$$

Где $\bar{L}$ матрица входа модели, которая определяется из условия полной управляемости пары $(\bar{G}, \bar{L})$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow N_y = [\bar{L} \vdots \bar{G}\bar{L}] = \begin{bmatrix} 0 & -6.97 \\ 1 & -3.73 \end{bmatrix}$$

$rang(N_y) = 2 \rightarrow$ пара $(\bar{G}, \bar{L})$ полностью управляема

Вычисления в MatLab:

```
>> M_sh = sylvester(-G_sh,Gg,L_sh*Hg)

M_sh =

    0.2069    0.0855
    0.1962   -0.0297
```

1.9. Вычисление корней характеристического полинома матрицы $\bar{G}$ и сравнение их с корнями требуемого характеристического полинома

Все вычисления произведем в MatLab:

```
>> eig(G_sh)

ans =

  -1.8650 + 1.8686i
  -1.8650 - 1.8686i

>> syms s
>> solve(s^2+3.73*s+6.97==0);
>> double(ans)

ans =

  -1.8650 - 1.8686i
  -1.8650 + 1.8686i
```

1.10. Произведем моделирование системы слежения:

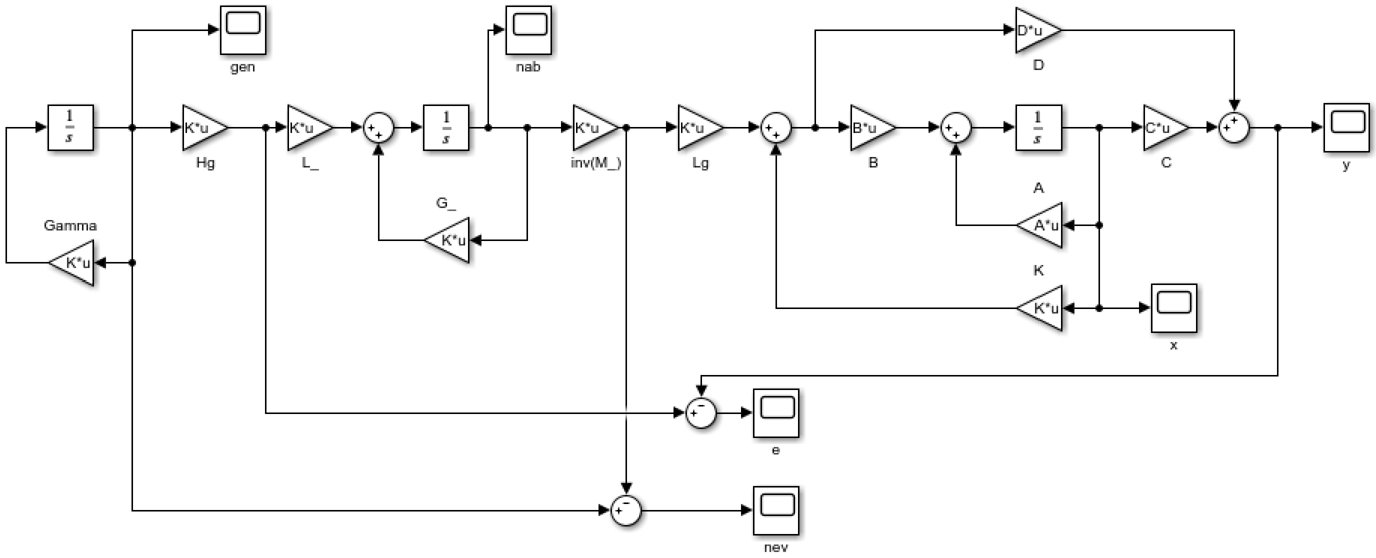

Рис. 1 Схема моделирование системы слежения

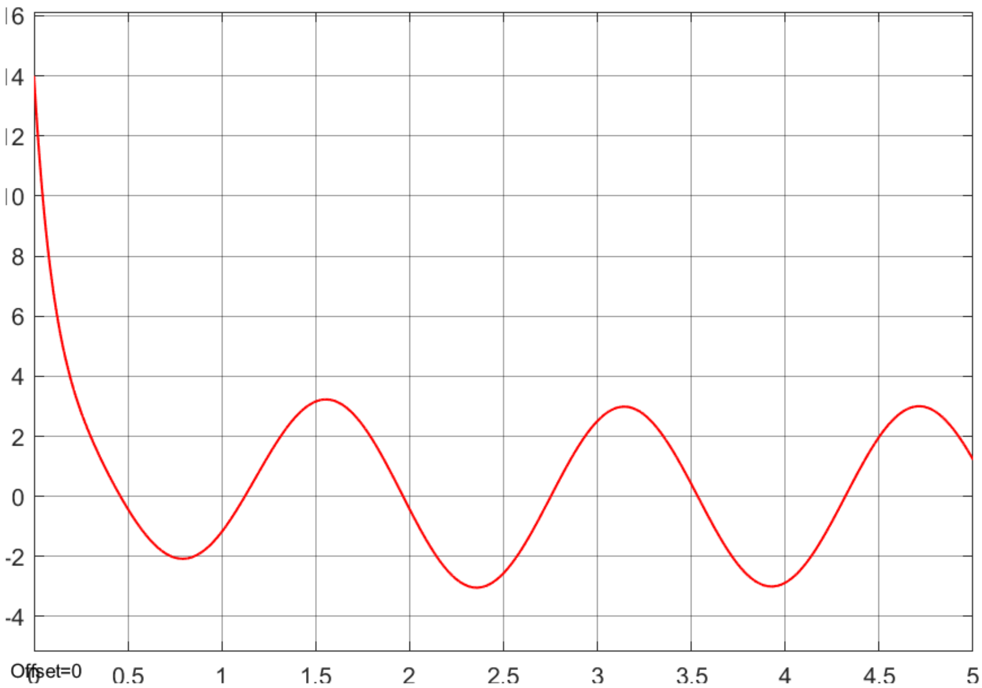

Рис. 2 График выходного сигнала

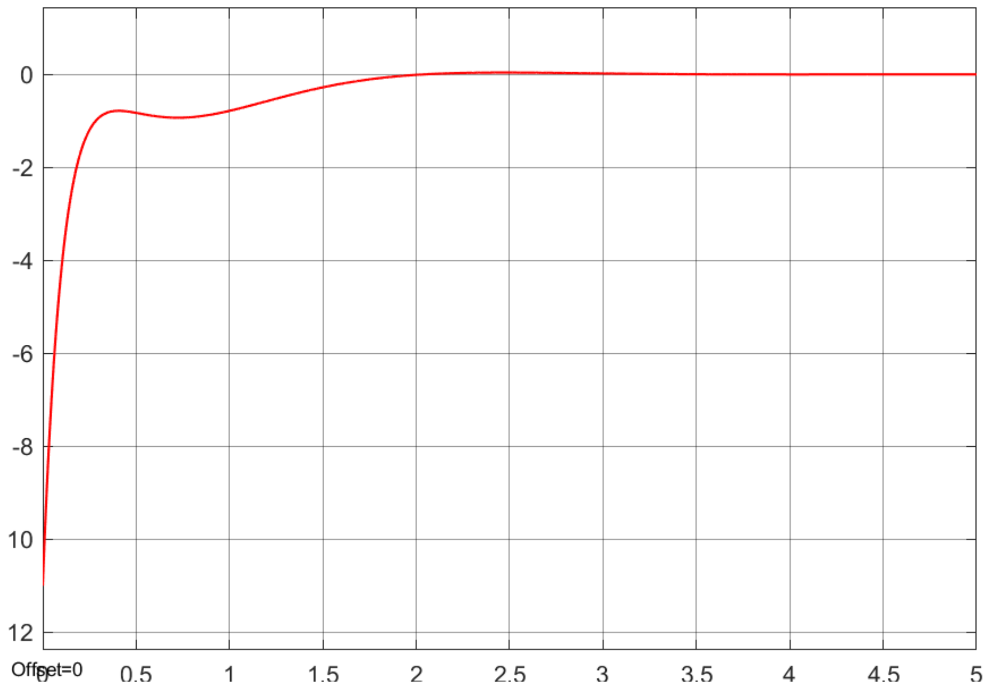

Рис. 3 График ошибки слежения

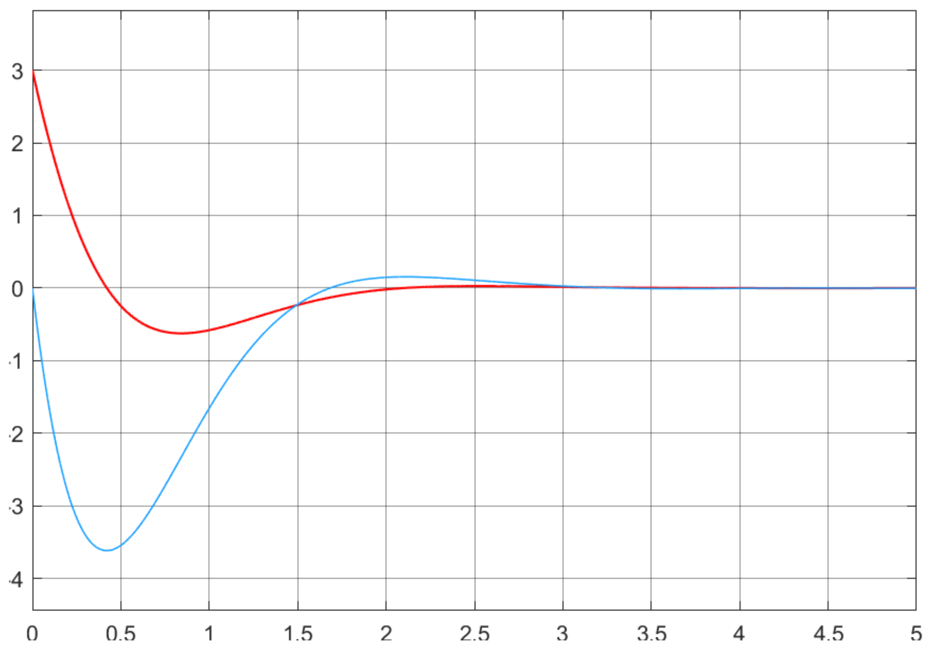

Рис. 4 График невязки

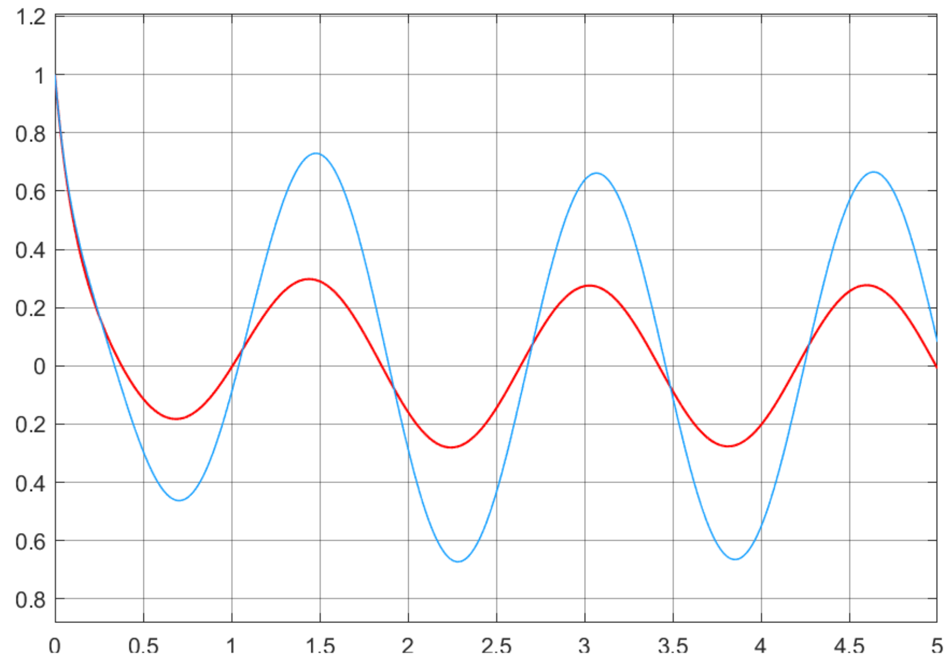

Рис. 5 График состояния объекта управления

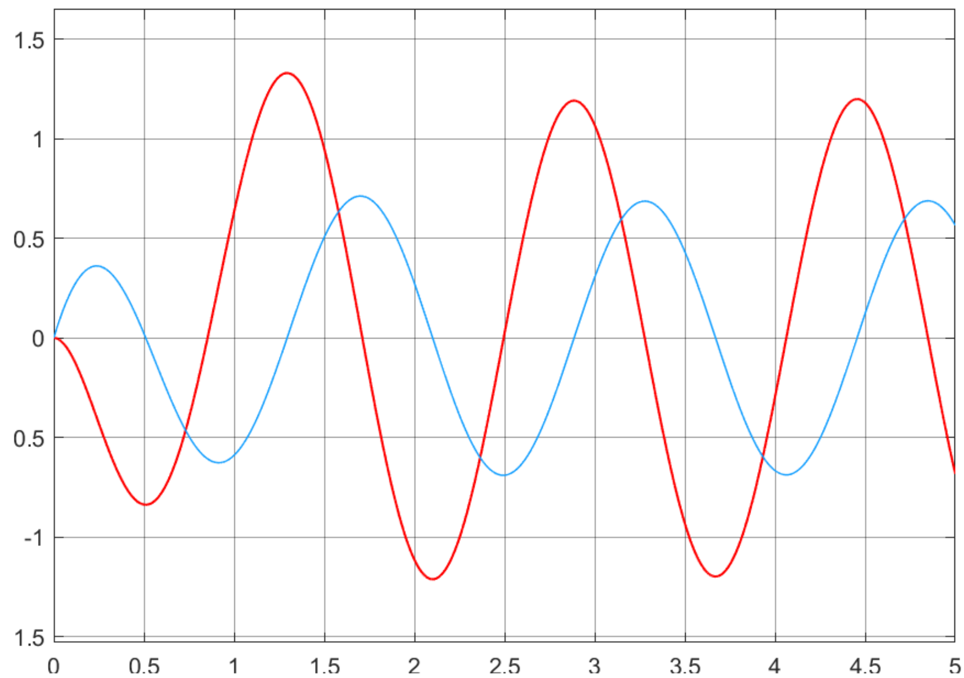

Рис. 6 График состояния наблюдателя

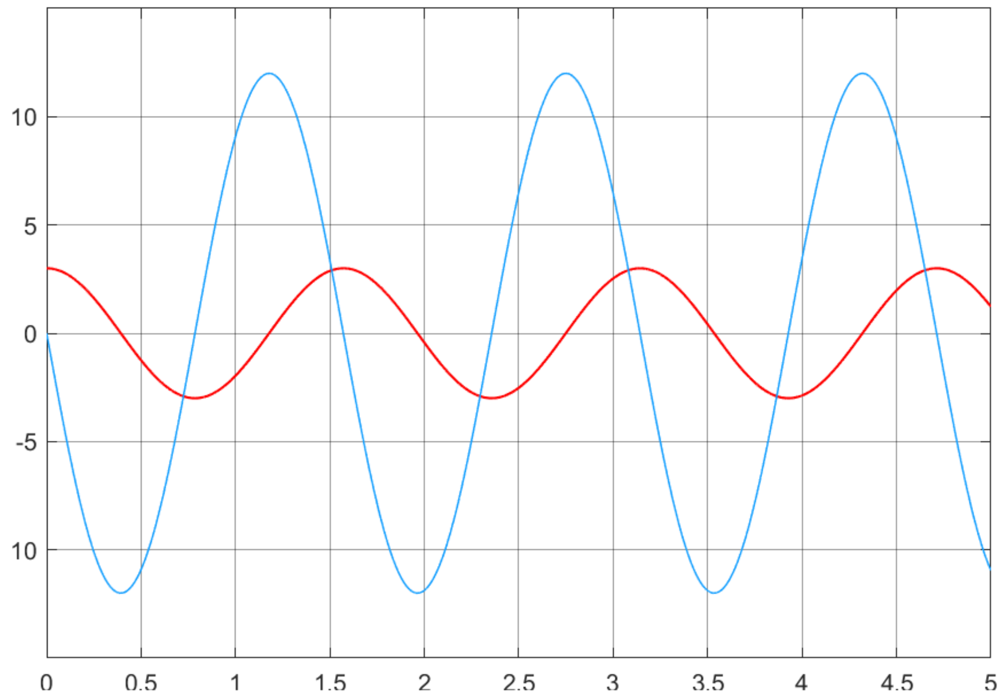

Рис. 7 График состояния генератора

2. Задача компенсации возмущения по входу (стабилизация в условиях внешних возмущений)

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_f f(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

2.1. Проверка объекта управления на свойства полной управляемости и наблюдаемости.

Свойство полной управляемости было доказано в п. 1.1.

Докажем свойство полной наблюдаемости:

$$N_{\text{н}} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$$

$rang(N_{\text{н}}) = 2 \rightarrow$ система полностью наблюдаемая

2.2. Формирование модели возмущающего воздействия $f(t)$ на основе метода последовательного дифференцирования в виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_f = \Gamma_f \xi_f \\ f = H_f \xi_f \end{cases}, \qquad \xi_f(0) = \xi_{f0}$$

$z_1 = f(t) = 5\sin(2t + 3)$

$\dot{z_1} = z_2 = 10\cos(2t + 3)$

$\dot{z_2} = -20\sin\,(2t + 3) = -4z_1$

$\Gamma_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix};\ H_f = [1 \quad 0];\ \xi_f(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.71 \\ -9.9 \end{bmatrix}$

2.3. Конструирование эталонной модели по желаемым корням λ_1^*, λ_2^* и нахождение матрицы M и матрицы линейных стационарных связей K

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma\xi \\ v = H\xi \end{cases}$$

$\lambda_1^* = -10; \lambda_2^* = -7$

$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix};\ H = [1 \quad 1]$

```
>> M

M =

   -0.0833   -0.1250
   -0.1250   -0.1250

>> K

K =

     0     8
```

2.4.Расчет матриц M_f и L_f из совместного решения двух векторно-матричных уравнений Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} BL_f + B_f H_f = M_f \Gamma_f - (A - BK)M_f \\ (C - DK)M_f + DL_f = 0 \end{cases}$$

```
M_f =

   -0.3502   -0.0054
   -0.1137   -0.1616


L_f =

   -3.0108   -1.3249
```

2.5. Моделирование системы компенсаций

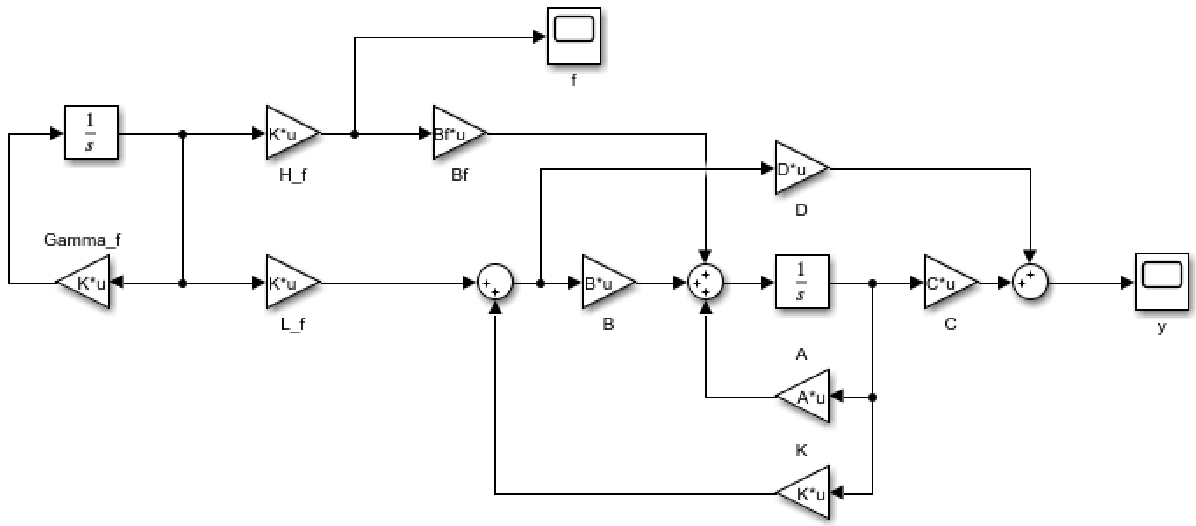

Рис. 8 Схема моделирования системы компенсации

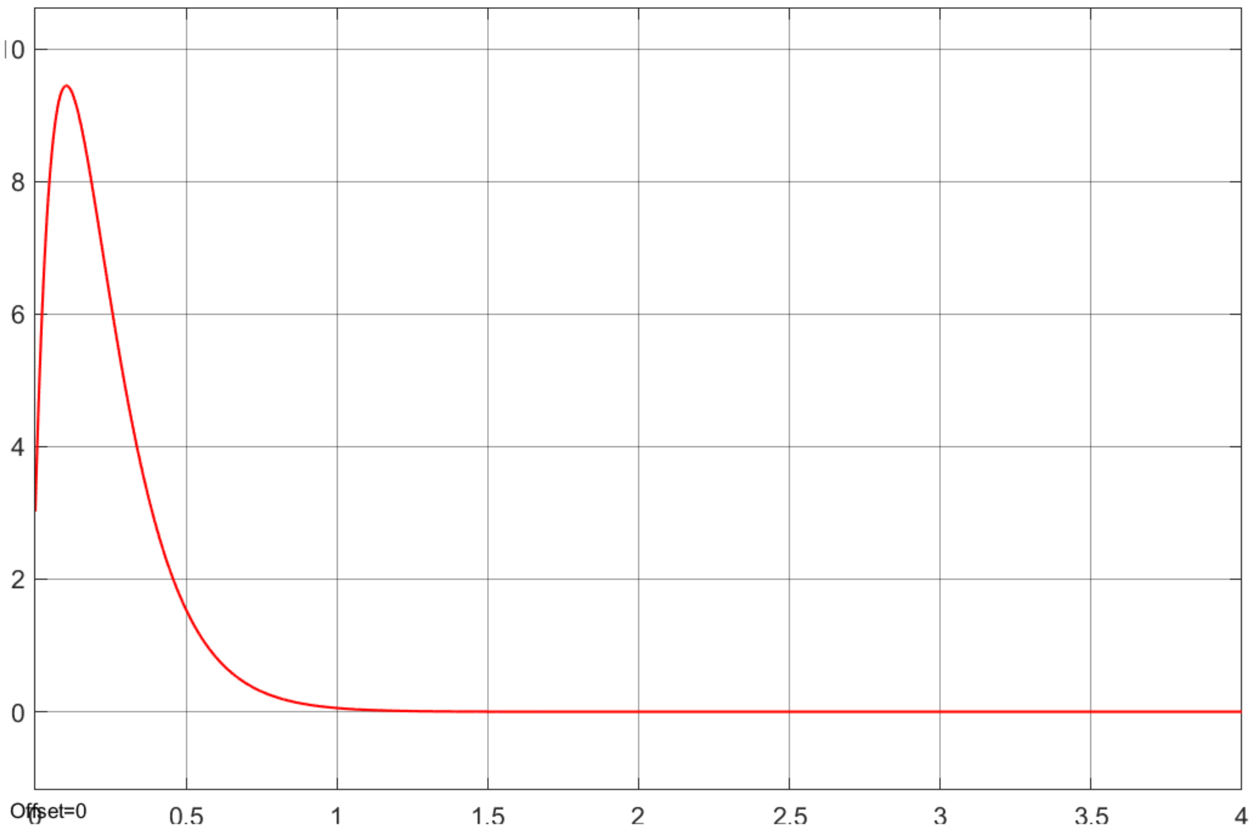

Рис. 9 График выходного сигнала y

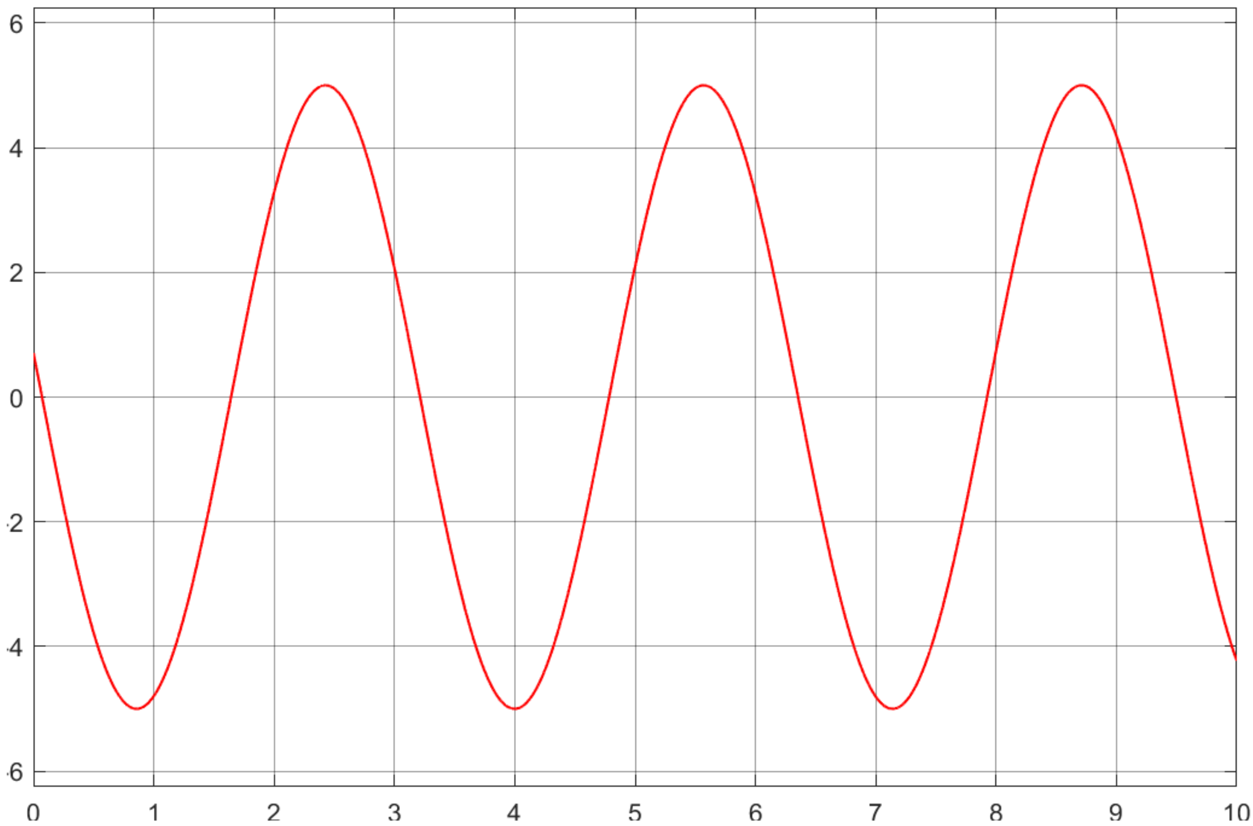

Рис. 10 График возмущающего воздействия f(t)

2.6. По требуемым показателям качества $t_{пн} = 1.1$ и $\sigma_H = 6\%$ назначаются коэффициенты требуемого характеристического полинома, предназначенного для синтеза наблюдателя. Сформируем матрицы эталонной модели $\Gamma_н$ и $H_н$ на основе коэффициентов характеристического полинома.

Так как по условию задания наблюдатель возмущения по входу редуцированный, то порядок полинома Баттерворта останется 2, и мы можем воспользоваться уже полученными результатами из пункта 1.7.

$a(s) = s^2 + 3.73s + 6.97$

$\Gamma_н = \begin{bmatrix} 0 & -6.97 \\ 1 & -3.73 \end{bmatrix}, \qquad H_н = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$N_н = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3.73 \end{bmatrix}$

$rang(N_н) = 2 \rightarrow$ эталонная модель полностью наблюдаемая.

2.7. При синтезе редуцированного наблюдателя возмущения решается матричное уравнение Сильвестра вида:

$$M_н\Gamma_н - {\Gamma_f}^T M_н = {H_f}^T H_н$$

С последующим нахождением матрицы:

$$L^T = -H_н {M_н}^{-1}$$

```
>> M_h

M_h =

   -0.0461   -0.2314
    0.0579   -0.0461

>> L

L =

    3.7300
    2.9700
```

2.8. Далее вычислим матрицы $F_н$ и $\bar{C}$ из следующих соотношений:

$$\begin{cases} F_н = \Gamma_f - LH_f \\ \bar{C}B_f = I \end{cases}$$

```
>> F_h

F_h =

   -3.7300    1.0000
   -6.9700         0

>> C_bar

C_bar =

    0.5000         0
```

2.9. Вычислим корни характеристического полинома матрицы $F_н$ и сравним с корнями требуемого характеристического полинома:

```
>> eig(F_h)

ans =

  -1.8650 + 1.8686i
  -1.8650 - 1.8686i

>> syms s
>> double(solve(s^2+3.73*s+6.97))

ans =

  -1.8650 - 1.8686i
  -1.8650 + 1.8686i
```

Корни полиномов полностью совпадают.

2.10. Моделирование системы компенсации с наблюдателем возмущений:

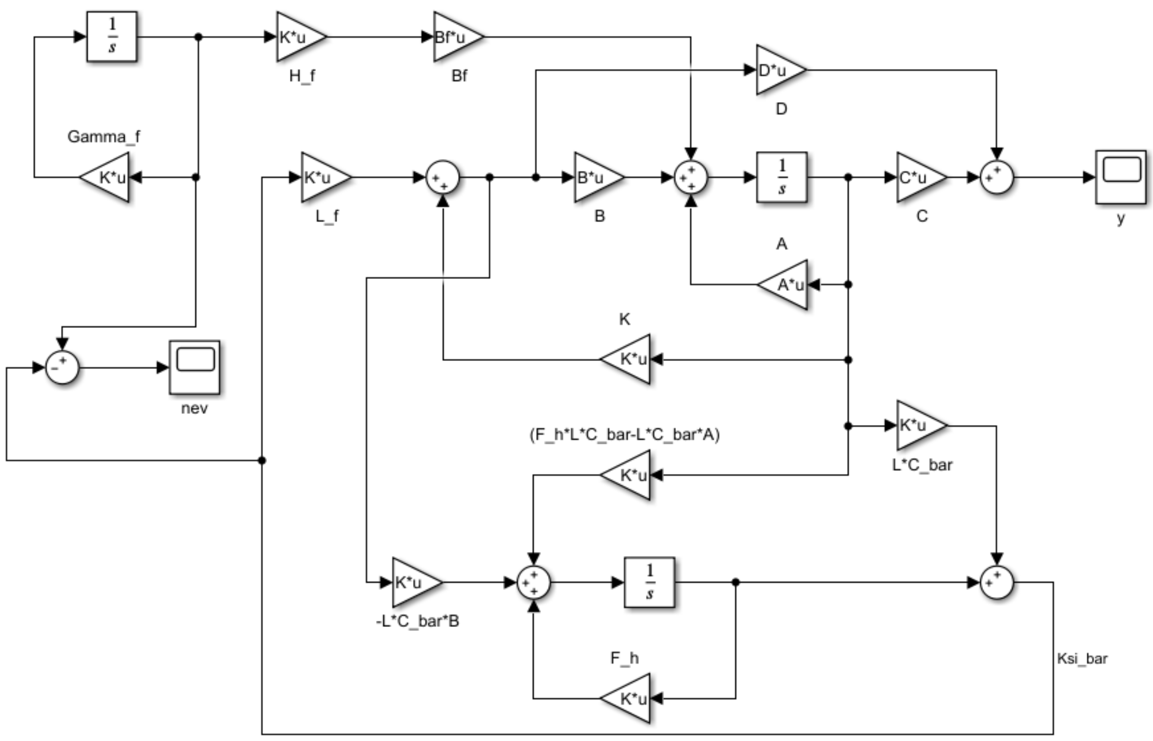

Рис. 11 Схема моделирования системы компенсаций с наблюдателем возмущений редуцированной размерности

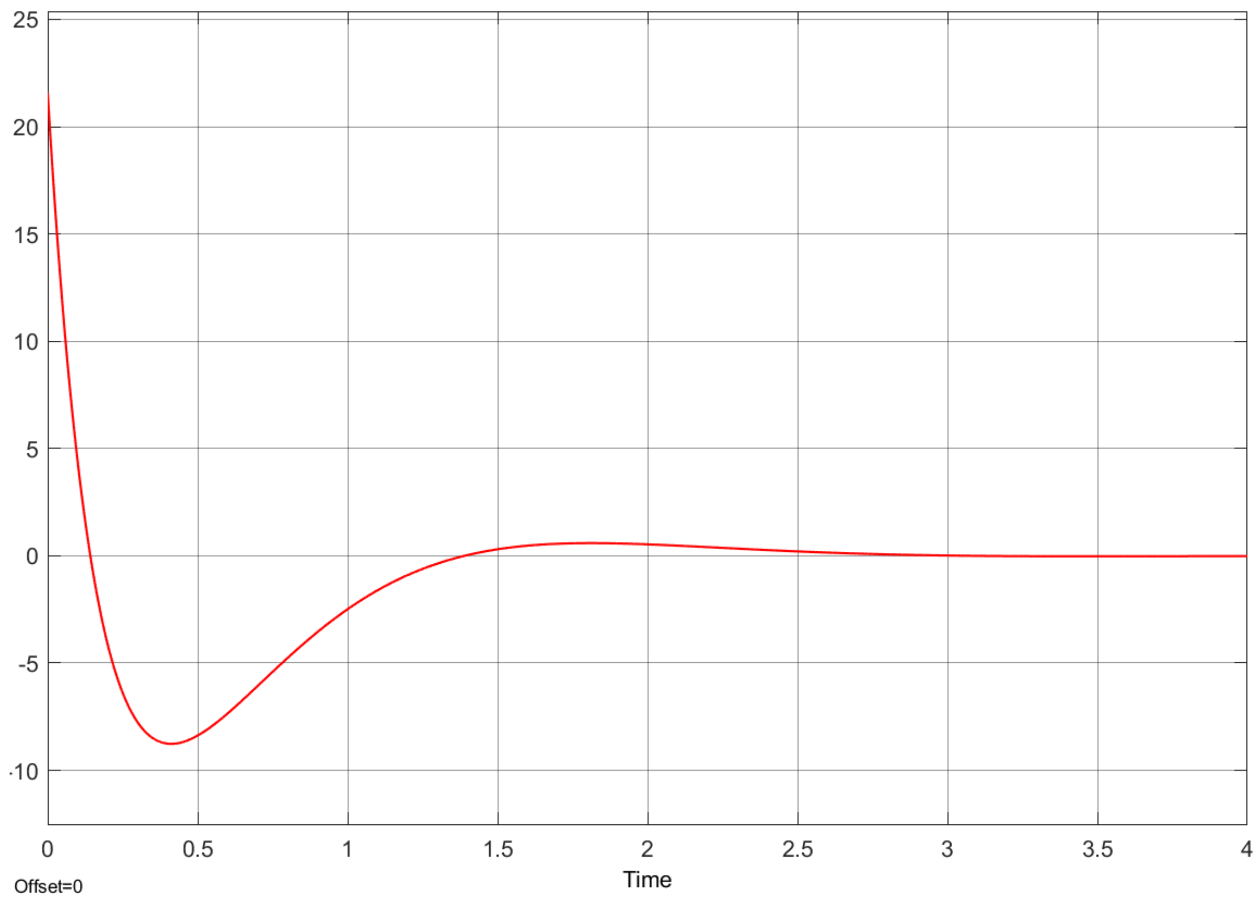

Рис. 12 График выходного сигнала

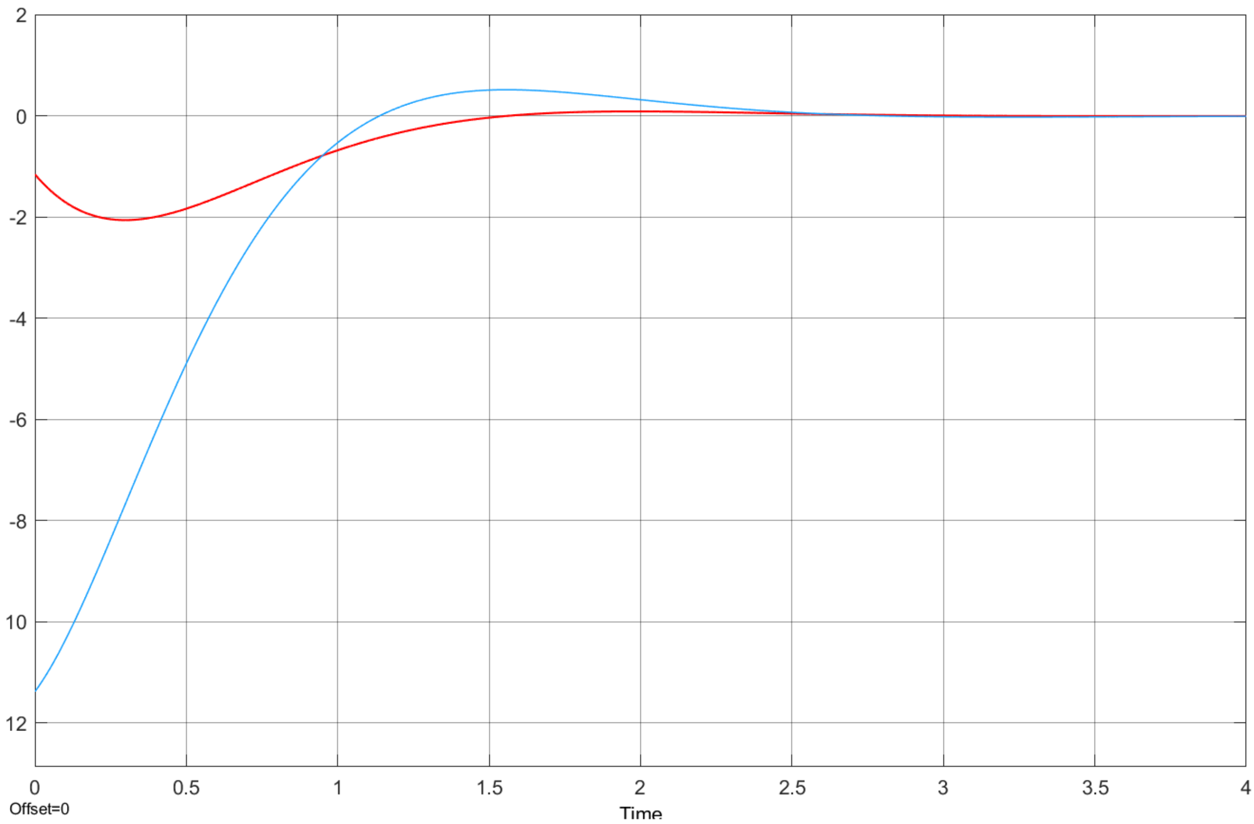

Рис. 13 График невязки ξ_f

3. Задача компенсации возмущений по выходу (стабилизация в условиях внешних возмущений)

Объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + f(t) \end{cases}$$

3.1. Проверка объекта управление на свойство полной управляемости и наблюдаемости

В пунктах 1.1. и 2.1. эти свойства уже были доказаны.

3.2. Формирование модели возмущающего воздействия на основе метода последовательного дифференцирования (см. п. 2.2.)

$$\begin{cases} \dot{\xi}_f = \Gamma_f \xi_f \\ f = H_f \xi_f \end{cases}, \qquad \xi_f(0) = \xi_{f0}$$

$$\Gamma_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix};\ H_f = [1 \quad 0];\ \xi_f(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.71 \\ -9.9 \end{bmatrix}$$

3.3. Конструирование эталонной модели по желаемым корням λ_1^*, λ_2^* и нахождение матрицы M и матрицы линейных стационарных связей K

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma\xi \\ v = H\xi \end{cases}$$

$\lambda_1^* = -10; \lambda_2^* = -7$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix};\ H = [1 \quad 1]$$

```
>> M

M =

   -0.0833   -0.1250
   -0.1250   -0.1250

>> K

K =

     0     8
```

3.4. Расчет матриц M_f и L_f из совместного решения двух векторно-матричных уравнений Франкиса-Дэвисона:

$$\begin{cases} BL_f = M_f\Gamma_f - (A - BK)M_f \\ (C - DK)M_f + DL_f + H_f = 0 \end{cases}$$

```
>> M_f

M_f =

   -0.0921   -0.0117
   -0.2464   -0.0167

>> L_f

L_f =

   -1.5235   -0.2040
```

3.5.Моделирование системы компенсации

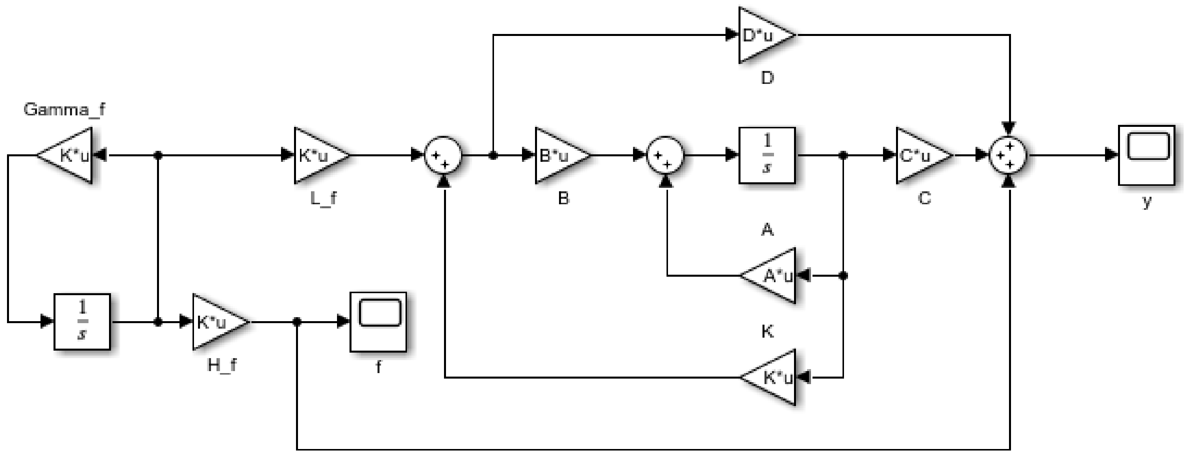

Рис. 14 Схема моделирования системы компенсации

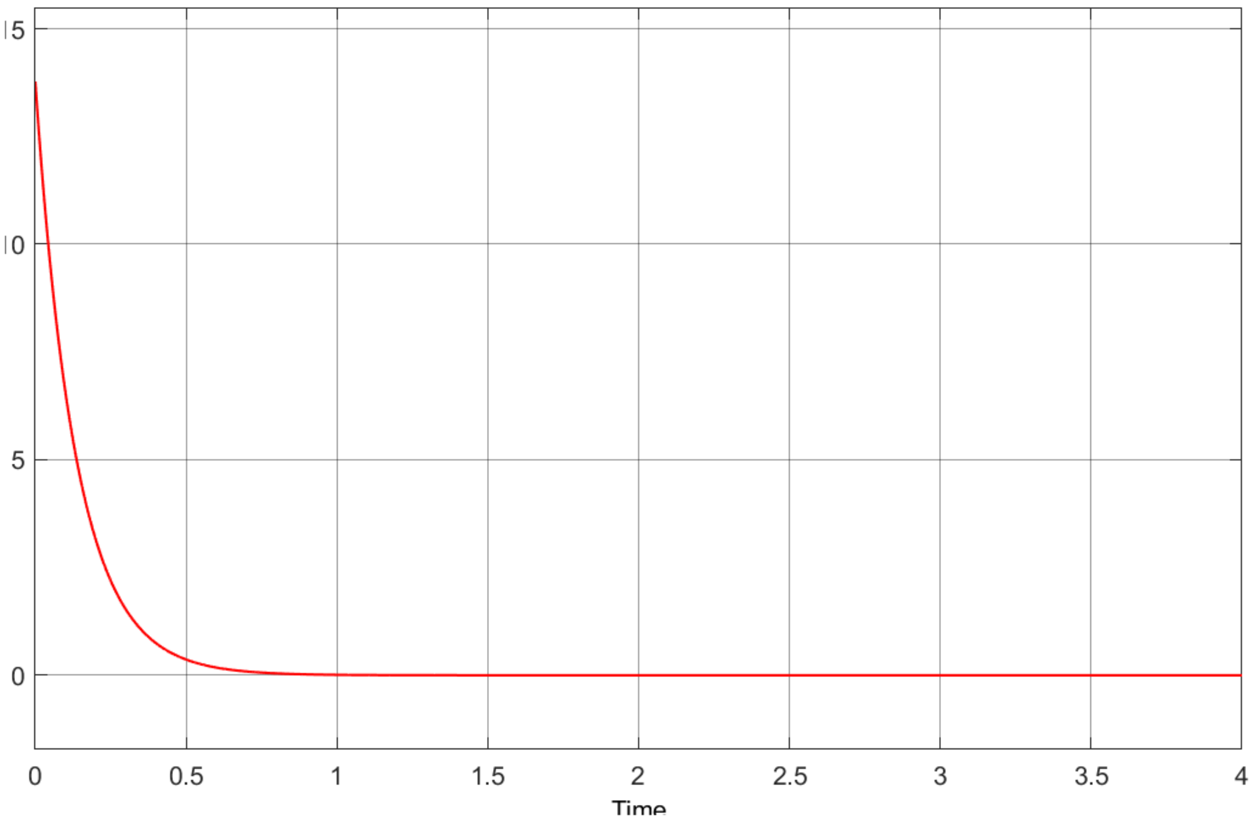

Рис. 15 График выходного сигнала

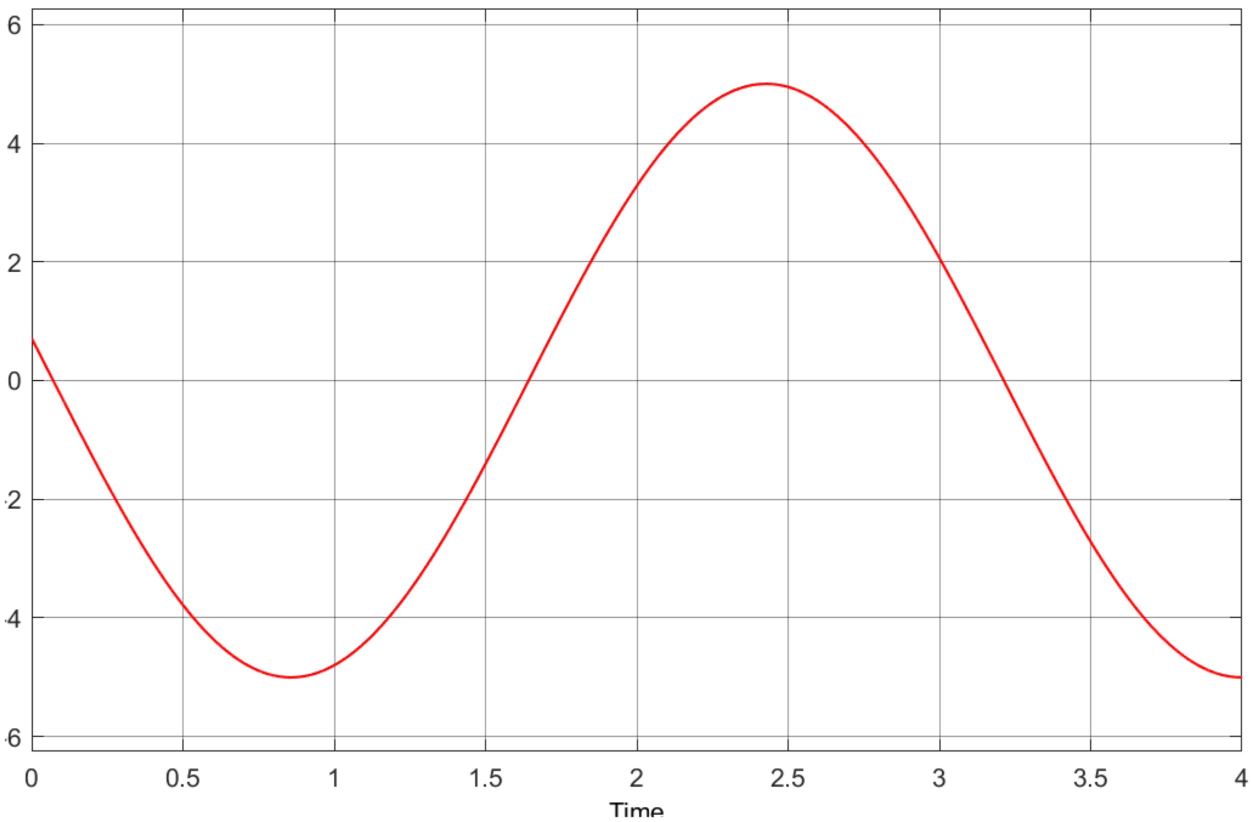

Рис. 16 График модели возмущающего воздействия

3.6. Для расширенного наблюдателя назначим матрицы эталонной модели $\overline{\Gamma_н}$ и $\overline{H_н}$ на основе требуемого характеристического полинома, построенного по заданными показателям качества $t_{пн} = 1.1$ и $\sigma_H = 6\%$

Так как размерность векторов состояний объекта управления и эталонной модели равна 2, то воспользуемся полиномом Баттерворта 4 порядка:

$a(s) = s^4 + 2.613\omega s^3 + 3.414\omega^2 s^2 + 2.613\omega^3 s + \omega^4$, где $\omega = \frac{t_{пн}{}^*}{t_{пн}} = \frac{6.8}{1.1} =$ 6.18

$a(s) = s^4 + 16.15s^3 + 130.39s^2 + 616.74s + 1458.66$

$$\overline{\Gamma_н} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1458.66 \\ 1 & 0 & 0 & -616.74 \\ 0 & 1 & 0 & -130.39 \\ 0 & 0 & 1 & -16.15 \end{bmatrix}, \qquad \overline{H_н} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.7. Решим матричное уравнение типа Сильвестра:

$$\overline{M_н}\,\overline{\Gamma_н} - \overline{A^T}\overline{M_н} = \overline{C^T}\overline{H_н}$$

с последующим нахождением матрицы:

$$\overline{L^T} = -\overline{H_н M_н}^{-1}$$

```
>> M_hbar

M_hbar =

   -0.0004   -0.0010    0.0018    0.0042
    0.0003   -0.0004   -0.0010    0.0018
   -0.0139    0.0629   -0.3128    1.4449
    0.0054   -0.0278    0.1258   -0.6257

>> L_bar

L_bar =

  -26.8446
  -38.4419
    6.9991
   17.4730
```

3.8. Вычисление корней характеристического полинома матрицы $\overline{\Gamma_н}$ и требуемого характеристического полинома:

```
>> eig(Gamma_hbar)

ans =

  -2.3641 + 5.7090i
  -2.3641 - 5.7090i
  -5.7109 + 2.3640i
  -5.7109 - 2.3640i

>> double(solve(s^4+16.15*s^3+130.39*s^2+616.74*s+1458.66))

ans =

  -2.3641 - 5.7090i
  -2.3641 + 5.7090i
  -5.7109 - 2.3640i
  -5.7109 + 2.3640i
```

3.9. Моделирование системы компенсации с расширенным наблюдателем возмущений по выходу

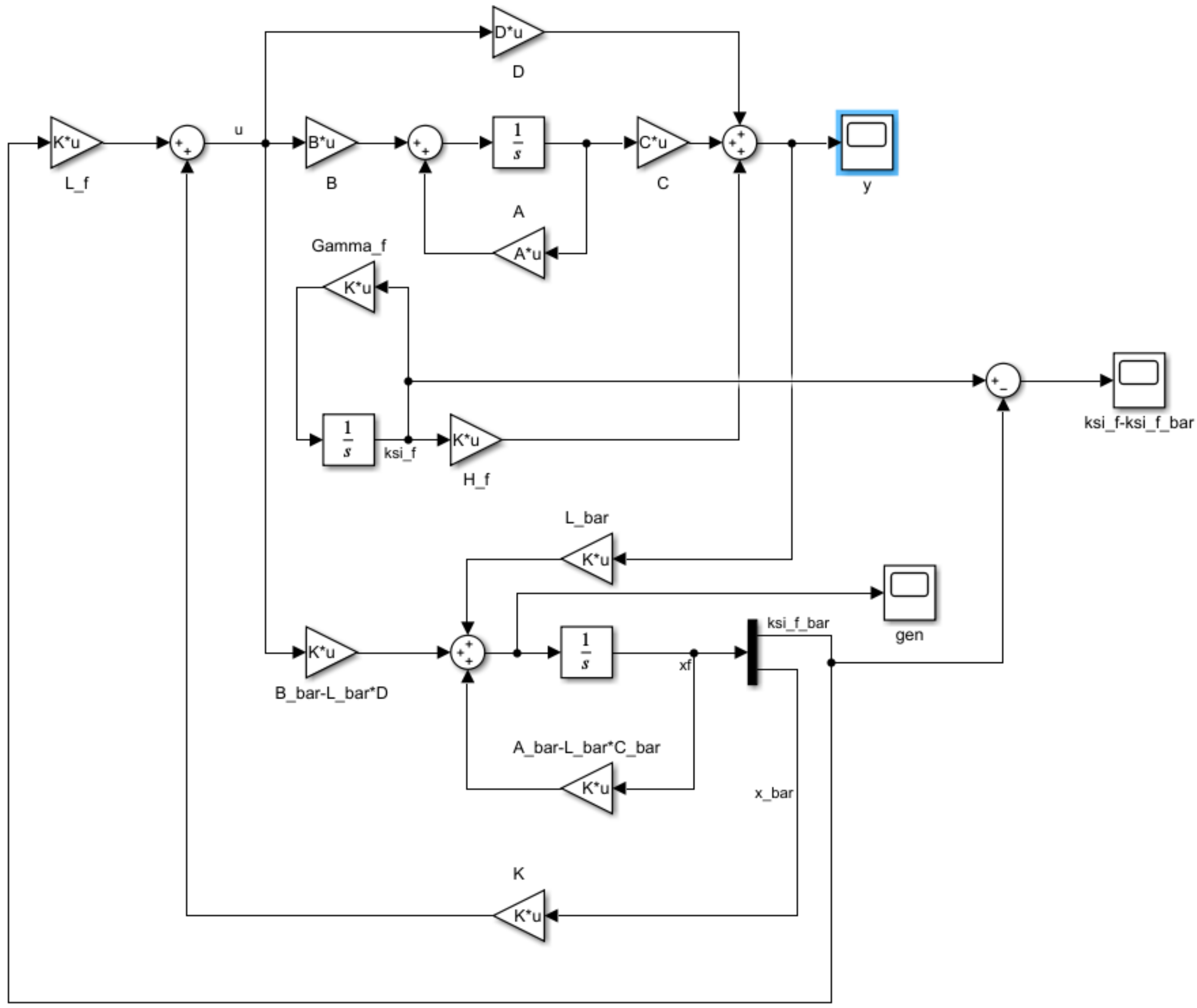

Рис. 17 Схема моделирования системы компенсации с расширенным наблюдателем

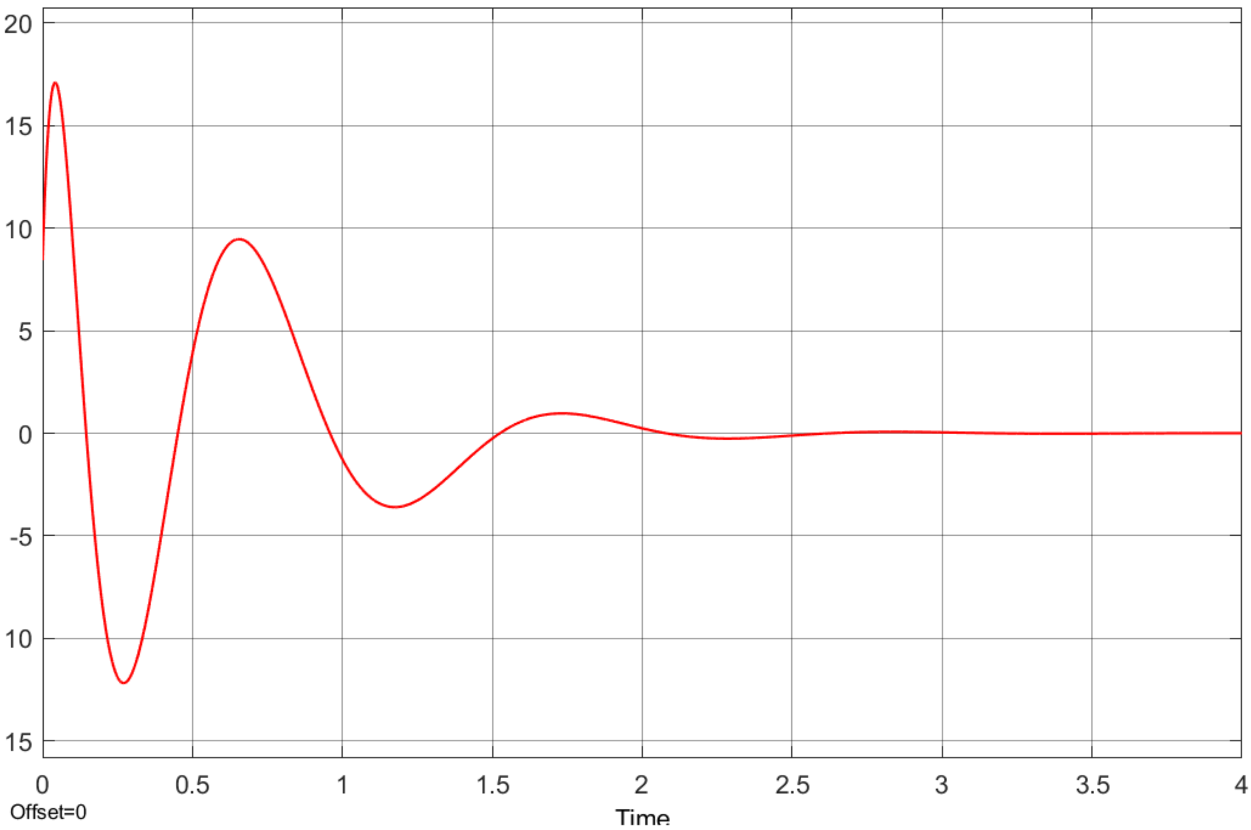

Рис. 18 График выходного сигнала

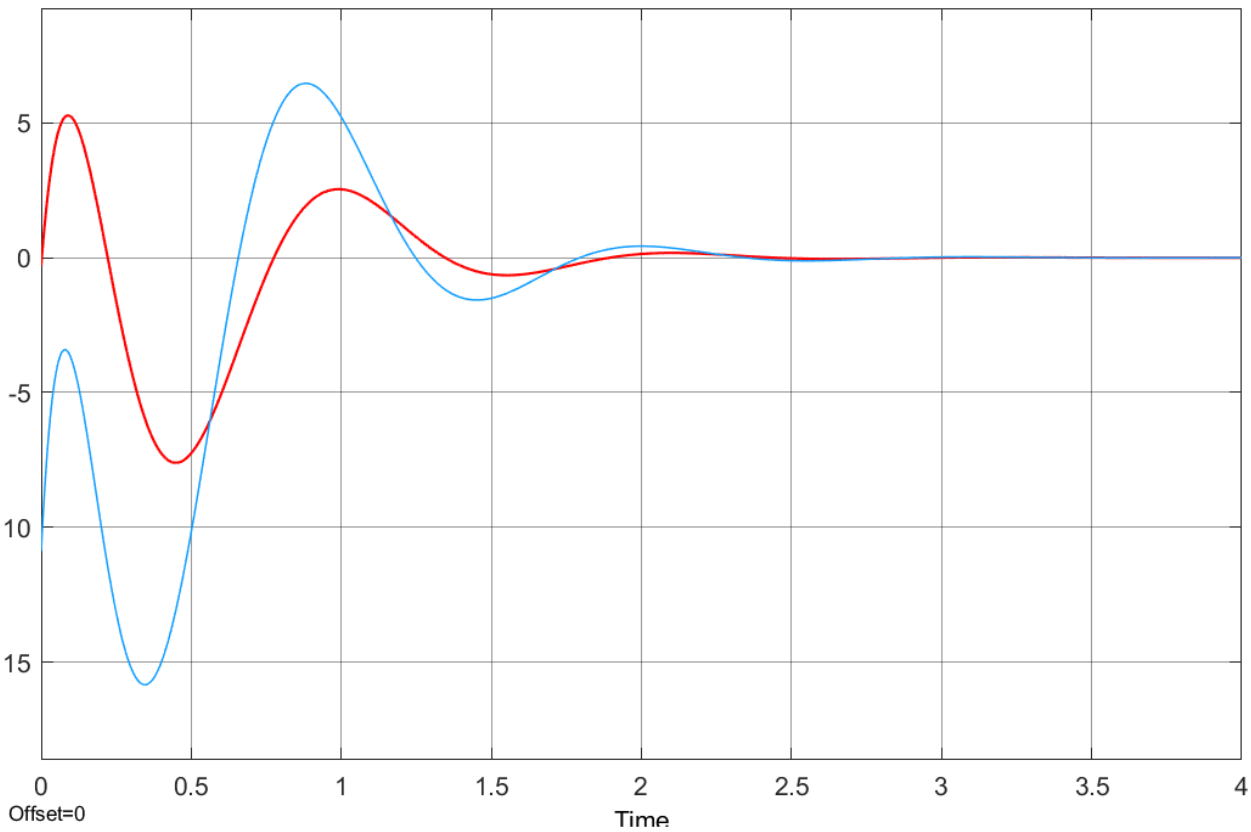

Рис. 19 График вектора невязки

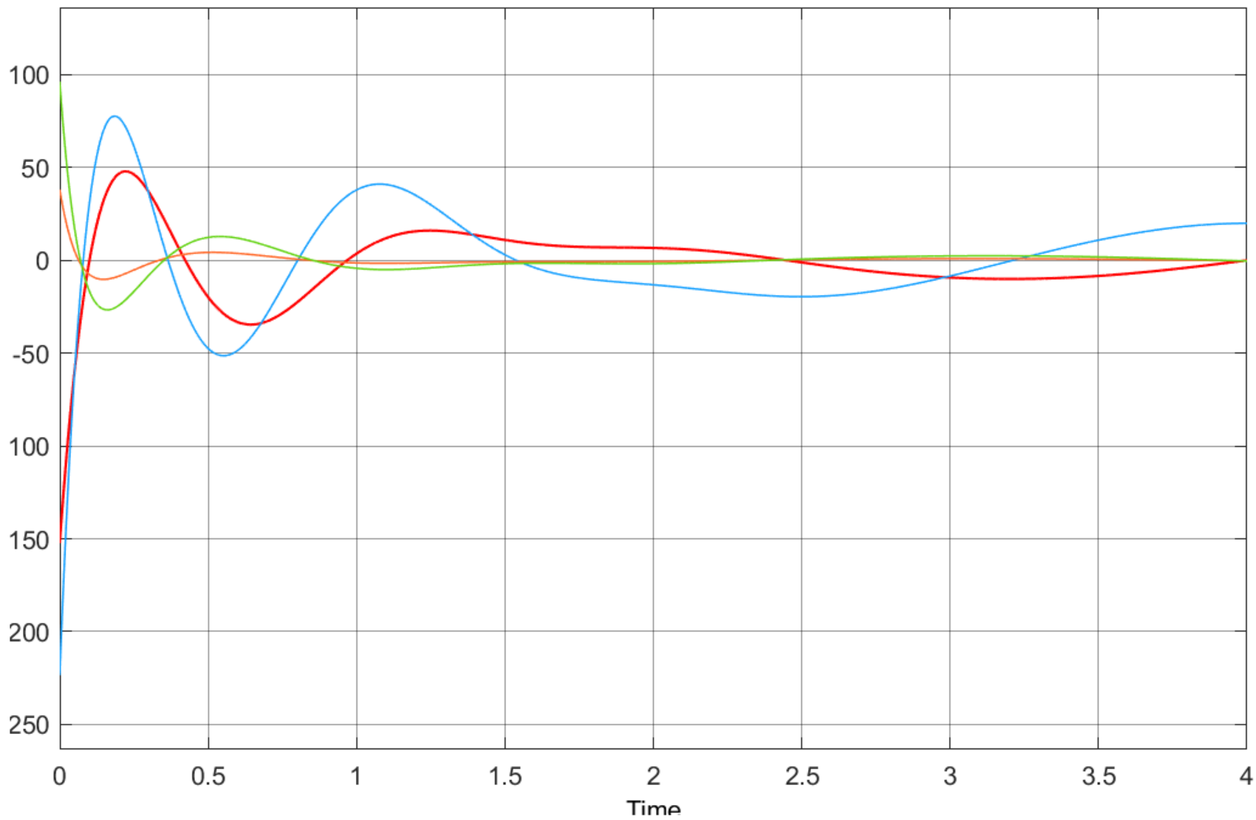

Рис. 20 График вектора состояний наблюдателя

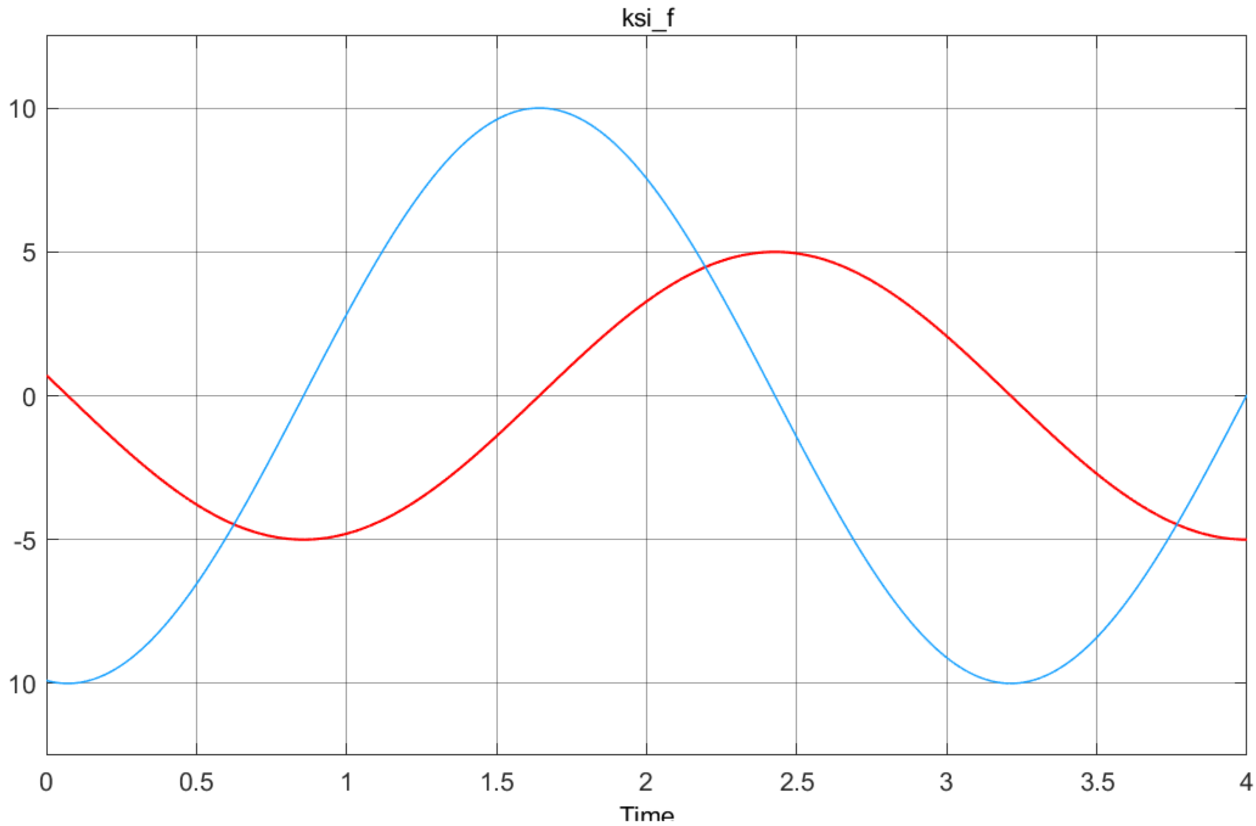

Рис. 21 Грфик вектора состояний генератора

Вывод:

В ходе выполнения данной лабораторной работы нами был изучен метод управления линейными объектами с помощью метода внутренней модели на базе уравнений Франкиса-Дэвисона. Были рассмотрены следующие задачи управления: слежения и компенсации по входу и выходу. Из полученных графиков моделирования можно сделать вывод об успешном достижении поставленных целей для каждой задачи.