Национальный исследовательский университет ИТМО
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина: Теоретическая механика

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Расчетно-графическая работа

Вариант 23

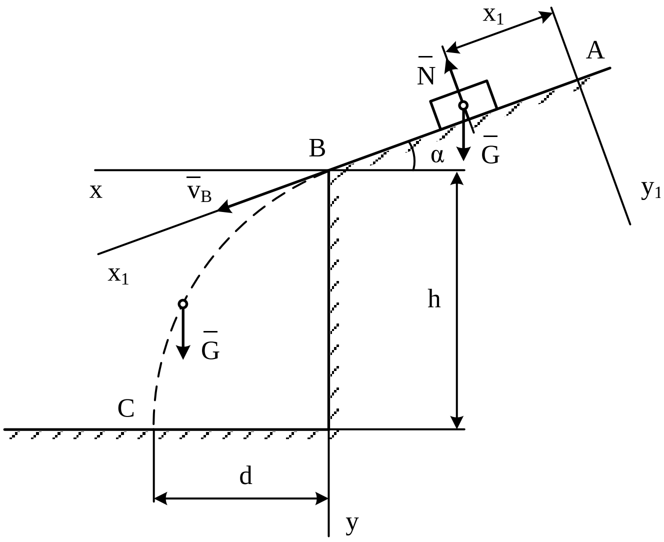
Студент: *Евстигнеев Дмитрий*
Группа: *R33423*
Преподаватель: *Скорых В.А.*

Санкт-Петербург
2021

Дано: $f=0$; $v_A=0$; $l=9{,}81$ м; $\tau=2$ м; $h=20$ м

Найти: α и T

РЕШЕНИЕ:



Рассмотрим движение тела на участке АВ. Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес $\overline{G}$ и нормальную реакцию $\overline{N}$.

Составим дифференциальные уравнение движения в проекциях на оси x_1 и y_1:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1} \\ m\ddot{y}_1 = \sum Y_{i1} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha \\ 0 = N - G\cos\alpha \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha$$

Дважды интегрируем полученное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}_1 = g\sin\alpha \cdot t + C_1$$

$$x_1 = g\sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t=0$ $x_{10} = x_A = 0$ и $\dot{x}_{10} = v_A = 0$.

Находим:

$$C_1 = \dot{x}_{10} - g\sin\alpha \cdot t_0 = 0 - g\sin\alpha \cdot 0 = 0$$

$$C_2 = x_{10} - g\,sin\,\alpha \cdot \frac{t_0^2}{2} - C_1 t$$
$$= 0 - g\,sin\,\alpha \cdot \frac{0^2}{2} - 0 \cdot 0$$
$$= 0$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g\sin\alpha \cdot t$$

$$x_1 = g\sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2}$$

Для момента τ, когда тело покидает участок:

$$\dot{x}_1 = v_B \quad \text{и} \quad x_1 = l$$

Т.е.:

$$v_B = g\sin\alpha \cdot \tau$$

$$l = g\sin\alpha \cdot \frac{\tau^2}{2}$$

Из второго уравнения:

$$\sin\alpha = \frac{2l}{g\tau^2} = \frac{2 \cdot 9{,}81}{9{,}81 \cdot 2^2} = 0{,}5$$

Значит

$$\alpha = \arcsin 0{,}5 = 30°$$

Из первого уравнения:

$v_B = g\sin\alpha \cdot \tau = 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 9{,}81$ (м/с)

Рассмотрим движение тела на участке ВС. На тело действует только вес $\overline{G}$.

Составим дифференциальные уравнение движения в проекциях на оси x и y:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum X_i \\ m\ddot{y} = \sum Y_i \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = g \end{cases}$$

Дважды интегрируем полученные дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_3 \\ x = C_3 t + C_5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{y} = gt + C_4 \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6 \end{cases}$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_{Bx} = v_B\cos\alpha$ и $\dot{y}_0 = v_{By} = v_B\sin\alpha$.

Тогда

$$C_3 = \dot{x}_0 = v_B\cos\alpha$$

$$C_5 = x_0 - C_3 t_0 = 0 - v_B\cos\alpha \cdot 0 = 0$$

$$C_4 = \dot{y}_0 - g t_0 = v_B\sin\alpha - 9{,}81 \cdot 0 = v_B\sin\alpha$$

$$C_6 = y_0 - \frac{g t_0^2}{2} - C_4 t_0 = 0 - \frac{9{,}81 \cdot 0^2}{2} - v_B\, sin\,\alpha \cdot 0^2 = 0$$

Тогда дифференциальные уравнения на участке ВС принимают вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_B\cos\alpha \\ x = v_B\cos\alpha \cdot t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{y} = gt + v_B\sin\alpha \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + v_B\sin\alpha \cdot t \end{cases}$$

В момент падения $t = T$, $y = h$ и $x = d$, значит

$$h = \frac{gT^2}{2} + v_B\sin\alpha \cdot T$$

Решаем это квадратное уравнение:

$$gT^2 + 2v_B\sin\alpha \cdot T - 2h = 0$$

$$T = \frac{-2v_B\, sin\;\;\alpha + \sqrt{(2v_B\, sin\;\;\alpha)^2 + 4 \cdot g \cdot 2h}}{2g} = \frac{-2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 + \sqrt{(2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5)^2 + 4 \cdot 9{,}81 \cdot 2 \cdot 20}}{2 \cdot 9{,}81} \approx 1{,}58$$

Ответ: $\alpha = 30°$ **м/с,** $T \approx 1{,}58$ **с**