Национальный исследовательский университет ИТМО
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина: Теория оптимального управления

Отчет по лабораторной работе №5.

Вариант 11

Студенты:
Евстигнеев Д.М.
Группа: *R34423*
Преподаватель:
Парамонов А.В.

Санкт-Петербург
2022

Цель работы: построить оптимальный регулятор с помощью метода динамического программирования Беллмана.

Исходные данные:

Вар.	Матрица A	Матрица b	Матрица Q	Параметр r
11	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	4

Постановка задачи:

Дан линейный объект управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad x(0)$$

И критерий качества

$$J = \int_0^\infty x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau)d\tau$$

Построить оптимальный регулятор с помощью метода динамического программирования Беллмана и промоделировать его работу на заданном интервале времени.

Ход работы:

1. Построим оптимальный регулятор с помощью функции Беллмана:

$$\min_{u(t)}\left[2x_1^2 + 7x_2^2 + 4u^2 + \frac{\partial S}{\partial x}\dot{x}\right] = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$2x_1^2 + 7x_2^2 + 4u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}(x_2 + 4u) + \frac{\partial S}{\partial x_2}(-3x_1 + 6x_2 + u) = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[-\frac{\partial S}{\partial t}\right] = 8u + 4\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0 \to u = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{1}{8}\frac{\partial S}{\partial x_2}$$

Подставим полученное управление в уравнение (1):

$$2x_1^2 + 7x_2^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{1}{8}\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}\left(x_2 + 4\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{1}{8}\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)\right)$$
$$+ \frac{\partial S}{\partial x_2}\left(-3x_1 + 6x_2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{1}{8}\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$2x_1^2 + 7x_2^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 - 2\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2}$$
$$- 3\frac{\partial S}{\partial x_2}x_1 + 6\frac{\partial S}{\partial x_2}x_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$2x_1^2 + 7x_2^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} - \frac{1}{16}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 - 3\frac{\partial S}{\partial x_2}x_1 + 6\frac{\partial S}{\partial x_2}x_2$$
$$= -\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$2x_1^2 + 7x_2^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{1}{4}\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2}(-3x_1 + 6x_2) = -\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (2)$$

Выберем следующую функцию Беллмана:

$$S = \psi_1 x_1^2 + \psi_{12}x_1x_2 + \psi_2 x_2^2$$

Подставим функцию Беллмана в уравнение (2):

$$2x_1^2 + 7x_2^2 - \left(2\psi_1x_1 + \psi_{12}x_2 + \frac{1}{2}\psi_2x_2 + \frac{1}{4}\psi_{12}x_1\right)^2 + 2\psi_1x_1x_2 + \psi_{12}x_2^2$$
$$+ (2\psi_2x_2 + \psi_{12}x_1)(-3x_1 + 6x_2) = -\left(\dot{\psi}_1x_1^2 + \dot{\psi}_{12}x_1x_2 + \dot{\psi}_2x_2^2\right)$$

$$\left(2-\left(2\psi_1+\frac{1}{4}\psi_{12}\right)^2-3\psi_{12}\right)x_1^2+\left(7-\left(\psi_{12}+\frac{1}{2}\psi_2\right)^2+\psi_{12}+12\psi_2\right)x_2^2$$
$$+\left(2\psi_1-6\psi_2+6\psi_{12}-2\left(2\psi_1+\frac{1}{4}\psi_{12}\right)\left(\psi_{12}+\frac{1}{2}\psi_2\right)\right)x_1x_2$$
$$=-\left(\dot\psi_1x_1^2+\dot\psi_{12}x_1x_2+\dot\psi_2x_2^2\right)$$

Так как терминальная составляющая критерия равна 0, тогда

$$\left(2-\left(2\psi_1+\frac{1}{4}\psi_{12}\right)^2-3\psi_{12}\right)x_1^2+\left(7-\left(\psi_{12}+\frac{1}{2}\psi_2\right)^2+\psi_{12}+12\psi_2\right)x_2^2$$
$$+\left(2\psi_1-6\psi_2+6\psi_{12}-2\left(2\psi_1+\frac{1}{4}\psi_{12}\right)\left(\psi_{12}+\frac{1}{2}\psi_2\right)\right)x_1x_2=0$$

Можем составить и решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}2-\left(2\psi_1+\frac{1}{4}\psi_{12}\right)^2-3\psi_{12}=0\\7-\left(\psi_{12}+\frac{1}{2}\psi_2\right)^2+\psi_{12}+12\psi_2=0\\2\psi_1-6\psi_2+6\psi_{12}-2\left(2\psi_1+\frac{1}{4}\psi_{12}\right)\left(\psi_{12}+\frac{1}{2}\psi_2\right)=0\end{cases}$$

$$u=-\frac{1}{2}(2\psi_1x_1+\psi_{12}x_2)-\frac{1}{8}(2\psi_2x_2+\psi_{12}x_1)$$

Решим данную систему в MATLAB:

```
psi1 =

   19.0178


psi2 =

  105.5209


psi12 =

  -87.1996
```

2. Проведем моделирование объекта управления с полученным регулятором для начальных условий $x(0) = [1 \quad 0]^T$:

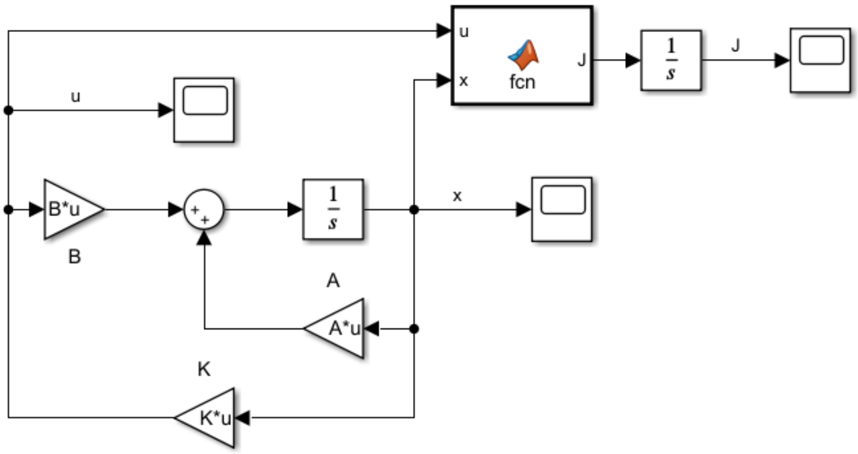

Рисунок 1 Схема моделирования

```
syms psi1 psi2 psi12

eqn1 = 2 - (2*psi1+psi12/4)^2 -3*psi12 == 0;
eqn2 = 7 - (psi12+psi2/2)^2 +psi12 + 12*psi2 == 0;
eqn3 = 2*psi1 - 6*psi2 + 6*psi12 - 2*(2*psi1 + psi12/4)*(psi12 + psi2/2) == 0;

S = solve([eqn1;eqn2;eqn3],[psi1, psi2, psi12]);
```

```
syms psi1 psi2 psi12

eqn1 = 2 - (2*psi1+psi12/4)^2 -3*psi12 == 0;
eqn2 = 7 - (psi12+psi2/2)^2 +psi12 + 12*psi2 == 0;
eqn3 = 2*psi1 - 6*psi2 + 6*psi12 - 2*(2*psi1 + psi12/4)*(psi12 + psi2/2) == 0;

S = solve([eqn1;eqn2;eqn3],[psi1, psi2, psi12]);

psi1 = double(S.psi1(4));
psi2 = double(S.psi2(4));
psi12 = double(S.psi12(4));

k1 = -psi1-psi12/8;
k2 = -psi12/2-psi2/4
K = [k1 k2];
```

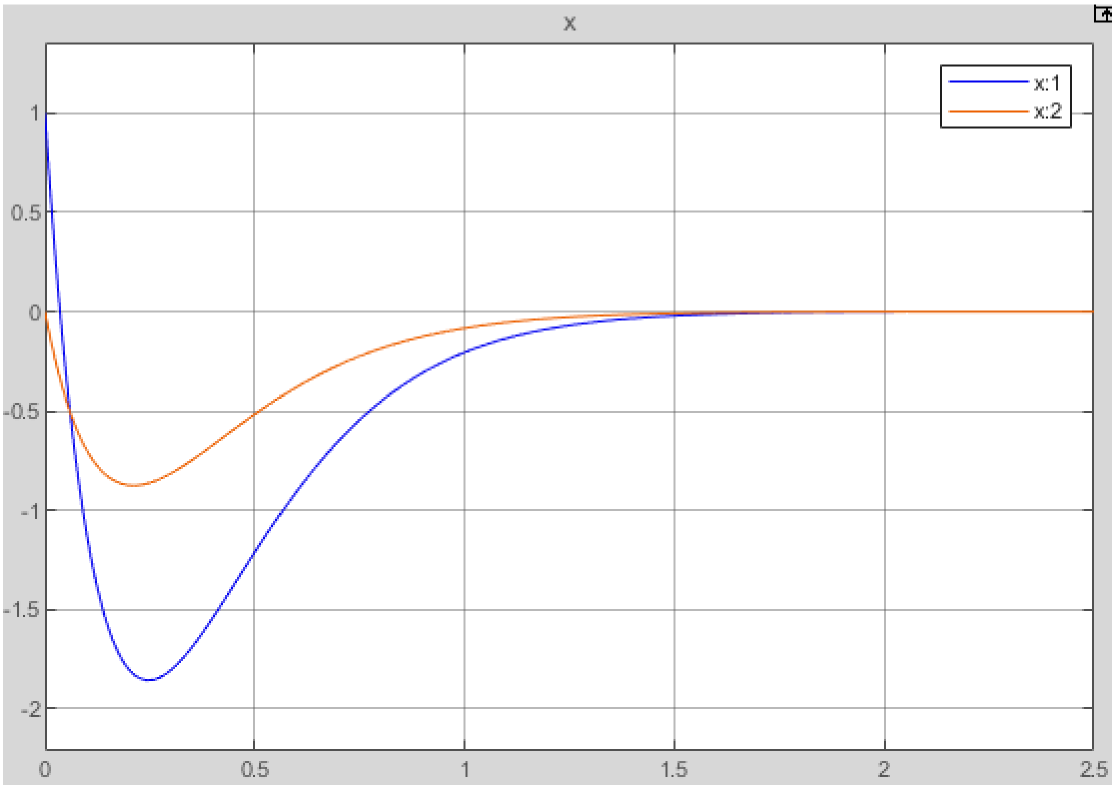

Рисунок 1 График вектора состояния

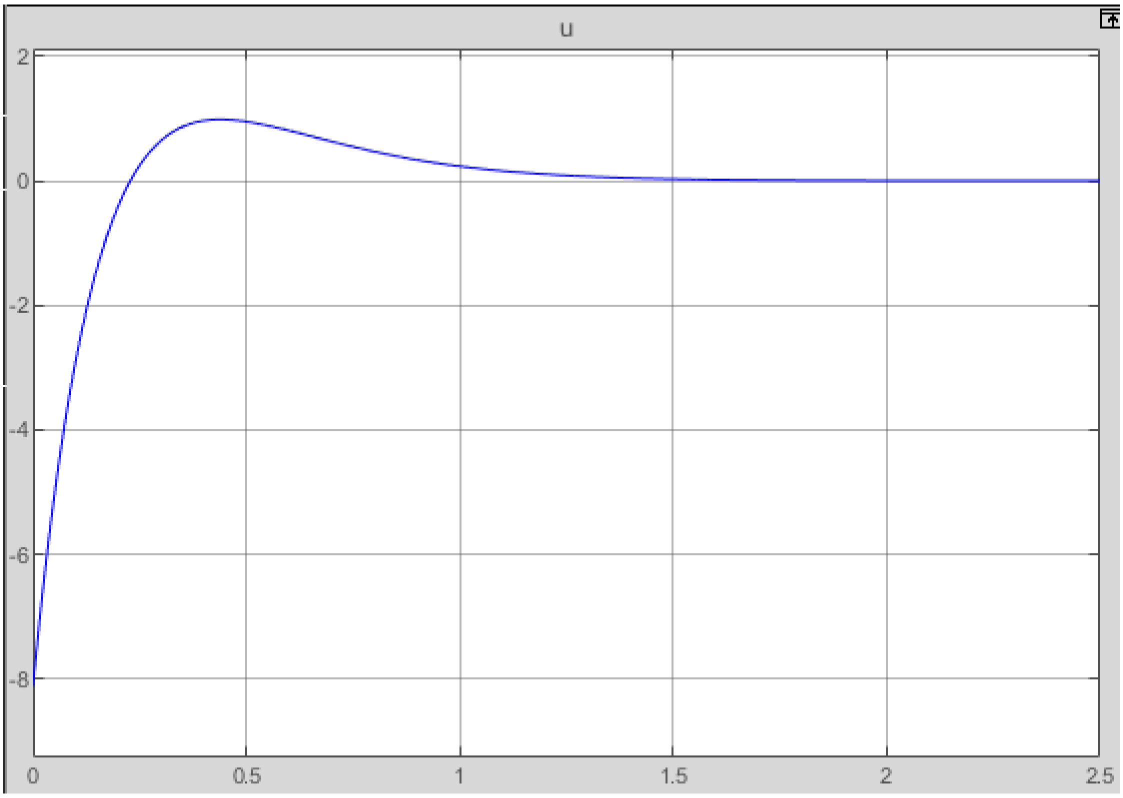

Рисунок 2 График управления u

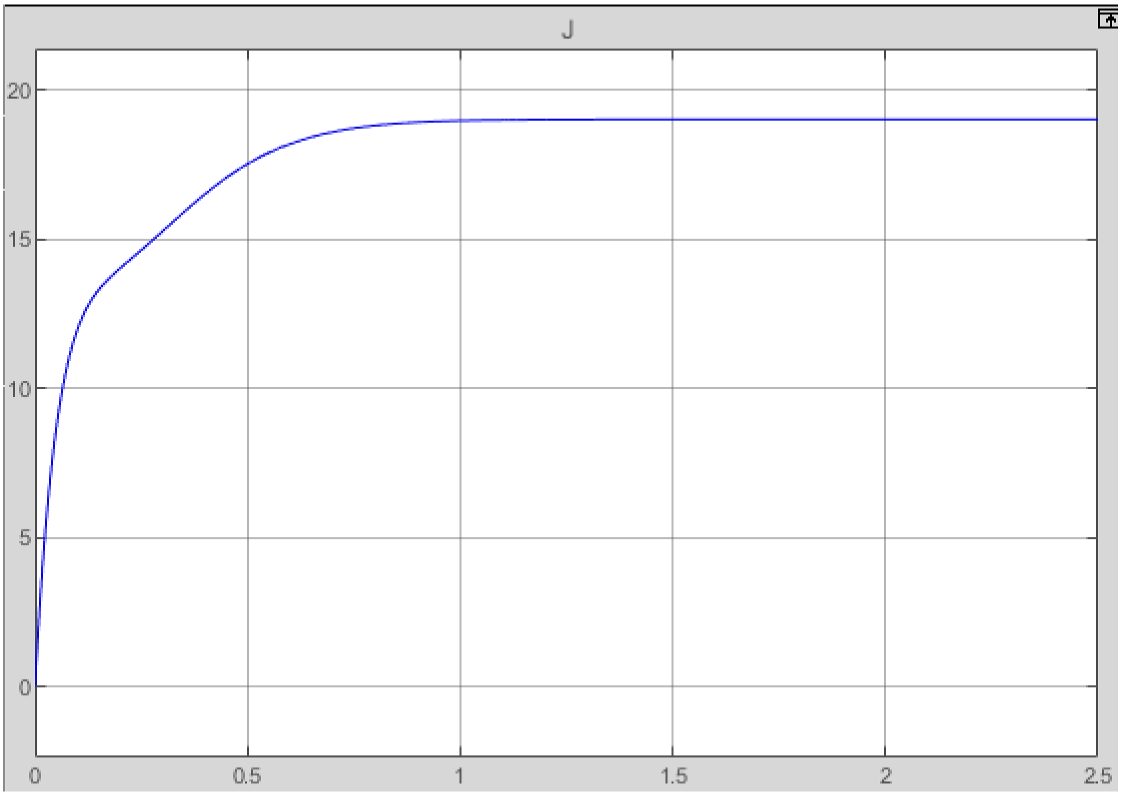

Рисунок 3 График критерия J

3. Отклоним параметры регулятора, прибавив вектор $[1 \quad 1]$

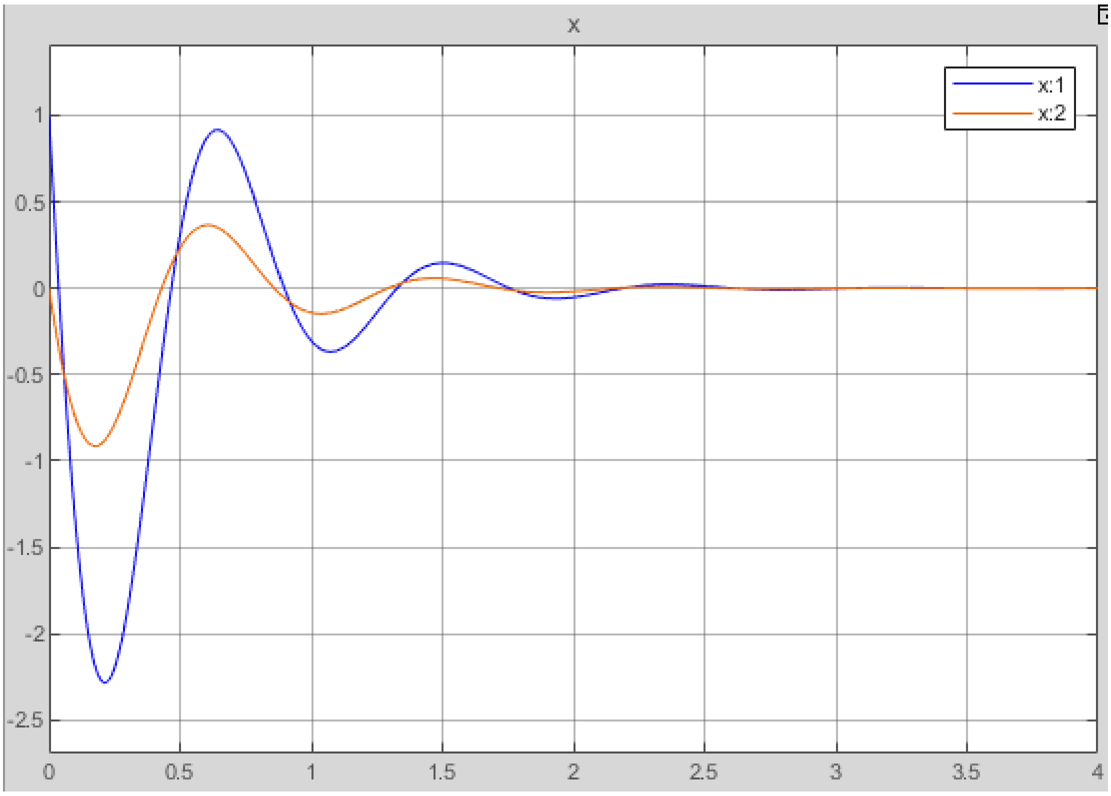

Рисунок 4 График вектора состояния

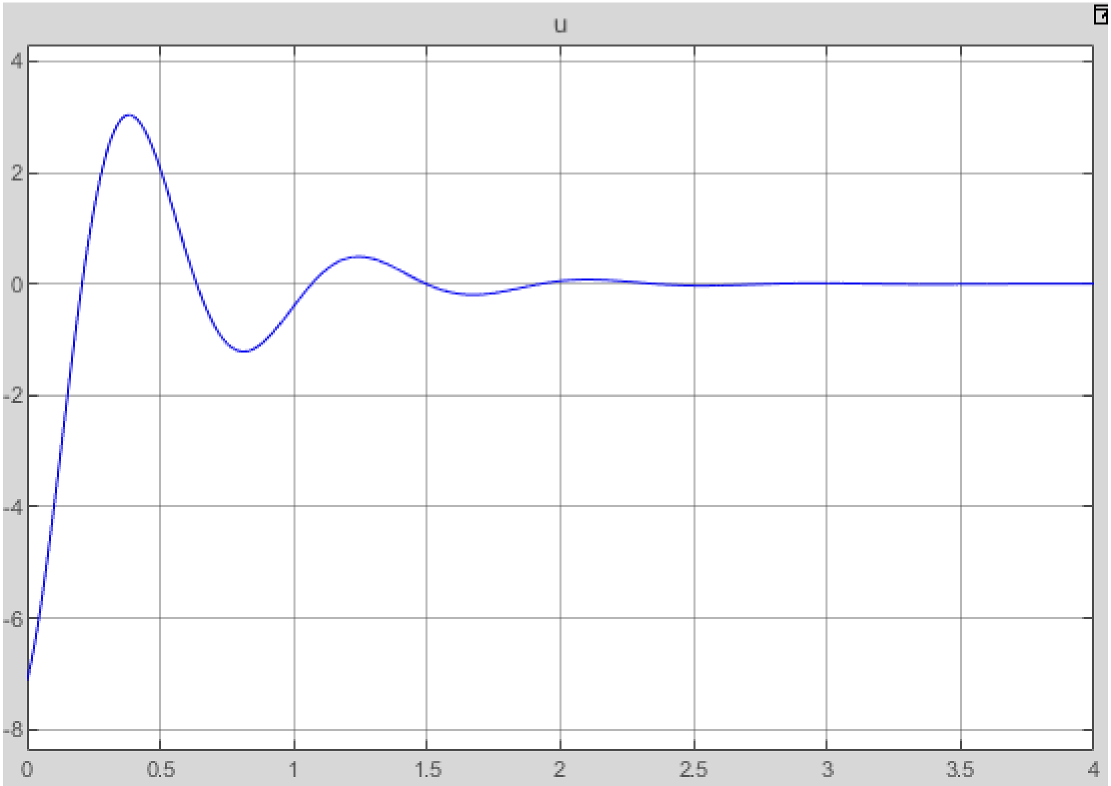

Рисунок 5 График управления u

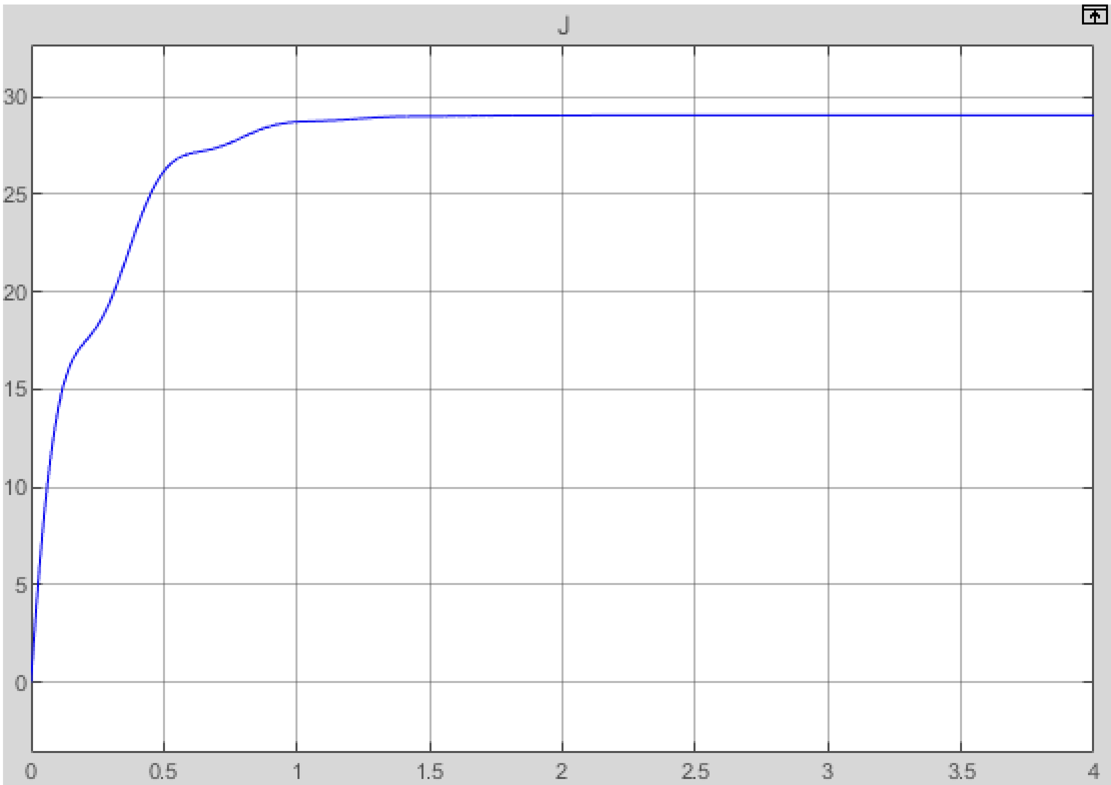

Рисунок 6 График критерия J

Из полученных графиков видно, что при небольшом отклонении параметров регулятора появились колебания, время переходного процесса увеличилось, значение критерия J также увеличилось.

Вывод:

В данной лабораторной работе был построен оптимальный регулятор с помощью метода динамического программирования Беллмана. Для найденного регулятора была построена модель, из которой видно, что объект за конечный интервал времени приходит в равновесное состояние, при этом критерий оптимальности $J = 19$. При попытке отклонить значение параметров регулятора от оптимальных появились колебания, время переходного процесса увеличилось, как и значения критерия $J = 29$.