*Национальный исследовательский университет ИТМО*
*(Университет ИТМО)*

*Факультет систем управления и робототехники*

Дисциплина: Теория оптимального управления

**Отчет по лабораторной работе №1.**

Вариант 11

Студенты:
*Евстигнеев Д.М.*
Группа: *R34423*
Преподаватель:
*Парамонов А.В.*

Санкт-Петербург
2022

**Цель работы:** найти минимум критерия качества для статической задачи оптимизации для различных методов.

**Исходные данные:**

$$J(x,u) = 8x^2 + 6u^2 + 4xu + x + 3u - 10$$

$$c(x,u) = 3x - 2u^2 + 1$$

**Ход работы:**

1. Поиск глобального минимума $J(x,u)$ на основе необходимого и достаточного условий:

1.1. Без ограничений

$$gradJ(x,u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J(x,u)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial J(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*u + 16*x + 1 \\ 12*u + 4*x + 3 \end{bmatrix}$$

Решая получившуюся систему линейных уравнения, находи глобальный минимум:

$$\begin{cases} 4*u + 16*x + 1 = 0 \\ 12*u + 4*x + 3 = 0 \end{cases}$$

```
syms x u;
Jx_u=8*x^2+6*u^2+4*x*u+x+3*u-10;
grad_x=diff(Jx_u,x)==0;
grad_u=diff(Jx_u,u)==0;
x=solve([grad_x;grad_u]).x
u=solve([grad_x;grad_u]).u
Jx_u=8*x^2+6*u^2+4*x*u+x+3*u-10
```

```
x = 0
u =
-1/4
Jx_u =
-83/8
```

$$J(x,u) = -\frac{83}{8}$$

1.2. С ограничениями в виде равенства $c(x,u) = 0$

Построим Лагранжиан вида:

$$\mathrm{L}(x,u,\lambda) = J(x,u) + \lambda c(x,u), \text{ где } \lambda \text{ – множитель Лагранжа}$$

```
L = 
```
$$3u + x + \lambda(-2u^2 + 3x + 1) + 4ux + 6u^2 + 8x^2 - 10$$

Найдем все частные производные $\mathrm{L}(x,u,\lambda)$ и решим полученную систему уравнений:

```
L = 
```
$$3u + x + \lambda(-2u^2 + 3x + 1) + 4ux + 6u^2 + 8x^2 - 10$$

```
gradL_x = 
```
$$3\lambda + 4u + 16x + 1 = 0$$

```
gradL_u = 
```
$$12u + 4x - 4\lambda u + 3 = 0$$

```
gradL_lambda = 
```
$$-2u^2 + 3x + 1 = 0$$

```
gradL =
```
$$\begin{pmatrix} 3\lambda + 4u + 16x + 1 = 0 \\ 12u + 4x - 4\lambda u + 3 = 0 \\ -2u^2 + 3x + 1 = 0 \end{pmatrix}$$

$$u \approx -0.325221, \quad x \approx -0.262821, \quad \lambda \approx 1.50201$$

```
x = -0.2628
u = -0.3252
lambda = 1.5020
Jx_u_min_L = -9.7094
```

$$J(x,u) = -9.7094$$

1.3. С ограничениями в виде неравенства $c(x,u) \leq 0$

Лагранжиан идентичен полученному в (1.2.):

$$\mathrm{L}(x,u,\lambda) = 4x^2(\lambda+1) + 8u^2 + 5xu + 9x + 2u(\lambda+1) - 4 + 7\lambda$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,u,\lambda)}{\partial \lambda} \le 0 \\ \dfrac{\partial L(x,u,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,u,\lambda)}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

gradL =

$$\begin{pmatrix} -2u^2 + 3x + 1 \le 0 \\ 3\lambda + 4u + 16x + 1 = 0 \\ 12u + 4x - 4\lambda u + 3 = 0 \end{pmatrix}$$

Дополним систему условиями Куна-Таккера и условием дополняющей нежесткости:

gradL =

$$\begin{pmatrix} -2u^2 + 3x + 1 \le 0 \\ 3\lambda + 4u + 16x + 1 = 0 \\ 12u + 4x - 4\lambda u + 3 = 0 \\ 0 \le \lambda \\ \lambda(-2u^2 + 3x + 1) = 0 \end{pmatrix}$$

$$u \approx -0.325221, \quad x \approx -0.262821, \quad \lambda \approx 1.50201$$

$$J(x,u) = -9.7094$$

2. Градиентный поиск минимума критерия качества:

$$J_1(x,u) = J(x,u)$$

2.1. Методом Ньютона-Рафсона произвести пошаговый расчет экстремума

Произвольно выберем начальное значение $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - H^{-1}(\bar{x}^{(n)})gradJ(\bar{x}^{(n)})$$

Матрица Гессе $H = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$

$$gradJ(\bar{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J(x(0), u(0))}{\partial x} \\ \dfrac{\partial J(x(0), u(0))}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*u\ +\ 16*x\ +\ 1 \\ 12*u\ +\ 4*x\ +\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Градиентный поиск минимума критерия качества:

```
syms x u lambda;
J1x_u=Jx_u;


H=[4 16;12 4];
x0=[0;0]
```

```
x0 = 2×1
      0
      0
```

```
Hinv=inv(H);
gradJ0=[1;3];

n = 3;
J=zeros(1,n+1);
J(1) = 8*x0(1)^2+6*x0(2)^2+4*x0(1)*x0(2)+x0(1)+3*x0(2)-10;
for i = 1:n
    xn = x0 - Hinv*gradJ0;
    x0 = xn;
    gradJ0 = [4*x0(2) + 16*x0(1) + 1; 12*x0(2) + 4*x0(1) + 3];
    J(i+1) = 8*x0(1)^2+6*x0(2)^2+4*x0(1)*x0(2)+x0(1)+3*x0(2)-10;
end
J
```

```
J = 1×4
   -10.0000   -9.7500   -7.8750   -0.3750
```

```
xn
```

```
xn = 2×1
    -1.0000
     0.7500
```

В ходе выполнения программы была найдена точка $\bar{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.75 \end{bmatrix}$ которая соответствует минимуму $J(\bar{x}^{(n)}) = -10$

2.2. Методом наискорейшего спуска для двух различных $\gamma$ (соответствующей колебательной и апериодической сходимости) произвести пошаговый расчет экстремума

$$\bar{x}^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)} - \gamma gradJ(\bar{x}^{(n)})$$

Начальные условия выберем произвольно $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma = 0.1$

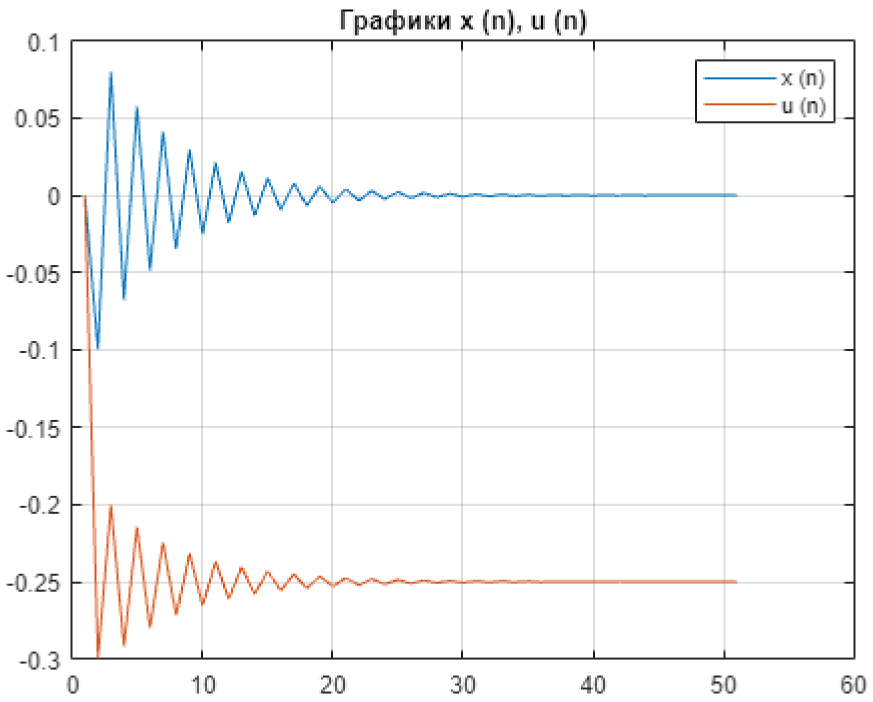
```
x0 = [0;0];
gradJ0 = [4*x0(2) + 16*x0(1) + 1; 12*x0(2) + 4*x0(1) + 3];
y = 0.1;

n = 50;
J = zeros (1, n+1);
X_bar = zeros (2, n+1);
X_bar (1,1) = x0 (1);
X_bar (2,1) = x0 (2);
J(1) = 8*x0(1)^2+6*x0(2)^2+4*x0(1)*x0(2)+x0(1)+3*x0(2)-10;
for i = 1:n
    xn = x0 - y*gradJ0;
    x0 = xn;
    X_bar (1,i+1) = x0 (1);
    X_bar (2,i+1) = x0 (2);
    gradJ0 = [4*x0(2) + 16*x0(1) + 1; 12*x0(2) + 4*x0(1) + 3];
    J(i+1) = 8*x0(1)^2+6*x0(2)^2+4*x0(1)*x0(2)+x0(1)+3*x0(2)-10;
end
xn
```

```
xn = 2×1
     0.0000
    -0.2500
```

```
J(n)
```

```
ans = -10.3750
```

```
x = 1:1:n+1;
plot (x,X_bar); grid on;
title ('Графики x (n), u (n)');
legend ('x (n)', 'u (n)');
```




По полученным данным видно, что наш алгоритм сошелся к экстремуму и данная сходимость является колебательной.

Теперь возьмем $\gamma = 0.02$

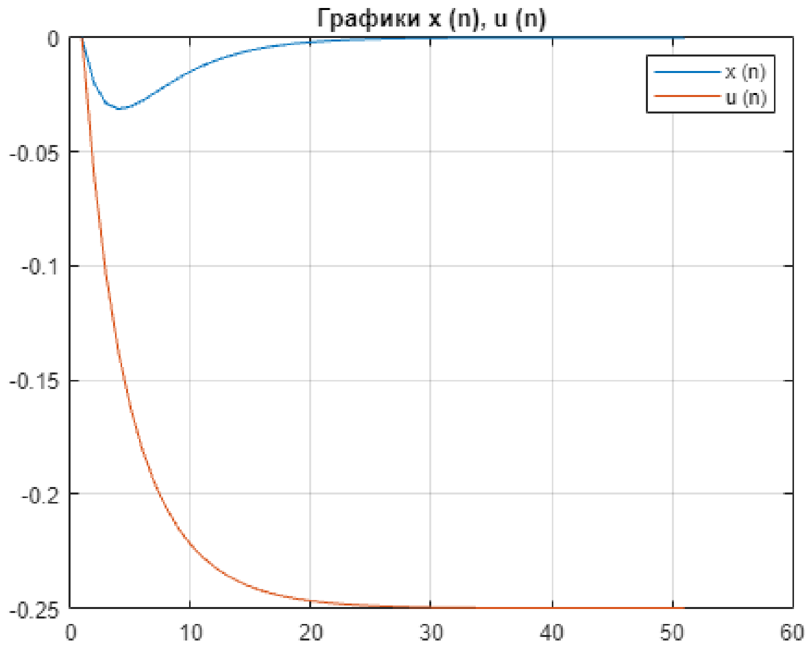
```
xn
```

```
xn = 2×1
    -0.0000
    -0.2500
```

```
J(n)
```

```
ans = -10.3750
```

```
x = 1:1:n+1;
plot (x,X_bar); grid on;
title ('Графики x (n), u (n)');
legend ('x (n)', 'u (n)');
```




Алгоритм сходится к экстремуму и имеет апериодический вид.

**Вывод:**

В данной лабораторной работе были изучены методы статической оптимизации по поиску экстремума, а также выполнена их реализация аналитически и в программной среде MATLAB.