

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Вычислительных Технологий и Моделирования

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МЕЗОМАСШТАБНОГО ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ
НАД ГИДРОЛОГИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**



Дипломная работа
Микушина Дмитрия

Научный руководитель
чл.-корр. РАН В. Н. Лыкосов

МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



Бризовые циркуляции

Пыльные

Соляные

Загрязняющие производства

Техногенные аварии



МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



Бризовые циркуляции

Пыльные

Соляные

Загрязняющие производства

Техногенные аварии



Daejeon (South Korea)



МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



Бризовые циркуляции

Пыльные

Соляные

Загрязняющие производства

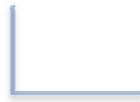
Техногенные аварии



Eastern Australia



МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



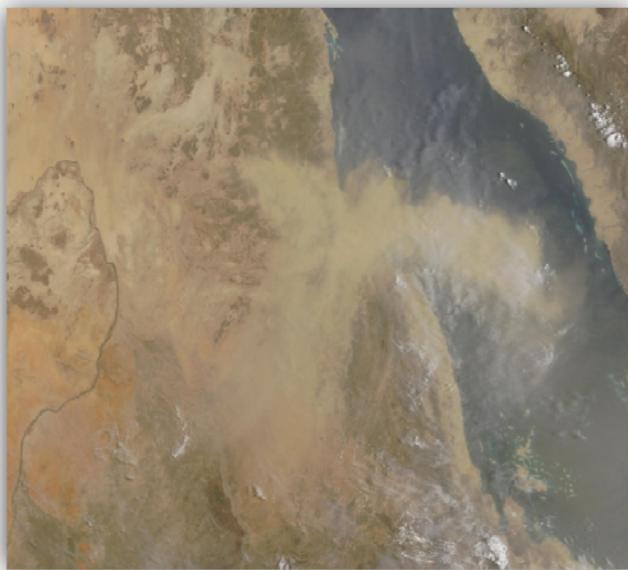
Бризовые циркуляции

Пыльные

Соляные

Загрязняющие производства

Техногенные аварии



Sudan & Eritrea (North-East Africa)



МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



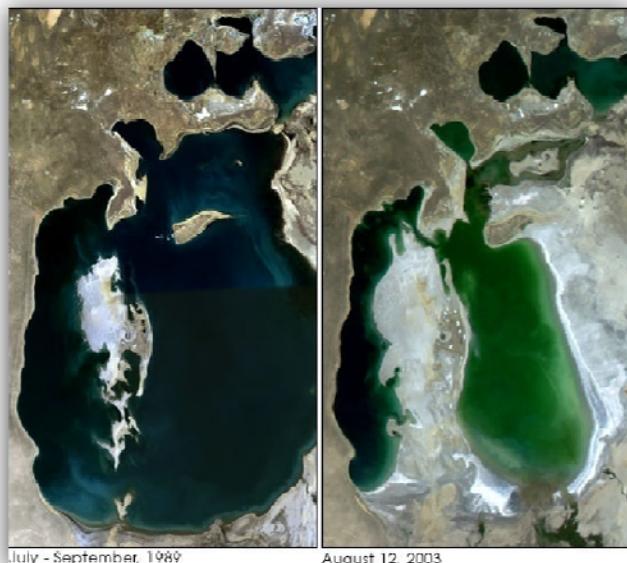
Бризовые циркуляции

Пыльные

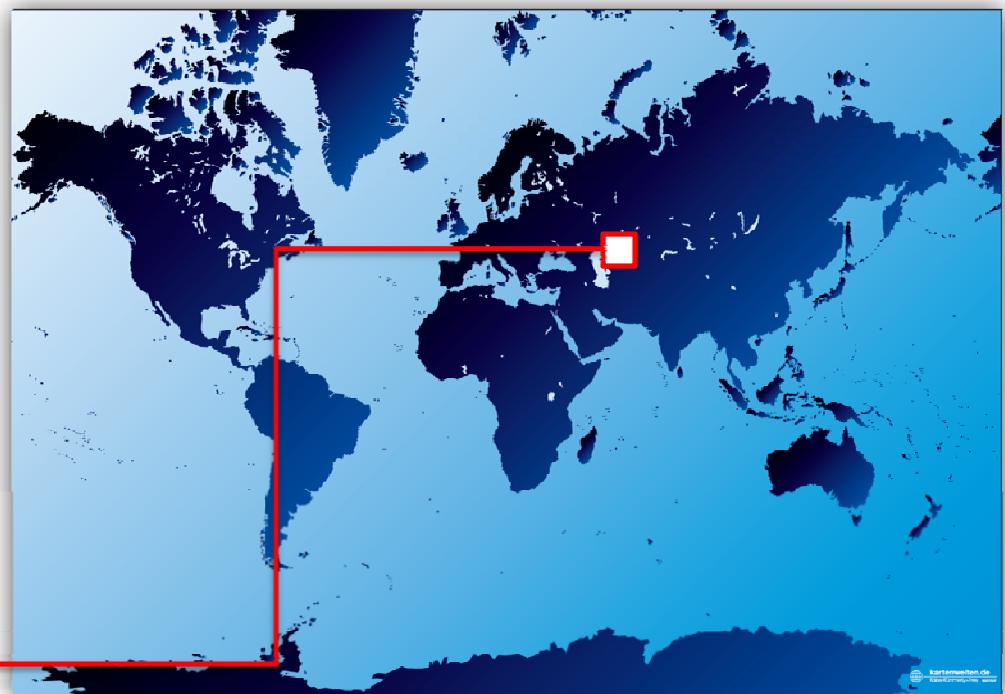
Соляные

Загрязняющие производства

Техногенные аварии



Аральское Море (Средняя Азия)



МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



Бризовые циркуляции

Пыльные

Соляные

Загрязняющие производства

Техногенные аварии



Bonneville (Utah, USA)



МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



Бризовые циркуляции

Пыльные

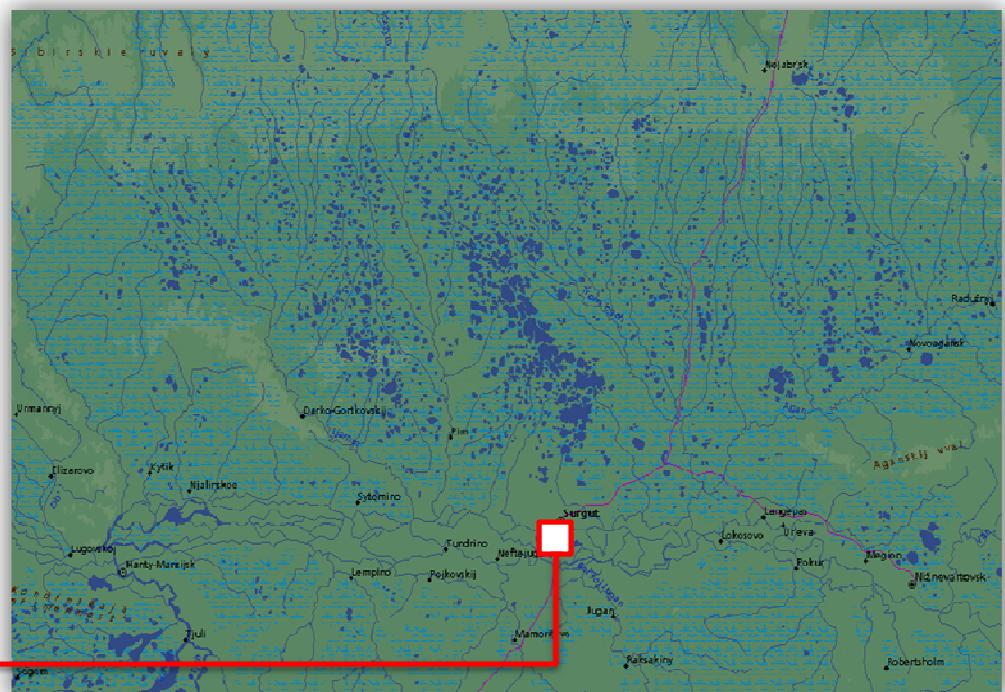
Соляные

Загрязняющие производства

Техногенные аварии



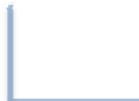
Сургут (Ханты-Мансийский АО)



МЕЗОМАСШТАБНЫЙ ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ



Бури



Бризовые циркуляции

Пыльные

Соляные

Загрязняющие производства

Техногенные аварии



Персидский залив



СОВМЕСТНАЯ МОДЕЛЬ NH3D

$$\frac{\partial}{\partial t}(up_*) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2 p_*) + \frac{\partial}{\partial y}(vup_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}up_*) = -p_* \frac{\partial \phi'}{\partial x} + \sigma \frac{\partial p_*}{\partial x} \frac{\partial \phi'}{\partial \sigma} + f(v - V_g)p_* + p_*(D_u + R_u), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vp_*) + \frac{\partial}{\partial x}(uvp_*) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2 p_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}vp_*) = -p_* \frac{\partial \phi'}{\partial y} + \sigma \frac{\partial p_*}{\partial y} \frac{\partial \phi'}{\partial \sigma} + f(u - U_g)p_* + p_*(D_v + R_v), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{w}p_*) + \frac{\partial}{\partial x}(u\tilde{w}p_*) + \frac{\partial}{\partial y}(v\tilde{w}p_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}\tilde{w}p_*) = S_v p_* \frac{\partial \phi'}{\partial \sigma} + p_* g \left(\frac{\theta}{\theta_{vs}} - q_r \right) + p_*(D_w + R_w), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta'p_*) + \frac{\partial}{\partial x}(u\theta'p_*) + \frac{\partial}{\partial y}(v\theta'p_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}\theta'p_*) = -S_v \tilde{w} p_* \frac{\partial \theta_{vs}}{\partial \sigma} + p_* \frac{L_v}{c_p} \left(\frac{p_0}{p} \right)^k (C - E) + p_*(D_\theta + R_\theta), \quad (4)$$

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(up_*) + \frac{\partial}{\partial y}(vp_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}p_*) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(q_vp_*) + \frac{\partial}{\partial x}(uq_vp_*) + \frac{\partial}{\partial y}(vq_vp_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}q_vp_*) = p_*(E - C) + p_*(D_{qv} + R_{qv}), \quad (6)$$

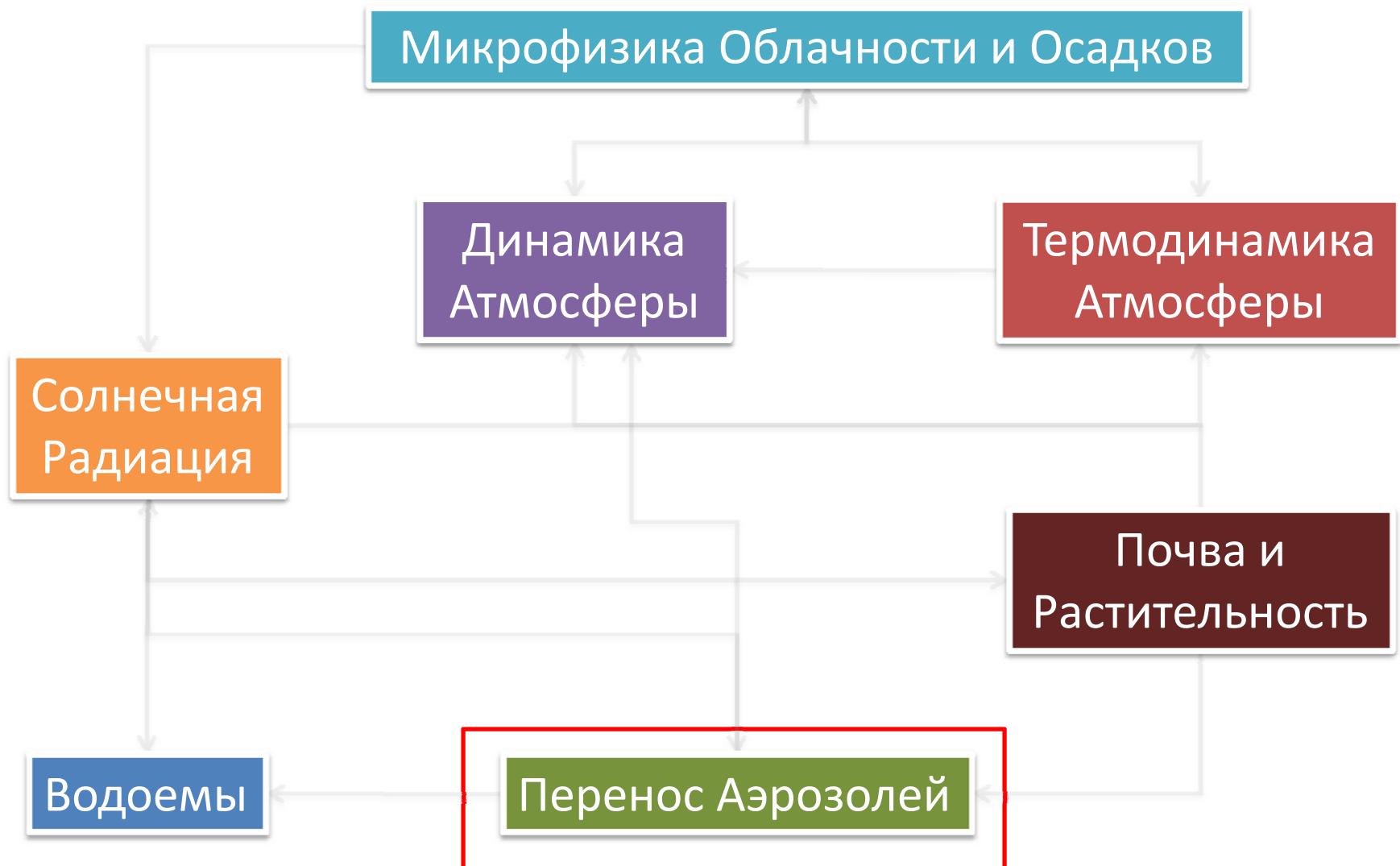
$$\frac{\partial}{\partial t}(q_cp_*) + \frac{\partial}{\partial x}(uq_cp_*) + \frac{\partial}{\partial y}(vq_cp_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}q_cp_*) = p_*(C - A) + p_*(D_{qc} + R_{qc}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(q_rp_*) + \frac{\partial}{\partial x}(uq_rp_*) + \frac{\partial}{\partial y}(vq_rp_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}q_rp_*) = p_*(A - E) - g \frac{\partial}{\partial \sigma}(\rho V_r q_r) + p_*(D_{qr} + R_{qr}). \quad (8)$$

СОВМЕСТНАЯ МОДЕЛЬ NH3D



СОВМЕСТНАЯ МОДЕЛЬ NH3D



УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

$$\frac{\partial}{\partial t}(q_{np}p_*) + \frac{\partial}{\partial x}(uq_{np}p_*) + \frac{\partial}{\partial y}(vq_{np}p_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{\sigma}q_{np}p_*) = p_*(D_{q_{np}} + R_{q_{np}})$$

обозначение в модели	переменные и параметры
u, v	горизонтальные составляющие скорости ветра
p, p_t, p_{surf}	давление, давление на верхней границе, давление на поверхности Земли
p_*	$p_* = p_{surf} - p_t$
σ	$\frac{(p - p_t)}{(p_{surf} - p_t)}$ — вертикальная σ — координата
$\dot{\sigma}$	аналог вертикальной скорости в σ -системе координат
q_{np}	концентрация примеси
$R_{q_{np}}$	источник/сток примеси
ρ	плотность
Q_j	компоненты вектора турбулентного потока примеси
$D_{q_{np}}$	$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial Q_3}{\partial z} \right)$ — турбулентная диффузия примеси

СХЕМА “ЧЕХАРДА”

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \psi) = R \quad \text{— исходное уравнение}$$

$$\frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^{n-1}}{2\Delta t} + \sum_{I=1}^M L_I(v_I \psi_i^n) = R^n, \quad \text{— схема}$$

$$L_I(v_I \psi_i^n) = \frac{v_{i+e_I} \psi_{i+e_I}^n - v_{i-e_I} \psi_{i-e_I}^n}{2\Delta x^I}$$



- Второй порядок аппроксимации по пространству и по времени
- Простота реализации



- “Расщепление” на два решения
- **Немонотонность**

MPDATA

(Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \psi) = R \quad \text{— исходное уравнение}$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{v}^{n+1/2} \psi^n) = R^{n+1/2} \quad \text{— временная дискретизация}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{v} \psi) = R - \bar{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{2} \Delta t \bar{v} (\bar{v} \cdot \nabla \psi) + \frac{1}{2} \Delta t \bar{v} \psi (\bar{\nabla} \cdot \bar{v}) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta t \bar{v} R \right) + O(\Delta t^2)$$

— дифференциальное приближение

$$\psi_i^{(l)} = \psi_i^{(l-1)} - \sum_{I=1}^M \left[F \left(\psi_i^{(l-1)}, \psi_{i+e_I}^{(l-1)}, V_{i+1/2e_I}^{I(l)} \right) - F \left(\psi_{i-e_I}^{(l-1)}, \psi_i^{(l-1)}, V_{i-1/2e_I}^{I(l)} \right) \right],$$

—MPDATA

$$F(\psi_L, \psi_R, V) = \frac{1}{2}(V + |V|) \psi_L + \frac{1}{2}(V - |V|) \psi_R$$

MPDATA

(Multidimensional Positive Definite Advection Transport Algorithm)

$$V_{i+1/2e_I}^{I(1)} = [v^I]_{i+1/2e_I}^{n+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x^I} \quad V_{i-1/2e_I}^{I(1)} = [v^I]_{i-1/2e_I}^{n+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x^I} \quad \text{— начальные псевдоскорости}$$

$$V_{i+1/2e_I}^{I(l+1)} = \left[|V_{i+1/2e_I}^{I(l)}| - \left(V_{i+1/2e_I}^{I(l)} \right)^2 \right] \cdot \frac{\psi_{i+e_I}^{(l)} - \psi_i^{(l)}}{\psi_{i+e_I}^{(l)} + \psi_i^{(l)}} \quad \text{— псевдоскорости для недивергентной модели}$$

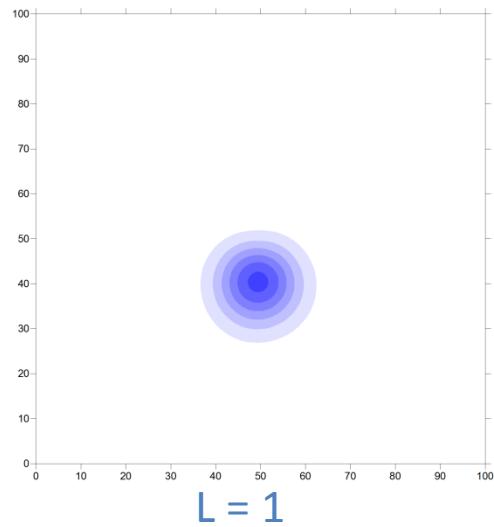
$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{J=1, J \neq I}^M V_{i+1/2e_I}^{I(l)} \cdot \overline{V_{i+1/2e_I}^{J(l)}} \cdot \frac{\psi_{i+e_I+e_J}^{(l)} + \psi_{i+e_J}^{(l)} - \psi_{i+e_I-e_J}^{(l)} - \psi_{i-e_J}^{(l)}}{\psi_{i+e_I+e_J}^{(l)} + \psi_{i+e_J}^{(l)} + \psi_{i+e_I-e_J}^{(l)} + \psi_{i-e_J}^{(l)}}$$



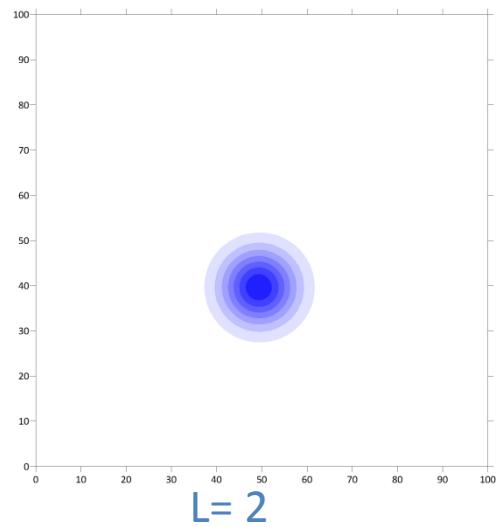
- Второй порядок аппроксимации по пространству и по времени за счёт внутренних итераций.
- Выполнение закона сохранения массы
- Положительная определённость
- Монотонность

ДВУМЕРНЫЙ ТЕСТ

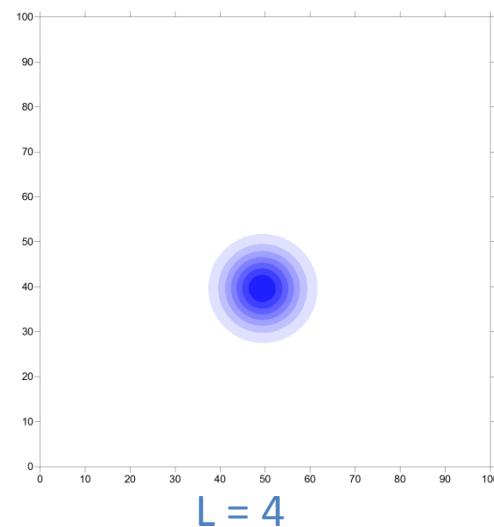
периодические
границные условия



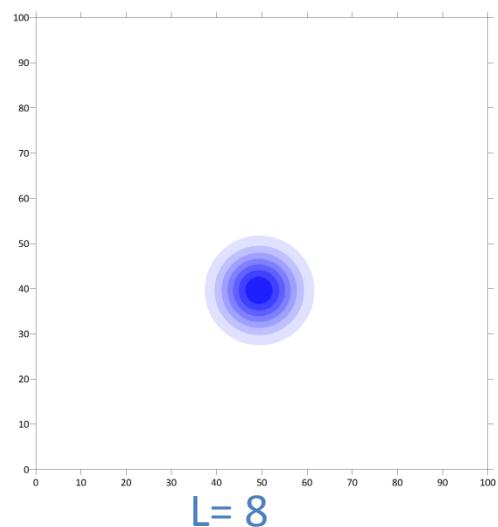
$L = 1$



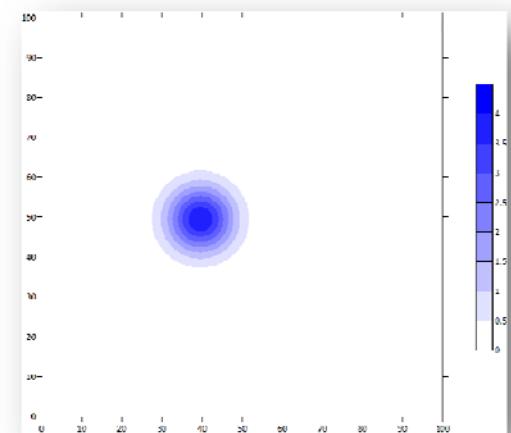
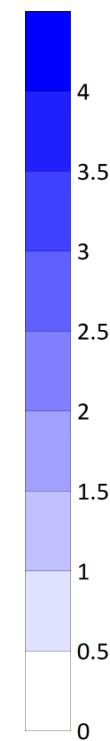
$L = 2$



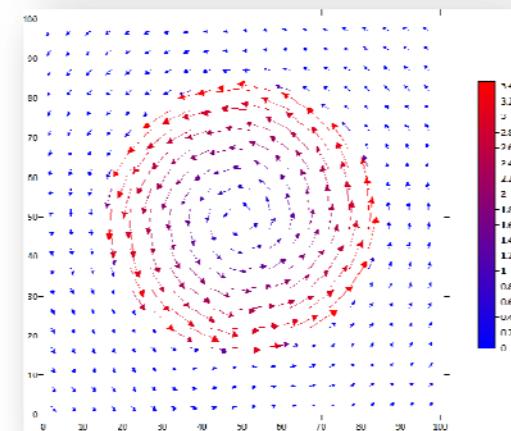
$L = 4$



$L = 8$



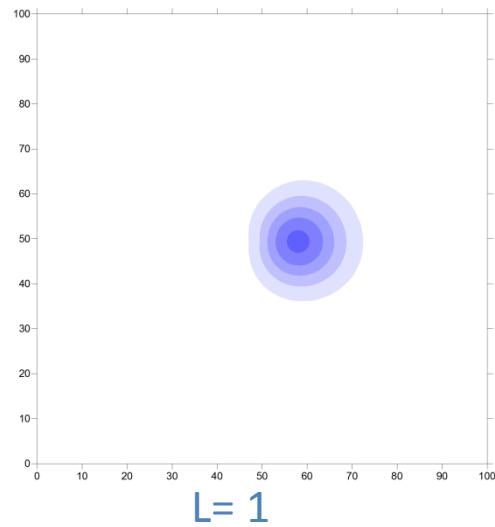
$n = 150$



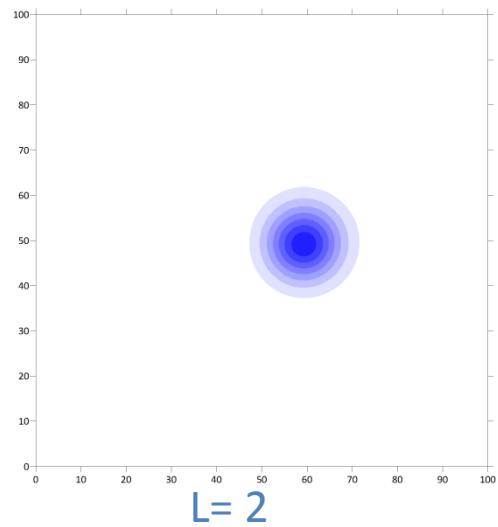
MPDATA

ДВУМЕРНЫЙ ТЕСТ

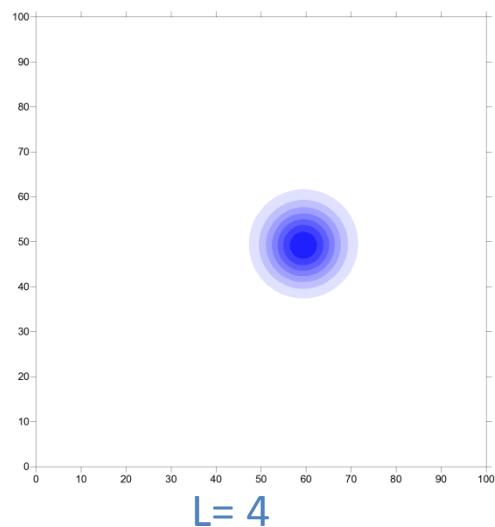
периодические
границные условия



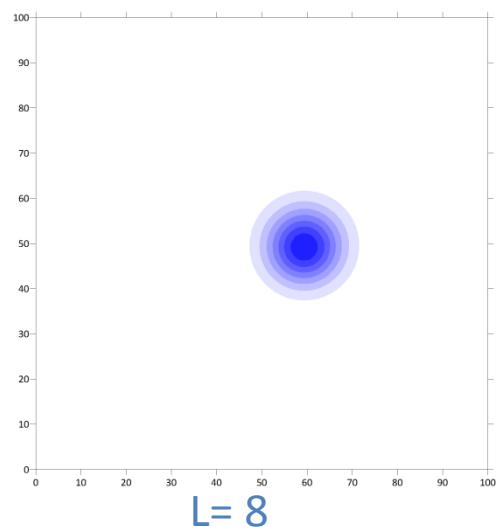
$L = 1$



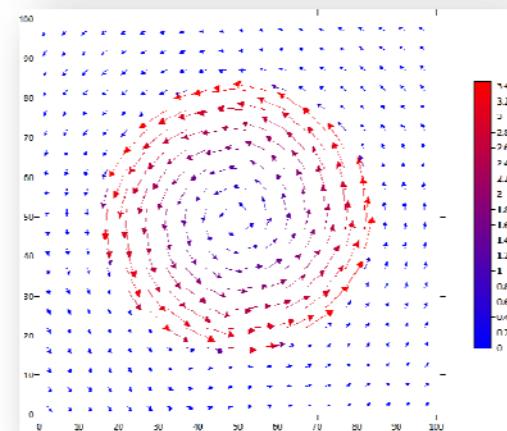
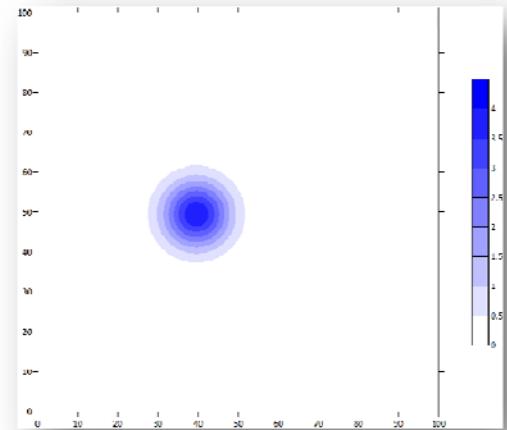
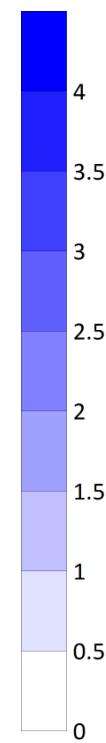
$L = 2$



$L = 4$



$L = 8$

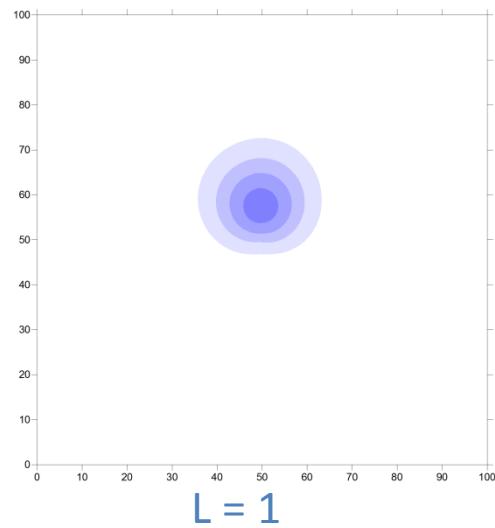


$n = 300$

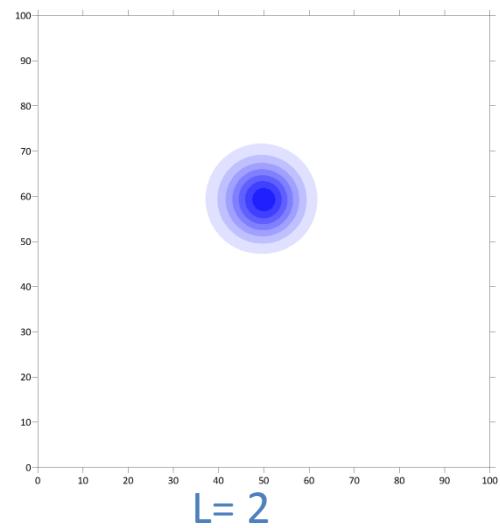
MPDATA

ДВУМЕРНЫЙ ТЕСТ

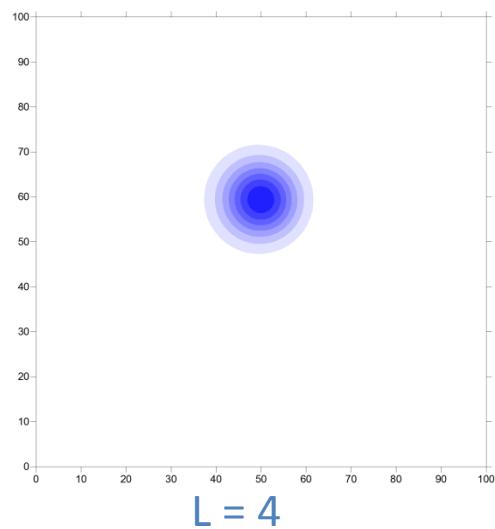
периодические
границные условия



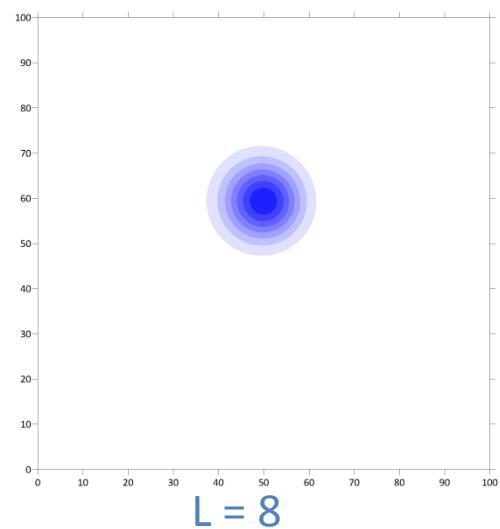
$L = 1$



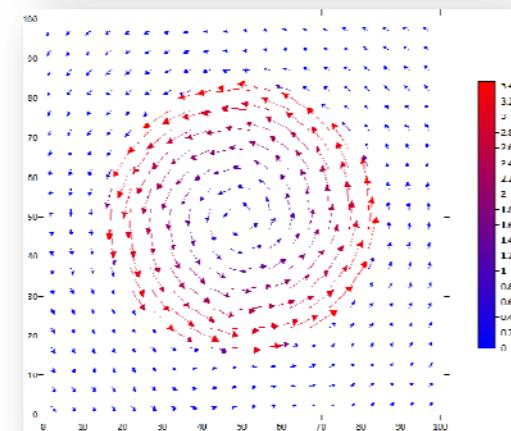
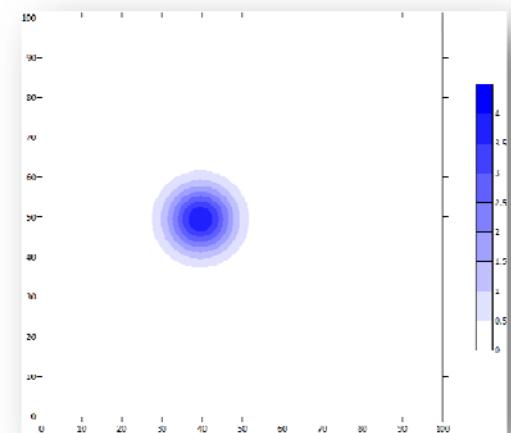
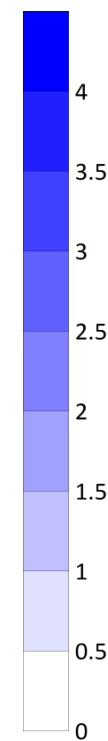
$L = 2$



$L = 4$



$L = 8$

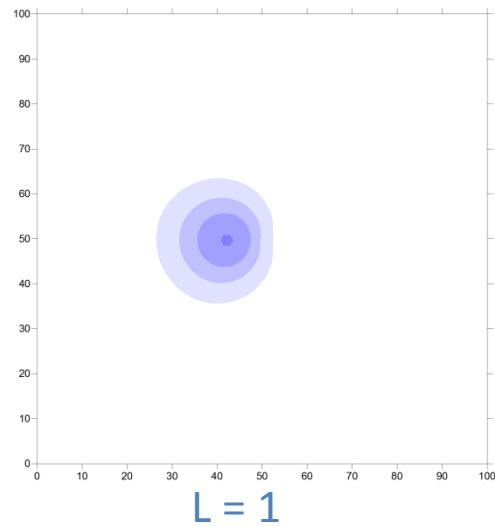


$n = 450$

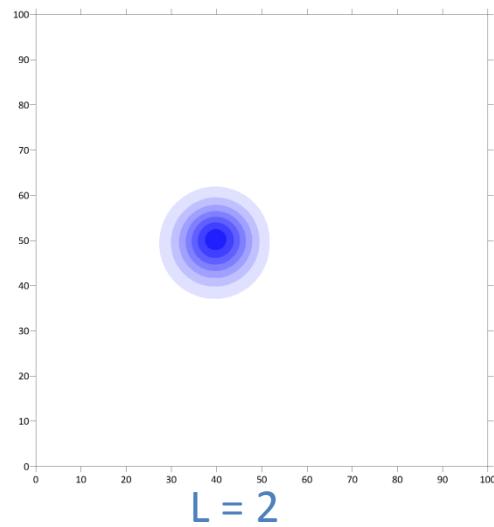
MPDATA

ДВУМЕРНЫЙ ТЕСТ

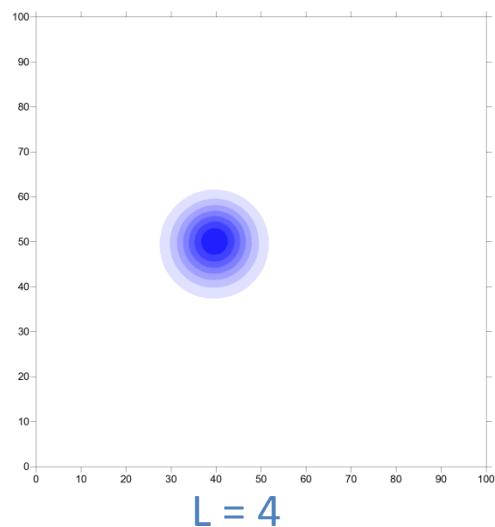
периодические
границные условия



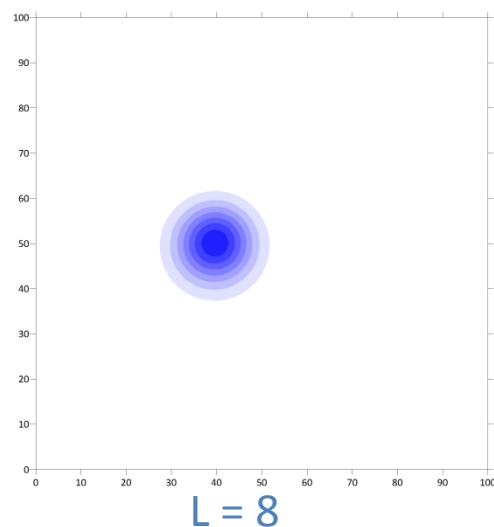
$L = 1$



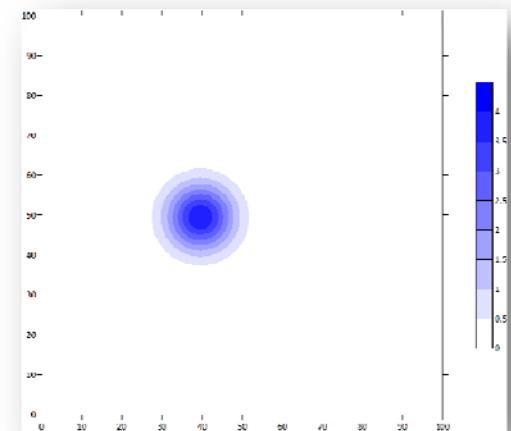
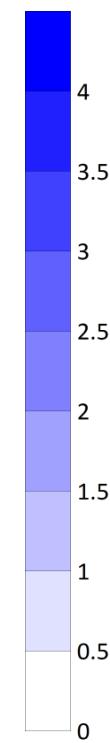
$L = 2$



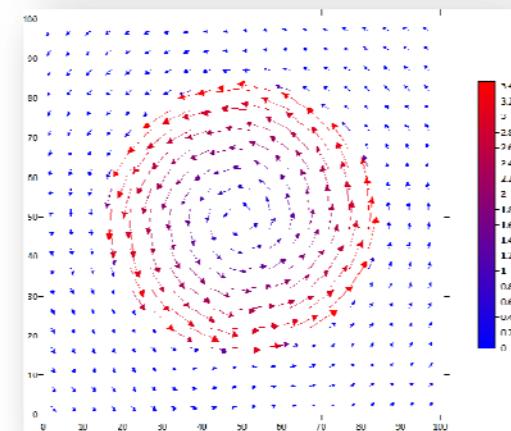
$L = 4$



$L = 8$



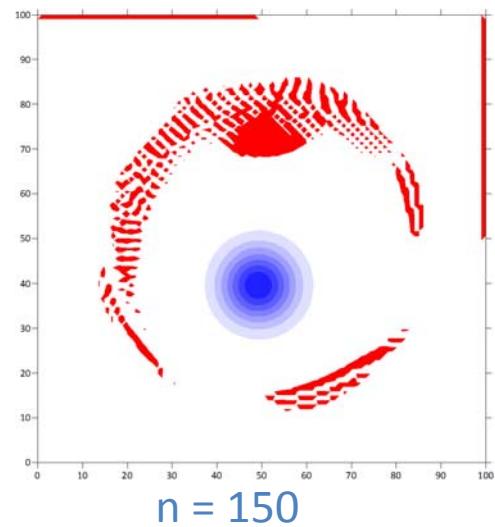
$n = 600$



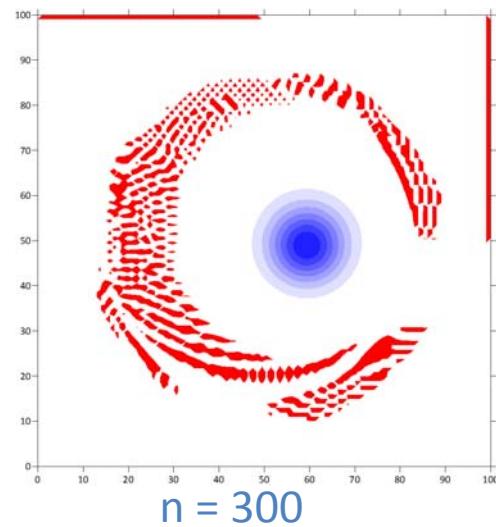
MPDATA

ДВУМЕРНЫЙ ТЕСТ

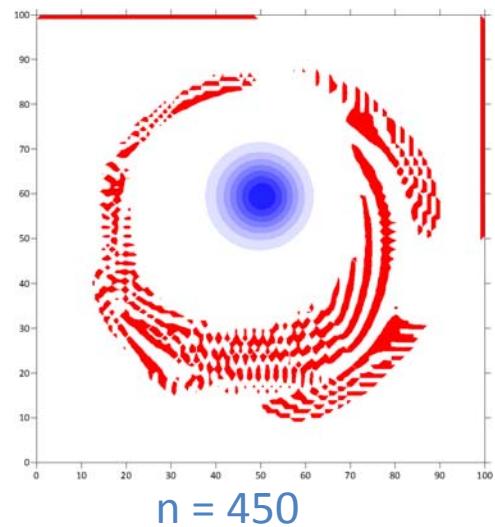
периодические
границы условия



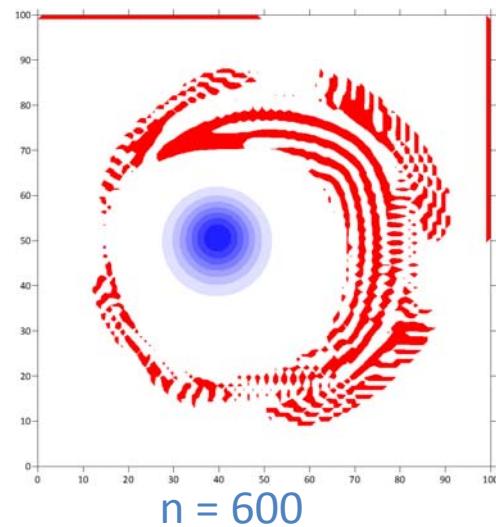
$n = 150$



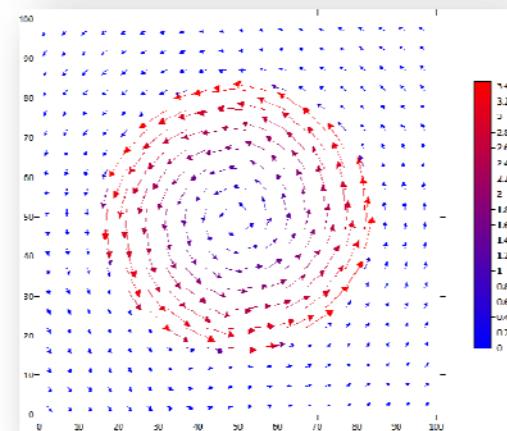
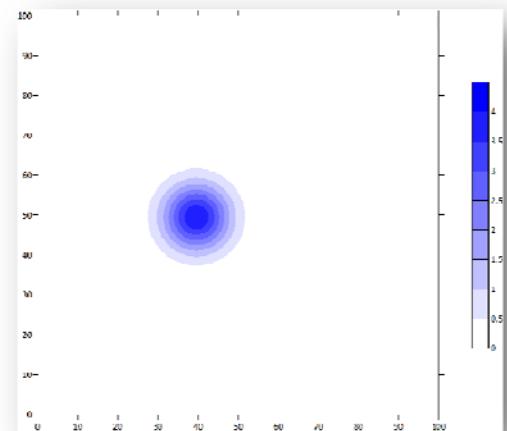
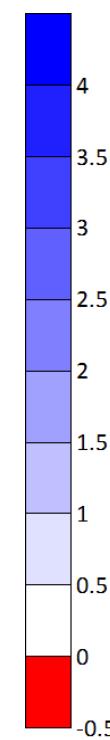
$n = 300$



$n = 450$



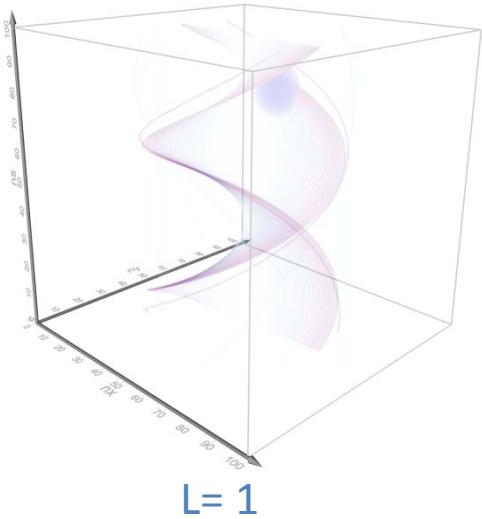
$n = 600$



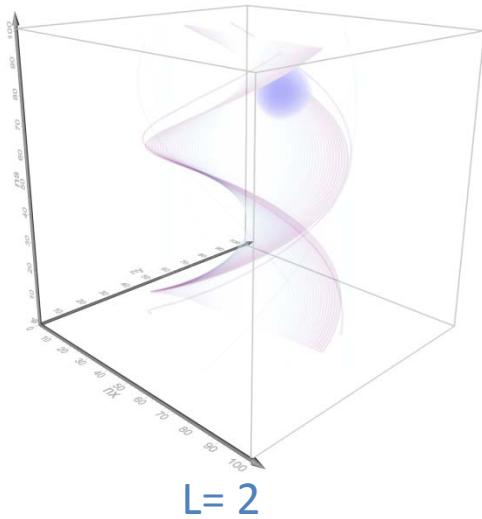
“ЧЕХАРДА”

ТРЕХМЕРНЫЙ ТЕСТ

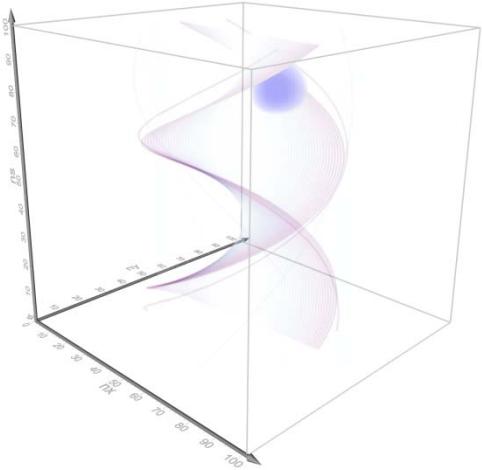
периодические
границные условия



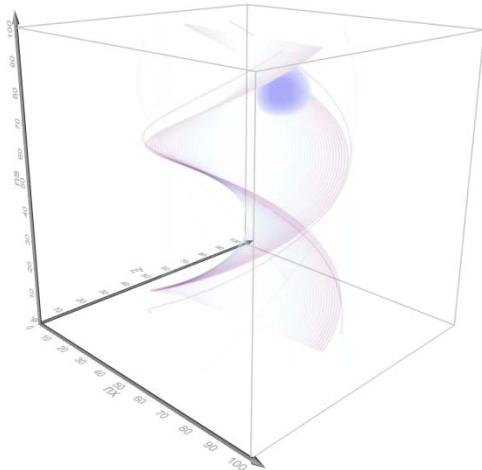
$L = 1$



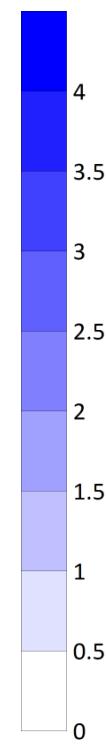
$L = 2$



$L = 4$

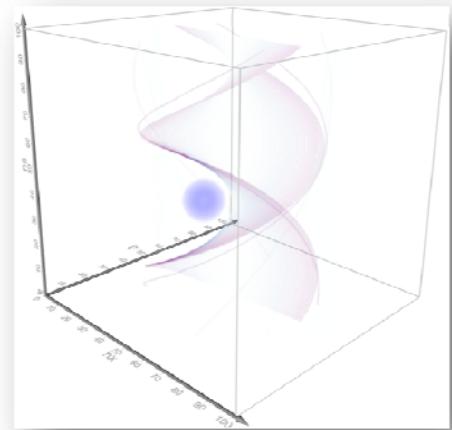


$L = 8$



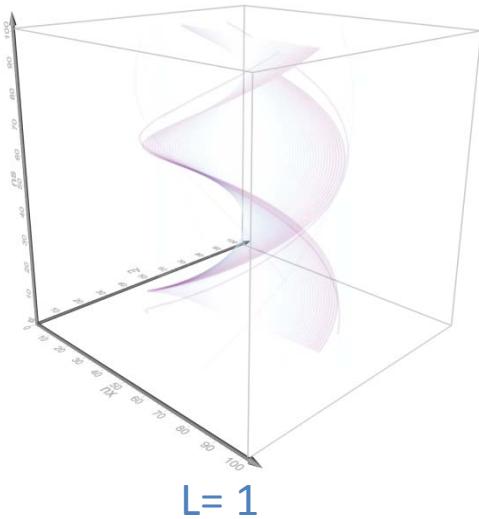
$n = 600$

MPDATA

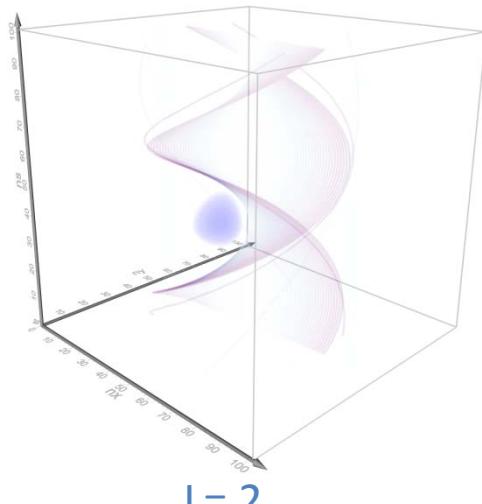


ТРЕХМЕРНЫЙ ТЕСТ

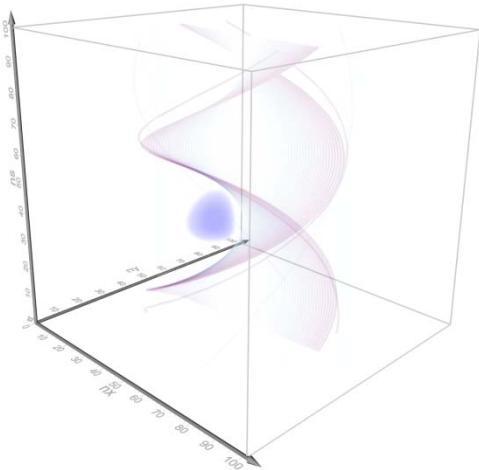
периодические
границные условия



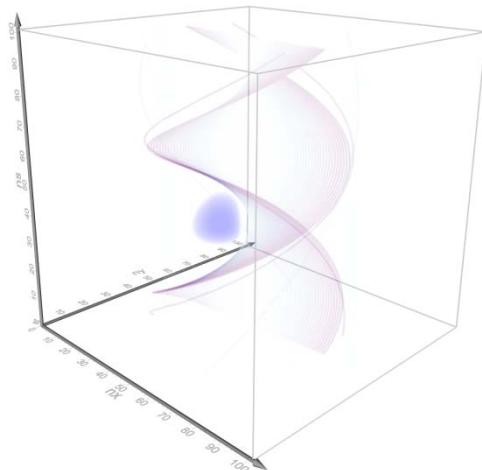
$L = 1$



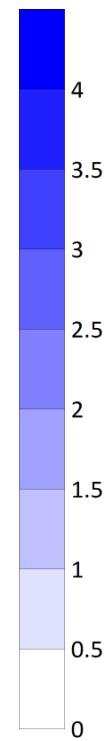
$L = 2$



$L = 4$

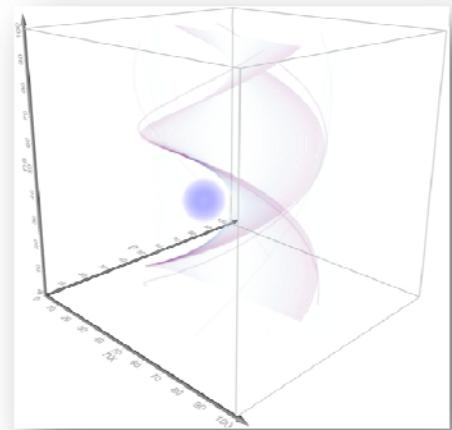


$L = 8$



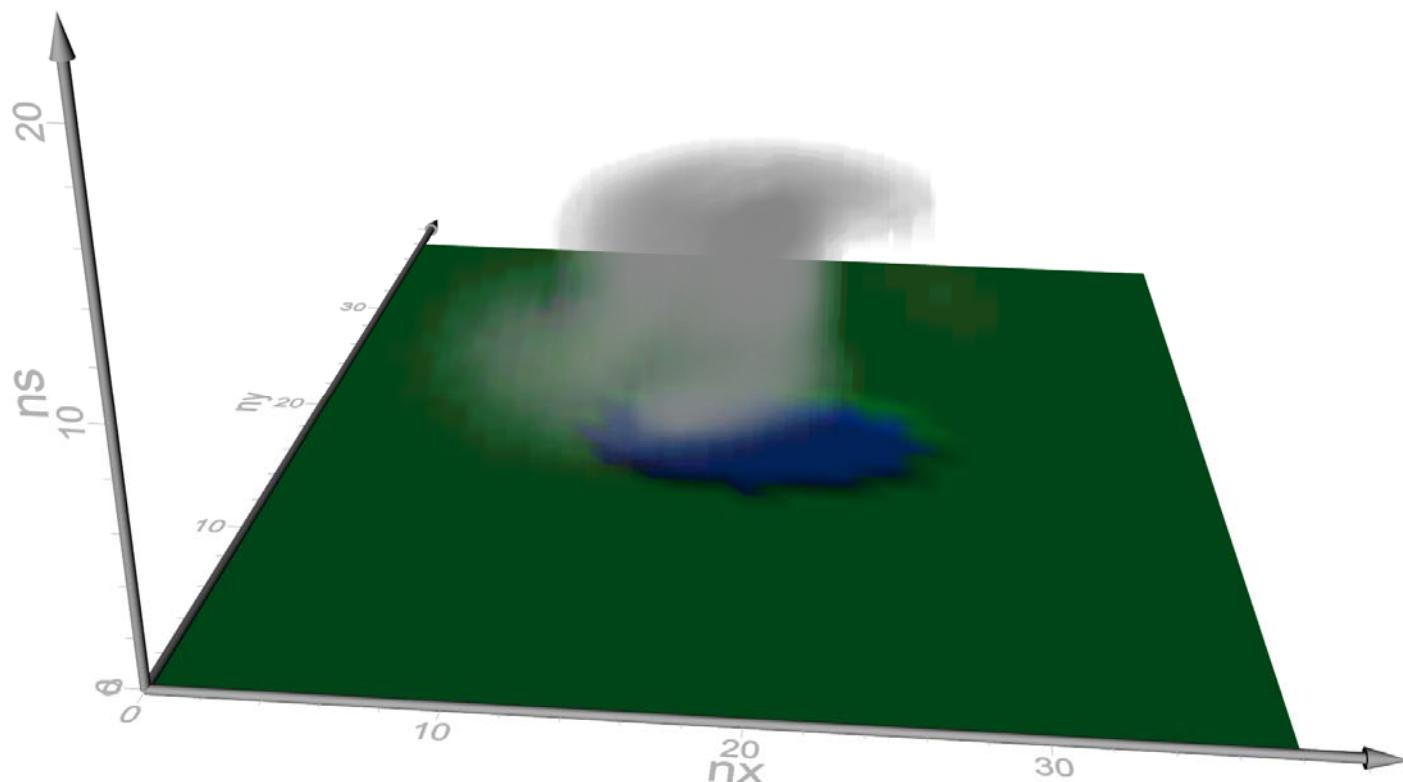
$n = 1200$

MPDATA



ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ НАД ОЗЕРОМ

- сетка $39 \times 39 \times 22$, граничные условия Дирихле
- периодический источник в т. (15, 16, 3) : 0,001 кг примеси / 10 сек
- озеро эллиптической формы с центром в т. (20, 20) и радиусами 7 и 4



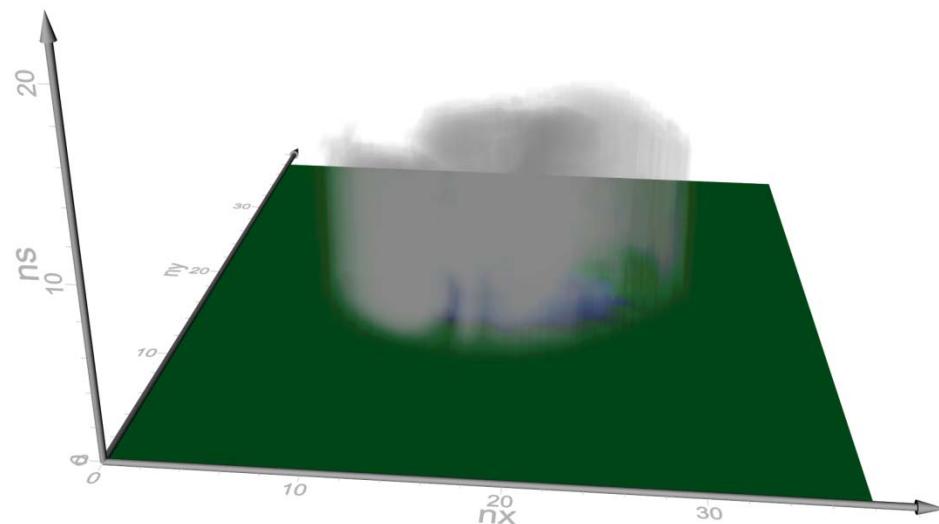
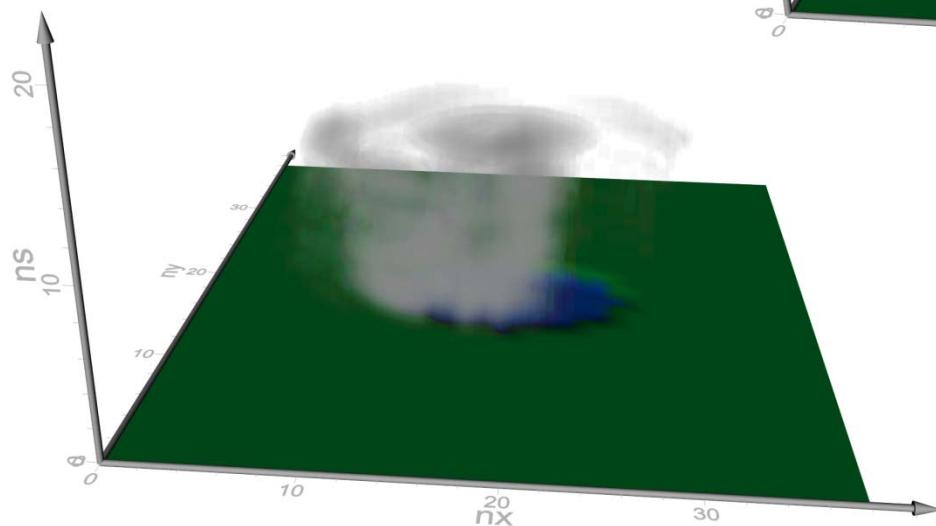
Начальное распределение примеси в 6 ч утра

ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ НАД ОЗЕРОМ

распределение примеси в 16 ч дня

“ЧЕХАРДА”

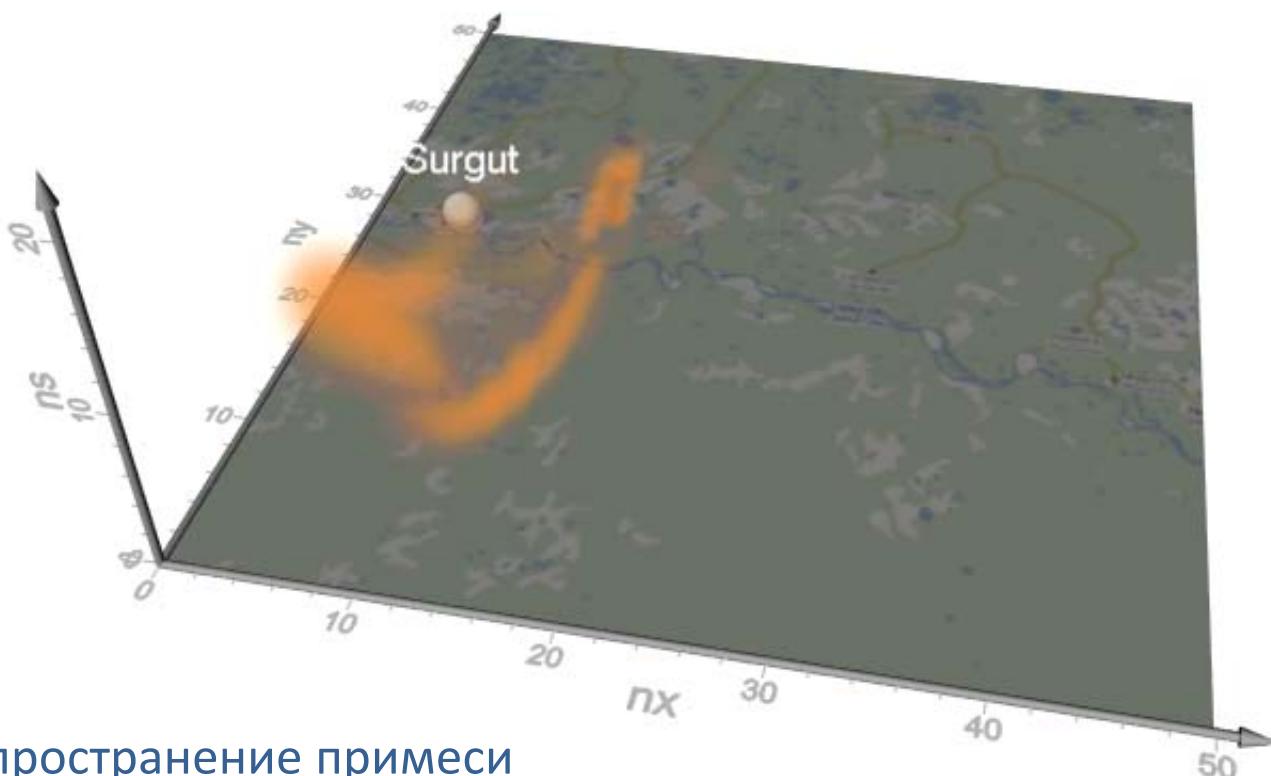
$$q_{i,j,k}^n := \max(0, q_{i,j,k}^n)$$



MPDATA

ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ НАД ЗАПАДНОЙ СИБИРЬЮ

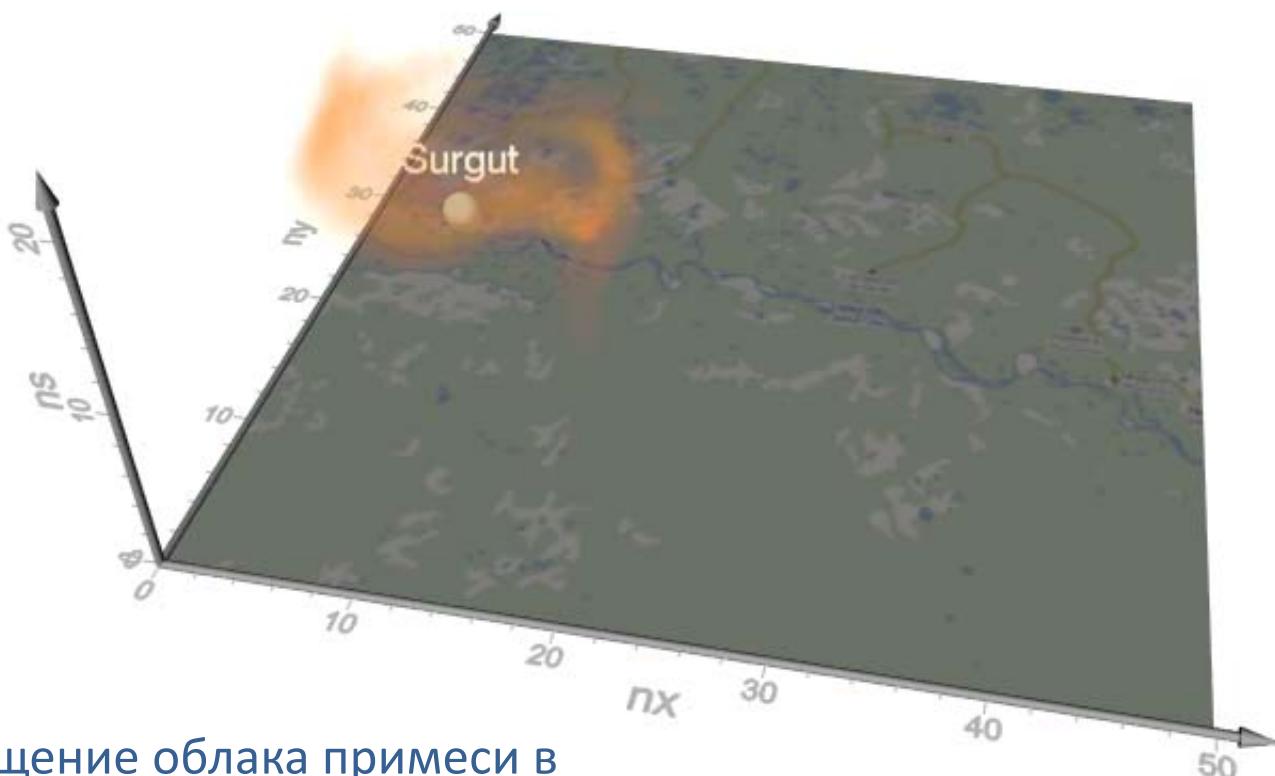
- сетка $48 \times 48 \times 22$ (178×178 км), граничные условия Дирихле
- периодический источник на берегу р. Обь в т. (15, 26, 3) вблизи г. Сургут : 0,001 кг примеси / 5 сек



Распространение примеси
перпендикулярно руслу реки в 13:00 третьего дня интегрирования

ПЕРЕНОС ПРИМЕСИ НАД ЗАПАДНОЙ СИБИРЬЮ

- сетка $48 \times 48 \times 22$ (178×178 км), граничные условия Дирихле
- периодический источник на берегу р. Обь в т. (15, 26, 3) вблизи г. Сургут : 0,001 кг примеси / 5 сек

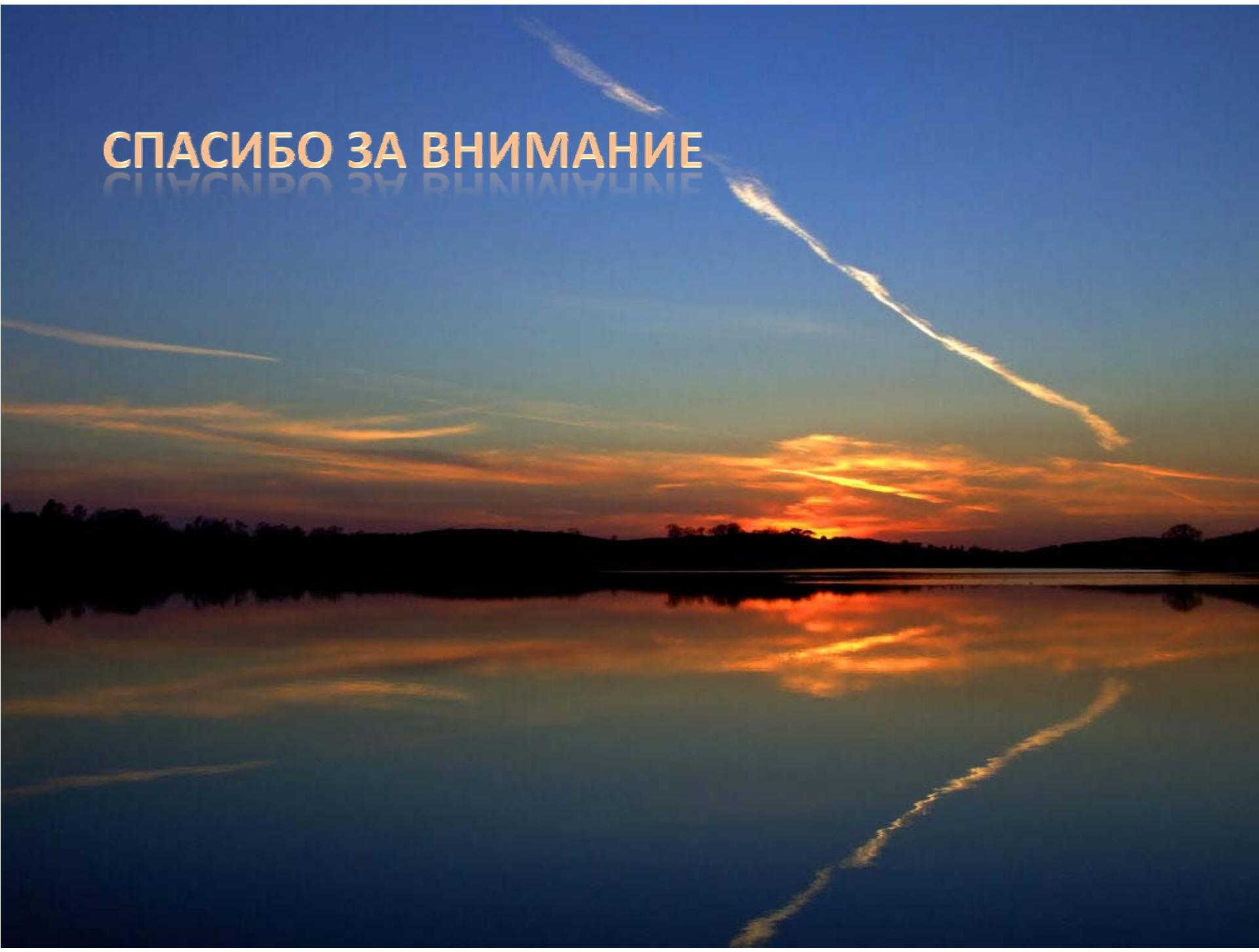


Вращение облака примеси в
атмосферном вихре в 0:00 пятого дня интегрирования

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Реализован класс вычислительно эффективных конечно-разностных алгоритмов *MPDATA*. Проведен анализ условий устойчивости по совокупности итераций, а также монотонности и положительной определенности *MPDATA*.
- *MPDATA* адаптирован для включения в мезомасштабную модель *NH3D* — совместную модель атмосферы и подстилающей поверхности с одномерной параметризацией гидрологических объектов.
- Проведен сравнительный анализ расчетов с использованием схем “чехарда” и *MPDATA* в рамках модели *NH3D*, а также на двумерном и трехмерном тестовых примерах.
- С использованием схемы *MPDATA* проведено моделирование переноса примеси над гидрологически неоднородной территорией в Западной Сибири.

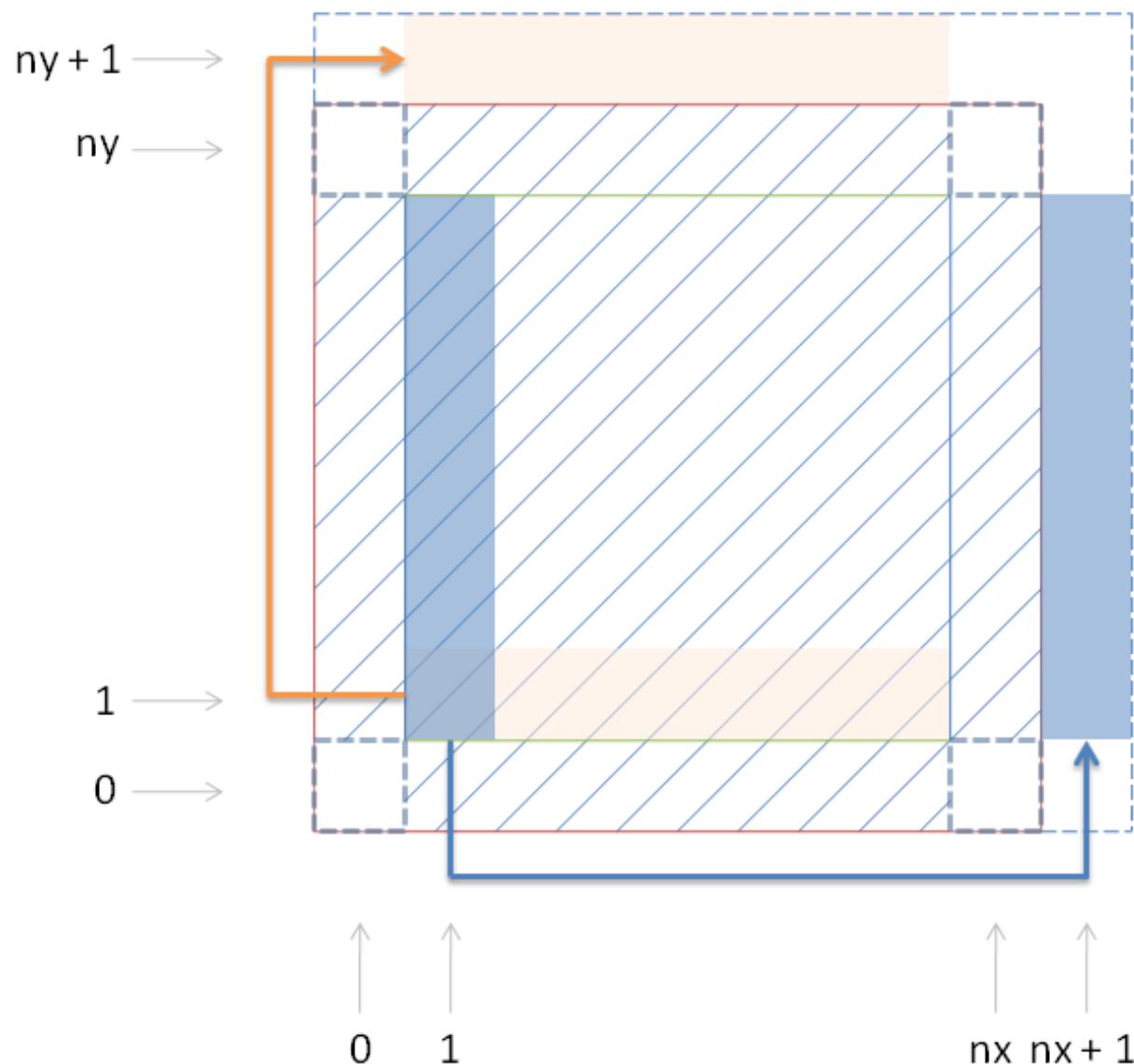
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-05-00200.

A landscape photograph of a lake at sunset. The sky is filled with warm, orange and yellow hues, with darker blue at the top. Two distinct contrails or streaks of light extend from the upper left towards the lower right across the sky. The lake's surface is calm, reflecting the colors of the sky and the dark silhouette of a distant shoreline with trees and hills.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ



ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

