



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

Природно-математички факултет
Институт за математику и информатику

Данко Милашиновић

Развој метода и софтверског система за
пре и пост процесирање модела
коначних елемената

Докторска дисертација

Крагујевац, 2011.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I Аутор	
Име и презиме:	Данко Милашиновић
Датум и место рођења:	31. децембар 1981. године
Садашње запослење:	Истраживачко развојни центар за биоинжењеринг - BiolRC, Крагујевац
II Докторска дисертација	
Наслов:	Развој метода и софтверског система за пре и пост процесирање модела коначних елемената
Број страница:	190
Број слика:	66
Број библиографских података:	48
Установа и место где је рад израђен:	ПМФ Крагујевац
Научна област (УДК):	004.94
Ментор:	Др. Владимир Цвјетковић, ПМФ Крагујевац
III Оцена и одбрана	
Датум пријаве теме:	24.06.2009. (одлука бр. 410/III-1)
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:	
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:	
- Др. Владимир Цвјетковић, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Информатика у физици;	
- Др. Ненад Филиповић, редовни професор машинског факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Биомеханика, Информатика;	
- Др. Мирко Росић, редовни професор медицинског факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Физиологија;	
- Др. Дубравка Мијуца, редовни професор Факултета за градитељски менаџмент Унион у Београду, ужа научна област: Пројектовање и конструкције;	
- Др. Бобан Стојановић, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Програмирање.	
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:	
- Др. Владимир Цвјетковић, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Информатика у физици;	
- Др. Ненад Филиповић, редовни професор машинског факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Биомеханика, Информатика;	
- Др. Мирослава Петровић-Торгашев, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Геометрија;	
- Др. Дубравка Мијуца, редовни професор Факултета за градитељски менаџмент Унион у Београду, ужа научна област: Пројектовање и конструкције;	
- Др. Бобан Стојановић, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, ужа научна област: Програмирање.	
Датум одбране дисертације:	

Предговор

Готово целога живота био сам фасциниран компјутерима. То је један од разлога што ми рад са њима никада није био напоран. Обзиром на то да ми је одувек посебно задовољство било да играм и развијам компјутерске игрице, рад на компјутерским симулацијама, који је налик њима, ми је такође веома занимљив. Мада сам прво искуство са компјутерским симулацијама физичких проблема имао у току основних студија, мој први озбиљан рад у овој области започео је са мојим ангажовањем 2007. године у Центру за научна истраживања Српске академије наука и уметности и Универзитета у Крагујевцу. Ова институција једно време носила је назив и Центар за суперкомпјутинг, а била је препознатљива по компјутерским симулацијама методом коначних елемената као и по томе што је имала компјутерски кластер. Од момента када сам дошао у тим Центра, мој рад био је руковођен од стране др. Ненада Филиповића.

У то време постојала је велика потреба за моделовањем реалних физичких проблема. Солвери који су развијани у Центру и на Машинском факултету у Крагујевцу, и у то време били су паралелизовани и у стању да прорачунавају веома компликоване и сложене системе. Карика која је недостајала био је софтвер који на ефикасан начин може да креира неструктурне моделе.

Професор Филиповић ми је, као први задатак, дао да пронађем начин како да ефикасно генеришем и поделим тетраедарне коначне елементе. Мислим да је до сада то један од најбитнијих догађаја у мојој каријери, пошто је дефинисао правац мог даљег рада. Добио сам модел реалне аорте пацијента који је скениран на Универзитетском клиничком центру у Хајделбергу у

Немачкој. Тада центар поседовао је најсавременији, тада експериментални, Сименсов (de. Siemens) MSCT скенер. Било ми је јасно да је то прави задатак где могу употребити програмерске вештине које сам у приличној мери уобличио у раду са својим ментором др. Владимиrom Џвјетковићем.

Проналазак софтвера Tetgen чији творац је др. Си, са Вајерштрасовог института за стохастику из Берлина, за мене је био од фундаменталног значаја јер је њиме било могуће генерисање тетраедарних коначних елемената у правилно дефинисаним просторним доменима. Осмислио сам алгоритме и направио прву варијанту софтвера STL Toolz и 8chvorova, и употребом солвера PAKF добио прве квалитетне резултате.

Након тога софтвер сам надограђивао у складу са новим потребама и много нових симулација било је направљено. Обзиром на обим посла у Центру то је било прилично напорно, и веома брзо постало је неопходно променити начин развоја софтвера. Направио сам јединствену библиотеку и на природан објектни начин испројектовао и имплементирао софтвер. То је било веома значајно јер је након тога свака модификација система била далеко једноставнија. Свака надоградња или модификација сводила се на слагање већ постојећих „коцкица“ и веома ретко прављење неке нове.

Резултати ове дисертације могу се прилично јасно поделити у два дела. Први део тиче се метода које су развијене у циљу квалитетног пре и пост процесирања модела коначних елемената, а други део тиче се имплементирања софтвера. За решавање конкретних проблема у оквиру Центра софтвер је био неопходан. Рад на развоју софтвера константно је захтевао стварање нових метода, те је један посао допуњавао други. Поред тога у овој дисертацији веома је детаљно извршена анализа тачности решења добијених употребом модела креираних софтером насталим у овом раду у комбинацији са PAKF солвером.

Занимљиво може бити и то да је и рад на овом документу имао приличан

допринос развоју метода и софтвера насталим у овој дисертацији. За време мог тромесечног боравка 2009. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Јиваскили у Финској то ми је постало јасно. Софтвер је тада био у „продукцијској фази“ већ прилично дуго, и тада сам почeo да стварам овај документ. У том процесу, заправо, извршио сам детаљну ревизију тога што сам направио те сам увидео да се многе ствари могу оптимизовати.

Захвалност за допринос овом раду дугујем својим професорима, као и колегама из Истраживачко развојног центра за биоинжењеринг.

Аутор

Својим родитељима

Садржај |

1. Увод.....	1
1.1 Компјутерске симулације.....	1
1.2 CFD симулације.....	6
1.3 CFD анализа методом коначних елемената.....	10
1.4 Компјутерске симулације у медицинске сврхе.....	13
2. Уводне дефиниције	15
3. Иницијални подаци.....	23
3.1 Формирање слика у медицинској дијагностици.....	26
3.1.1 Компјутеризована томографија.....	27
3.1.2 Ангиографија.....	31
3.1.3 Нуклеарна магнетна резонанца.....	32
3.1.4 Интраваскуларни ултразвук.....	35
3.2 Тродимензионална реконструкција.....	37
3.2.1 Директно креирање 3Д мреже коначних елемената на основу слика.....	41
3.2.2 Креирање 3Д мреже коначних елемената на основу задатог омотача.....	44
4. Мреже тродимензионалних коначних елемената.....	51
4.1 Тродимензионални изопараметарски коначни елемент.....	53
4.2 Методе креирања нових мрежа коначних елемената.....	59
4.2.1 Креирање мрежа осмочворних тродимензионалних коначних елемената од мреже четврочворних тетраедарних коначних елемената.....	64
4.2.2 Креирање мрежа осмочворних тродимензионалних коначних елемената од мреже коначних елемената типа шесточворних призми.....	68
4.2.3 Повећање резолуције мреже тродимензионалних изопараметарских коначних елемената.....	73
5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију.....	77
5.1 Наслеђивање почетних и граничних услова.....	79
5.2 Задавање почетних и граничних услова.....	84
5.2.1 Ограничавање модела коначних елемената.....	84
5.2.2 Креирање улазних и излазних отвора модела.....	86
6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената.....	95
6.1 Струјање флуида кроз цев кружног пресека.....	96
6.2 Струјање флуида кроз цев правоугаоног пресека.....	102
6.3 Струјање флуида кроз закривљену цев кружног пресека.....	107

6.4 Опструјавање флуида око сфере.....	112
6.5 Струјање флуида у абдоминалној аорти са анеуризмом.....	118
7. Пост процесирање резултата.....	125
7.1 Скаларне физичке величине.....	127
7.2 Векторске физичке величине.....	129
7.3 Струјне линије.....	132
7.4 Средњи смичући напон и осцилаторни смичући индекс.....	135
8. Детаљи програмске имплементације.....	137
8.1 Пример објектно-оријентисаног кода у имплементацији софтвера STL Toolz.....	144
8.2 Организација библиотеке софтверског система STL Toolz.....	149
8.3 Организација модула софтверског система STL Toolz.....	154
9. Закључна разматрања.....	161
9.1 Смернице за даљи рад.....	164
10. Додатак.....	167
10.1 Математички доказ валидности добијених мрежа коначних елемената	167
10.1.1 Подела троугла на три четврочворна елемента.....	167
10.1.2 Подела тетраедра на четири осмочворна (брик) елемента.....	168
10.2 Софтверски код.....	172
Литература.....	175
Софтвер.....	181

1. Увод |

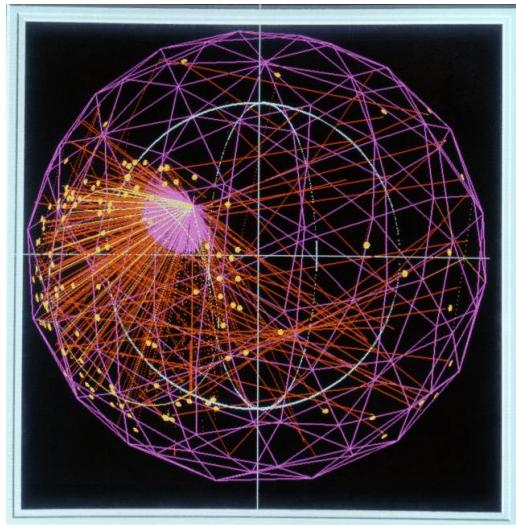
1.1 Компјутерске симулације

Компјутерска симулација је веома моћно средство за анализу. Она је базирана на рачунарским наукама и математици, а врло често и на теорији вероватноће и статистици. Са друге стране процес моделовања и експерименталног сазнања у симулирању упоредив је са уметношћу. Она је дакле један општи и веома често не толико добро јасан појам. Једну од најпознатијих дефиниција компјутерске симулације дао је професор Р. Е. Шенон (eng. Robert E. Shannon) [R.Shannon, 1975]:

Компјутерска симулација је процес дизајнирања компјутеризованог модела система или процеса и вршење експеримената над тим моделом са циљем разумевања понашања система и/или процењивања различитих стратегија за функционисање система.

Јасно је дакле да компјутерска симулација обухвата изградњу модела као и његову употребу у изучавању проблема. Може се рећи да је сврха компјутерских симулација да представе динамичке одговоре неког реалног или замишљеног система, на основу понашања другог система који је моделован на основу њега. Компјутерске симулације користе модел датог система у форми компјутерског програма. Оне су зато веома захвалне за проучавање динамичног понашања система или објекта у условима које није лако или безбедно извршити у реалности (симулација операције срца,

симулација земљотреса, симулација нуклеарне експлозије итд.). Симулације такође представљају јефтину алтернативну методу за експериментисање те се и због тога масовно примењују у задњих неколико деценија.



Сл. 1: Компјутерска симулација детекције неутрина на
Садбари Неутрино Опсерваторији (eng. Sudbury Neutrino Observatory)

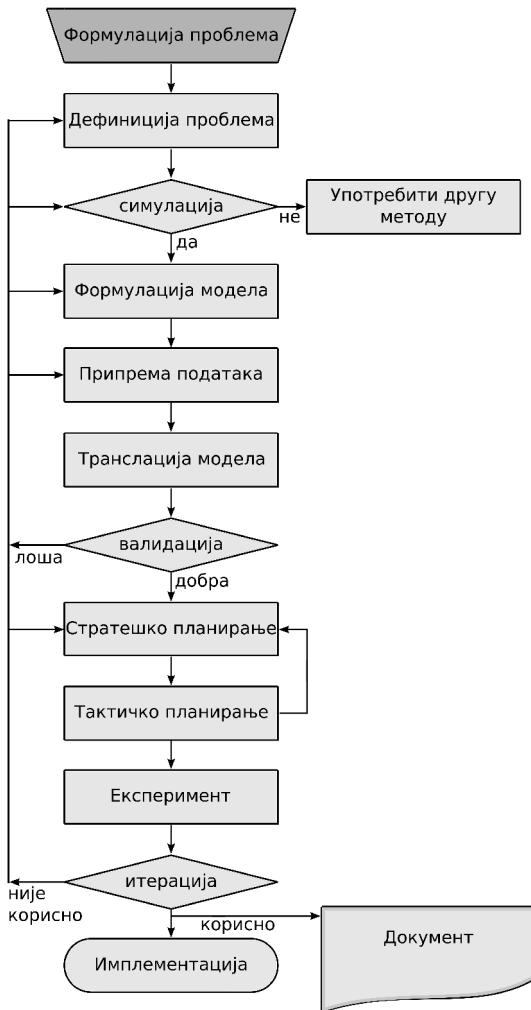
У употреби компјутерских симулација важи правило сазнавања на основу рада (eng. learning by doing). Каже се још и да је њихова употреба у сазнавању веома адекватно упоредива са начином на који дете сазнаје у игри. У игри дете бира адекватне моделе којима углавном репрезентује ствари из реалности, а њихова интеракција симулира интеракције између реалних ентитета. Предмет игре може примера ради бити аутомобил. Модел који се користи може имати више или мање детаља. Уколико се некоово потруди може му уградити управљачки систем као и погонски - међутим на крају једини „перфектан“ модел био би прави аутомобил.

Да би боље разумели ствари из реалности често смо дакле принуђени да на истоветан начин креирамо виртуелне моделе и да симулирамо њихово

понашање. Тако се за компјутерску симулацију може рећи и да је електронски еквивалент игре и да служи да на адекватан начин симулира виртуелну средину у којој се дешавају интеракције између виртуелних ентитета.

Према мишљењу професора Шенона [R.Shannon, 1983] компјутерску симулацију треба употребити ако је задовољен бар један од следећих услова:

- комплетна математичка формулатија проблема не постоји, или аналитички модели за решавање математичког модела нису развијени;
- аналитичке методе постоје, али су неопходне претпоставке којима се оне поједностављују да би могле да се примене;
- аналитичке методе су теоријски доступне, али су толико комплексне да симулација омогућава једноставнији начин да се дође до решења;
- неопходно је посматрати временску еволуцију неког система;
- немогуће је извршити реални експеримент у реалном окружењу;
- када је за реални експеримент потребно прилично много времена (пошто симулација пружа тоталну контролу над временом).



Сл. 2: Схема симулације [R.Shannon, 1975]

Једноставније симулације могуће је извршити на персоналним компјутерима, док неке компликованије могу захтевати далеко веће хардверске ресурсе - суперкомпјутере или компјутерске кластере. Занимљиво може бити да је употребом великих хардверских ресурса и савремених софтвера данас могуће добити прецизне симулације система који су толико компликовани да се граниче са научном фантастиком од пре неколико десетина година. Тако су и саме компјутерске симулације послужиле као инспирација за творце нове научне фантастике, али и науке те се примера

1. УВОД

ради не толико давно јавила филозофска идеја да смо ми заправо само део компјутерске симулације [N.Bostrom, 2003].

1.2 CFD симулације

CFD (eng. Computational fluid dynamics) је техника која користи нумеричке методе за анализу струјања флуида, трансфер топлоте и сличних физичких феномена [H.K.Versteeg - W.Malalaskera, 1995]. Нумеричке методе део су примењене математике, а тичу се развоја метода за решавање компликованих једначина употребом аритметичких функција. Углавном је за нумеричке методе неопходан компјутер услед њихове комплексности. Ова техника је веома ефикасна те се сматра незаобилазном у многим индустриским и научним пројектима. Неке од примена су:

- прорачунавање аеродинамичности возила;
- прорачунавање хидродинамичности возила;
- анализа ваздушног хлађења рачунарских система;
- прорачунавање струјања крви у живим организмима;
- анализа мотора са унутрашњим сагоревањем;
- анализа кретања вода у рекама, морима и океанима, као и подземних вода;
- проучавање кретања ваздушних струјања ради временске прогнозе;
- анализа кретања ваздуха у вентилационим системима у објектима.

Основне једначине механике флуида, познате су већ више од једног века.

Њихово познавање веома је важно за ваљано разумевање струјања флуида, али је њихова примена у решавању конкретних проблема углавном редукована на неке основне (eng. benchmark) моделе. У анализирању компликованијих проблема струјања флуида традиционално је неопходно применити нека поједностављења [J.H.Ferziger - M.Perić, 1997].

Мада је доста прецизна општа схема симулације из 1975. године која је приказана на слици 2, у циљу јаснијег разумевања овог рада задаци везани за CFD симулацију могу се прилично прецизно поделити у три дела:

- стварање квалитетног модела (пре процесирање);
- валидно прорачунавање (процесирање);
- адекватно приказивање и анализа добијених резултата (пост процесирање).

Да би се пронашло решење за дати проблем, неопходно је дефинисати га. За симулацију физичког проблема неопходно је направити модел. Модел физичког проблема може се дефинисати као репрезентација групе објекта или идеја у одређеној форми која је различита од самог физичког ентитета [R.Shannon, 1998]. Модел који се прави у зависности од типа физичког система може имати различите форме. Неопходно је дефинисати шта је од интереса у датом систему, какво је његово окружење и која је сврха проучавања. Када је модел направљен врши се прорачунавање. У зависности од потреба (и могућности) модел може бити више или мање детаљан. Детаљнији модел омогућава да добијени резултат буде са више детаља. Есенцијални део уметности моделовања је апстракција и поједностављење. Принцип је такав да треба тежити да се моделује око дела система који би

требао да пружи одговоре на тражена питања пре него да се имитира реални систем [R.Shannon, 1998]. Резултат који се очекује даје сугестију о томе какав модел треба да буде.

У фази препроцесирања углавном се на првом месту дефинише простор од интереса, односно геометријска граница проблема (eng. boundary). Затим је потребно дискретизовати на адекватан начин за дату методу простор који је оивичен датом границом у мање, не преклапајуће, сегменте [H.K.Versteeg - W.Malalaskera, 1995]. Такође се дефинишу гранични услови, почетно стање, флуид и евентуално додатни параметри везани за конкретну симулацију. Сви ти подаци смештају се углавном у један фајл (eng. file) на адекватан начин за дати програм за прорачунавање (eng. solver).

По правилу уколико се простор од интереса издели у више сегмената значи да ће решење које се добије бити тачније. Велики број сегмената такође значи да ће комплексније рачунање бити, те захтева више хардверских ресурса. Тако дискретизација треба да буде прилагођена проблему и могућностима. За прецизно рачунање струјања флуида потребно је да се постигне финија дискретизација близу граница (eng. body-fitted), то је углавном за CFD симулације најоптималније. У индустрији се на CFD пројектима утроши око 50% времена на добијање адекватног простора од интереса и његову сегментацију [H.K.Versteeg - W.Malalaskera, 1995]. Због тога је оптимизација овог процеса веома важна.

Прорачунавање практично значи да специјално направљени компјутерски програм – програм за прорачунавање (eng. solver) пролази кроз временске кораке константно прорачунавајући ново стање система. Ново стање система сваки пут је условљено претходним. Програм за прорачунавање је компјутерски софтвер који служи за решавање једначина, или система

једначина истих или различитих типова. Углавном је то независтан програм (eng. stand alone) али може бити у употреби и као модул неког другог програма.

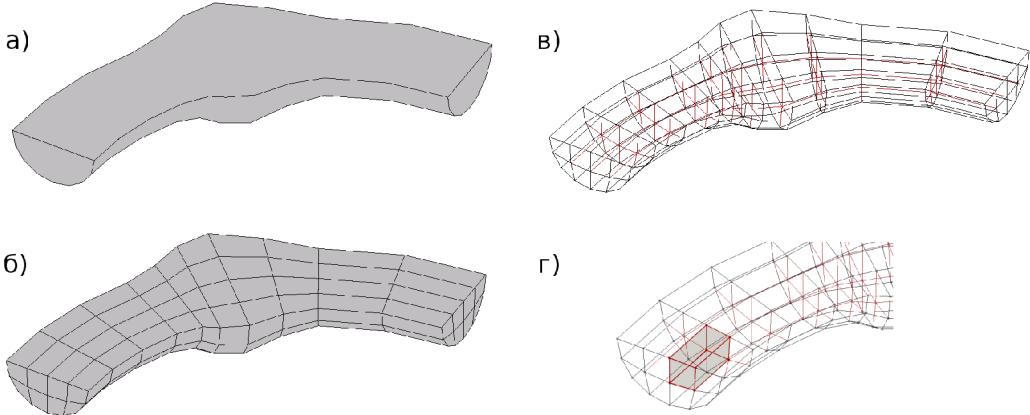
Након добијених резултата врши се обрада и анализа добијених података. Ова фаза подједнако је битна као и претходне. Уколико се адекватно не прикажу подаци добијени из прорачуна, комплетна симулација губи на значају. Унапређивањем програма за пост процесирање, могуће је чак и из старих резултата добити нове, односно информације које раније нису биле уочене.

1.3 CFD анализа методом коначних елемената

На први поглед може изгледати занимљивим како то да се у компјутеру који је дигитални уређај представља континуални флуид. Један од стандардних начина да се тај проблем превазиђе је познат је као метод коначних елемената (eng. Finite element method).

Метод коначних елемената је доминантан нумерички метод решавања поља физичких величина у науци и индустрији. Настао је шездесетих година прошлог века. Овај метод првобитно је нашао примену за линеарне проблеме механике солида, а временом је развијан све до нелинеарних физичких проблема какви се срећу у биологији и медицини. Развој овог метода убрзao је веома велики број истраживача у свету који се овом граном рачунске механике баве, убрзани развој рачунара, али и његова примена у најразличитијим типовима проблема. Многи еминентни научни часописи данас скоро су потпуно базирани на методи коначних елемената.

Када се дефинише простор од интереса (просторни домен), у анализи методом коначних елемената врши се његова дискретизација у мале регије (поддомене) који се називају коначни елементи. Они се надовезују (без преклапања) и међусобно су повезани њиховим чвровима. На слици 3 приказана је једна параметарски генерисана мрежа коначних елемената (половине анеуризме) ради илustrације.



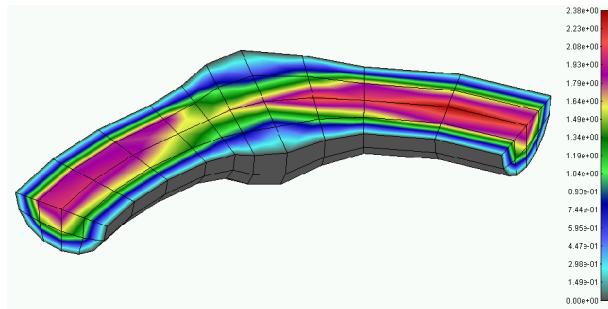
Сл. 3: Сегментација просторног домена у коначне елементе

На слици 3 може се уочити:

- а) просторни домен дефинисан је геометријском границом (омотачем);
- б) четврочворни коначни елементи љуске - омотача;
- в) тродимензионални осмочворни коначни елементи (поддомени интересног; просторног домена) добијени сегментацијом;
- г) приказани су и чворови коначних елемената, један елемент је осенчен.

Након извршене сегментације на коначне елементе се (приликом прорачунавања) примењују општа знања и искуства из механике континуума и нумеричке математике. Анализа система спречнутих коначних елемената, добијених дискретизацијом континуума, омогућава нумеричку симулацију одзива континуума на задате побуде. Физичке величине које се обухваћене моделом добијају се у дискретном облику, односно у тачкама које су произведене дискретизацијом – чворовима коначних елемената [M.Kojić et al.,

1998]. Након тога резултати за остале тачке које припадају простору од интереса добијају се употребом интерполационих функција. Решење брзина струјања флуида у скаларном облику за претходни пример приказане су на слици 4.



Сл. 4: Брзине флуида - скаларно

Поред метода коначних елемената постоје и друге методе које се користе у циљу CFD анализе. Најпознатије су:

- а) метод коначних запремина (eng. Finite Volume Method);
- б) метод коначних разлика (eng. Finite Difference Method);
- в) DPD (eng. Dissipative Particle Dynamics);
- г) SPH (eng. Smoothed Particle Hydrodynamics).

Од ових метода а) и б) спадају у групу континуум метода (eng. continuum methods), а в) и г) спадају у групу дискретних метода (eng. discrete methods).

1.4 Компјутерске симулације у медицинске сврхе

Од давнина у медицини су биле коришћене симулације, на првом месту у едукативне сврхе, пошто је експериментисање на пациентима врло често неизводљиво. Разни физички модели били су коришћени и данас се користе за усавршавање и обуку медицинског особља. Како рачунарска технологија напредује, развијају се и софтверски симулатори да презентују комплексна, интерактивна и животна искуства у циљу квалитетније обуке медицинског особља [G.Meller, 1997]. Тако се данас подразумева обука лекара различитих профила на компјутерским симулаторима.

Поред симулација у едукативне сврхе, у медицини се у новије време све чешће употребљавају компјутерске симулације у дијагностици. Правило по коме је неопходно пре решавања добро дефинисати проблем примењиво је и у медицини. У многим областима медицине заправо је веома велики проблем добити прецизну дијагностику болести. У кардиоваскуларним болестима често је такав случај. И поред значајног унапређивања медицинских дијагностичких уређаја, и данас постоје физички параметри везани за кардиоваскуларне болести које није могуће измерити (на пример смичући напон на зидове крвног суда) [D.Milašinović, 2007]. Једна веома добра алтернатива мерењу ради квалитетне дијагностике је компјутерска симулација.

Модерни медицински инструменти данас пружају податке који су далеко захвалнији за компјутерско моделовање. У зависности од инструмента подаци могу имати различите форме. Код CFD симулација подаци са дијагностичког инструмента користе се у фази препроцесирања и евентуално у фази постпроцесирања за верификацију. Подаци са медицинских инструмената

користе се за добијање тродимензионалне геометрије модела органа (простора од интереса за дати проблем) као и за задавање почетних услова симулације (границних услова, почетне брзине флуида, физичких карактеристика флуида). Тродимензионални модели органа човека су постали веома важни у новије време, пошто су они неопходна основа за компјутерске симулације. Поред оних који се могу добити употребом података добијених од неког медицинског инструмента, органе је могуће и параметарски генерисати. Тако генерисани модели се углавном употребљавају у демонстративне сврхе [S.Zachow et al., 2007].

2. Уводне дефиниције |

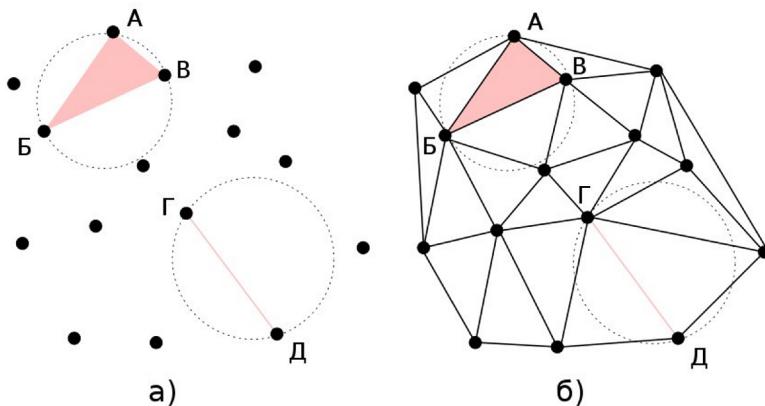
У циљу бољег разумевања овог рада у овом делу биће приказане неке основне математичке дефиниције.

Мноштво тачака a^0, a^1, \dots, a^p Еуклидовог простора \mathbb{R}^d називамо линеарно независним, ако из једнакости:

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i a^i = 0, \quad \sum_{i=0}^p \lambda_i = 0$$

следи $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$.

Сваки подскуп линеарно независног скупа тачака такође је линеарно независан скуп тачака [D.Adnađević, 1980].



Сл. 5: Делонејев критеријум и Делонејева (рус. Делоне) триангулација за дводимензионални случај

На слици 5 приказан је Делонејев критеријум и Делонејева триангулација

за дводимензионални случај:

a) 2-симплекс ABC као и 1-симплекс DE задовољавају критеријум;

б) Делонејева триангулација датог скупа тачака у равни.

Конвексни омотач (eng. convex hull) $\text{conv}S$ коначног скупа тачака S у простору \mathbb{R}^d је d -политоп (eng. d -polytope), што је ограничен подскуп \mathbb{R}^d . Тако су за дводимензионалне просторе то полигони, а за тродимензионалне полиедри. Конвексни омотач \mathbb{R}^d . Тако су за дводимензионалне просторе то полигони, а за тродимензионалне полиедри. Конвексни омотач $k+1$ независних тачака не нулте запремине у \mathbb{R}^d , где важи да је $k \leq d$ назива се k -симплекс (eng. k -simplex). Тако је 1-симплекс дуж, 2-симплекс троугао, а 3-симплекс тетраедар. На слици 5а) приказани су 1-симплекс и 2-симплекс.

За скуп тачака S у простору \mathbb{R}^d (где је d димензија) $\text{conv}S$ скупа S је најмањи конвексан подскуп \mathbb{R}^d који садржи S [G.Paul-Louis, 2008].

Може се рећи да важи да ма који непразан подскуп F $k+1$ тачака које граде k -симплекс такође гради симплекс. Такав симплекс уобичајено се назива страна (eng. face). Уколико је F дефинисан са $m+1$ ($0 \leq m+1 \leq k+1$) тачака k -симплекса тада F дефинише m -страницу k -симплекса. Једна страница троугла је 1-страница (eng. 1-face) троугла, једна страна тетраедра је 2-страница тетраедра. Уобичајено је да се 1-страница назива ивица (eng. Edge), а 2-страница само страна (eng. face). Такође сенеретко стране називају према називима геометријских објеката које оне представљају (на пример троугао уместо страница за тетраедар).

Коначан скуп симплекса S такав да важи да:

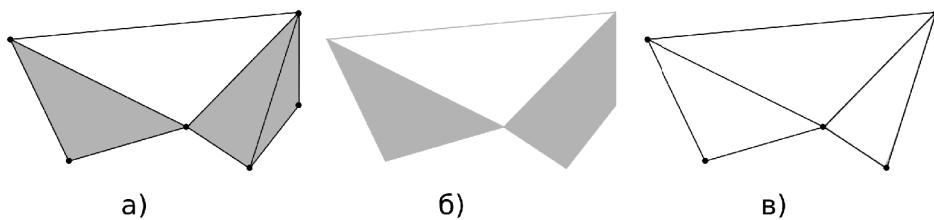
(1/2) свака страна било ког симплекса из S је такође подскуп S ;

(2/2) пресек било која два симплекса из S је страна оба симплекса;

назива се симпликал комплекс (eng. simplicial complex). Битно је приметити да (2/2) дозвољава случај када је један или више симплекса одвојен од осталих, јер је празан скуп јединствена страна било ког симплекса.

Унија n -запремина скупа симплекс-а S је тополошки затворена ако и само ако је S симпликал комплекс и назива се андерлејинг спејс (eng. underlying space).

Може се дефинисати и подкомплекс (eng. subcomplex) као скуп симплекса који је непразан подскуп симпликал комплекса. Подкомплекс симпликал комплекса је такође симпликал комплекс.



Сл. 6: Симпликал комплекс, андерлејинг спејс, подкомплекс

На слици 6 може се видети:

а) дводимензионални симпликал комплекс, сачињен од 3 троугла

(осенчена), 9 ивица и 6 тачака;

б) андерлејинг спејс;

в) подкомплекс, који је једнодимензионални симпликал комплекс,

сачињен од 7 ивица и 6 тачака.

Нека је S скуп тачака у простору \mathbb{R}^d , и нека $\text{conv}S$ дефинише просторни домен Ω у \mathbb{R}^d . Триангулација $\text{Tr}(S)$ (eng. triangulation) у најопштијем смислу је подела просторног домена Ω на K n -симплекса (за дати \mathbb{R}^d простор) уз следеће услове:

(1/4) скуп свих тачака елемената триангулације је S ;

(2/4) Ω је унија свих K n -симплекса;

(3/4) сви елементи у $\text{Tr}(S)$ имају не нула запремину;

(4/4) пресек било која два елемента у $\text{Tr}(S)$ је празан скуп или страна.

Тако за дводимензионални случај она представља поделу полигона на троуглове, а за тродимензионални случај она је подела просторног домена на тетраедре.

Нека је P скуп тачака, и нека је s k -симплекс, где важи да је $0 \leq k \leq d$ (где је d димензија). Описана сфера (eng. circum-sphere) k -симплекса је сфера која пролази кроз све његове тачке. Уколико је $k=d$, s има само једну описану сферу. Каже се да је s Делонејев симплекс уколико у његовој описаној сferи нема ни једне тачке из P .

У математици и рачунарским наукама, Делонејева триангулација (eng. Delaunay triangulation) скупа тачака P у равни је триангулација $\text{DT}(P)$ таква да ниједна тачка из P није унутар описане кружнице око било ког троугла из $\text{DT}(P)$, односно да су сви n -симплекси Делонејеви. За тродимензионални случај узимају се описане сфере око одговарајућих тетраедара. Ова

2. Уводне дефиниције

триангулација добила је име према руском математичару Б. Н. Делонеју (рус. Борис Николаевич Делоне) који ју је презентовао 1934. године.

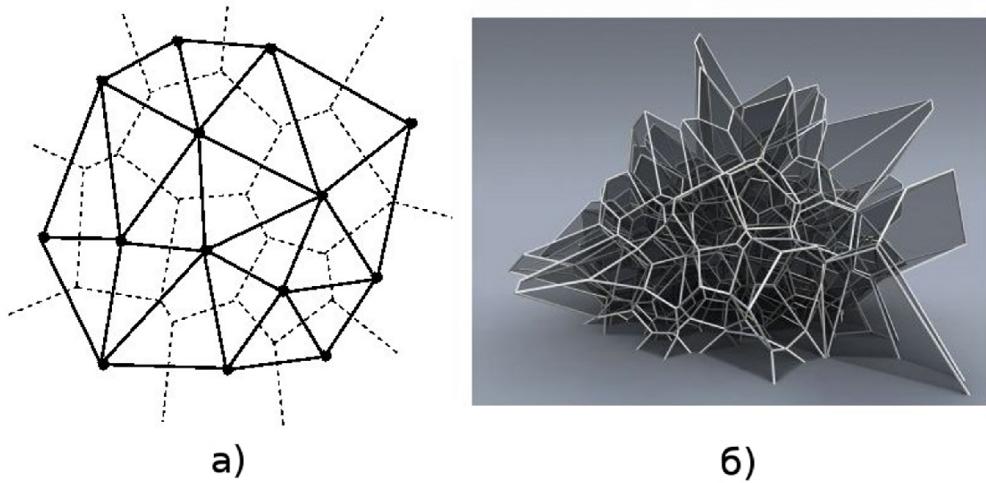
За n -димензионални Еуклидски простор за скуп тачака P Делонејева триангулација $DT(P)$ била би таква да не постоји тачка у P која је унутар описане n -сфере за било који n -симплекс из $DT(P)$.

Уколико триангулација мора садржати неке унапред задате елементе (у виду чворова, ивица...) онда се таква триангулација назива ограничена (eng. constrained triangulation).

За скуп тачака S за који је дефинисана Делонејева триангулација може се дефинисати и Воронојев дијаграм (eng. Voronoi diagram). Воронојев дијаграм је подела просторног домена Ω који је ограничен са $\text{conv}S$ на поддомене који се зову Воронојеве ћелије. Око сваке тачке A из S Воронојева ћелија је скуп свих тачака које имају растојање до A не веће од растојања до било које друге тачке из S . Тачке које леже на заједничкој граници две ћелије подједнако су удаљене од тачака из S које припадају тим ћелијама. Овај начин дискретизације носи назив према руском математичару Г. Ф. Вороноју (рус. Георгий Феодосьевич Вороной) који ју је представио за n -димензијални случај 1908. године.

Ради лакшег разумевања ове поделе др. Р. Линденберг (nl. Roderik Cornelis Lindenbergh) у својој докторској дисертацији навео је пример поделе површине града на секторе према положајима супермаркета. Сви људи из сектора датог супермаркета ближи су том супермаркету од било ког другог. Воронојев дијаграм супермаркета је подела града на ове секторе. Воронојева ћелија тада је сектор једног супермаркета. Људи који живе на граници два сектора подједнако су близу супермаркетима тих сектора.

Све ћелије Воронојевог дијаграма су конвексне [R.C.Lindbergh, 2002].



Сл. 7: Воронојев дијаграм и Делонејева триангулација

На слици 7а) приказана је Делонејева триангулација (пуна линија) и Воронојев дијаграм (испрекидано) – дводимензионални случај. На слици 7б) Воронојев дијаграм – тродимензионални случај.

У циљу ваљаног дефинисања простора од интереса (просторног домена) који треба да буде дискретизован у фази сегментације у новије време у рачунарским наукама присутне су за дводимензионалне и тродимензионалне просторе две веома практичне дефиниције. Те две дефиниције познате су као део-по-део линеарне (eng. piecewise linear) репрезентације.

Полигони и полиедри спадају у ову класу. Због потреба моделирања вишеслојних проблема, они нису доволно дескриптивни. Уколико се примера ради моделира стена са различитим материјалним карактеристикама њених слојева, недовољно је дескриптивно оивичити просторни домен полиедром јер се на тај начин не би могла описати унутрашња структура, поготово ако

постоје и унутрашње шупљине.

За дводимензионални случај део-по-део линеарна репрезентација назива се PSLG (eng. Planar Straight Line Graph). PSLG је скуп тачака и дужи тако да:

(1/3) су све тачке дефинисане својим координатама;

(2/3) дужи су дефинисане везама између тачака (углавном преко редних бројева тачака);

(3/3) дужи се не смеју сећи.

Приликом сегментације у коначне елементе, дужи се могу изделити на више ивица.

За тродимензионални случај део-по-део линеарна репрезентација назива се део-по-део линеарни комплекс (eng. piecewise linear complex), обично се означава PLC. PLC X је скуп тачака, дужи и страна. Стране су у општем случају равански полигони. Ови полигони могу бити компликовани и неконвексни, могу садржати рупе дефинисане преко дужи као и унутрашње тачке. Након сегментације у коначне елементе дужи евентуално бивају издельене на ивице, а стране на стране коначних елемената. За PLC важи:

(1/3) су све тачке у X ограничено су дужима из X ;

(2/3) све дужи из X ограничене су тачкама из X ;

(3/3) X је затворен за пресеке:

а) уколико се две стране секу, пресечна ивица мора бити ивица из X

б) уколико ивица пресеца страну у тачки унутар ивице, она мора бити

2. Уводне дефиниције

сadrжана у страни.

Сматра се да је употребом део-по-део линеарних репрезентација за дводимензионални и тродимензионални случај могуће ваљано дефинисати простор од интереса.

3. Иницијални подаци |

Природне науке трагају за истином у природи. Истина се дефинише принципима и законима који су добијени на основу посматрања и мерења у природи. Посматрања и мерења раде се универзалним правилима експеримента. Експеримент треба да открије особине објекта и процесе у природи који постоје независно од техника мерења и наше перцепције. Тако је мисија науке да искористи резултате мерења са циљем бољег разумевања природе [W.R.Hendee - E.R.Ritenour, 2002].

Дигитална обрада сигнала (eng. digital signal processing) је процес претварања сигнала у дигитално записане информације. Ова област је јединствена због улазних података које користи - сигнала. Ти сигнали су пореклом из природе (сеизмичке вибрације, визуелне слике, звучни таласи ...) и добијени су употребом разних сензора. Заједно са почетком употребе дигиталних рачунара од средине XX века експанзију је доживела дигитална обрада сигнала. У то време због ограничено доступности дигиталних рачунара употреба дигиталне обраде сигнала била је ограничена на неколико кључних области за које су издвајана највећа средства. Касније са појавом персоналних рачунара број области је повећан. Основне области у којима су постигнути значајнији резултати биле су [S.W. Smith, 1997]:

- радари и сонари (због великих донација у домену безбедности);
- обрада сигнала у области проучавања изворишта нафте (пошто је у тој области могућа велика зарада);

- обрада сигнала у оквиру програма за истраживања свемира (у то време веома популарна);
- обрада сигнала у области био-медицинских наука (због могућности да се ефикасније људи лече).

За стварање компјутерских модела о којима је било речи у претходном тексту први корак јесте јасно дефинисање простора од интереса. Уколико је потребно симулирати неки физички модел, простор од интереса могуће је дефинисати преко параметара (на основу искуства). Када је циљ направити "реалистичан физички модел" најчешће се међутим прибегава употреби података (сигнала) добијених неким видом скенирања реалних модела. Сигнали који се добијају у том процесу углавном се записују као слике. Оне се могу употребити за реконструкцију геометрије реалних модела. Реконструкцију модела на основу слика врше компјутерски програми. Они могу бити у склопу самог скенера (што је данас веома често), или независни од скенера. Тродимензионални модел који се реконструише на основу скенирања може се користити са циљем бољег упознавања са геометријом модела. Тај модел се може употребити и за креирање адекватног омотача модела односно дефинисања простора од интереса, о чему ће бити речи касније.

Слике су записи специјалних карактеристика. Оне су мере неког параметра у односу на простор, док је већина других мера неког параметра у односу на време. Професори В. Р. Хенди и Е. Р. Ритенор су у својој књизи о формирању слика у медицинској дијагностици за слике написали следеће [W.R.Hendee - E.R.Ritenour, 2002]:

Слике су наш принципијелни сензорни пут до знања о природи.

3. Иницијални подаци

Оне су врло богате информацијама те се због тога углавном боље анализирају од стране човека него неких генералних правила. Када се филтрирају слике (или се евентуално врши нека друга обрада), због тога се у финалној фази врши верификација од стране човека.

3.1 Формирање слика у медицинској дијагностици

Тело човека веома је компликовано. Један од главних изазова у науци и клиничкој пракси је питање како добити, обрадити и приказати информације о телу или одређеном његовом делу. Почетком XIX века и раније лекари су били врло ограничени у могућностима како да дођу до тачних информација о стању пацијента. Они су били принуђени да се ослањају на своја чула. Тако је вероватноћа да оно што лекар није могао видети, чути, помирисати, додирнути или окусити проћи неопажено била веома велика. Чак је и употреба чула била ограничена због могућности да се болест пренесе и на лекара. Прикупљање података о статичким и динамичким својствима тела резултује великим количинама информација. Оне треба да се приказују на такав начин да буду што употребљивије (у дијагностици, науци...). Са друге стране од давнина јасно нам је да је чулом вида могуће најквалитетније перципирати свет око нас. Зато се углавном презентација информација преко слика у медицини сматра најефикаснијом. Процес добијања слика делова човечијег тела са циљем употребе тих слика у научне сврхе или у клиничкој пракси је област која се назива формирање слика у медицинској дијагностици (eng. medical imaging).

Напредак у овој области био је подстакнут технолошким развојем у разним пољима. Откриће рентгенских зрака, ултразвука, радиоактивности и магнетне резонанце као и инструмената за креирање слика на основу њих довели су до стварања најупотребљивијих дијагностичких уређаја у медицини. Ови системи користе се у планирању лечења као и у биологији и науци. Многе медицинске слике се архивирају и користе као мустре или школски примери у идентификацији разних болести. У циљу приказивања медицинских слика на

различите начине као и њиховог складиштења развијен је велики број метода и компјутерских апликација.

Нису само велики пројекти и групе допринели напретку у области формирања слика у медицинској дијагностици. За неке веома битне технологије у овој области заслужне су и мање лабораторије. Примери за ово су математичка реконструкција у компјутеризованој томографији и лабораторијске технике у нуклеарној магнетној резонанци. Занимљиво може бити и то да нису сви покушаји да се технологије из других области пребаце у медицину били плодоносни. Један пример за то је серија, за сада неуспешних, покушаја да се уређаји за детекцију инфрацрвених зрака (који се користе у војне сврхе) употребе за инфрацрвену термографију у раној детекцији рака дојке [W.R.Hendee - E.R.Ritenour, 2002].

Захтеви које одређена нова технологија мора испунити пре него што се може употребити у реалној клиничкој пракси константно расту, те се често каже да они делимично успоравају развој.

Реалистични тродимензионални модели који су приказани у овом раду добијени су коришћењем података са различитих медицинских уређаја. Најважнији од њих ће на основном нивоу бити описани.

3.1.1 Компјутеризована томографија

Године 1895. Вилхелм Конрад Рентген (нем. Wilhelm Conrad Röntgen), немачки физичар, открио је рентгенске или X зраке који могу да пролазе кроз материју. Рентгенски зраци различито бивају апсорбовани у различитим материјалима. На основу детектованих зрака након што прођу кроз узорак

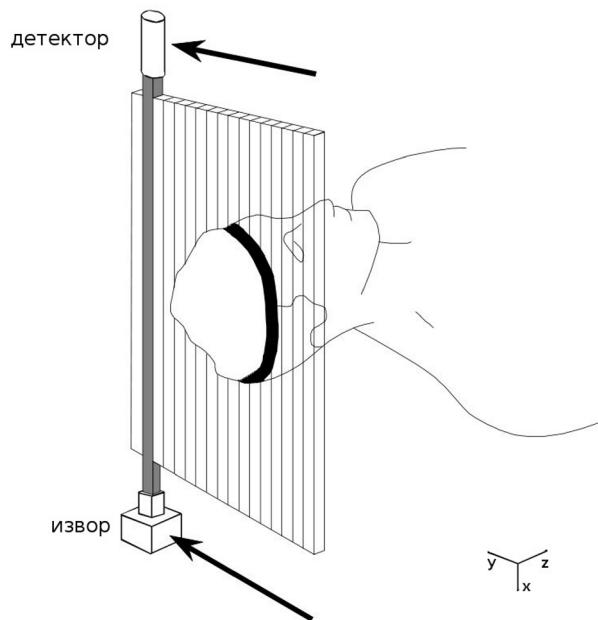
3. Иницијални подаци

може закључивати о материјалима од којих је узорак сачињен. Употребом тих зрака у медицини лекари су по први пут неинвазивно могли видети како изгледа унутрашњост човека. То је било револуционарно откриће те су се веома брзо уређаји за ту намену распространили широм света.

Упркос неоспорном великом успеху ове технике она има велико ограничење. Ограниченије је то што се у класичној рентгенској техници добија дводимензионална слика тродимензионалног објекта (нпр. органа живог бића). То подразумева да се на слици догађа преклапање других објекта са оним који је од интереса. Овај проблем су 1930. године стручњаци покушали да превазиђу синхронизованим померањем извора и детектора зрака. Циљ оваквог снимања био је да у током формирања слике у фокусу остане орган, а да се померањем замути остатак. Ова техника - замућење померањем (eng. motion blurring) није била превише ефикасна и она спада у класичну томографију. Реч томографија може се превести као "слика равни".

Недостатак класичне рентгенске технике отклоњен је појавом компјутеризоване томографије (eng. Computed Tomography) почетком седамдесетих година XX века. Компјутеризована томографија класичан је пример дигиталне обраде сигнала. Углавном се због енглеског назива означава са СТ. У овој техници рентгенски зраци из више праваца пролазе кроз део тела пацијента који се прегледа. Уместо да се слика формира једноставном употребом зрачења које се детектује, врши се А-Д конверзија и записивање сигнала у дигиталном формату. Добијени подаци затим се користе за прорачунавање и прављење слика које изгледају као слике делова - слојева (eng. slices) тела. Слике овако добијене су детаљније него слике добијене класичном техником те су захвалније у дијагностици. Разлика у квалитету добијених слика толико је велика да је, у медицинске сврхе, проналазак

компјутеризоване томографије упоредив са открићем рентгенских зрака.



Сл. 8: Аквизиција података употребом СТ скенера

На слици 8 приказан је процес прикупљања (аквизиције) података употребом СТ скенера. Са слике је лако уочити да се веома узак сноп зрака користи за скенирање. Транслаторним померањем извора и детектора добија се цела слика. Након тога врши се њихова ротација (апроксимативно за 1°) и идентично скенирање. Слике осталих делова добијају се на исти начин али се претходно извор и детектор помере за одређено растојање у другом правцу (правцу z осе). Кључна разлика у односу на класичну технику скенирања је да рентгенски зраци пролазе само кроз део који се тренутно скенира. Пре формирања слика врши се препроцесирање података. Пошто рентгенски зраци експоненцијално слабе при проласку кроз материјал једна од основних једноставних техника која се употребљава у препроцесирању је налажење логаритма сигнала - са циљем добијања лепо нијансираних сенки (eng. greyscale). Након препроцесирања различитим математичким техникама врши

3. Иницијални подаци

се реконструкција слика и њихово записивање.

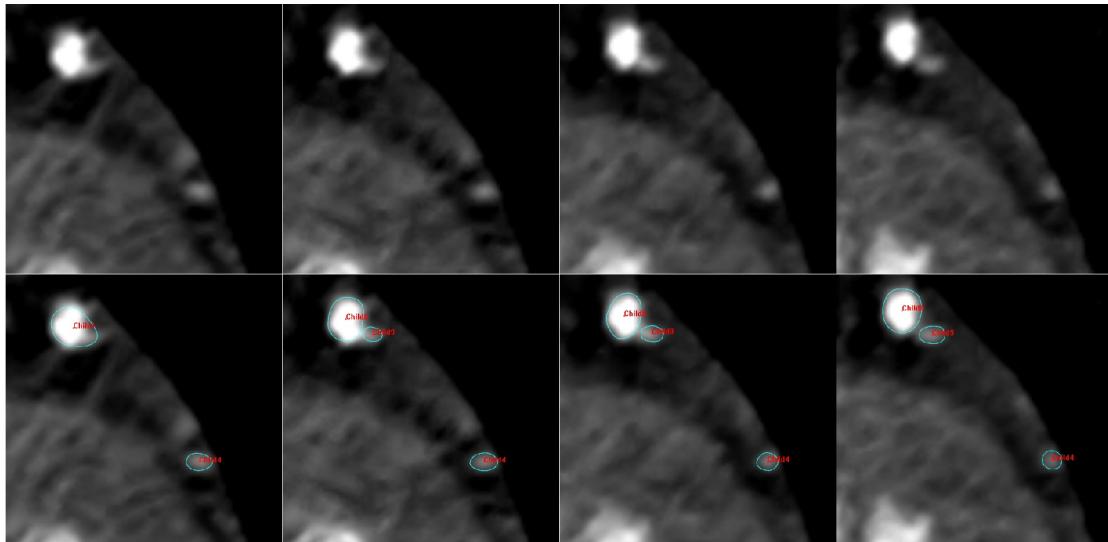
Фундаментални захтев да модеран скенер мора имати могућност аквизиције података са великих објеката за кратко време и без губитка квалитета - лонгитудиналне резолуције (резолуције у правцу z осе) испуњен је појавом вишеслојних СТ скенера (eng. Multi Slice Computed Tomography) [A.Oppelt, 2005]. Скраћена ознака оваквог скенера је MSCT. У једној ротацији приликом скенирања оваквим скенерима врши се једновремена аквизиција података више слојева. Уобичајено растојање између слојева код модерних оваквих скенера је реда величине 1 mm. Због тако малог растојања између слојева (резолуције у правцу z осе) и могућности да се врши једновремено скенирање више слојева (код савремених скенера 64) постиже се знатно бољи квалитет. Један од фундаменталних разлога за бољи квалитет је и тај што се за краће време орган пацијента који се скенира знатно мање помери (промени облик). У једном комплетном скенирању уобичајено је да се направи око 250 слика. На следећој табели приказана су временна скенирања старијих и новијих скенера.

скенер	резолуција у правцу z осе	време ротације	уобичајено време скенирања објекта дужине 35 cm
1992 1-Slice SOMATOM Plus 4	1 mm	0,75 s	175 s
	10 mm	0,75 s	17,5 s
1998 4-Slice SOMATOM Volume Zoom	4 x 1 mm	0,5 s	29 s
2001 16-Slice SOMATOM Sensation 16	16 x 0,75 mm	0,5 s	10 s
2003 64-Slice SOMATOM Sensation 64	64 x 0,6 mm	0,5 s	6 s

Табела 1: Ефикасност СТ скенера [A.Oppelt, 2005]

На слици 9 приказане су слике (слојеви) добијене MSCT-64 скенером марке SIEMENS. Растојање између два суседна слоја је 0,75 mm, а величина

једног пиксела¹ на слици 0,32 mm у оба правца.



Сл. 9: Снимци коронарне артерије направљени MSCT скенером

Негативна страна компјутеризоване томографије углавном се односи на рентгенско зрачење којем је пациент у току прегледа изложен као и нејасно разликовање меканих ткива на снимцима.

3.1.2 Ангиографија

Ангиографија је техника која се користи за визуализацију унутрашњости крвних судова. Стандардан начин да се то реализује овом техником је да се у орган кроз који тече крв убризга контраст (eng. radio-opaque contrast), а затим се врши снимање Рентгенским зрацима. Контраст омогућава да се на снимцима боље може уочити просторни домен испуњен крви.

Техником која се назива дигитална субструктуртивна ангиографија DSA (eng.

¹ Пиксел (eng. pixel) је најмањи део дигитално записане слике. Назив потиче од енглеског назива елемент слике (eng. picture element)

3. Иницијални подаци

digital subtraction angiography) формирају се две слике истог органа. Једна слика је без, а друга са контрастом. Слика без контраста назива се маска. Након њиховог формирања врши се одузимање заједничких елемената слика након чега у идеалном случају на слици која је резултат тог поступка остаје само орган испуњен контрастом. Због померања органа и пацијента у току снимања, међутим, увек долази до изобличења резултујуће слике, те се и даље ради на развоју метода за квалитетније прављење слика овом техником.

Овом техником могуће је формирање прилично детаљних слика крвотока. Поред очекиваних нежељених ефеката који се могу јавити употребом ове технике услед убризгавања контраста може се изазвати и алергијска реакција пацијента.

3.1.3 Нуклеарна магнетна резонанца

Нуклеарна магнетна резонанца (НМР) се односи на појаву да језгра која имају нуклеарни спин када се налазе у магнетном пољу апсорбују електромагнетно зрачење одређене фреквенције (резонанција). Постојање нуклеарне магнетне резонанције у кондензованој материји су 1946. год. независно открили Блох и Парсел (eng. Bloch, Purcell) и добили Нобелову награду 1952. године. Њихово истраживање је било засновано на открићу појаве спина код протона и откриће постојања НМР појаве у молекулским сноповима. За откриће спина код протона 1921. године заслужан је Штерн (de. Otto Stern), који је добио Нобелову награду 1943. године. Постојање НМР појаве у молекулским сноповима истраживао је Раби 1938. године (eng. Isidor Isaac Rabi), и добио Нобелову награду 1944. године. Занимљиво је да је Завојски (рус. Евгений Константинович Завойский) у Казану (Русија) 1944. године (дакле пре Блоха) открио исту појаву код електрона (такође честица са

спином), која се сада назива електрон парамагнетна резонанција (ЕПР).

Обе технике су првобитно биле намењене изучавању физичких појава (спин, магнетизам и сл.), али је убрзо уочена њихова применљивост у другим областима (биохемија, биофизика, наука о материјалима итд.), тако сада једва да и постоји област природних наука где се не користе НМР и ЕПР.

Примена НМР у медицини стимулисана је са два открића: Дамадијан (eng. Raymond Vahan Damadian) је 1972. године открио да постоји разлика између НМР релаксационих времена протона (језгра водоника) воде у нормалном ткиву и туморима, а Лаутербург (eng. Paul Lauterbur) је 1973. године показао да се може добити слика њихове расподеле унутар биолошких система - осликовање магнетном резонанцијом (eng. magnetic resonance imaging - MRI). Развојем технологије производње магнета који су доволно велики и квалитетни да се техника примени на људе, као и математичких метода (Фуријеова трансформација) за обраду НМР сигнала и добијање слика за коју је заслужан Ернст (eng. Richard R. Ernst), који је добио Новбелову награду 1991. године, почела је примена у медицини.

Пробне клиничке машине конструисане су 1978. године и данас је здравствени стандард да постоји један MRI апарат на пола милиона становника. Овакав експлозиван развој, без преседана у медицинској технологији је последица тога што MRI омогућава да се неинвазивним методама добије анатомска структура унутрашњости људског тела, али да се добију и директне информације о физиологији одређених органа.

Нуклеони, тј. протон и неutron, који чине језгро атома имају унутрашње квантно својство које се назива спин. Укупни спин језгра је одређен спинским квантиним бројем S који је у вези са бројем нуклеона. Језгра која су

3. Иницијални подаци

изграђена од парних бројева протона и неutronа имаће нулти укупни спин услед упаравања спинова нуклеона исте врсте. Језгра са ненултим спином ће имати и ненулти магнетни момент, μ , који је у вези са спином преко жиромагнетног односа.

Управо магнетни момент језгра омогућава опажање НМР апсорпционог спектра изазваног прелазима између енергетских нивоа различитих спинова. Магнетни момент који је придружен нуклеарном спину је квантована величина чија стања су дегенерисана, тј. имају исту енергију. У присуству спољашњег магнетног поља, B_0 долази до укидања дегенерације и цепања енергетских нивоа. Нуклеарни магнетни моменти ће се уредити у правцима паралелним и антипаралелним спољашњем пољу. Резултат јесте магнетизација материјала M . Магнетизација M могла би да промени правац уколико би се употребило друго магнетно поље B_1 . Уобичајено се за друго магнетно поље бира правац који је нормалан на правац првобитног поља. Када се затим B_1 искључи M се поново оријентише у складу са B_0 .

Уколико се додатно електромагнетно поље у радиофrekвентном опсегу (РФ) примени на језгро, доћи ће до резонантне апсорпције у случају када је фреквенција:

$$\omega_0 = \gamma B_0 ,$$

где је ω_0 фреквенција Ларморове прецесије магнетног момента око правца спољашњег поља.

Карakterистична фреквенца сигнала зависи од тога која језгра се испитују. Сигнал слаби због губитка енергије услед окружења атома. Тада енергетски губитак зове се време релаксације и оно је различито за различите

3. Иницијални подаци

материјале. На тај начин може се утврдити о каквим се материјалима у узорку ради, без употребе јонизујућег зрачења, неинвазивно и недеструктивно [J.C.Chatham - S.J.Blackband, 2001]. Медицински НМР скенери користе језгра атома водоника због великог броја атома водоника у човеку. Различита ткива одију различит сигнал, те је њихово разликовање на снимцима веома добро.

Иако до средине седамдесетих година ХХ века НМР технологија није била употребљена за истраживања метаболизма живих бића данас је једна од најважнијих. Могућност да детектује са изузетним контрастом мекана ткива живих бића ову технику чини идеалном за прегледање мозга, кардиоваскуларног система као и мускулатуре. Пацијенти са уграђеним медицинским уређајима (пејсмејкерима и сл.) често не могу бити скенирани због утицаја магнетног поља на дати уређај, те је то једна од основних познатих негативних страна методе.

3.1.4 Интраваскуларни ултразвук

Интраваскуларним ултразвуком могуће је креирати слике из органа пацијената у реалном времену. Та перспектива обезбеђује информације које нису доступне другим техникама.

Из назива ове технике лако је закључити о томе како се реализује аквизиција података. Специјално дизајнирани катетер са ултразвучном сондом уноси се у орган. Затим се врши скенирање ултразвуцима (из органа). Ултразвуци се различито одбијају од различитих типова ткива, а подаци добијени од њиховог еха шаљу се рачунару. На основу тих података врши се стварање слика.

3. Иницијални подаци

Предност интраваскуларно-ултразвучног прегледа највише долази до изражaja у случају коронарних артерија, јер се веома добро могу уочити сужења и наслаге масних наслага плака (eng. plaque). Сужења је релативно добро могуће уочити и другим техникама (нпр. СТ) али таложења унутар органа није. Због тога је ова техника захвална приликом одабира и адекватног позиционирања приликом уградње стентова. Квалитетније информације о стању пацијента веома често тотално мењају третман лечења.

3.2 Тродимензионална реконструкција

Тродимензионална реконструкција генерално је атрактивна и важна област у оквиру дигиталне обраде слика. Нарочито је битна у области биомедицине. На основу података који се могу добити неинвазивно (техникама које су биле поменуте) може се извршити тродимензионална реконструкција.

Пиксели слика слојева поред величине која је дефинисана уређајем који је вршио снимање имају одређену скаларну вредност - боју. Та скаларна вредност је записана осмобитно и представљена сивом бојом интензитета од 0 (црна) до 255 (бела).

Први корак у формирању тродимензионалног објекта јесте сегментација слика. Сегментација је процес поделе пиксела слика на пикселе објекта чији се модел креира и пикселе који нису од интереса (у простору они се називају воксели²). Тако се све осмобитне скаларне вредности морају претворити у једнобитне. Иницијално се изабере фиксна гранична вредност која мора бити цео број између 0 и 255. Када боја пиксела има већу вредност од граничне пиксел се сматра белим (има вредност 1), а када је мања или једнака сматра се црним (има вредност 0). Пиксели објекта од интереса означени су белом бојом. Избор ове граничне вредности од круцијалног је значаја те је неопходно са нарочитом пажњом одредити најпогоднију. Један веома ефикасан начин да се гранична вредност адекватно одреди је итеративно [A.Tsuda et al., 2008]:

(1/4) према искуству подеси се одређена гранична вредност;

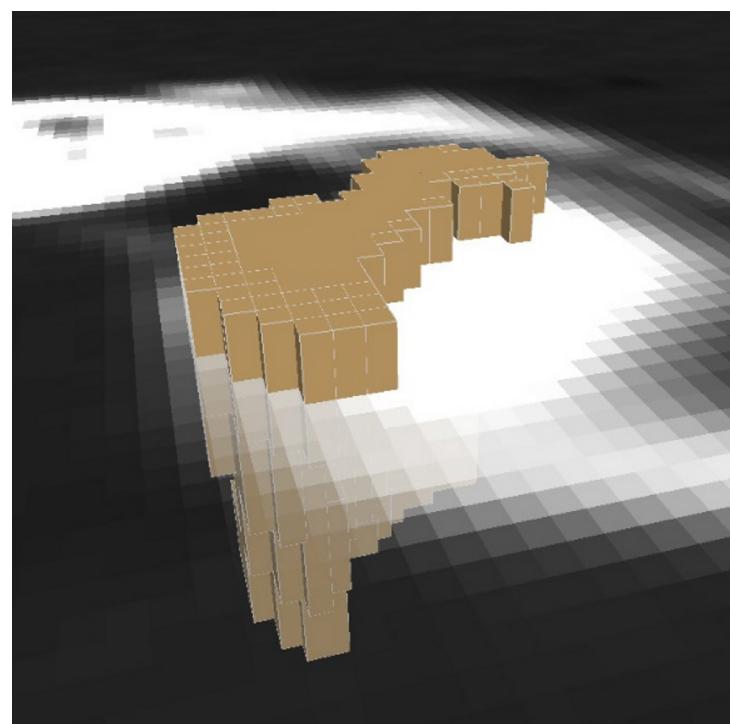
² Воксел (eng. Voxel) у тродимензионалној компјутерској графици представља најмањи део тродимензионалног простора (слике). Назив потиче од енглеског назива запремински пиксел (eng. volumetric pixel)

3. Иницијални подаци

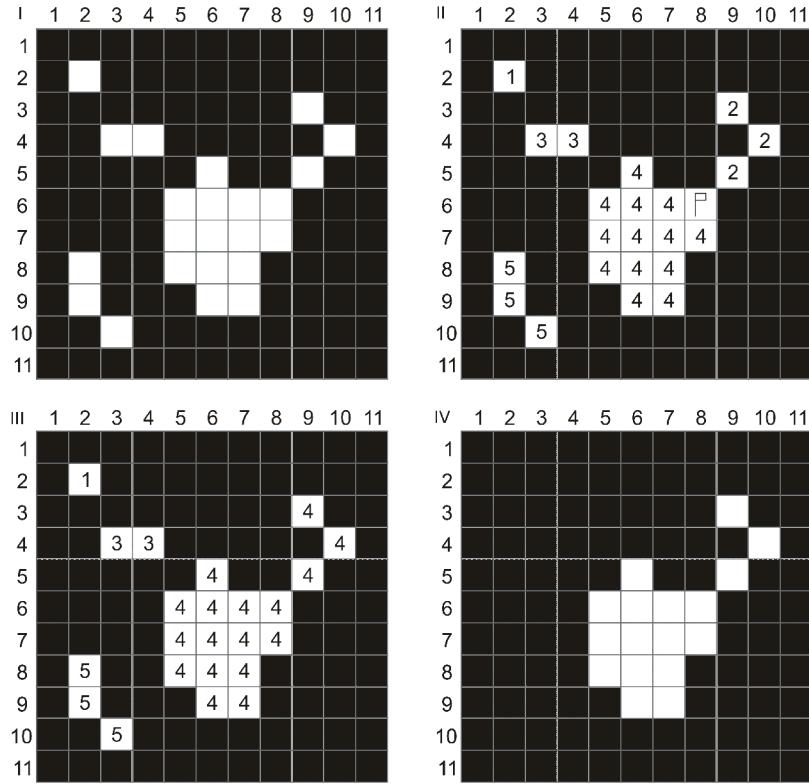
(2/4) изврши се испитивање повезаности објектата и креирање 3Д објекта;

(3/4) изврши се прорачунавање и анализа резултата;

(4/4) у зависности од резултата из (3/4) по потреби се мења гранична вредност и наставља се од корака (2/4).



Сл. 10: Формирање воксела на основу пиксела



Сл. 11: Испитивање повезаности објекта (eng. object connectivity analysis) [A.Tsuda et al., 2008]

У зависности од граничне вредности, на сликама се могу појавити отвори на дводимензионалним објектима као и мали изоловани објекти (у даљем тексту артефакти). Да би се задржала правилна веза између објекта неопходно је извршити препроцесирање једнобитних слика.

Нека су као на слици 11 распоређени пиксели једног поједностављеног слоја. Скенирање сваког слоја врши се са лева на десно, од врха до дна. Свим објектима који се нађу у процесу скенирања додељују се OLN (eng. object label number) бројеви (који су целобројне вредности). Приликом скенирања морају се поштовати следећа правила за сваки пиксел:

3. Иницијални подаци

(1/4) уколико су сви суседни пиксели црни пиксел који се скенира добија нови OLN број;

(2/4) уколико постоји само један бели суседни пиксел који већ има OLN број пиксел који се скенира добија OLN број који има и његов сусед;

(3/4) уколико постоји више белих суседних пиксела са истим OLN бројем, пиксел који се скенира такође добија исти OLN број;

(4/4) уколико за пиксел који се скенира постоје два или више суседних белих пиксела са различитим OLN бројевима дати пиксел добија специјалан маркер и OLN број једног од суседа.

Након једног скенирања врши се поновно испитивање пиксела са истим OLN бројем. Тада сви пиксели објекта који су спојени пикселом са маркером добијају исти OLN број. После тога елиминишу се сви објекти који имају мањи број пиксела од унапред дефинисане вредности (за пример са слике та вредност је 5). Том елиминацијом неутралишу се у великој мери грешке настале при аквизицији (eng. noise) услед којих су на сликама претходно настали артефакти.

Када се, на начин који је објашњен, изврши обрада свих слика добијене једнобитне слике могу бити употребљене за генерацију тродимензионалне мреже осмочворнорних коначних елемената или реконструкцију површине објекта од интереса.

3.2.1 Директно креирање 3Д мреже коначних елемената на основу слика

Уколико је квалитет једнобитних слика задовољавајући на основу њих је могуће директно извршити генерацију осмочворних тродимензионалних коначних елемената налик коцкицама (eng. brick). Под термином “задовољавајући” овде се подразумева да слике пружају довољно информација за креирање мреже, пошто се у одређеним случајевима то не може квалитетно урадити. Пример за то је скенирање алвеола пацова чије су димензије веома мале, те су за сада, слике добијене скенирањем незахвалне за директно креирање мреже.

Начин оваквог креирања мреже коначних елемената познат је као GBHA због његовог назива на енглеском (eng. grid-base hexahedral algorithm). GBHA се може описати у неколико фаза (слика 12):

(а) и (б) први корак је креирање тродимензионалне мреже која је иницијално унiformна. Чворови те мреже смештени су у центрима воксела који су добијени од пиксела једнобитних слика. Према томе један тродимензионални коначни елемент прекрива 2×2 воксела једног слоја, односно $2 \times 2 \times 2$ воксела у три димензије. Уколико су сви чворови једног коначног елемента смештени у вокселима од интереса тај елемент је саставни део објекта од интереса. О сваком чвиру мреже у овом кораку још увек се чува осмобитни податак о боји коју је имао воксал у чијем је центру он креиран.

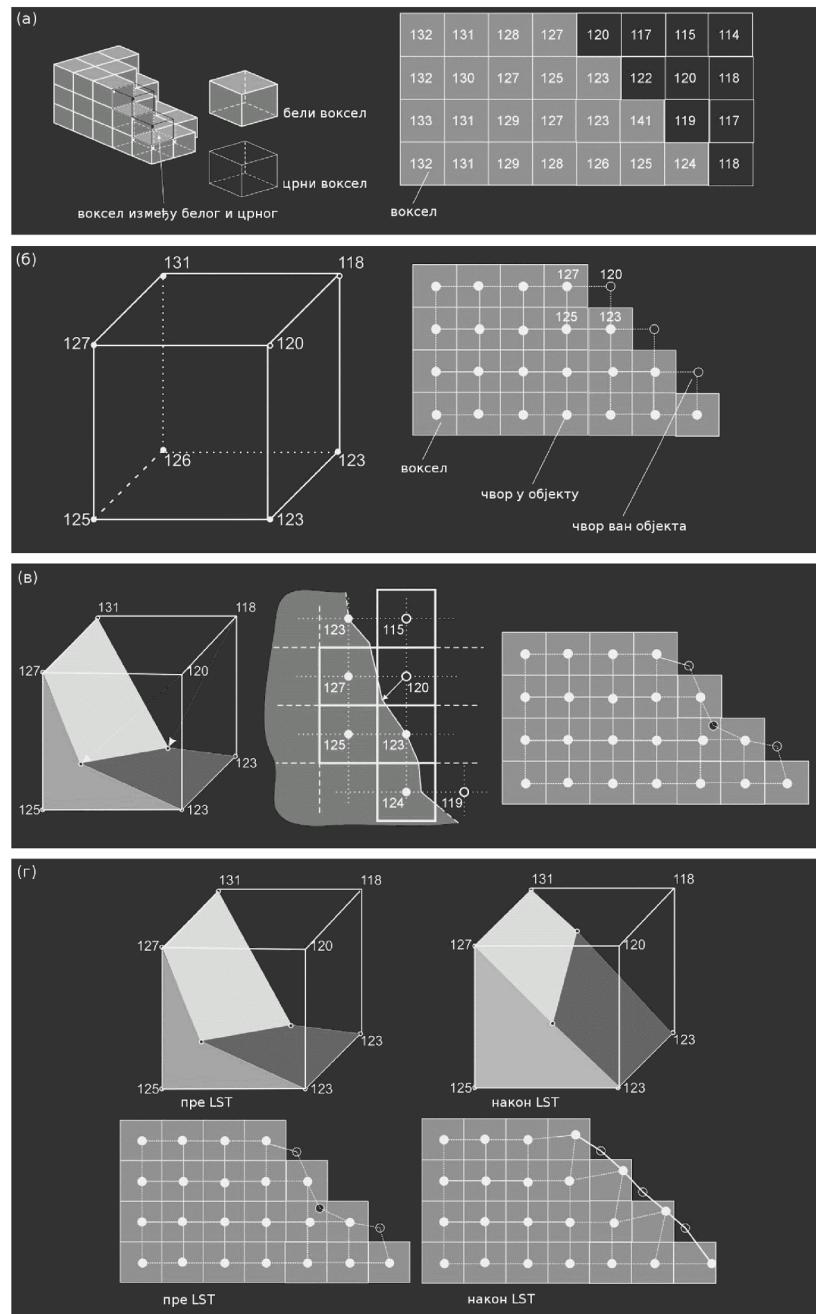
(в) после првог корака гранична површина између “белих” и “црних” елемената није глатка. Да би се добила глатка површина гранични чворови чија вредност боје је мања од тражене граничне вредности

3. Иницијални подаци

померају се према чвровима чија је вредност задовољавајућа. Померање чврова врши се на основу линеарне интерполације све док се не постигне задовољавајућа вредност.

(г) у кораку (в) може се десити да приликом померања чвора неког елемента тај елемент буде деформисан. Због тога се у овој фази врши проверавање квалитета елемената. Сматра се да је осмочворни тродимензионални елемент задовољавајућег квалитета уколико су му запремински доприноси у околини свих Гаусових тачака позитивни. За сваки овакав елемент постоји осам оваквих тачака. Метод на основу кога се врши ова провера описан је у 4.1. Уколико се провером утврди да је елеменат након померања чврова постао деформисан врши се ново померање чврова (употребом стандардне Лапласијанске методе - LST).

3. Иницијални подаци



Сл. 12: Генерирање мреже тродимензионалних коначних елемената на основу једнобитних слика [A.Tsuda et al., 2008]

Пошто се изврши креирање мреже врши се визуелизација омотача у стандардном VRML формату (eng. Virtual Reality Modeling Language). Омотач је

тада записан као скуп четврочворних коначних елемената љуски (eng. quadrilateral). Уколико је мрежа на изглед задовољавајућа врши се иницијална калкулација њеном употребом. По потреби врши се промена граничне вредности која је коришћена приликом претварања слика у једнобитне и поновно креирање тродимензионалне мреже.

3.2.2 Креирање 3Д мреже коначних елемената на основу задатог омотача

У запремини коју дефинише омотач могуће је применом различитих софтвера извршити креирање тродимензионалне мреже коначних елемената. Тако је први услов у овој варијанти генерисања тродимензионалних елемената имати адекватно дефинисан омотач (простор од интереса).

Модерни тродимензионални скенери, укључујући и раније поменуте медицинске инструменте за скенирање, веома често су опремљени савременим софтверима који на основу скенираних података могу извршити тродимензионалну реконструкцију и приказати тродимензионални модел објекта. Тада је омотач скенираног објекта. Тако генерисани омотач може се искористити као иницијални податак за добијање адекватног омотача, односно добро дефинисаног простора од интереса, уз адекватну обраду.

Када као иницијални податак не постоји тродимензионални омотач, већ само слике могуће је пробати са генерисањем тродимензионалних коначних елемената методом која је описана у претходном поглављу. Уколико (због недовољно јасних слика) директно генерисање тродимензионалних коначних елемената није могуће, употребљава се само омотач до кога је било могуће

доћи том методом. Тада омотач свакако није задовољавајућег квалитета те као и у случају када се користи омотач који генерише медицински уређај изискује додатну обраду.

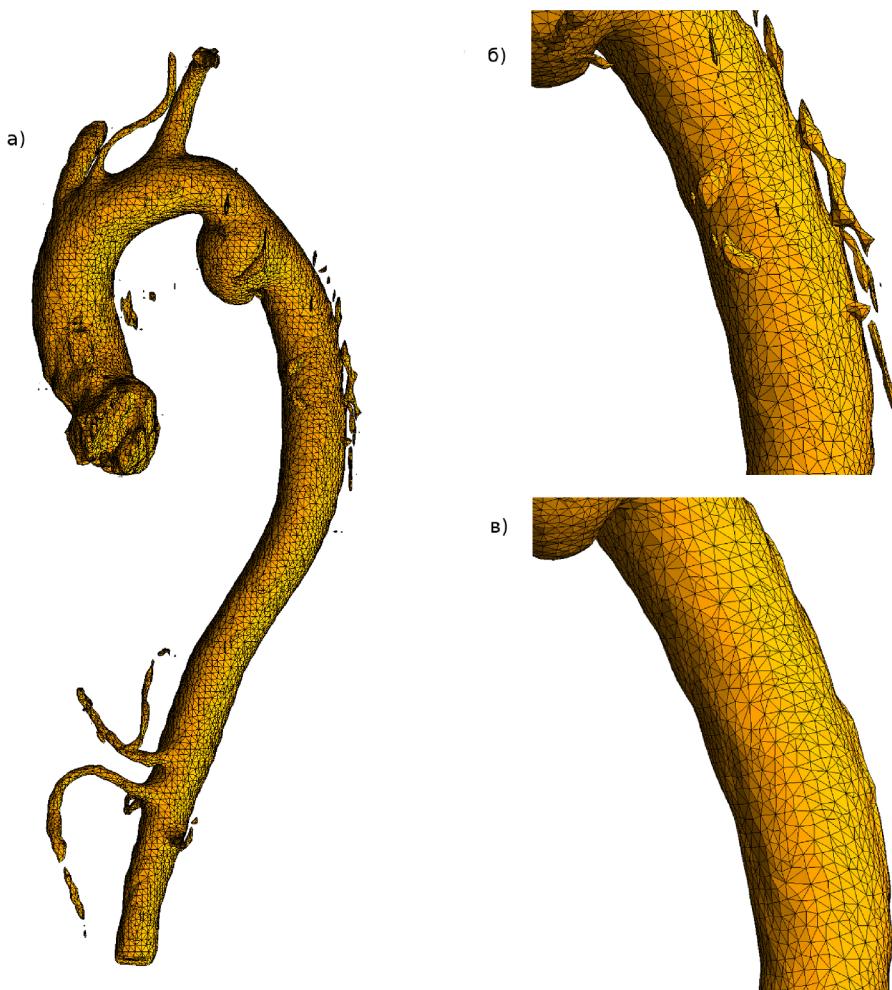
Проблеми са иницијалном мрежом коначних елемената љуске (који дефинишу омотач) у тродимензионалном простору углавном су узроковани артефактима насталим приликом аквизиције. Рече грешке тичу се неправилности у елементима саме мреже. Те грешке односе се на неправилно дефинисане елементе мреже. Такве грешке могу бити: елементи који се секу, дуплирани елементи, елементи са површином једнакој нули или неправилно нумерисани елементи.

На слици 13а) приказан је омотач добијен вишеслојним СТ скенером³. Очигледно је да омотач који је скенер испоручио у стандардном .STL⁴ (eng. stereolithography) формату није на задовољавајући начин дефинисао запремину објекта од интереса (аорте у овом случају) због великог броја артефакта.

За обраду .STL фајлова у оквиру софтверског система STL Toolz насталог овом раду развијен је софтверски модул STL repair.

³ Siemens multi-slice 64 CT scanner

⁴ .STL је стандардан формат за записивање спољашње мреже троугаоних коначних елемената. Сваки троугао дефинише се са 7 линија у фајлу. За сваки троугао дефинисане су координате његових чворова као и вектор нормале (са по три реална броја).



Сл. 13: Омотач аорте добијен вишеслојним СТ скенером
[D.Milašinović, 2007] [D.Milašinović et al., 2008A]

Артефакти са оваквог снимка могу се поделити у две категорије:

- (1) артефакти који су независни од главног објекта;
- (2) артефакти који су закачени (саставни део) главног објекта.

За групу (1) суфицитних објеката софтвер STL repair испитује повезаност објекта и након анализе у .STL фајлу задржава само објекат са највећим

3. Иницијални подаци

бројем троуглова. Тада је објекат заправо главни објекат. Испитивање повезаности врши се на следећи начин:

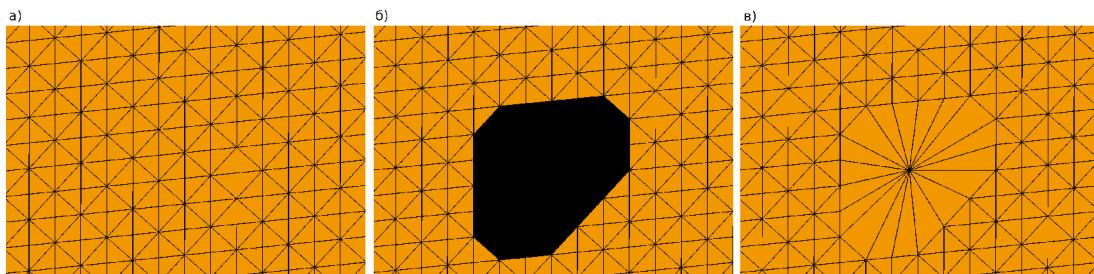
- (1) иницијално се формира један низ низова троуглова - суперниз;
- (2) приликом учитавања сваког троугла из иницијалног фајла он се смешта као први елемент новог низа у супернизу троуглова;
- (3) након тога испитује се да ли дати троугао има макар једну заједничку тачку (везу) са било којим од троуглова који припадају било ком од низова суперниза троуглова;
 - (3а) уколико има онда се сви троуглови низа са троуглом који је у вези са датим троуглом пребацију у низ датог троугла и њихов првобитни низ остаје празан;
 - (3б) уколико нема онда дати троугао остаје као једини члан новог низа суперниза;
- (4) након испитивања повезаности последњег троугла иницијалног фајла суперниз садржи празне низове на почетку, а непразне на крају. Низ суперниза који има највећи број чланова заправо је независтан објекат .STL фајла са највећим бројем троуглова.

У овом раду је за отклањање артефакта (2) коришћен програм Gmsh [C.Geuzaïne - J.F.Remacle, В], мада би било могуће за ову намену употребити било који други сличан компјутерски програм. Када се дати артефакт отклони на моделу остаје отвор. За поправљање отвора насталих отклањањем оваквих артефакта софтвер STL repair као улаз узима .STL омотач са отвором (где је одређени закачени артефакт отклоњен), а као излаз враћа .STL поправку (eng.

patch) тог отвора. Поправка је заправо скуп троуглова који се надовезују на троуглове модела на месту на коме је отвор. Ту поправку софтвер аутоматски записује у исти фајл. Након отклањања сваког артефакта софтвер се активира.

Принцип прављења поправке једног отвора веома је једноставан и ефикасан. Може се поделити у две фазе:

- прва фаза је проналажење отвора на моделу. Приликом учитавања троуглова врши се формирање ивица. Ивице које се налазе на граници отвора понављају се само једном - пошто свака од њих улази у састав само једног троугла. Приликом учитавања целог модела формира се низ усамљених ивица. На крају је формиран низ усамљених ивица које формирају поли-линију односно ивицу отвора, те је идентификован отвор на моделу, слика 14а) и 14б);
- у другој фази формирају се нови троуглови од којих сваки садржи по једну усамљену ивицу. Две тачке троугла су тачке које дефинишу усамљену ивицу, а трећа тачка сваког новог троугла налази се у тежишту свих чвррова усамљених ивица, као на слици 14в).



Сл. 14: Поправка мреже

Након отклањања артефакта који је за главни објекат прикачен са више грана (слика 13б) на главном објекту остаје више отвора. За такав проблем је у

овом раду развијени су специјални под-модули софтвера који имају могућност да изврше раздвајање ивица на различитим отворима.

Основни начин раздвајања ивица на различитим отворима овог софтвера назван је multi-hole. Раздвајање се реализује употребом минималног граничног растојања између различитих отвора. То растојање заправо је максимално растојање између тежишта ивица једног отвора. Сврха граничног растојања је да раздваја у две групе ивице првог и осталих отвора. Пошто се издвоје све усамљене ивице софтвер упоређује растојање између тежишта прве усамљене ивице и свих осталих. Све ивице чија су тежишта ближа од тог растојања третирају се као ивице једног отвора - за који се након ове операције прави поправка. Након раздвајања отвори бивају третирани независно на исти начин као када постоји само један. Један по један отвори на моделу бивају поправљени. Сваки случај артефакта који се са три или више грана спаја са главним објектом може се итеративно редуковати док се потпуно не отклони [D.Milašinović, 2007] [D.Milašinović et al., 2008A].

Други начин раздвајања ивица различитих отвора на моделу у софтверу STL repair назива се auto-multi-hole. У овом случају се након формирања низа усамљених ивица врши његово раздвајање на независне низове ивица сваког засебног отвора. Ово раздвајање слично је као и раздвајање троуглова независних објеката иницијалног фајла:

- (1) иницијално се формира низ низова ивица - суперниз;
- (2) приликом учитавања сваке ивице иницијалног низа усамљених ивица она се смешта као први елемент новог низа у супернизу ивица;
- (3) након тога испитује се да ли дата ивица има бар једну заједничку тачку

3. Иницијални подаци

(везу) са било којом од ивица које припадају било ком од низова суперниса ивица;

(За) уколико има онда се све ивице низа са ивицом која је у вези са датом ивицом пребацују у низ дате ивице, а њихов првобитни низ остаје празан;

(3б) уколико нема онда дата ивица остаје као једини члан новог низа суперниса;

(4) након испитивања повезаности последње ивице иницијалног низа усамљених ивица, супернис садржи празне низове на почетку, а непразне на крају. Сваки непразан низ суперниса садржи ивице једног отвора. Сваки непразан низ ивица служи да се креира поправка датог отвора. Број непразних низова у супернису једнак је броју отвора на моделу.

Употребом овог софтвера, за проблеме који се најчешће срећу код .STL модела добијених са медицинских уређаја, могуће је добити веома глатке (фине поправљене) спољашње мреже као на слици 13в). Такве мреже на адекватан начин дефинишу простор од интереса и могу бити употребљене за креирање мрежа тродимензионалних коначних елемената.

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

У циљу бољег разумевања даљег текста у овом делу биће на елементарном нивоу објашњене мреже коначних елемената.

Мрежа коначних елемената састоји се од чворова и елемената.

Сваки чвор је дефинисан јединственим редним бројем, граничним условима и координатама. За различите проблеме могу се дефинисати разни гранични услови, али су гранични услови који се углавном користе гранични услови чворова на омотачу и чворова у унутрашњости модела.

Сваки елемент дефинисан је типом елемента, јединственим редним бројем и редним бројевима чворова који га граде. У правилној мрежи коначних елемената елементи се не смеју преклапати. Да би било јасно који је правilan редослед за записивање редних бројева чворова у оквиру једног елемента неопходно је унапред за сваки тип елемента једнозначно дефинисати нумерацију чворова.

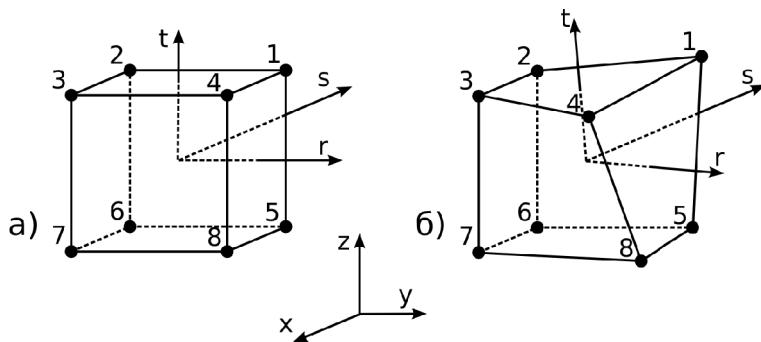
У овом делу рада биће изложени методи за генерисање коначних елемената који су примарно развијени и имплементирани у циљу прорачунавања струјања флуида употребом програма за рачунање PAKF [M.Kožić et al., A]. Софтвер који је развијен у овом раду универзалног је карактера те може бити употребљен и у комбинацији са било којим другим

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

софтвером уз адекватан интерфејс.

4.1 Тродимензионални изопараметарски коначни елемент

Овај коначни елемент користи се за моделирање тродимензионалних тела општег облика (тродимензионалног континуума). Елемент може имати различит број чворова (убичајен је број од 8 до 21) и шест површи које га ограничавају. Овај коначни елемент често се назива и основни [M.Kojić et al., 1998].



Сл. 15: Основни тродимензионални изопараметарски коначни елемент са 8 чвррова

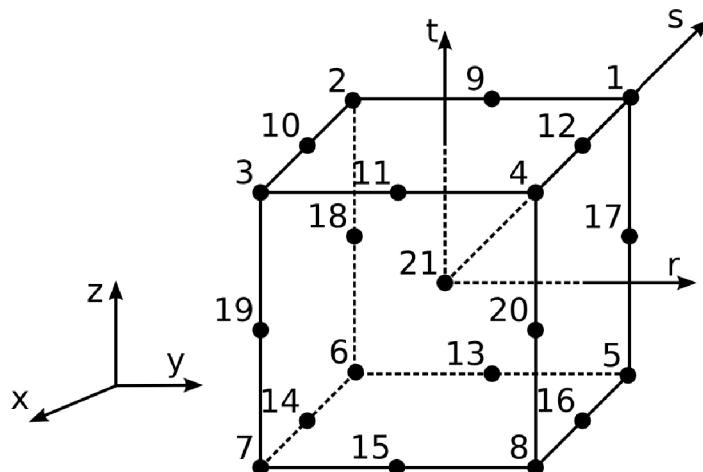
На слици 15б) можемо видети да основни изопараметарски елемент из глобалног координатног система, са координатама (x, y, z) можемо пресликати у природни (који се често назива и локални) координатни систем, са координатама (r, s, t) . Координате чвррова осмочврног изопараметарског коначног елемента у природном систему за тај елемент имају вредности ± 1 . Тежиште елемента налази се у координатном почетку природног координатног система. Због тога се у природном координатном систему изопараметарски елемент приказује као коцка. Вредности природних координата за све чврлове дате су у следећој табели:

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

чврор	r_i	s_i	t_i
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	-1	-1	+1
4	+1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	-1	-1	-1
8	+1	-1	-1

Табела 2: Природне координате чвророва осмочврорног изопараметарског елемента

Изопараметарски елемент са 21-ним чврором је са адекватном нумерацијом чвророва приказан на слици 16. Код оваквог елемента чвророви који се налазе на срединама ивица су са по једном природном координатом која је једнака нули. Угаони чвророви имају исту вредност природних координата као код осмочврорног елемента, а средишњи чврор налази се у координатном почетку.

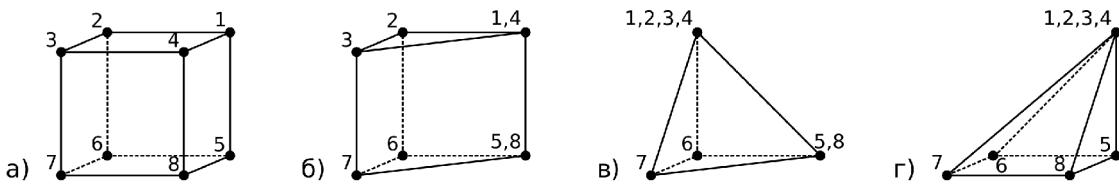


Сл. 16: Основни тродимензионални изопараметарски коначни елемент са 21-ним чврором

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

Наравно, могуће је користити изопараметарски елемент са другим бројем чврова по елементу, у складу са потребама и са адекватним вредностима природних координата.

Од овог елемента могу се формирати и други коначни елементи. Елементи који се могу добити преклапањем чврова основног коначног елемента зову се још и дегенерисани коначни елементи (призма, тетраедар и четворострана пирамида).



Сл. 17: Дегенерисани тродимензионални коначни елементи

За овај рад основни елемент има највећи значај јер је већина компјутерских симулација у овом раду вршена употребом овог елемента. У поређењу са четврочврним тетраедарским елементом рачунање употребом овог коначног елемента води до ефикаснијег решења [P.Polverelli, 2002].

Запремину основног елемента могуће је израчунати употребом Гаусове нумеричке интеграције, односно преко запреминских доприноса у околинама Гаусових тачака. Координате Гаусових тачака осмочврног изопараметарског коначног елемента у природном систему за тај елемент имају вредности $\pm 0,57$ као што је приказано следећом табелом:

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

чвр	r_i	s_i	t_i
1	+0,57	+0,57	+0,57
2	-0,57	+0,57	+0,57
3	-0,57	-0,57	+0,57
4	+0,57	-0,57	+0,57
5	+0,57	+0,57	-0,57
6	-0,57	+0,57	-0,57
7	-0,57	-0,57	-0,57
8	+0,57	-0,57	-0,57

Табела 3: Природне координате Гаусових тачака осмочврног изопараметарског елемента

Овом методом запремина елемента може се израчунати на следећи начин:

$$V = \int_V dV = \int_x \int_y \int_z dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det(J) dr ds dt$$

Границе интеграла по природним координатама су од -1 до 1 пошто су тачке са тим природним координатама границе коначног елемента. У овој једнакости J је Јакобијан:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (a)$$

где су (x_1, x_2, x_3) координате Гаусових тачака основног елемента у глобалном координатном систему.

За запремину елемента V важи:

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

$$V = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i w_j w_k \det(J)$$

Тежински коефицијенти w_i , w_j и w_k за основни елемент имају вредност 1 те се може написати:

$$V = \sum_{i=1}^8 \det(J) \quad (6)$$

Чланове матрице J могуће је добити на начин објашњен у даљем тексту.

Од интерполовационих функција за основни елемент [M.Kojić et al., 1998]:

$$h_1 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$$

$$h_5 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$$

$$h_2 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$$

$$h_6 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$$

$$h_3 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$$

$$h_7 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$$

$$h_4 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$$

$$h_8 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

могуће је формирати матрицу HD њихових парцијалних извода по природним координатама. Ова матрица има осам редова (за сваку интерполовациону функцију) и три колоне (за сваки орт природног координатног система).

Уколико са i означимо редове, а j колоне матрице J члан матрице J_{ij} који се налази на позицији i, j добија се према формули:

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^8 HD_{ki} x_j^k \quad (b)$$

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

Где је x_j^k координата x_j чвора k основног коначног елемента у глобалном координатном систему, а HD_{ki} је члан матрице HD који се налази у реду k и колони i .

Из (б) је очигледно да је сваки члан суме запремински допринос у околини једне Гаусове тачке.

Уколико је било који запремински допринос негативан елемент се сматра неповољним. Код конвексних елемената сви запремински доприноси су позитивни.

До основног елемента могуће је доћи и дељењем других елемената. У даљем тексту биће изложени алгоритми за добијање мреже основних коначних елемената од мреже тетраедарних елемената, шесточврних призми и од мреже основних коначних елемената.

4.2 Методе креирања нових мрежа коначних елемената

У овом раду развијене су методе за конверзију различитих типова мрежа коначних елемената у циљу добијања других типова мрежа. Обзиром на ефикасност приликом рачунања употребом основног елемента посебна пажња поклоњена је конверзији мрежа различитих коначних елемената у мреже изопараметарских коначних елемената. У овом делу биће дат општи опис на који се начин врши добијање нових елемената и нових чворова употребом метода које су у овом раду развијене.

Приликом поделе елемената иницијалне мреже коначних елемената добијају се нови чворови и нови елементи (другог типа). Нови чворови налазе се у тежиштима елемената (делова елемената) од којих су иницијални елементи сачињени.

За Еуклидов простор R^d у коме је иницијална мрежа елемената нови чворови могу се поделити у d група. Тако се за R^3 нови чворови деле у три групе:

(група I) чворови који се налазе у тежиштима једнодимензионалних елемената - ивица иницијалних елемената;

(група II) чворови који се налазе у тежиштима дводимензионалних елемената - страна иницијалних елемената;

(група III) чворови који се налазе у тежиштима тродимензионалних елемената - односно иницијалних елемената.

Обзиром да се нови чворови суседних елемената морају поклапати тај

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

проблем се мора превазићи. Када је $d > 1$ чворови групе $d-1$ могу бити заједнички за највише два елемента иницијалне мреже, а чворови групе d за један. Због тога чворови групе d не могу бити на омотачу те увек имају граничну вредност чворова унутрашњих чворова. Због особине чворова групе $d-1$ (да могу бити заједнички за највише два елемента иницијалне мреже), они се могу искористити као носиоци граничних услова за све чворове. Ово ће бити детаљније објашњено у даљем тексту.

У циљу ефикасније претраге чворова суседних елемената у овом раду коришћени су низови суседа чворова (eng. neighbour nodes). У зависности од типа мреже суседи су различити, али је принцип додавања нових суседа и претраге низова суседа генерално исти за све поделе.

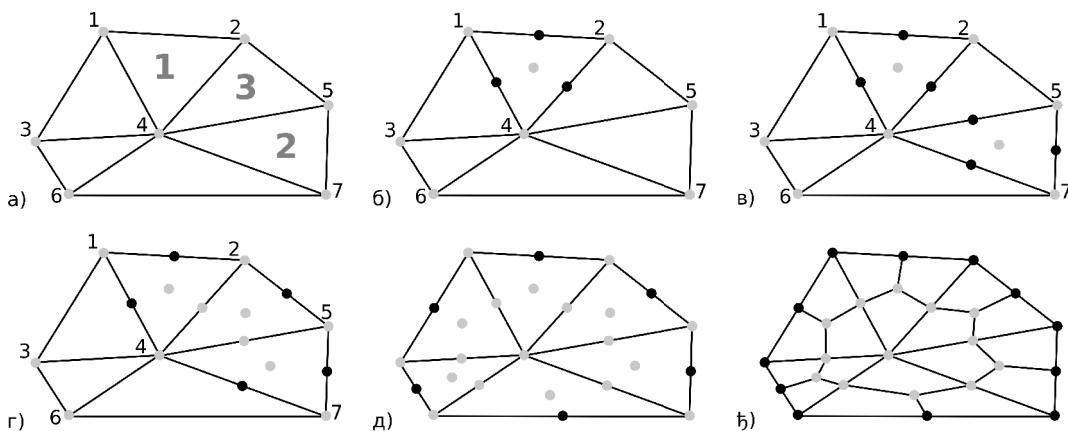
Пре креирања (сваког) новог чвора који не припада групи d прво се тражи заједнички сусед чворова који граде елемент (који је саставни део иницијалног елемента) у чије тежиште је неопходно сместити га. Уколико се пронађе заједнички сусед - значи да тражени чвор већ постоји. Тада се иницијалном елементу на датој локацији додаје чвор са редним бројем заједничког суседа, пошто је то чвор тежишта добијен приликом поделе неког од претходних (иницијалних) елемента. Тада се такође врши и промена вредности граничних услова траженог чвора у граничне услове унутрашњих чворова уколико се ради о чвору који припада групи која је носилац граничних услова.

Ако не постоји заједнички сусед, врши се креирање новог чвора. Приликом креирања новог чвора врши се и додавање (редних бројева) новог чвора у низове суседа чворова који граде елемент (део иницијалног елемента) у чије тежиште се нови чвор смешта. Уколико нови чвор припада групи која је

носилац граничних услова он добија гранични услов чворова на омотачу⁵.

Тиме је постигнуто веома ефикасно претраживање по чворовима. Основна идеја претраге по суседима је да се избегне спајање (eng. merging) чворова који се поклапају, пошто спајање чворова мрежа коначних елемената генерално захтева веома дуго време рачунања.

Ради илустрације на слици 18 дат је пример поделе дводимензионалне мреже троугаоних коначних елемената на мрежу четворочврорних.



Сл. 18: Додавање нових чворова и граничних услова

Иницијално сви чворови имају граничну вредност унутрашњих чворова - која је на слици 18 приказана сиво. На слици су нумерисана прва три троугла, као и сви чворови иницијалне мреже (нови чворови нису нумерисани ради прегледности). Гранична вредност чворова на омотачу приказана је црно.

Једном за другим, свим елементима иницијалне мреже додају се нови чворови редом по групама. Пошто је $d=2$ нови чворови деле се у две групе:

⁵ Овај начин у принципу је исти за све типове мрежа, међутим може бити дефинисан и другачије у зависности од типа иницијалне мреже. У том случају мора постојати могућност да се тежиште једнозначно одреди другим чворовима неког елемента (нпр. тежиштима ивица приликом додавања тежишта страна четворочврорног дводимензионалног коначног елемента).

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

(група I) Тежишта једнодимензионалних елемената - дужи;

(група II) Тежишта дводимензионалних елемената - троуглова.

Полазни чворови не припадају ни једној од група.

Нови чворови који припадају групи I иницијално добијају граничне вредности чворова на омотачу. Они могу бити заједнички за највише два иницијална елемента.

Нови чворови групе II иницијално добијају граничну вредност чворова у унутрашњности. Та вредност се не мења, обзиром да ти чворови не могу бити чворови омотача.

На слици 18б) могу се видети нови чворови са адекватним граничним условима добијени поделом првог троугла. Ни за једну од ивица троугла није претходно било рачунато тежиште те чворови ивица нису имали заједничке суседе. Приликом креирања нових чворова врши се попуњавање низова суседа. Тако на пример приликом креирања новог чвора на средини (тежишту) ивице која је дефинисана чворовима 4–2 чворови 4 и 2 добијају суседа са редним бројем новог чвора. Обзиром на то да нови чвор припада групи I он добија граничне вредности чворова на омотачу.

Исто као и за троугао са редним бројем 1 за све чворове који граде ивице троугла са редним бројем 2 важи да нису имали заједничке суседе те се врши креирање нових чворова групе I. На слици 18в) може се видети да и нови чворови групе I тог троугла добијају граничне вредности чворова на омотачу.

Приликом додавања нових чворова за троугао са редним бројем 3 ситуација је другачија у односу на претходне. Пошто чворови који дефинишу

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

ивице 4–5 и 2–4 имају заједничке суседе, који су креирани приликом поделе претходних троуглова, нови чворови се не креирају. Постојећи чворови (тежишта ивица) додају се троуглу и мењају своје граничне услове. На слици 18г) су приказани чворови који на поменутим ивицама сада имају граничне услове чворова у унутрашњости. Заједнички сусед није постојао за ивицу 5–2 те се у њеном тежишту генерише нови чвор као и раније.

На описани начин врши се обрада свих троуглова те се на крају добија ситуација која је приказана на слици 18д).

У овом случају носиоци граничних услова су чворови групе I. Када се изврши обрада свих иницијалних елемената на начин описан у претходном тексту врши се дефинисање граничних услова свих чворова модела. То је једноставна процедура која се може описати са два правила:

(правило I) сви чворови који припадају елементима (деловима иницијалних елемената) у чијим тежиштима су креирани чворови који су носиоци граничних услова наслеђују граничне услове чворова носиоца граничних услова уколико су то гранични услови чворова на омотачу;

(правило II) свим осталим чворовима гранични услови се не мењају.

Тако можемо видети да, примера ради, сва три чвора ивице 2–1 добијају граничне услове чворова на омотачу.

На слици 18ђ) приказана је финална верзија мреже.

Приликом штампања елемената овако добијене мреже се за сваки елемент, као последњи податак о елементу, штампа логичка вредност која указује на то да ли се дати елемент налази до омотача или не. Овај податак

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

може се употребити касније у евентуалној даљој обради модела.

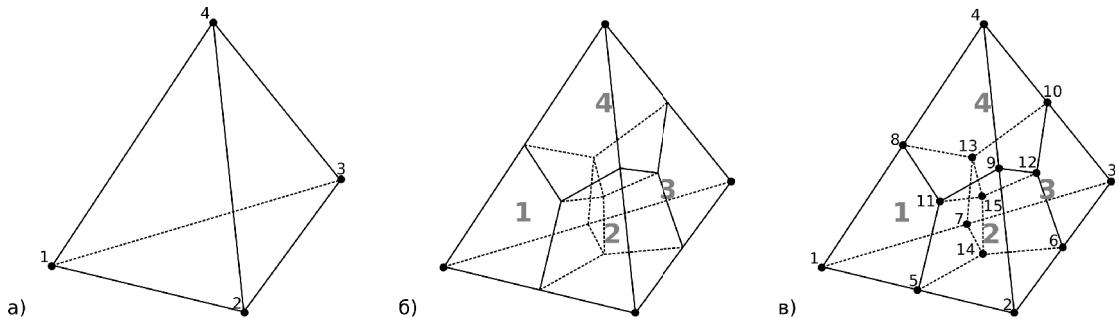
Овако добијени елементи конвексни су у складу са доказом који је дат у додатку д1.1.

У овом раду за добијање мрежа троугаоних коначних елемената коришћен је софтвер Triangle професора Шевчука (eng. Jonathan Richard Shewchuk). Овим софтвером могуће је генерисање Делонејеве триангулације, њених модификација, Воронојевих дијаграма и мрежа троугаоних коначних елемената високог квалитета [J.R.Shewchuk, D].

4.2.1 Креирање мрежа осмочворних тродимензионалних коначних елемената од мреже четврочворних тетраедарних коначних елемената

Четврочворни тетраедар је симплекс за \mathbb{R}^3 те је најзахвалнији за тродимензионално моделовање и често је у употреби. Многи савремени софтвери за моделовање коначним елементима имају могућност да врше сегментацију ваљано дефинисаног просторног домена у тетраедарне елементе.

Обзиром на тачност рачунања струјања флуида модела изопараметарских елемената веома је важно имати могућност претварања мрежа тетраедарних у изопараметарске коначне елементе. На слици 19 приказана је подела четврочворног тетраедра на четири основна елемента. Приликом поделе формира се петнаесточворни тетраедар чија је нумерација приказана на слици.



Сл. 19: Подела тетраедра на четири основна елемента

Нови чворови су добијени додавањем тежишта на елементе од којих је тетраедар сачињен. То су тежишта једнодимензионалних, дводимензионалних и тежиште тродимензионалног елемената (ивица, страна и самог тетраедра). Нови чворови који се добијају оваквом поделом могу се класификовати у три групе [D.Milašinović et al., 2008A]:

(група I) тежишта једнодимензионалних елемената - ивица. На слици 19в) то су чворови са бројевима: 5, 6, 7, 8, 9, 10;

(група II) тежишта дводимензионалних елемената - страна. На слици 19в) то су чворови са бројевима: 11, 12, 13, 14;

(група III) тежиште целог тродимензионалног елемента. На слици 19в) то је чвор са бројем 15.

Полазни чворови не припадају ни једној од група и на слици 19 то су чворови са бројевима: 1, 2, 3, 4.

Чворови из групе I у тетраедарној мрежи, као и полазни, могу бити заједнички за бесконачно много елемената. Тетраедарни елементи који имају заједничке чворове из ове групе могу имати један или три заједничка чвора

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

ове групе. Уколико имају један заједнички чвор групе I они имају заједничку ивицу, те имају укупно три заједничка чвора. Уколико имају три заједничка чвора групе I они имају три заједничке ивице, односно заједничку страну, те имају укупно седам заједничких чворова.

Чворови из групе II могу бити заједнички за највише два тетраедарна елемента. Два тетраедра могу имати највише један заједнички чвор из ове групе и тада они имају заједничку страну, те укупно имају седам заједничких чворова.

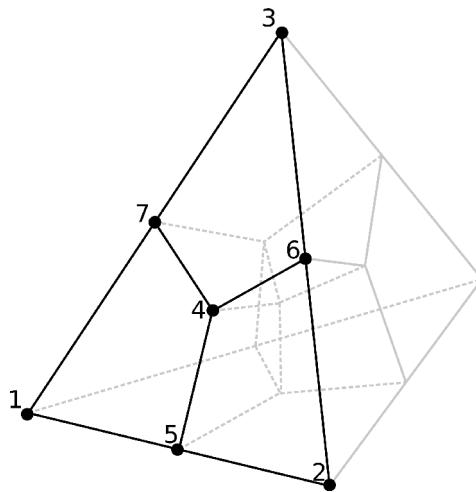
Чворови из групе III не могу бити заједнички за тетраедарне елементе. Сви чворови тетраедара осим чврова групе III могу бити чврови омотача, те је дефинисање граничних услова за чврове ове групе тривијално.

Једном за другим иницијалним тетраедарима додају се нови чврови. Они се додају сваком тетраедру редом по групама. Нови чврови добијени додавањем тежишта на елементе од којих је тетраедар сачињен су јединствени за елементе чија су они тежишта. Приликом додавања чврова било које групе осим групе III, прво се врши испитивање заједничког суседа чврова који граде елемент (део тетраедра) у чијем тежишту се додаје нови чвр.

Обзиром на то да су стране границе између највише два тетраедра чврови групе II могу се искористити као носиоци граничних услова за све чврове једне стране. Приликом додавања нових чврова на иницијалне тетраедре врши се формирање нових седмочворних троугаоних елемената – страна. Када се приликом формирања једне стране појави потреба за креирањем њеног тежишта (новог чвора групе II), чвр који се направи добија гранични услов чврова на омотачу. Уколико се поново појави потреба за

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

kreирањем тежишта исте стране (елемента суседног тетраедра) значи да страна сигурно није на омотачу већ да је граница између два тетраедра. Тада се не креира нови чвор већ се употребљава постојећи који тада добија гранични услов унутрашњих чворова.

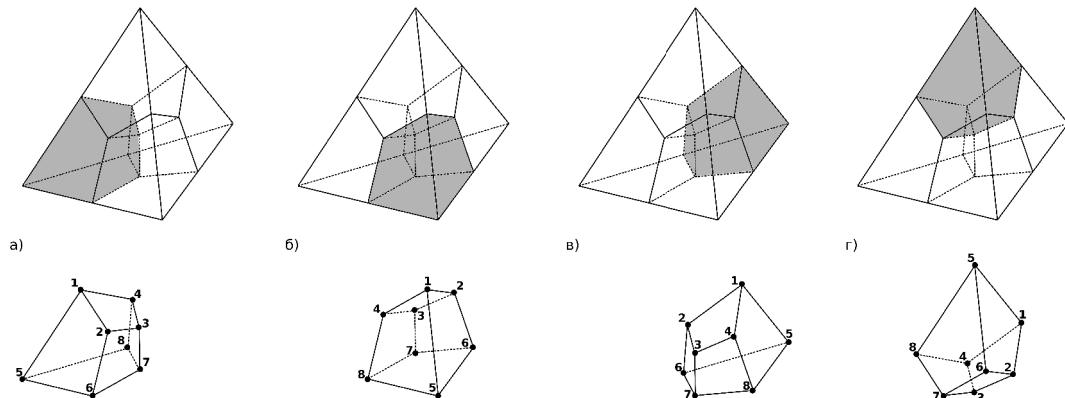


Сл. 20: Нумерација чврода једне седмочврне стране

Када се изврши додавање нових чврода за све тетраедре и изврши формирање свих седмочврних страна, сви чврди страна код којих чврд у тежишту има граничне вредности омотача добијају исте граничне вредности. Пошто иницијално сви чврди имају граничне вредности унутрашњих чврода у тој се процедуре практично дефинишу сви чврди омотача. После те процедуре креирана је мрежа петнаесточврних тетраедара у којој су на правilan начин дефинисани гранични услови.

У финалној фази врши се према потребама штампање нових елемената са адекватном нумерацијом. Нумерација осмочврних изопараметарских елемената приказана је на слици 21.

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената



Сл. 21: Нумерација чврова нових елемената

Од мреже петнаесточворних тетраедра у зависности од потреба било би могуће штампати и друге типове елемената (десеточворни тетраедар, осмочворни тетраедар, деветочворни тетраедар и тако даље).

Изопараметарски елементи добијени оваквом поделом тетраедра конвексни су према доказу датом у додатку д1.2.

За генерирање тетраедарних мрежа коначних елемената у овом раду коришћен је софтвер Tetgen, чији је творац др. Си (eng. Hang Si). Овим софтвером могуће је генерирање тетраедарних мрежа коначних елемената тродимензионалних полиедарних домена [H.Si, C].

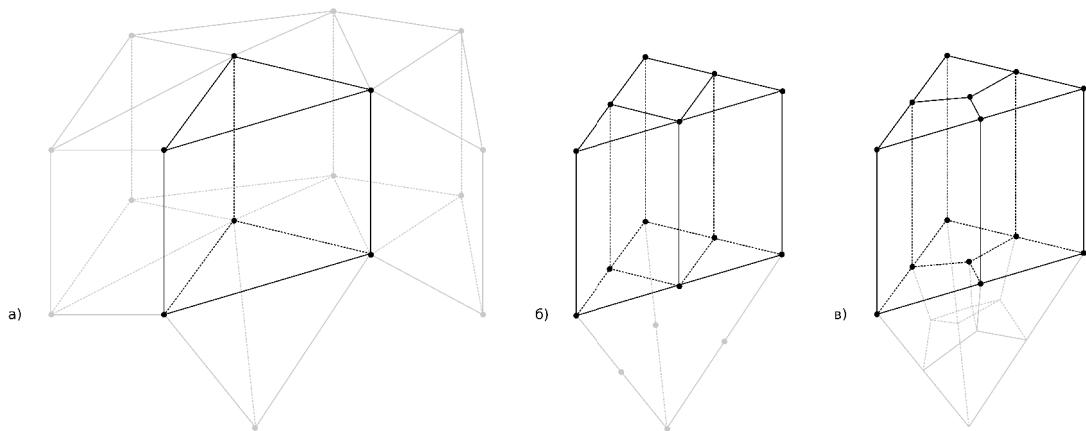
4.2.2 Креирање мрежа осмочворних тродимензионалних коначних елемената од мреже коначних елемената типа шесточворних призми

Шесточворна призма је коначни елемент који се у новије време веома често користи као елемент, који се комбинује са четврочворним тетраедром приликом креирања модела. Разлог за употребу овог елемента јесте тај што је

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

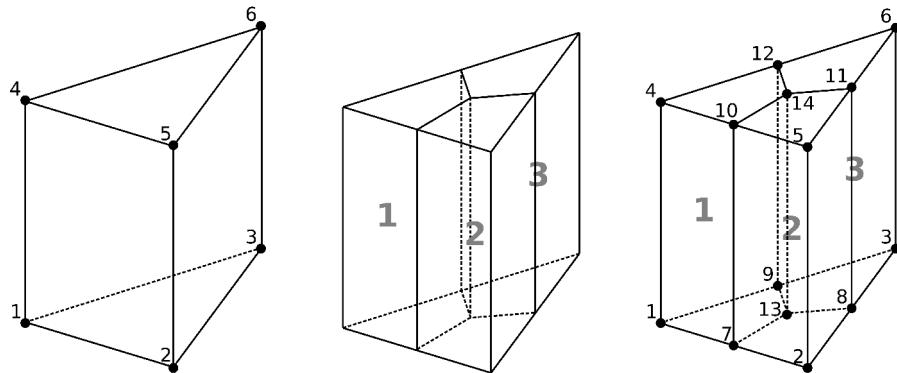
рачунање смичућег напона у симулацијама струјања флуида у моделима са призмом тачније у односу на моделе са тетраедрима. Предност овог елемента је што се он својим основама може лако надовезати на тетраедарне елементе. Због ових особина овај коначни елемент користи се углавном у слојевима близу омотача модела код којих је тетраедарски коначни елемент у унутрашњости.

На слици 22 приказана је мрежа призми и тетраедара.



Сл. 22: Мрежа призми и тетраедара са поделама

Од коначних елемената типа шесточворних призми могуће је креирати мрежу изопараметарских коначних елемената на више начина. Један од њих, приказан и на слици 23, је да се од сваке призме формира четрнаесточворни елемент од кога се поделом која је приказана на слици 23 формирају нови осмочворни елементи.



Сл. 23: Подела призме на три основна елемента

Нови чворови добијени су додавањем тежишта на елеменате од којих је иницијални елемент сачињен. Нови чворови подељени су у следеће групе:

(група I) тежишта једнодимензионалних елемената од којих су сачињене основе. На слици 23 то су чворови са бројевима: 7, 8, 9, 10, 11, 12;

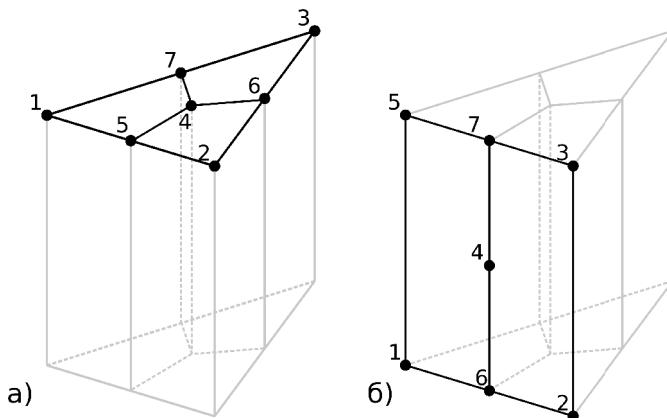
(група II) тежишта дводимензионалних елемената - основа. На слици 23 то су чворови са бројевима: 13, 14.

Полазни чворови не припадају ни једној од група. На слици 23 то су чворови са бројевима: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Иницијалне призме које имају заједничке чворове групе I имају заједничку ивицу или страну. Уколико имају само један заједнички чвор ове групе онда имају заједничку ивицу, те имају три заједничка чвора. Уколико имају два заједничка чвора ове групе имају заједничку правоугаону страну, те имају шест заједничких чворова. Уколико две иницијалне призме имају три заједничка чвора групе I оне имају зајеничку троугаону страну - основицу, те имају седам заједничких чворова.

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

Иницијалне шесточворне призме добијају нове чворове једна за другом. Приликом ове процедуре формирају се седмочворне стране које су приказане на слици 24.



Сл. 24: Нумерација чврова седмочворних страна

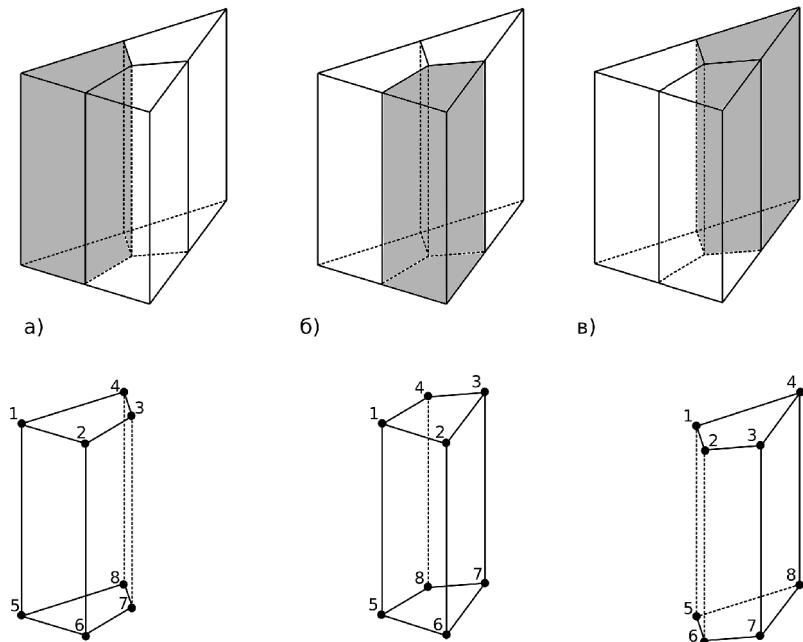
На претходној слици може се уочити да и свака четврочворна страна има чвр у тежишту. Тај чвр је фиктивни чвр који се додаје искључиво ради рачунања граничних услова и он припада истој групи као и чврви у тежиштима троугаоних страна (основа) елемента.

Обзиром на то да чвр у тежишту правоуганих страна припада истој групи као и чвр у центру троугаоних из практичних разлога он носи исти редни број. Ти чврви припадају групи носиоца граничних услова. Две призме могу имати највише један заједнички чвр из групе носиоца граничних услова, у том случају призме имају заједничку страну или основицу, те укупно имају шест или седам заједничких чврова (пошто се чврви у тежиштима правоугаоних страна не штампају у коначној мрежи). Приликом формирања сваке нове стране провера се да ли чвр у њеном тежишту већ постоји. Ако не постоји креира се нови чвр са граничним условом чврва на омотачу, а уколико постоји страни се додаје постојећи чвр и мењају му се гранични

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

услови. Уколико је страна троугаона нови чвор се додаје у низове суседа чворова на ивицама троугла, а уколико је правоугаона у низове суседа чворова на ивицама правоугаоника. Обзиром да су све стране седмочврне заједно се додају у исти низ.

Пошто се низ седмочврних страна направи врши се правилно дефинисање граничних услова за све чворове нове мреже. Сви чворови седмочврних страна код којих чвор са бројем 4 има граничне услове чворова на омотачу добијају исте граничне вредности. Након тога добијена је мрежа седамнаесточврних призми са ваљано дефинисаним граничним условима.



Сл. 25: Нумерација чворова нових елемената

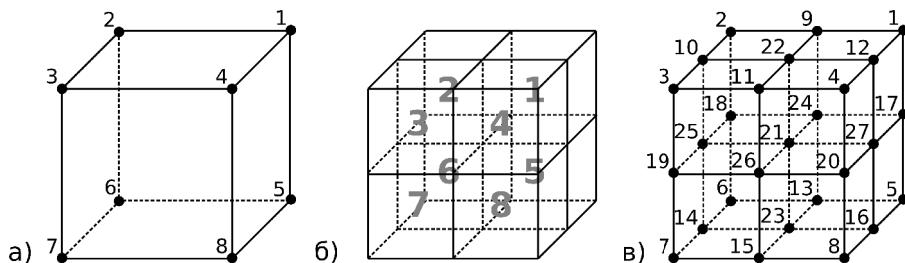
Од седамнаесточврних призми може се вршити штампање нових изопараметарских елемената према нумерацији приказаној на слици 25 (фигтивни чворови у срединама седмочврних правоугаоних страна нису приказани). Оваква подела добра је за мреже у којима се мрежа шесточврних

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

призми и четврочворних тетраедара дели у изопараметарске елементе.

4.2.3 Повећање резолуције мреже тродимензионалних изопараметарских коначних елемената

Мрежа тродимензионалних изопараметарских елемената често може бити недовољног квалитета - недовољне густине. Поделом елемената иницијалне мреже могуће је повећати квалитет - резолуцију мреже. На слици 26 приказана је једна варијанта дељења изопараметарских елемената.



Сл. 26: Дељење изопараметарских елемената

Поделом иницијалних елемената добија се квалитетнија мрежа. Сваки елемент дели се у осам нових изопараметарских елемената.

Нови чворови подељени су у следеће групе:

(група I) тежишта једнодимензионалних елемената. На слици 26в) то су чворови са бројевима: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20;

(група II) тежишта дводимензионалних елемената. На слици 26в) то су чворови са бројевима: 22, 23, 24, 25, 26, 27;

(група III) тежиште изопараметарског елемената. На слици 26в) то је чвр са бројем 21.

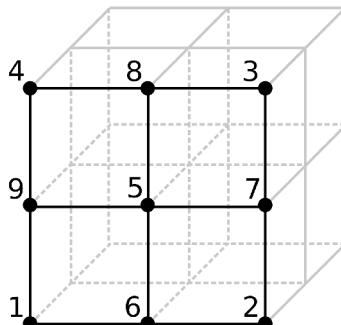
4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

Полазни чворови не припадају ни једној од група. На слици 26 то су чворови са бројевима: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Носиоци граничних услова у овом случају су чворови групе II.

Иницијални елементи са заједничким чворовима могу имати један или четири заједничка чвора групе I. Елементи који имају један заједнички чвр ове групе имају заједничку ивицу, те имају три заједничка чвора. Уколико имају четири заједничка чвора ове групе имају заједничку страну, те имају девет заједничких чворова.

Приликом додавања нових чворова иницијалним изопараметарским елементима врши се формирање деветочворних страна као на слици 27.



Сл. 27: Нумерација чврова деветочворне стране

Чворови групе II су тежишта страна. Они могу бити заједнички за највише два иницијална елемента. Чворови ове групе због тога су носиоци граничних услова.

Гранични услови се дефинишу за све чворове као и у претходним случајевима. Након дефинисања граничних услова врши се штампање нових

4. Мреже тродимензионалних коначних елемената

изопараметарских елемената.

Мада крајње једноставна оваква подела за мреже изопараметарских елемената често може бити значајна ради добијања прецизнијих решења приликом рачунања.

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

У финалној фази припремања модела за компјутерску симулацију врши се формирање свих потребних улазних података у адекватној форми.

Као што је већ било поменуто у овом раду коришћен је PAKF (Програм за Анализу Конструкција - Флуид) програм за прорачунавање (солвер). Он се користи за анализу дводимензионалних и тродимензионалних проблема струјања нестишљивог флуида са провођењем топлоте.

Улазни подаци за овај програм смештају се у .DAT фајл. У њему је дефинисана геометрија модела и сви параметри везани за конкретну симулацију. Због сложености структуре овог фајла и мноштва параметара у даљем тексту биће коментарисани само делови који су од интереса за овај рад.

Геометрија модела у .DAT фајлу дефинише се преко чворова и елемената. У првом делу фајла дефинисани су сви чворови мреже својим редним бројем, ограничењима и координатама. Редни број дефинисан је једним природним бројем, ограничења са пет логичких вредности, а координате са три реална броја. Логичке вредности користе се за дефинисање ограничења за брзину (три вредности - за три правца), притисак и температуру. Када је вредност за гранични услов истинита PAKF не врши рачунање физичке величине у датом чвиру, а уколико је неистинита врши. Тако се једном линијом у фајлу

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

дефинише један чвор мреже. Елемент се дефинише природним бројевима, редним бројем елемента и редним бројевима чврова који га граде у складу са нумерацијом чврова за дати елемент.

Поред геометрије у .DAT фајлу дефинише се и време трајања симулације са адекватним бројем и дужином временских корака као и почетни и гранични услови. Услови CFD симулације могу бити различити. Материјални подаци су густина и вискозност флуида. Постоје гранични услови за притисак, брзине и експанзију модела.

Густина и вискозност флуида дефинишу се реалним бројевима и те две величине су константне у току времена.

У софтверу STL Toolz почетни и гранични услови сваког чвора дефинишу се, ради ефикасности, битовима једног осмобитног броја према следећој табели.

Ограничења	Бинарно								Декадно
Без ограничења	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ограниччење брзине у правцу X осе	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Ограниччење брзине у правцу Y осе	0	0	0	0	0	0	1	0	2
Ограниччење брзине у правцу Z осе	0	0	0	0	0	1	0	0	4
Ограниччење брзине у свим правцима	0	0	0	0	0	1	1	1	7
Чвр улаза	0	0	0	0	1	0	0	0	8
Чвр излаза	0	0	0	1	0	0	0	0	16
Ограниччење притиска	0	0	1	0	0	0	0	0	32
Ограниччење температуре	0	1	0	0	0	0	0	0	64
Ободни чвр	1	0	0	0	0	0	0	0	128

Табела 4: Почетни и гранични услови једног чвора у софтверу STL Toolz

Лако је уочити из табеле да постоји и мета-услов 7 (декадно), који је уведен ради једноставности.

5.1 Наслеђивање почетних и граничних услова

Приликом креирања нове мреже од постојеће мреже коначних елемената модела могуће је наслеђивање почетних и граничних услова уколико су они били адекватно подешени на иницијалном моделу.

Подмодул софтверског модула 8chvorova који врши наслеђивање почетних и граничних услова развијен је у овом раду за потребе међународног ОП-7 пројекта ArTreat. Сви модели за овај пројекат добијени скенирањем пацијената у клиникама. Због тога се за ове симулације користе искључиво тродимензионални модели. Ради једноставности сваком чвиру могуће доделити четири услова. Сваки чвр мора имати бар један услов. Услови које чвр може имати су:

- (а) чвр улаза (eng. inlet node);
- (б) чвр излаза (eng. outlet node);
- (в) чвр на зиду;
- (г) чвр у унутрашњости.

Почетни и гранични услови сваком новом чвиру записују се једним бинарним бројем према табели 4. Чворови иницијалне мреже задржавају своје вредности почетних и граничних услова. Нови чворови добијају ову вредност према следећим правилима:

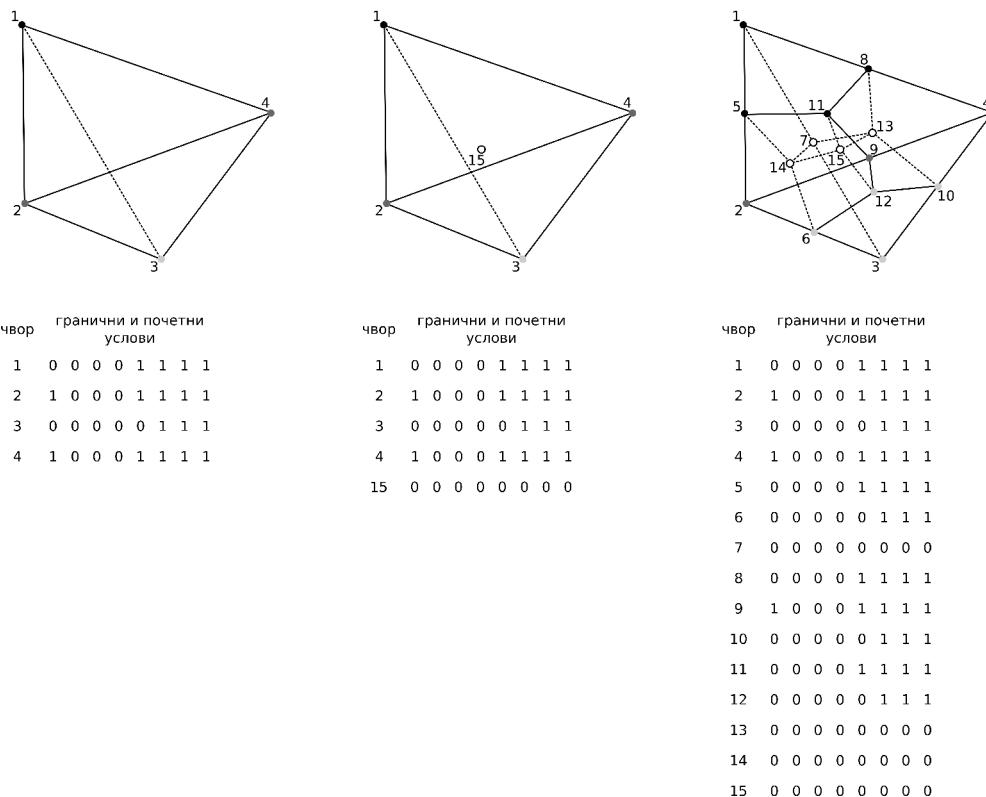
- (1) чвр једновремено не може имати услове (а) и (б);
- (2) чворови у тежиштима тродимензионалних елемената (чворови групе

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

III) увек добијају услов (г) и не могу имати било који други;

(3) бинарна вредност која се добије као резултат логичке операције почетних и граничних услова свих чворова елемента у чије тежиште се смешта (нови) чвор групе II или I је вредност која се додељује том чвору као услов.

Битно је приметити да се условом (3) заиста врши ваљано дефинисање граничних услова за све чворове на омотачу модела. На примеру једног тетраедралног коначног елемента обода модела на слици 28 приказано је наслеђивање граничних услова према овим правилима.



Сл. 28: Наслеђивање граничних услова у оквиру једног коначног елемента

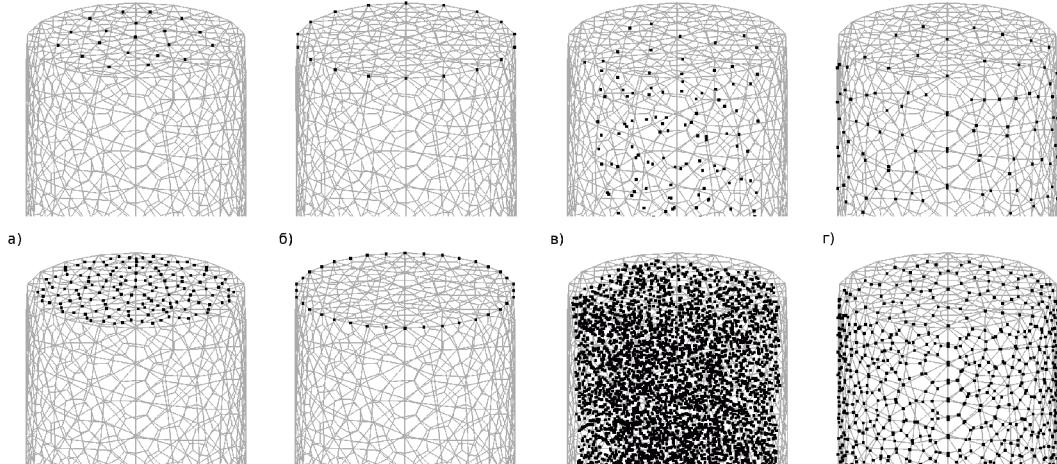
На следећем примеру илустровано је наслеђивање услова за цео модел

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

према овим правилима. На слици 29 приказани су чворови модела осмочворних изопараметарских елемената који је добијен од мреже тетраедарних коначних елемената. На слици су горе приказани само чворови иницијалне мреже, а доле чворови нове мреже коначних елемената. Почетни и гранични услови су наслеђени из иницијалног модела.

На слици 29 може се видети:

- а) чворови који имају услов улазних чворова;
- б) чворови који имају услов улазних чворова и услов чворова на зиду;
- в) чворови у унутрашњости;
- г) чворови на зиду.



Сл. 29: Наслеђивање почетних и граничних услова

Приликом наслеђивања почетних и граничних услова из модела записаног у PAKF .DAT фајлу уводе се додатна правила. Разлог за њихово увођење приликом овог наслеђивања је тај што комбинацијом граничних услова и

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

задатих брзина по чвровима записаних у .DAT фајлу нису дефинисани чврови обода улаза, односно излаза модела. У овом случају ободни чврови носе иста ограничења као и чврови зида.

Додатна правила тичу се наслеђивања чврова у оквиру једне стране или ивице. Она бивају уметнута између (2) и (3), те за случај оваквог наслеђивања правила изгледају овако:

- (1) чвор једновремено не може имати услове (а) и (б);
- (2) чврови у тежиштима тродимензионалних елемената (чврови групе III) увек добијају услов (г) и не могу имати било који други;
- (3) испитује се да ли бар један чвор елемента у чије тежиште се смешта (нови) чвор групе II или I има вредност почетних и граничних чврова на улазу или излазу модела. Уколико има прелази се на правило (4), а уколико нема на правило (5);
- (4) уколико сви чврови елемента у чије тежиште се смешта (нови) чвор групе II или I имају почетне и граничне вредности чврова улаза односно излаза или чврова на омотачу или комбинацију ових услова, нови чвор добија почетне и граничне вредности чврова улаза, односно излаза, и не узима се у обзир правило (5);
- (5) бинарна вредност која се добије као резултат логичке операције почетних и граничних услова свих чврова елемента у чије тежиште се смешта (нови) чвор групе II или I је вредност која се додељује том чвору као услов.

И код неких од најпознатијих светских комерцијалних софтвера за рад са

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

коначним елементима на исти начин као и код PAKF нису дефинисани чврлови обода модела те се наслеђивање може вршити на горе наведени начин.

Овим правилима обезбеђује се да и чврлови који се налазе до ободних чврлова добију ваљане почетне и граничне услове. На основу њих је могуће правилно наслеђивање почетних и граничних услова са чврлова иницијалне на чврлове нове мреже коначних елемената.

5.2 Задавање почетних и граничних услова

За задавање почетних и граничних услова симулација у овом раду развијен је софтверски модул *otvarach*.

Задавање почетних и граничних услова за уобичајене CFD симулације врши се на чвровима омотача (зида) модела. Чврови у унутрашњости немају никаква ограничења, те им се све физичке величине могу рачунати у свим правцима. Чврови зида имају ограничења рачунања брзина у свим правцима. Њих нема у списку чврова са задатим брзинама и пошто имају ограничења за рачунање брзине - брзина флуида на зиду једнака је нули. На улазима и излазима из модела у зависности од типа проблема може се задати одговарајући профил брзине, притисак или оставити отвор. Отвор је скуп чврова на омотачу у којима програм за прорачунавање може рачунати брзину.

Иницијално задавање се врши на моделу код кога су правилно ограничени чврови омотача и чврови у унутрашњости. Уколико иницијани модел нема тако подешена ограничења неопходно је извршити његово ограничавање. Уколико је модел већ адекватно ограничен могуће је модулом *otvarach* извршити креирање отвора на моделу, односно почетних услова симулације.

5.2.1 Ограничавање модела коначних елемената

Ограничавање модела коначних елемената могуће је урадити софтверским модулом *ogranichenja*, који је развијен у току овог рада за ту намену. Процес ограничавања модела сличан је као онај описан у 4.2.

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

Иницијално сви чворови се третирају као да имају ограничња чворова у унутрашњости.

На основу учитаних елемената врши се формирање страна којима се додаје по један фиктивни чвор у тежишту који служи као носилац граничних услова. Приликом додавања тог чвора прво се испитује да ли сви чворови дате стране имају заједничког суседа. Уколико имају тај чвор се додељује страни и њему се мењају гранични услови у граничне услове чворова у унутрашњости. Уколико немају заједничког суседа креира се и додељује страни нови чвор, у њеном тежишту, са граничним вредностима чворова на омотачу. Тада се смешта у низове суседа свих чворова дате стране. Као што је већ поменуто раније, низовима суседа избегава се спајање чворова и убрзава претраживање.

На крају, почетне и граничне вредности свих чворова страна, чији чвор носилац граничних услова има почетне и граничне услове чворова на омотачу, добијају тај исти услов.

Додавањем нових чворова повећава се низ свих чворова модела. Приликом штампања коначне мреже, међутим, врши се штампање свих чворова редом све до броја чворова почетне мреже. Нови чворови у овом случају служе искључиво за проналажење омотача.

За мреже које се креирају софтверским модулом 8chvorova ово ограничавање није потребно. Уколико се врши наслеђивање граничних услова подразумева се да су жељени почетни и гранични услови преузети из претходне мреже. Уколико се пак не врши наслеђивање на начин објашњен у 4.2 софтвер у току самог креирања мреже подешава граничне услове свих чворова модела.

5.2.2 Креирање улазних и излазних отвора модела

Уколико модел коначних елемената има раздвојене унутрашње и чворове на омотачу модулом *otvarach* могуће је задавање почетних услова симулације.

Ако се задају почетне брзине флуида неопходно је дефинисати:

- функцију брзине у зависности од времена;
- чворове у којима је функција брзине задата;
- множитеље компонената брзине за сваки чврт у задатим правцима.

Уобичајено се брзине задају на улазним или излазним чворовима отвора модела. Пошто се брзина задаје она се не рачуна у датим чвртима те се у њима постављају ограничења рачунања брзина у задатим правцима.

Свака компонента вектора брзине у одговарајућем правцу чврта (са задатом брзином) у датом временском кораку симулације једнака је производу множитеља брзине те компоненте у датом чврту и временске функције, на коју је дати чврт реферисан за одговарајући временски корак. Могуће је имати више дефинисаних временских функција (на пример за више различитих отвора на моделу) те се компоненте брзина задатих чвртова могу реферисати на било коју од њих.

Уколико се дефинишу ограничења брзине у неком чврту и ако се чврт не реферише на одређену временску функцију брзине, подразумева се да је брзина једнака нули - на тај се начин дефинишу гранични услови чвртова на омотачу.

Приликом учитавања чвртова и елемената модела модулом *otvarach*

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

Креира се низ свих страна на омотачу. То су стране коначних елемената које имају све чворове са граничним условима чворова на омотачу. Стране на омотачу морају се креирати пошто у .DAT фајлу постоје само информације о чворовима и елементима. Приликом проналажења страна омотача врши се претрага само по елементима који се налазе до омотача. Ово је изводљиво пошто се приликом штампања елемената било којим софтвером који је у овом раду развијен за сваки елемент штампа логичка вредност која указује на то да ли се дати елемент налази до омотача.

Чворове улаза или излаза модела у овом софтверу могуће је издвојити на начине објашњене у даљем тексту.

Одабиром три различита чвора A,B,C жељеног отвора модела дефинише се раван у простору у чијој близини отвор лежи (странице коначних елемената које граде отвор не морају лежати у равни, доволно је да буду у њеној близини пошто се стране елемената које нису странице омотача не узимају у обзир). На основу координата та три чвора израчунава се детерминанта:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix},$$

а након тога и параметри равни $ax+by+cz+d=0$:

$$a = \frac{-d}{D} \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_B & z_B \\ 1 & y_C & z_C \end{vmatrix}; \quad b = \frac{-d}{D} \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_B & 1 & z_B \\ x_C & 1 & z_C \end{vmatrix}; \quad c = \frac{-d}{D} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Дефинисањем растојања са одређеном толеранцијом близине Tol1 је могуће добити скуп свих страна на омотачу чији су чворови, са текућим координатама (x, y, z) , у близини равни. Сматра се да је дата страна омотача у

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

близини равни уколико сви чворови стране задовољавају следећи услов:

$$(a) Tol1 > \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

По потреби дефинише се толерантна дистанца $Tol2$ до произвољног референтног чвора (који може бити чвр отвора). Толерантна дистанца користи се да би се евентуално избегле стране омотача других грана модела који леже у истој равни. У том случају сви чворови издвојене стране морају задовољавати овај услов:

$$(b) Tol2 > \sqrt{((x-x_{ref})^2 + (y-y_{ref})^2 + (z-z_{ref})^2)}$$

Све стране омотача које прођу услове (а) и (б) добијају одговарајући маркер.

Уз ваљано дефинисање модела програмом PAKF могуће је прорачунавање модела који имају једну или више равни симетрије. У том случају позиција модела бира се тако да равни симетрије буду паралелне са одговарајућим координатним равнима. Сви унутрашњи чворови модела који леже у равни симетрије добијају ограничење рачунања брзине у правцу који је нормалан на раван симетрије. То мора да важи и за чворове који се налазе на оном делу обода излаза модела који лежи у равни симетрије. Уколико је улаз на моделу такође равански симетричан, неопходно је да се брзине задају и на оном делу обода улаза који лежи у равни симетрије (осим граничних чворова). За проблеме који су равански симетрични могуће је у софтверу *otvarach* поставити додатне услове. Њима се у скуп чворова неког улазног или излазног отвора модела (у који нису сврстани и чворови обода отвора) могу додати и чворови обода отвора који леже близу равни симетрије модела без убацивања и чворова на граници. Овај случај приказан је на слици 31. Додатни

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

услови постављају се у кораку (3) у опису алгоритма који следи.

У циљу проналажења крајњих ивица (ободних ивица) отвора, странама са маркером у следећем кораку додају се нови чворови. Стране са маркером су оне чији су чворови задовољили услове (а) и (б). Алгоритам проналажења крајњих ивица сличан је као онај који је објашњен у 5.2.1:

- (1) иницијално, сви чворови се третирају као чворови који нису на ободу, односно чворови у унутрашњости;
- (2) на основу учитаних страна које леже у равни отвора врши се формирање ивица којима се додаје по један чвор у тежишту који служи као носилац граничних услова. Приликом додавања тог чвора прво се испитује да ли чворови дате ивице имају заједничког суседа. Уколико имају, тај чвор се додељује ивици и он се третира као чвор који није на ободу. Уколико немају заједничког суседа, креира се и додељује ивици нови чвор, у њеном тежишту. Нови чвор тада се третира као чвор на ободу и смешта у низове суседа чворова дате ивице;
- (3) уколико се ради о равански симетричном проблему сви нови чворови који се налазе у близини неке од равни симетрије третирају се као чворови који нису ободни;
- (4) у последњем кораку чворови свих ивица код којих су тежишни чворови ободни третирају се као чворови обода.

Нови чворови након проналажења обода више се не користе.

Лако је приметити да је ова горе објашњена процедура иста као процедура проналажења омотача за дводимензионални случај, са изузетком правила за

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

равни симетрије.

Свим чворовима страна код којих су сви чворови у срединама ивица са граничним условима чворова у унутрашњости су они којима треба задати брзине - њима се додељује вредност почетног и граничног условия чворова улаза или излаза. Овим се избегава промена граничних услова брзина на чворовима обода улаза односно излаза модела, као на слици 30в). Ти чворови поред вредности почетног и граничног условия чворова улаза, односно излаза, имају додељену и вредност чворова зида.

На овом месту треба напоменути и то да се по потреби скуп чворова којима се врши додела адекватних почетних услова датог отвора може проширити и чворовима отвора обода уколико се тако софтверу нагласи.

Чворови који су блиски равни и који припадају некој од страна на омотачу модела добијају одређени маркер - пошто су то и чворови омотача.

Вектори задате брзине нормални су на раван отвора. Они могу бити истог интензитета (обично јединичног) када се задаје раван профил брзине - као на слици 30г), или различитог. Уколико су вектори различитог интензитета уобичајено је да се задаје параболичан профил брзине као на слици 30е) према формулама:

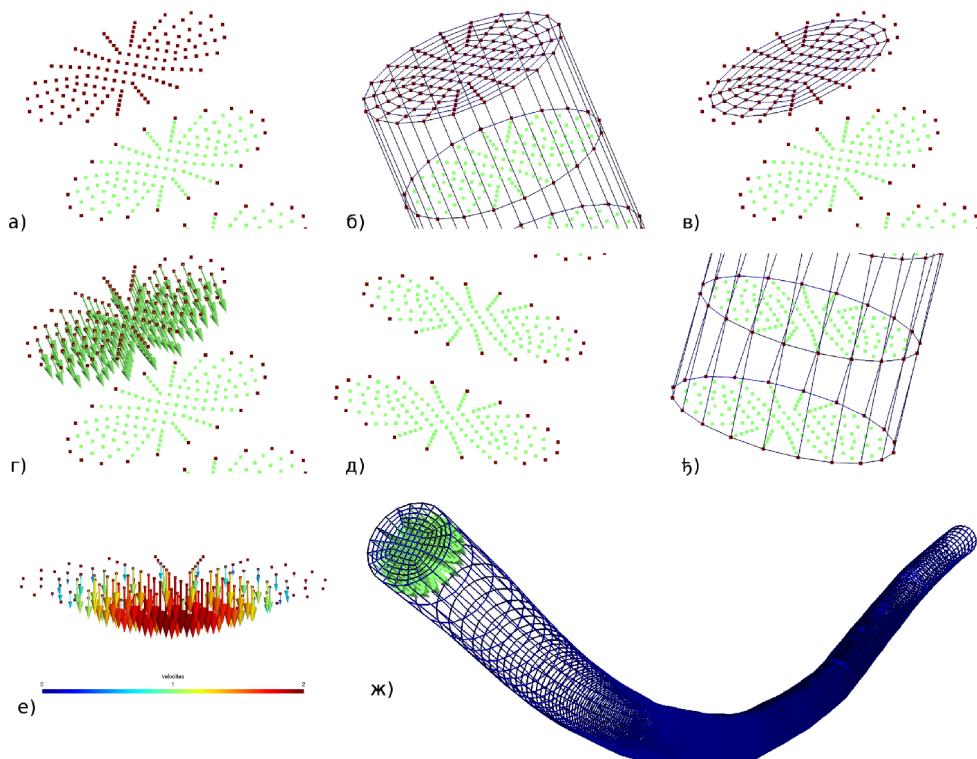
$$V = 2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

где је V интензитет брзине, r растојање датог чвора до центра параболе, а R растојање центра параболе до најдаљег чвора коме треба задати брзину. Центар параболе је тежиште свих чворова на којима се задаје брзина.

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

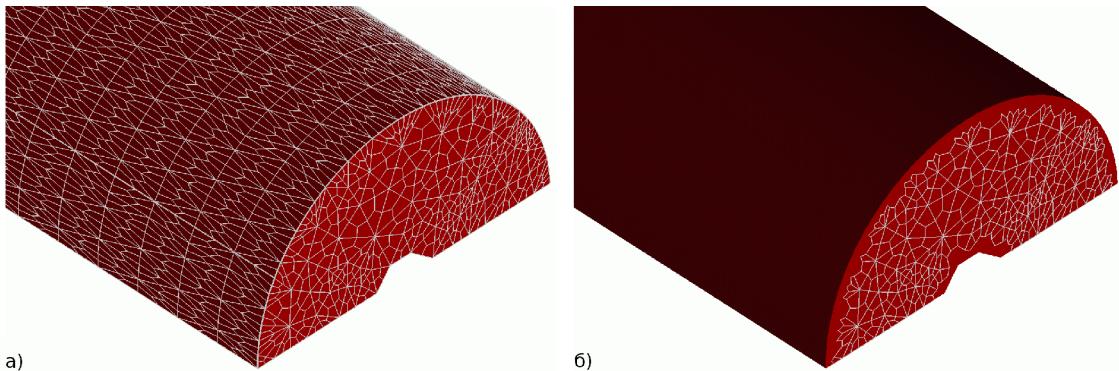
Када се задаје брзина обавезно се остављају и отвори у моделу. Отвори су места на омотачу на којима су чворови са ограничењима чвррова у унутрашњости (да би се брзине у њима рачунале). Задавање отвора врши се на начин који је већ описан. Чвровима којима треба задати брзине у овом случају мењају се гранични услови у граничне услове чвррова у унутрашњости као на слици 30д) и 30ж).

На слици 30ж) приказана су стране коначних елемената целог модела у чијим чвровима се не врши рачунање брзина као и задати вектори брзина.



Сл. 30: Задавање брзина (чврови код којих се брзине не рачунају су тамни)

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију



Сл. 31: Издавање страна отвора на равански симетричном моделу осмочврних коначних елемената добијених од тетраедара

Уколико је потребно задати одговарајући притисак као почетни услов у симулацији неопходно је дефинисати:

- функцију притиска у зависности од времена;
- стране у којима је задат притисак;
- чворове у којима постоји ограничење за притисак;
- стране отвора на моделу у којима је потребно рачунати брзине.

Притисак у одређеном временском кораку симулације у на датој страни је једнак вредности временске функције притиска у том тренутку;

Ако је дефинисано само ограничење притиска у одређеном чвиру, подразумевани притисак једнак је нули (као и у случају брзина). Слично као и када се задају брзине уобичајено је да се притисак задаје на улазним и излазним отворима модела.

На исти начин као и приликом задавања брзина налазе се жељене стране

5. Формирање улазних података за компјутерску симулацију

и чворови отвора, са разликом што се при задавању притиска не издвајају крајње ивице (на ободу). Тако се свим странама отвора задаје жељени притисак.

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

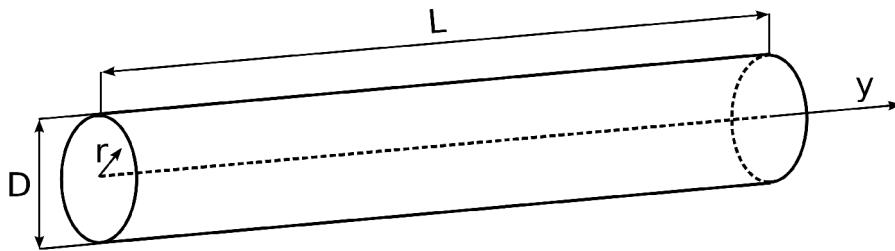
Програм PAKF користи се дуже време у решавању различитих проблема струјања флуида. Решења добијена овим софтвером проверена су много пута [N.Filipovic et al., 2006]. Велики број до данас објављених научних радова приказује решења добијена употребом овог софтвера. У последњих неколико година објављено је више научних радова у којима су приказани резултати добијени употребом програма PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената, неки од њих су [10-24]. Те неструктурне мреже добијене су употребом софтвера који је настао у овом раду. У циљу анализе тачности решења употребом софтвера PAKF са таквим мрежама коначних елемената у овом делу рада биће приказани различити тест примери.

За све примере, осим примера са реалним моделом, приказана су одступања нумеричких од аналитичког решења.

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

6.1 Струјање флуида кроз цев кружног пресека

У овом тест примеру разматра се струјање флуида (на собној температури) кроз цев кружног пресека чија је геометрија са материјалним подацима приказана на слици 32.



$$L=20,0 \text{ cm}$$

$$\eta=3,675 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{scm}}$$

$$V(r)=2(\bar{V}-\left(\frac{2r}{D}\right)^2)$$

$$D=1,0 \text{ cm}$$

$$\rho=1,05 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\bar{V}=1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} ; \frac{\partial V}{\partial t}=0$$

Сл. 32: Геометријски и материјални подаци за тест пример струјања флуида кроз цев кружног попречног пресека

Лако је уочити да вискозност и густина флуида који су задати као параметри у овом примеру одговарају крви човека. Иницијално је брзина у свим деловима флуида једнака нули осим на улазу. Притисак је једнак нули на почетку у целом моделу.

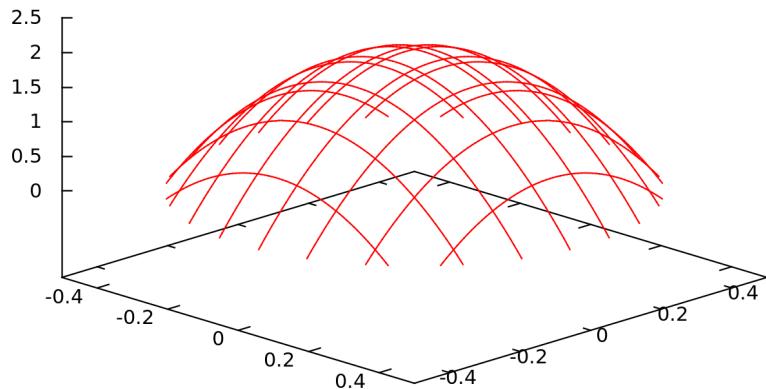
Према Hagen-Poiseuille једначини аналитичко решење за брзине на излазу се рачуна према следећој формулама [K.Voronjec - N.Obradović, 1965]:

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

$$V(r) = \frac{-1}{4\eta} \frac{\partial P}{\partial r} (R^2 - r^2)$$

Притисак флуида могуће је одредити према формулама за максималну брзину, односно за $r=0$.

Циљ овог тест примера је да се покаже формирање одговарајућег профила брзине флуида на излазу из цеви.



Сл. 33: Профил брзине за тест пример струјања флуида кроз цев
кружног попречног пресека - аналитичко решење

У циљу верификације нумеричких решења добијених CFD симулацијом за овај случај направљено је седам различитих структурних и неструктурних мрежа основних коначних елемената различитог квалитета. Структурно је моделована само једна четвртина цилиндра пошто су брзине симетричне у осталим. Неструктурна мрежа добијена је од тетраедарске мреже. Са горе наведеним параметрима симулације вршено је прорачунавање сваког од примера, а затим и упоређивање добијених резултата са аналитичким решењем.

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

Основни подаци о свим структурним и неструктурним мрежама коначних елемената овог примера дати су у следећој табели:

модел	структурни модел		неструктурни модел	
	чворова	елемената	чворова	елемената
а)	1369	972	5447	3780
б)	2440	1872	9985	7144
в)	7098	5775	28039	21000
г)	28455	25272	112677	96240
д)	96145	88128	389119	340724
ђ)	126200	117012	509335	447032
е)	144200	134325	556603	489464

Табела 5: Број чворова и елемената тест примера

Релативна грешка δ нумеричког решења у односу на аналитичко у овом тест примеру рачуната је на следећи начин:

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\vec{Vn}_i| - |\vec{Va}_i|}{|\vec{Va}_i|} \right)$$

Где је N број чворова мреже коначних елемената на излазу модела код којих је брзина добијена нумеричком симулацијом различита од нуле. Vn_i је брзина у i -том чвиру излаза модела добијена нумерички, а Va_i је аналитичка вредност брзине у тачки са координатама датог чвора.

У следећој табели приказани су резултати и релативне грешке

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

нумеричких решења у односу на аналитичко за овај тест пример:

модел	површина изл. отвора модела [см ²]		проток на изл. отвору [см ³ /с]		релативна грешка нумер. / аналитичко решење [%]	
	структурни	неструктурни	структурни	неструктурни	структурни	неструктурни
а)	0.19412	0.70711	0.19371	0.69041	0.96079	0.88063
б)	0.19486	0.73473	0.19509	0.74140	0.97975	2.21177
в)	0.19554	0.76537	0.19539	0.77177	0.99770	2.05063
г)	0.19610	0.77254	0.19606	0.77659	1.04364	1.41129
д)	0.19621	0.78036	0.19618	0.78220	1.06059	1.00547
ћ)	0.19625	0.78142	0.19623	0.78299	1.06868	0.93886
е)	0.19626	0.78142	0.19624	0.78299	1.07285	0.94166

Табела 6: Резултати и релативне грешке

Из табеле може се видети да су решења за све мреже веома добра у поређењу са аналитичким решењем. У идеалном случају одступања од аналитичког решења су око један проценат. Обзиром на једноставност овог примера са повећањем броја чвррова у структурној мрежи не добија се решење које се боље поклапа са аналитичким. Предност већег броја чвррова код структурне мреже за овај пример је већа резолуција, односно већи број чвррова коначних елемената на излазном профилу, али се повећањем мреже незнатно повећава нумеричка грешка. Неструктурна мрежа прилагођава се оваквом примеру као и било ком другом те се повећањем резолуције добија на квалитету решења све до границе на којој решење више не зависи од мреже (eng. mesh independence) која је за овај случај постигнута са око пола милиона чвррова.

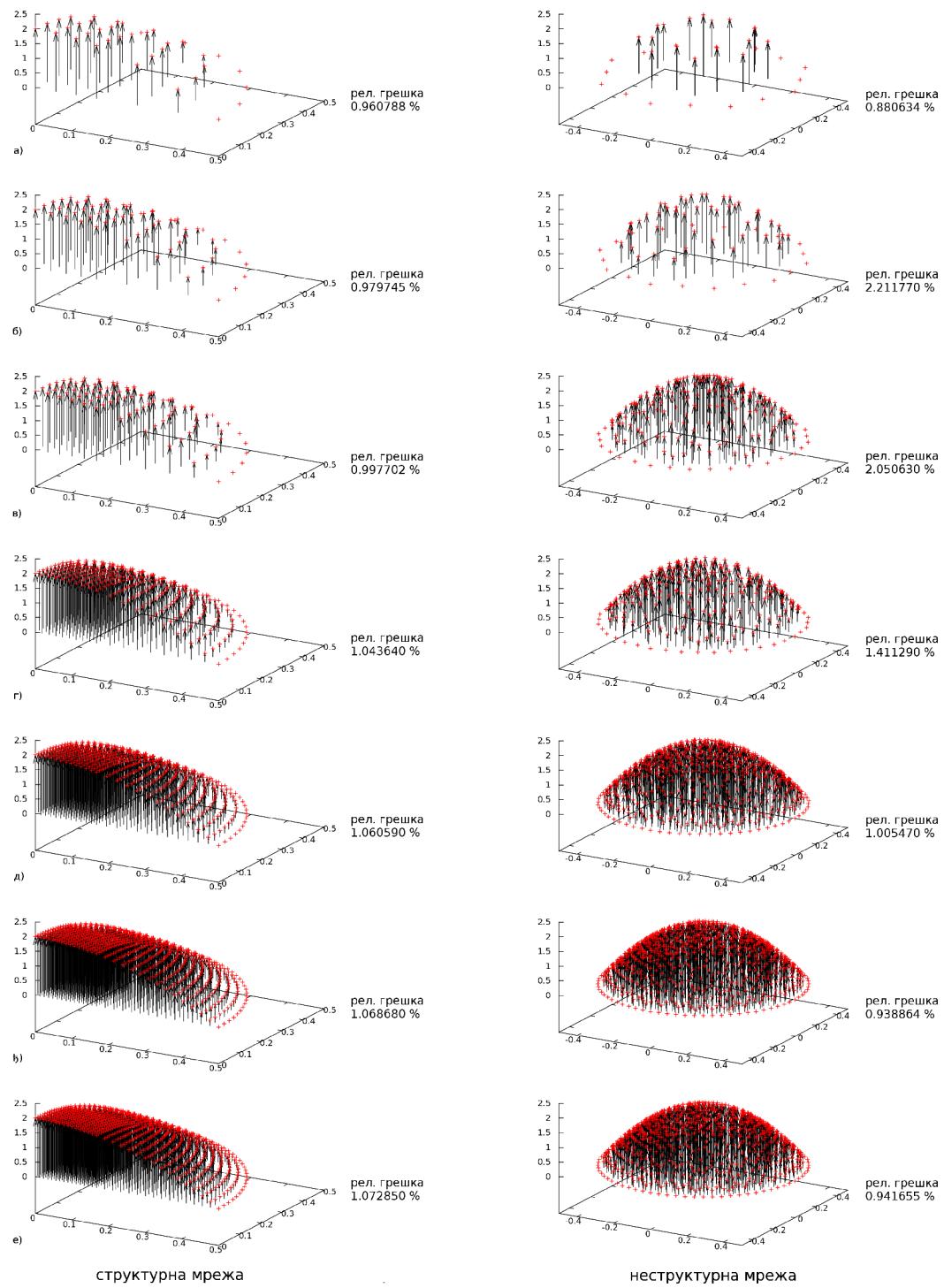
Може бити занимљиво приметити и да се у овим тестовима решење за први пример са неструктурном мрежом најбоље поклапа са аналитичким решењем. Разлог за то је што се због ретке густине мреже у овом занимљивом случају приликом генерисања чвррова неструктурне мреже постигнута

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

расподела чврова у просторном домену проблема налик на структурну мрежу која се неким необичним случајем одлично показала за дати случај.

На слици 34 приказани су профили брзине нумеричких решења.

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

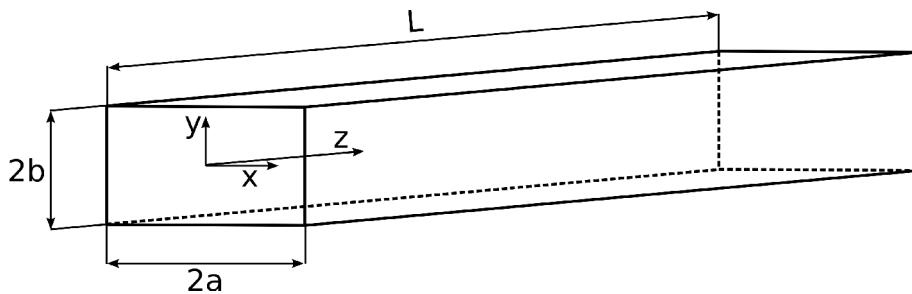


Сл. 34: Профили брзине флуида за тест пример струјања флуида кроз цев кружног попречног пресека - нумеричка решења

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

6.2 Струјање флуида кроз цев правоугаоног пресека

Код овог примера разматра се струјање флуида кроз цев правоугаоног пресека. Геометрија са материјалним подацима дата је на слици 35.



$$L=20,0 \text{ cm}$$

$$\eta=3,675 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{s} \cdot \text{cm}}$$

$$\bar{V}=1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$a=1,0 \text{ cm}; b=0,5 \text{ cm}$$

$$\rho=1,05 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0$$

Сл. 35: Геометријски и материјални подаци за тест пример струјања флуида кроз цев правоугаоног попречног пресека

Вискозност и густина флуида у овом примеру одговарају крви човека. Иницијално је брзина флуида у свим деловима модела једнака нули осим на улазном отвору, на коме је задат раван профил брзине. Притисак у целом моделу иницијално је једнак нули.

Аналитички профил брзине на излазу за овакав случај дат је следећом формулом [D.Trebotich et al., 2003]:

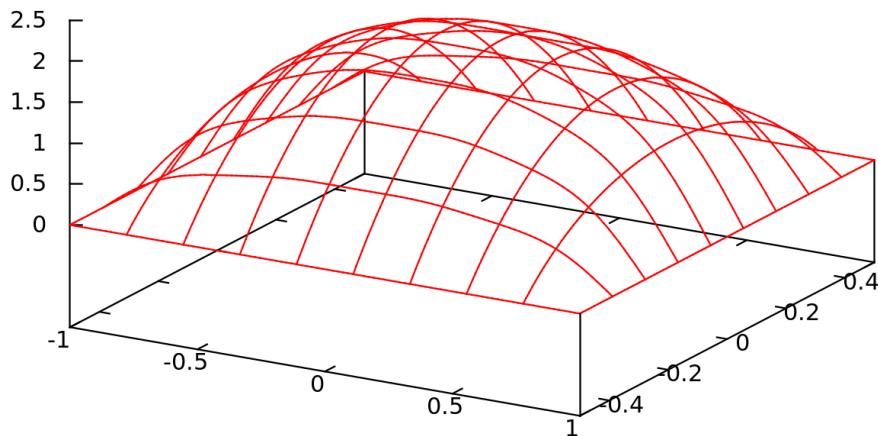
$$V(x,y)=\frac{-16a^2}{\eta\pi^3}\frac{\partial P}{\partial z}\sum_{i=1,3,5}(-1^{((i-1)/2)})(1-\frac{\cosh((i\pi y)/2a)}{\cosh((i\pi b)/2a)})\frac{\cos((i\pi x)/(2a))}{i^3}$$

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

На основу познатог протока могуће је према следећој формулама одредити разлику притиска:

$$Q = \frac{-4ba^3}{3\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \left(1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{i=1,3,5} \left(\frac{\tanh((i\pi b)/(2a))}{i^5} \right) \right)$$

Циљ овог тест примера је потврдити формирање одговарајућег од иницијално равног профиле брзине на излазу из цеви.



Сл. 36: Профил брзине за тест пример струјања флуида кроз цев правоугаоног попречног пресека - аналитичко решење

За овај случај направљено је седам структурних и неструктурних мрежа основних коначних елемената различитог квалитета. Из разлога као и у претходном тест примеру и овде је структурно моделована једна четвртина модела. Неструктурна мрежа основних елемената добијена је од тетраедарске. Са поменутим параметрима вршено је прорачунавање за све моделе, а након тога и упоређивање добијених решења са аналитичким. Обзиром на то да цев није много дугачка у односу на површину њеног попречног пресека и да је иницијални профил брзине раван, циљ је био да се постигне слагање са

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

аналитичким решењем до пет процената релативне грешке.

Основни подаци о свим структурним и неструктурним мрежама коначних елемената овог примера дати су у следећој табели:

модел	структурни модел		неструктурни модел	
	чворова	елемената	чворова	елемената
а)	1300	972	5301	4172
б)	3042	2448	12387	10116
в)	9720	8381	38343	32336
г)	29106	26000	119223	102628
д)	81920	75919	330413	289580
ћ)	116640	109025	474393	417528
е)	144400	135531	588387	519076

Табела 7: Број чворова и елемената тест примера

У овом тест примеру релативна грешка рачуната је на исти начин као и у претходном. У следећој табели приказане су апсолутне и релативне грешке решења добијених нумеричком симулацијом у односу на аналитичко решење:

модел	површина изл. отвора модела [cm ²]		апсолутна разлика протока излазног и улазног отвора [cm ³ /s]		релативна грешка нумер. / аналитичко решење [%]	
	структурни	неструктурни	структурни	неструктурни	структурни	неструктурни
а)	0.500000	2.000000	0.000291	0.000130	5.475910	13.511800
б)	0.500000	2.000000	0.000086	0.000881	4.055970	12.322300
в)	0.500000	2.000000	0.000006	0.001000	2.676330	10.529000
г)	0.500000	2.000000	0.000000	0.000833	2.186620	7.123450
д)	0.500000	2.000000	0.000000	0.000665	1.707170	5.054520
ћ)	0.500000	2.000000	0.000001	0.000602	1.838110	4.424590
е)	0.500000	2.000000	0.000002	0.000583	1.928340	4.214970

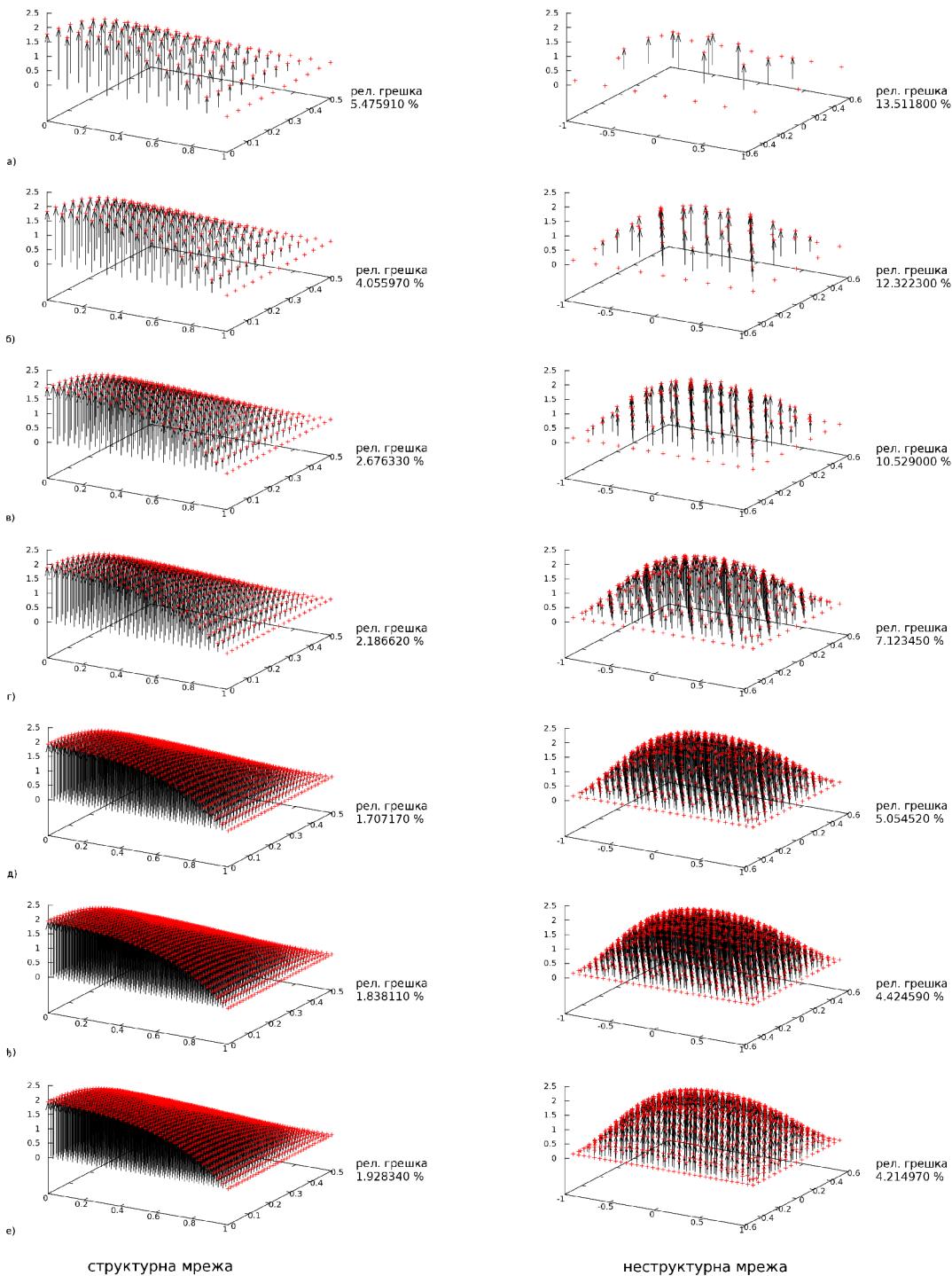
Табела 8: Апсолутна и релативна грешка решења

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

Узимајући у обзир податке приказане у табели, може се видети да су решења за обе мреже задовољавајућа. За овакав тип проблема структурно генерисани тродимензионални основни елементи идеални су, те је отуда јасно зашто су решења добијена структурном мрежом у овом случају доста боља. Може се уочити и да солвер теже задовољава једначину континуитета рачунајући употребом модела са неструктурном мрежом.

На слици 37 приказани су профили брзине нумеричких решења.

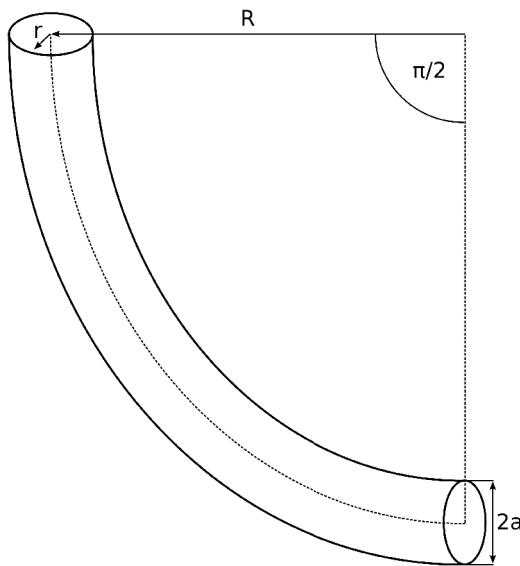
6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената



Сл. 37: Профили брзине флуида за тест пример струјања флуида кроз цев правоугаоног попречног пресека - нумеричка решења

6.3 Струјање флуида кроз закривљену цев кружног пресека

У овом тест примеру разматра се струјање флуида кроз закривљену цев. Цев је закривљена под углом $\pi/2$ и кружног је попречног пресека, као што је приказано на слици 38.



$$R=12,7324 \text{ cm}$$

$$\eta = 3,675 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{s} \cdot \text{cm}}$$

$$V(r) = 2(\bar{V} - (\frac{r}{a})^2)$$

$$a=0,5 \text{ cm}$$

$$\rho = 1,05 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\bar{V} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} ; \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Сл. 38: Геометријски и материјални подаци за тест пример струјања флуида кроз закривљену цев кружног попречног пресека

У овом тест примеру иницијално је брзина флуида у свим деловима модела једнака нули осим на улазном отвору, на коме се задаје параболичан профил брзине. Притисак је иницијално једнак нули у свим деловима модела.

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

Према аналитичкој формули у закривљеној цеви очекује се проток који се разликује од протока у цеви која није закривљена. У овом тест примеру искоришћена је једначина професора Бергера која описује ту разлику. У обзир су узета прва два члана једначине, те она изгледа овако [S.A.Berger et al., 1983]:

$$Q = \pi a^2 \bar{V} \left(1 - 0.0306 \left(\frac{K}{576} \right)^2 + 0.0120 \left(\frac{K}{576} \right)^4 \right)$$

где је $K = (2a/R)(\rho V_{max}/\eta)^2$, \bar{V} средња брзина флуида у правој цеви истог попречног пресека уз исти аксијални градијент притиска, а V_{max} максимална брзина флуида у истој цеви (те према томе $V_{max} = 2\bar{V}$). Из ове једнакости очигледно је да је израз у загради поправка протока у односу на праву цев. Проток је због кривине редукован, те је примера ради за $K=576$ мањи око два процента у односу на праву цев.

У овом тест примеру циљ је потврдити да се код нумеричких решења проток на излазу из цеви, за структурне и неструктурне мреже, поклапа са аналитичким.

Структурно је у овом примеру моделована једна половина модела. Неструктурна мрежа основних изопараметарских елемената добијена је од тетраедарске. Са истим параметрима вршено је прорачунавање за све моделе, а након тога и упоређивање добијених решења са аналитичким.

У следећој табели приказани су основни подаци о структурним и неструктурним мрежама коначних елемената:

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

модел	структурни модел		неструктурни модел	
	чвррова	елемената	чвррова	елемената
а)	5336	4500	10953	9064
б)	17141	15360	34897	30276
в)	35552	32400	70975	62812
г)	52151	48000	100519	89632
д)			368653	334924
ћ)			518989	462080
е)			661003	590440

Табела 9: Број чвррова и елемената тест примера

Релативна грешка δ за проток у овом примеру рачуната је на следећи начин:

$$\delta = \frac{Q_n - Q_a}{Q_a}$$

У претходном изразу Q_a је проток на излазу модела израчунат употребом аналитичке формуле, а Q_n проток добијен нумерички као сума протока кроз све стране коначних елемената које леже на излазном отвору модела.

У следећој табели приказани су протоци на излазном отвору модела добијени нумерички, као и релативне грешке решења добијених нумеричком симулацијом у односу на аналитичко решење:

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

модел	површина изл. отвора модела [cm ²]		проток на излазном отвору модела [cm ³ /s]		релативна грешка нумеричко / аналитичко решење [%]	
	структурни	неструктурни	структурни	неструктурни	структурни	неструктурни
а)	0.388623	0.706805	0.387433	0.706214	1.341070	10.082100
б)	0.391047	0.734868	0.390651	0.742549	0.521599	5.455690
в)	0.391433	0.749991	0.391127	0.756377	0.400286	3.695080
г)	0.391698	0.749991	0.391488	0.756384	0.308497	3.694170
д)		0.765151		0.770533		1.892690
ћ)		0.779726		0.782003		0.432297
е)		0.780250		0.782273		0.397917

Табела 10: Проток и релативна грешка решења

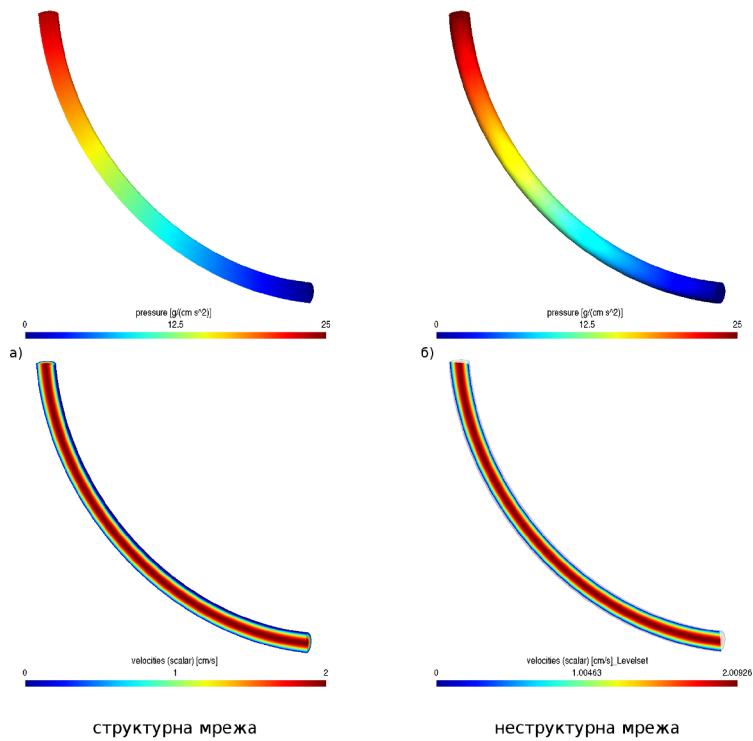
На основу вредности у табели очигледно је да је поклапање нумеричких решења са аналитичким веома добро за оба типа мрежа (protoци за структурне мреже су мањи јер је креирана само половина модела). Решења за структурне мреже, међутим, доста су боља и за случај када неструктурна мрежа има око 100 000 чвррова (а структурна око 50 000) можемо видети да је за неструктурне мреже одступање од аналитичког решења око три процента веће у односу на структурну. Повећањем броја чвррова неструктурне мреже практично се добија решење које одступа од аналитичког колико и оно нумеричко решење добијено употребом структурне мреже.

Уколико се упореде резултати добијени у овом примеру са оним добијеним у примеру струјања флуида кроз праву цев лако је уочити да су код овог примера добијена тачнија нумеричка решења. Мада може изгледати необично на први поглед, таква решења су и очекивана обзиром на то да је још почетком прошлог века (Вајт 1929, Тejlor 1929, Адлер 1934; eng. White, Taylor; de. Adler) и експериментално потврђено да је струјање флуида у закривљеној цеви доста стабилније од оног у правој [S.A.Berger et al., 1983].

На слици 39 приказана су решења за а) најгушћу структурну и б)

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

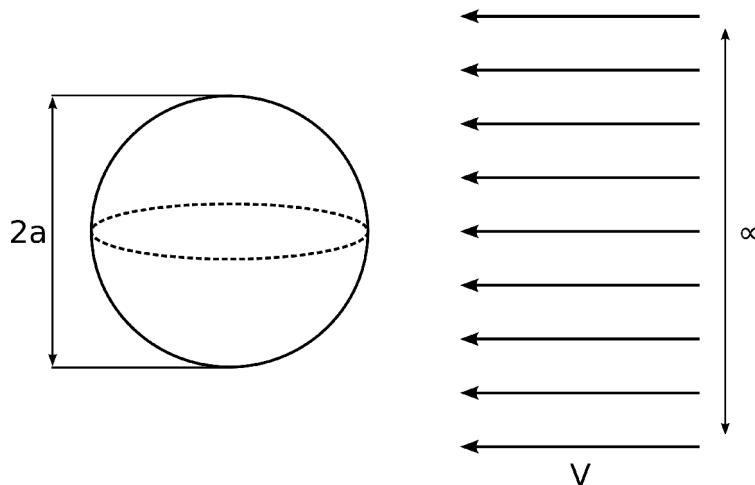
неструктурну мрежу.



Сл. 39: Решења за притисак и брзину за најгушћу структурну и неструктурну мрежу

6.4 Опструјавање флуида око сфере

У овом примеру разматра се струјање флуида око непомичне сфере, као на слици 40.



$$a = 0,5 \text{ cm}$$

$$\eta = 1,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{s} \cdot \text{cm}}$$

$$V = 1,0 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\rho = 1,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Сл. 40: Геометријски и материјални подаци за тест пример опструјавања флуида око сфере

Вискозност и густина флуида који су задати као параметри у овом примеру одговарају води. Брзина је иницијално у свим деловима флуида једнака нули осим на улазу. Под улазом у овом случају подразумева се једна страна модела на којој је задат раван профил брзине. Притисак је иницијално једнак нули у целом моделу.

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

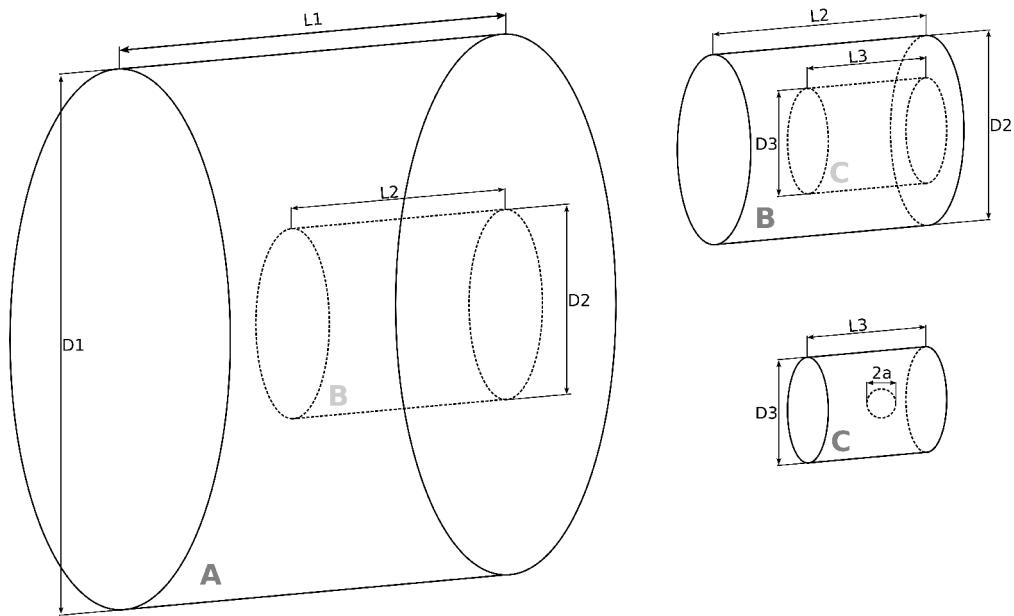
Према Стоксовом закону (eng. Stokes law) очекивана сила отпора (eng. drag force) за овакав случај је:

$$\vec{F}_d = 6\pi\eta a \vec{V}$$

Циљ овог тест примера је да се потврди да укупна сила отпора на сферу добијена нумеричком симулацијом одговара сили из Стоксова једначине. Додатно треба потврдити да струјнице добијене нумерички одговарају струјницама у експерименту.

Флуидни домен теоријски је бесконачан, а моделован је као цилиндар који је много већи од сфере. Сфера је моделована као шупљина сферног облика у флуиду. Тако је проблем сведен на струјање флуида кроз цилиндар у чијој унутрашњости постоји сферна шупљина. Његова висина доста је мања од његовог полупречника. Цилиндар је издељен у три зоне које су, ради ефикаснијег рачунања, дискретизоване у коначне елементе различитим квалитетом (густином). Мрежа има око 516 хиљада чворова и 463 хиљаде елемената. На слици 41 скициран је флуидни домен овог примера.

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената



$$D1=400,0 \text{ cm}$$

$$D2=40,0 \text{ cm}$$

$$D3=4,0 \text{ cm}$$

$$L1=100,0 \text{ cm}$$

$$L2=60,0 \text{ cm}$$

$$L3=40,0 \text{ cm}$$

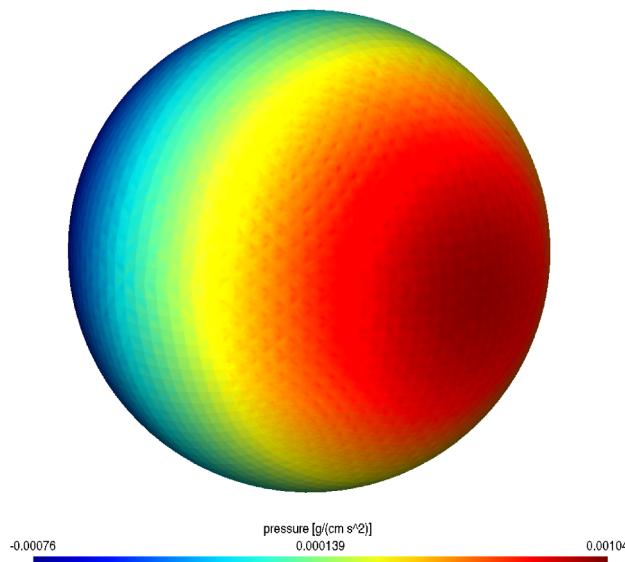
Сл. 41: Моделовање тест примера опструјавања флуида око сфере

У изради модела овог примера иницијално су креирани омотачи (цилиндри) између зона. Ти омотачи служе да се њима регулише густина чворова коначних елемената у зонама, јер је на основу њих направљена ограничена Делонејева триангулација флуидног домена. Они су за овај проблем PLC. Највећа густина чворова је на омотачу сфере, односно границе између сфере и зоне С, са слике 41. Граница између зоне С и зоне В такође је прилично густа, а густина чворова на граници између зоне В и А готово је иста као она на омотачу зоне А и екстремно је мала. Овим је постигнута јако фина резолуција мреже око саме сфере и прилично добра у њеној близини. У зони А има око 6000 чворова, у зони В око 150000, а у зони С налазе се сви

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

остали чворови мреже коначних елемената овог модела. Од тетраедарних елемената на крају формирани су осмочворни изопараметарски елементи.

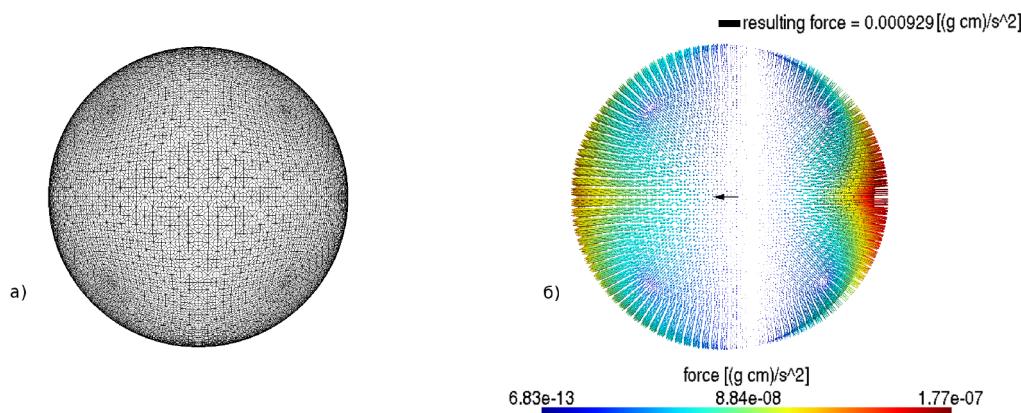
На слици 42 приказано је решење нумеричке симулације за притисак.



Сл. 42: Решење CFD симулације за притисак на површини сфере

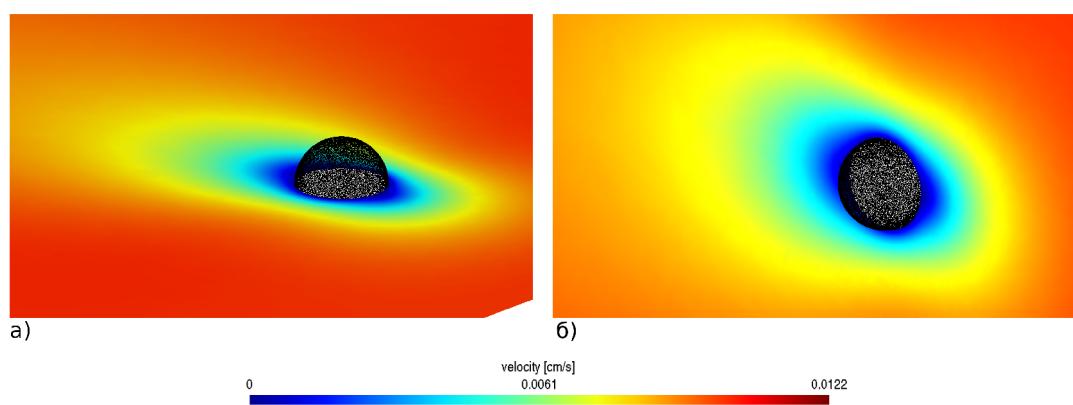
На основу притиска вршено је у фази пост-процесирања рачунање силе. На слици 43 приказани су омотач сфере као и вектори сила који на њега делују. Вектори сила смештени су у тежишта страна омотача на које делују. Приказан је и резултујући вектор, укупне силе отпора која делује на сферу. Релативна грешка у односу на аналитичко решење је 1,46075 процената.

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената



Сл. 43: Омотач сфере и вектори сile које делују на чворове омотача

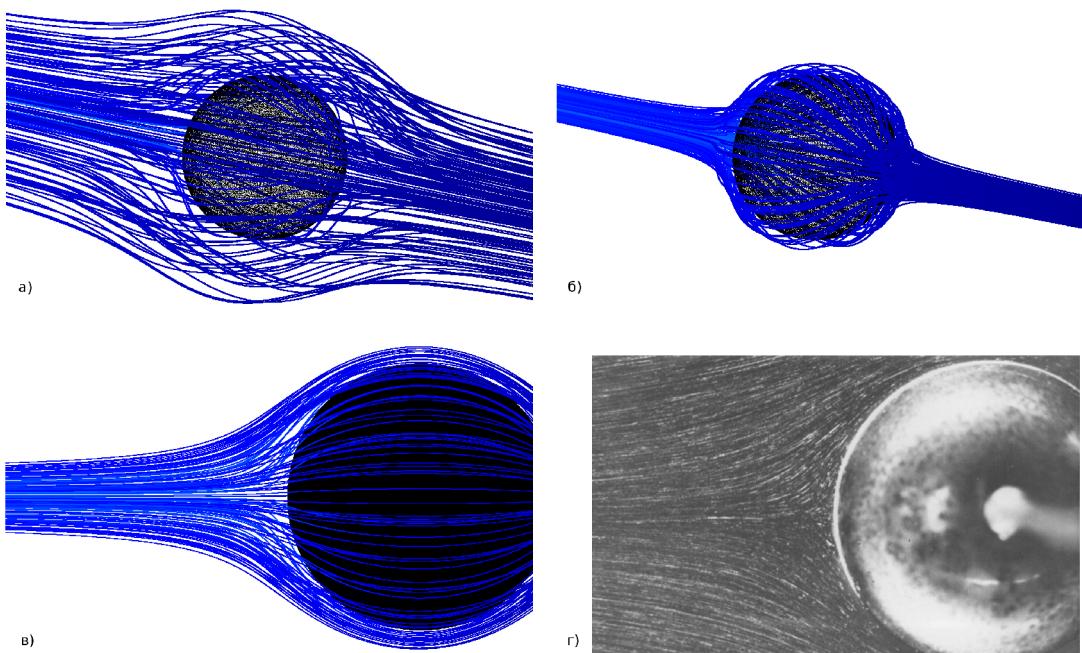
На слици 44 приказано је решење за брзину флуида у околини сфере.



Сл. 44: Брзина флуида у околини сфере

Користећи решење за брзине за овај пример вршено је и прорачунавање струјница. На слици 45 приказана су решења за струјнице за два случаја (ужи и шири сноп).

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената



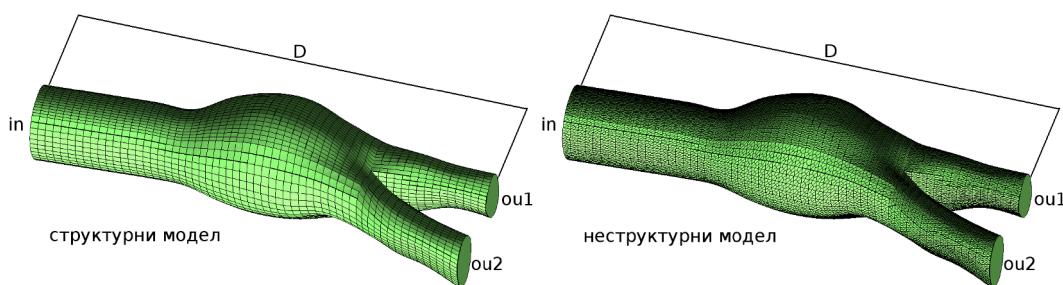
Сл. 45: Струјнице за пример опструјавања флуида око сфере

Са слике 45в) можемо видети да се струјнице добијене нумерички прилично добро поклапају са експерименталним струјницама са фотографије - слика 45г) [S.Taneda, 1956].

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

6.5 Струјање флуида у абдоминалној аорти са анеуризмом

У овом специфичном тест примеру употребљена је компјутерска симулација за прорачунавање струјања флуида у абдоминалној аорти са анеуризмом. За овај случај направљене су две мреже коначних елемената - структурна и неструктурна. Неструктурна мрежа прављена је употребом софтвера насталог у овом раду. Пошто је површинска мрежа неструктурног модела добијена од површинске мреже структурне (дељењем) сви чворови омотача структурне мреже постоје и у неструктурној. Омотачи структурног и неструктурног модела овог примера са материјалним подацима приказани су на слици 46.



$$D=13,05 \text{ cm}$$

$$ou1+ou2=3,0967 \text{ cm}^2$$

$$\rho=1,05 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$in=3,5916 \text{ cm}^2$$

$$\eta=3,675 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{s cm}}$$

$$\bar{V}=10,0 \frac{\text{cm}}{\text{s}} ; \frac{\partial V}{\partial t}=0$$

Сл. 46: Омотачи структурног и неструктурног модела са материјалним подацима

Вискозност и густина флуида у овом тест примеру одговарају крви човека.

У целом моделу брзина флуида иницијално је једнака нули осим на улазу на

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

кome је задат параболичан профил брзине. Притисак је у целом моделу иницијално једнак нули.

Оба модела су исте величине, са разликом што је простор у првом случају дискретизован у структурне, а у другом у неструктурне коначне елементе. Величина модела одговара реалним мерама овог крвног суда. Иницијални параметри одговарају реалним физиолошким условима.

Сврха овог тест примера је да се упореде решења која су добијена нумеричком симулацијом употребом структурног и неструктурног модела. Структурни модел има 63056 чворова и 60000 елемената, а неструктурни 116705 чворова и 95948 елемената.

На слици 47 приказана су решења за брзину за оба случаја.

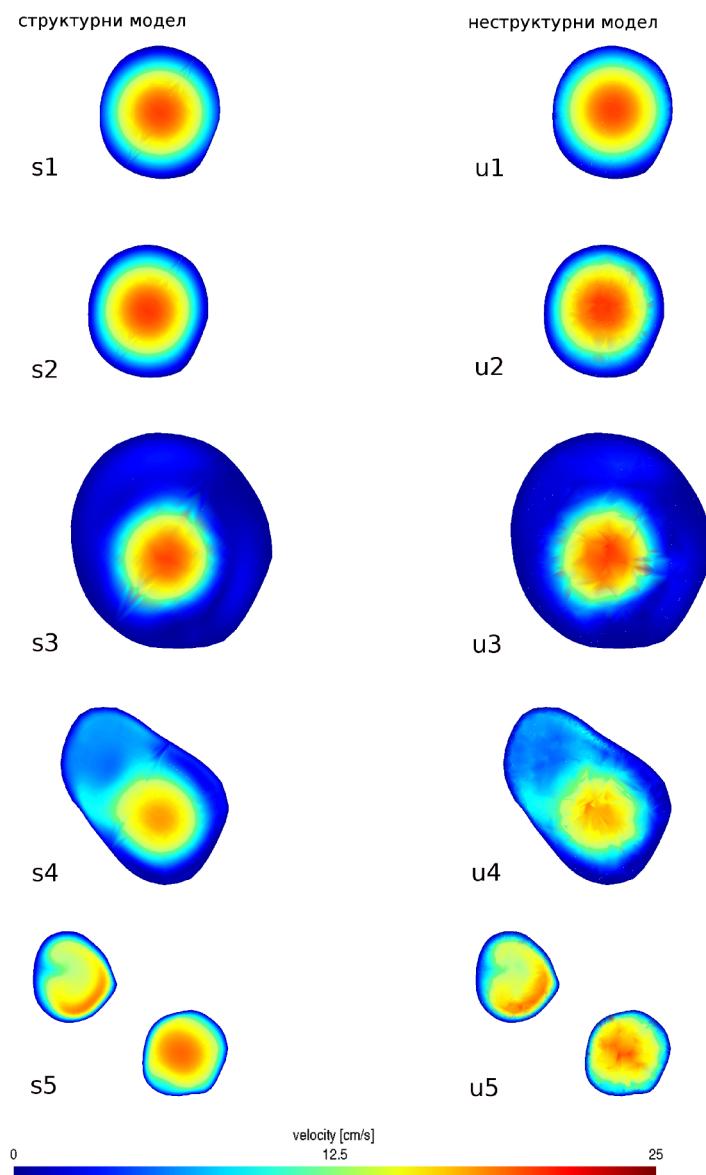


Сл. 47: Брзина флуида за структурни и неструктурни модел

Разлика у решењима за проток на излазу модела мања је од пола

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

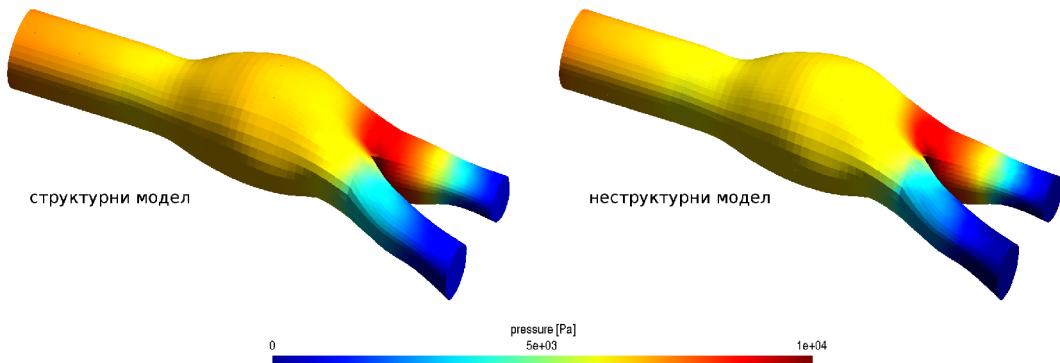
процента. На слици 48 још је јасније колико је добро поклапање решења за брзину у датим попречним пресецима.



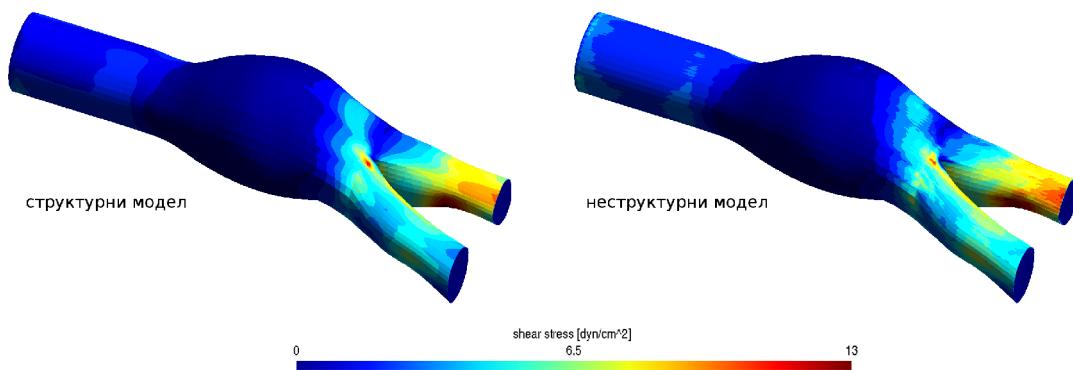
Сл. 48: Решења за брзину у интересантним попречним пресецима за оба модела

На следећим сликама приказана су решења за притисак и смичући напон.

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената



Сл. 49: Дистрибуција притиска тест примера струјања флуида кроз абдоминалну аорту са анеуризмом за оба модела



Сл. 50: Дистрибуција смичућег напона тест примера струјања флуида кроз абдоминалну аорту са анеуризмом за оба модела

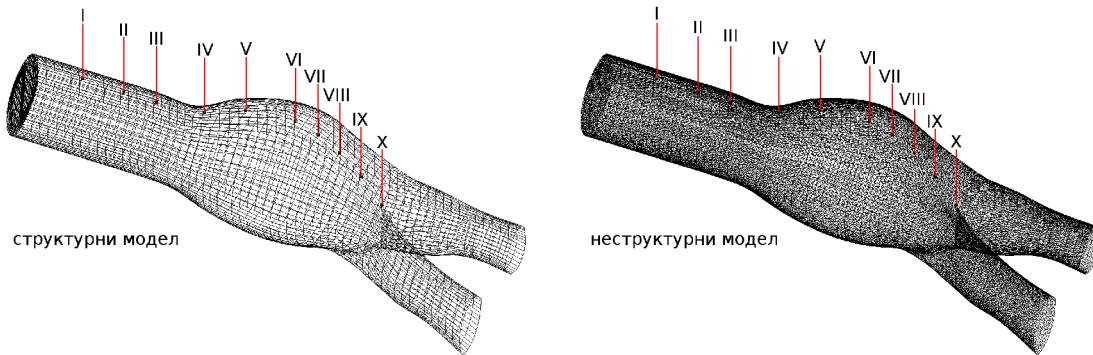
Са слика се може уочити веома добро поклапање резултата за ова два модела. Може се видети да је дистрибуција смичућег напона на зидове крвног суда осетљивија на промену мреже.

Решења за притисак и смичући напон упоређена су и бројчано за чворове

6. Анализа тачности решења добијених програмом PAKF у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

омотача оба модела који се налазе на истим координатама у зони анеуризме.

Локације чврова приказане су на слици 51.



Сл. 51: Чврви употребљени за поређење решења

У табели су приказана и решења као и њихово неслагање за дате чврлове.

чвр	структурни модел		неструктурни модел		неслагање решења стру. / неструктурног модела [%]	
	притисак [Pa]	смичући напон [dyn/cm ²]	притисак [Pa]	смичући напон [dyn/cm ²]	притисак	смичући напон
I	7269.95000	0.85882	7241.13000	0.87340	0.39643	1.69768
II	6628.72000	3.43220	6650.44000	3.50112	0.32767	2.00804
III	6034.96000	1.74791	6074.23000	1.69970	0.65071	2.75815
IV	6024.70000	0.92238	6065.66000	0.93431	0.67987	1.29361
V	6068.98000	0.64426	6011.70000	0.63010	0.94382	2.19787
VI	6056.39000	0.11433	6041.20000	0.11131	0.25081	2.64062
VII	5980.63000	0.04400	5822.60000	0.04512	2.64236	2.55618
VIII	5841.14000	1.47960	5740.44000	1.50113	1.72398	1.45512
IX	6100.29000	1.56532	6074.31000	1.58421	0.42588	1.20678
X	6368.45000	1.43684	6340.56000	1.46133	0.43794	1.70443
средње неслагање решења стру. / неструктурног мод. [%]					0.85	1.95

Табела 11: Решења за притисак и смичући напон, као и њихово неслагање

Неслагање је рачунато према формулама:

$$\delta = \frac{\text{Res}_u - \text{Res}_s}{\text{Res}_s}$$

6. Анализа тачности решења добијених програмом РАКФ у комбинацији са неструктурним мрежама коначних елемената

где је Res_u дато решење за неструктурни модела Res_s решење за структурни.

Јасно је да је слагање решења прилично добро. У делу крвног суда након рачве, на сликама ипак могуће је уочити извесна неслагања решења за смичући напон, уколико би и та зона била од интереса (поред саме анеуризме), мреже би морале додатно да се оптимизују.

7. Пост процесирање резултата

Пошто се добију резултати компјутерске симулације, неопходно је извршити њихово адекватно пост процесирање. Ова фаза веома је битна, те се у литератури назива и уметност приказивања резултата.

У зависности од потреба ова фаза може бити веома различита, те се методе пост процесирања не могу објединити неком универзалном дефиницијом.

У овом поглављу биће приказани резултати различитих компјутерских симулација реалних физичких модела које су извршене у последњих неколико година, а за чију је припрему употребљен софтвер настао у овом раду.

Као резултат CFD симулације програм PAKF штампа померања, скаларно поље притисака, и векторска поља брзина и смичућих напона. Ови резултати штампају се за све чворове мреже коначних елемената модела у .UNV фајлу (односно фајлове за више временских корака, уколико се тако нагласи).

За приказивање резултата у овом раду употребљен је познати програм Gmsh. Овај програм користи .POS фајл формат. Употребом овог формата могуће је раздвојити различите физичке величине добијене као резултат у различите фајлове те је изводљиво приказивање веома великих модела. За конвертовање резултата из .UNV у .POS фајл у оквиру овог рада направљен је специјални софтверски модул. У зависности од потреба могу се на излазне

7. Пост процесирање резултата

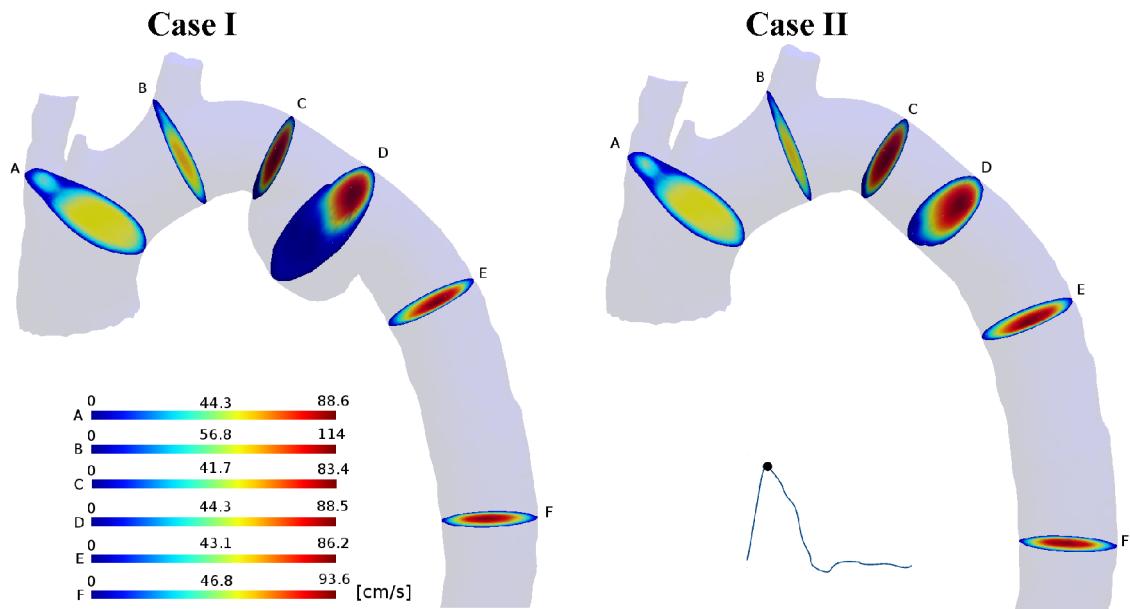
резултате применити одговарајући филтери у циљу добијања резултата у одређеним зонама од интереса.

7.1 Скаларне физичке величине

Као што је већ поменуто резултати су штампани у .POS фајлове. У овом фајл формату за приказивање скаларних физичких величина искоришћен је скаларни хексаедар, те се резултати записују по брик елементима. У чвровима елемената записују се интензитети скаларне физичке величине. Пошто се све вредности учитају, Gmsh формира на основу највеће и најмање вредности скалу боје, а затим и градијент боје по елементима.

У циљу приказивања векторских величина - бојама (а не векторима) врши се у фази пост процесирања креирање скаларних поља векторских физичких величина. Тада се по чвровима коначних елемената записују интензитети вектора датих векторских физичких величина, а онда се приказивање врши као и за скаларне величине.

Уколико је потребно видети резултате само по површини модела могуће је записивање резултата по чвровима четворочврорних елемената (као на слици 42). Предност записивања резултата по свим чвровима (а не само чвровима омотача) мреже је могућност прегледа резултата по равнима (eng. clip plane) као на слици 52.



Сл. 52: Ефективна вредност брзине флуида у различитим равнима у систоли за модел аорте са и без анеуризме [N.Filipovic et al., 2011B]

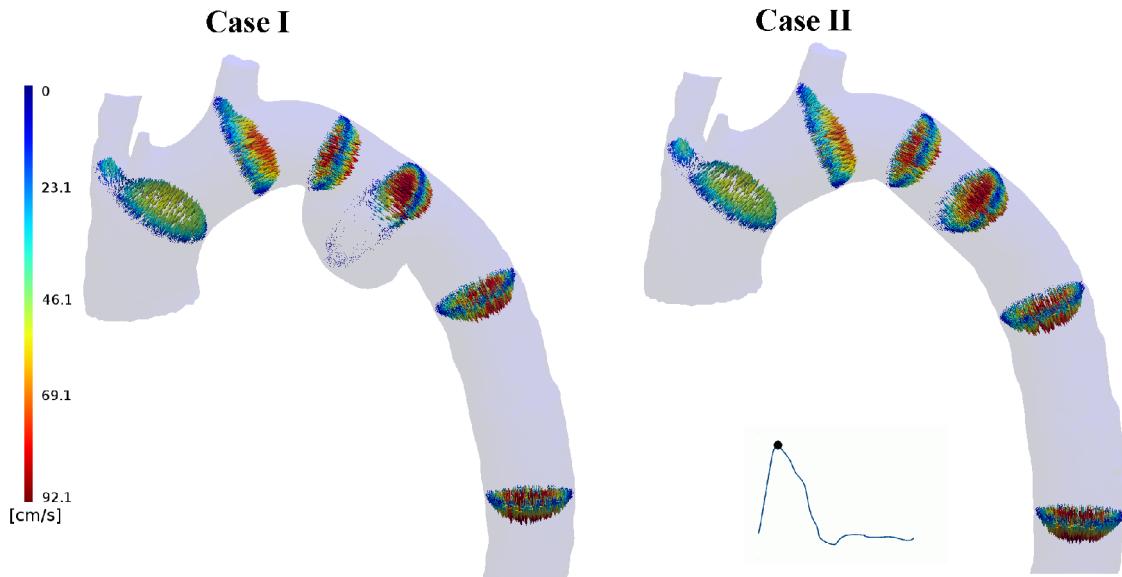
7.2 Векторске физичке величине

Векторске физичке штампају се по чвровима мреже коначних елемената (а не по елементима). Сваки вектор штампа се са почетком у чвру на који је реферисан.

Приликом штампања векторских физичких величина такође је могуће применити филтере, те се могу издвојити вектори у зонама од интереса. На слици 53 су издвојени вектори чврова коначних елемената у близини равни које су интересантне. У софтверу су прво дефинисане равни преко једначине равни, а затим су из скупа свих чврова коначних елемената издвојени они који су у близини равни, односно они који задовољавају следећи услов:

$$Tol > \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Вектори чврова коначних елемената који су издвојени претходним условом су они који бивају штампани у .POS фајл за приказивање.



Сл. 53: Профили брзине флуида у различитим равнима у систоли за модел аорте са и без анеуризме [N.Filipovic et al., 2011B]

На основу притиска који је штампан по чврзовима могуће је израчунати силе које делују по интересантним површинама (као на слици 43). Вектори силе нормални су на дате површине, а интензитет вектора рачунат је преко средњег притиска по страни према следећој формулам:

$$F = S \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 P_i ,$$

где је S површина четворочврне стране, а P_i притисак у i -том чврзу. Површина четворочврне стране добијена је као сума површина два троугла, који је граде, употребом Херонове формуле.

Приликом израде тест примера, а у циљу поређења са аналитичким решењем, софтвером развијеним у овом раду могуће је штампање резултујућих вектора брзине у формату за Gnuplot [H.B.Broeker et al., E] (као у претходном поглављу). Приликом таквог штампања врши се поређење

7. Пост процесирање резултата

интензитета брзина са очекиваним аналитичким решењем и сабирање грешке. На крају се врши штампање нумеричких резултата, графика аналитичког решења као и одступања нумеричког од аналитичког решења.

7.3 Струјне линије

На основу решења за брзине (векторског поља брзина) могуће је рачунање струјних линија. Струјне линије рачунају се тако што се у тачке у којима оне треба да почну смештају честице које "путују" (eng. particle tracking) кроз фиксно векторско поље брзина. Струјне линије заправо су путање тих честица. Као излаз овај софтвер штампа фајл у коме су записане изломљене линије струјница (eng. polyline) или скуп тачака свих струјних линија.

Обзиром да је за различите проблеме углавном неопходно направити веома много решења за струјне линије, обавезно се врши њихово филтрирање. У оквиру софтвера који је развијен у овом раду постоји модул који је за то намењен. Овим модулом могуће је филтрирање и штампање струјних линија у виду скупа тачака и поли-линија у .POS фајлове. Филтрирањем је могуће:

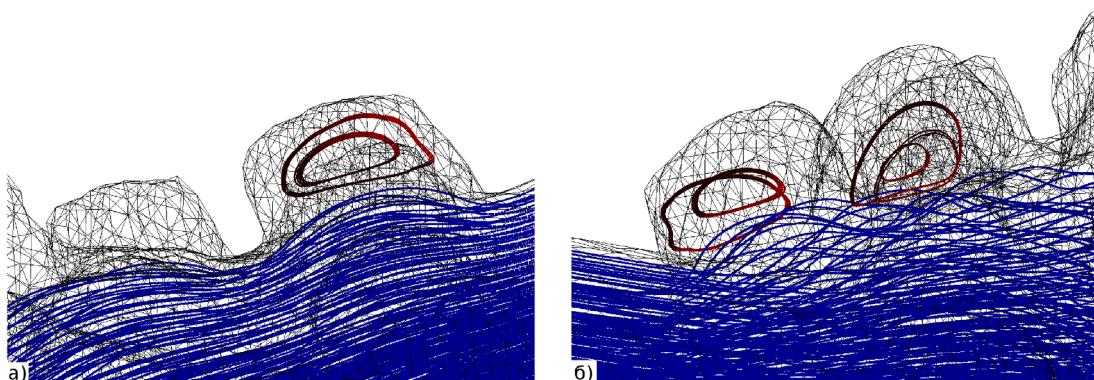
- скратити дужину струјница (преко броја тачака у струјници или преко дужине струјнице);
- смањити густину тачака у свакој струјници;
- смањити број струјница;
- издвојити само струјнице чији почетак, крај, или било која од тачака које граде струјницу улазе или не улазе у одређени толерантни радијус у односу на дефинисану тачку;
- издвојити само струјнице чији почетак, крај или било која од тачака које граде струјницу улазе или не улазе у дефинисани просторни домен који је дефинисан као осмочворни елемент;

7. Пост процесирање резултата

- издвојити само почетне и крајње тачке струјних линија.

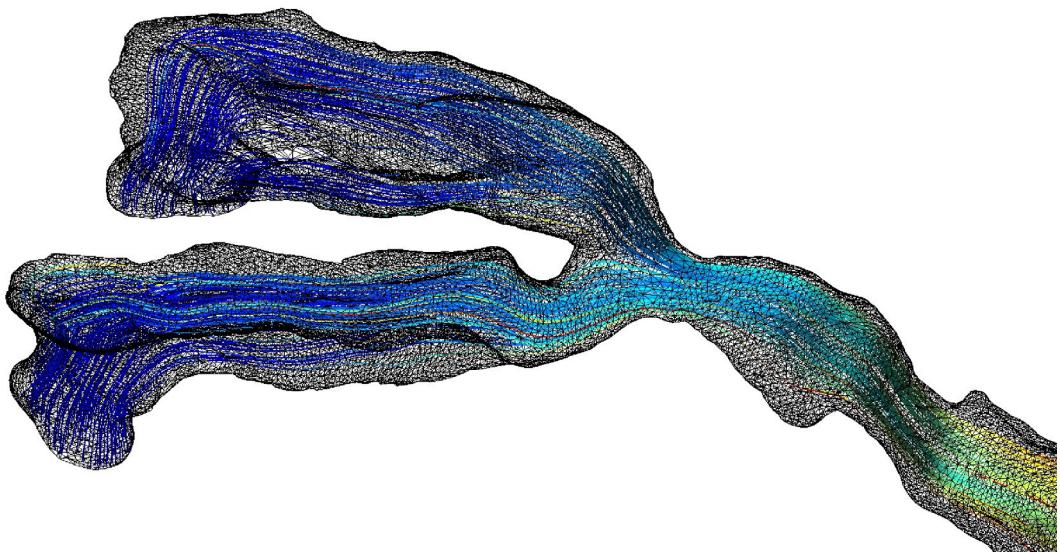
Одговарајућим избором тачака у којима почињу струјнице и филтера могуће је добити жељене струјне линије. Свакој тачки изломљене линије струјнице софтвер може доделити вредност која се приказује бојом. Та вредност може описивати:

- релативну или апсолутну дужину струјне линије;
- редни број дате тачке у струјној линији;
- редни број струјне линије;
- групу којој припада дата струјна линија.

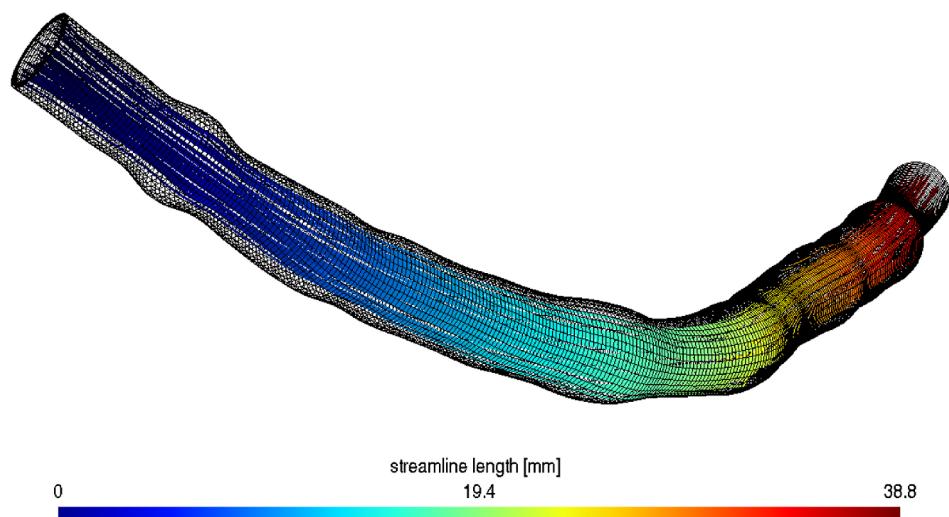


Сл. 54: CFD симулација струјања флуида кроз алвеоле анималног модела пацова - струјне линије [D.Milasinovic et al., 2009C]

7. Пост процесирање резултата



Сл. 55: CFD симулација струјања флуида кроз ноздрве хуманог модела детета - струјне линије



Сл. 56: CFD симулација струјања флуида кроз коронарну артерију анималног модела свиње - струјне линије

7.4 Средњи смичући напон и осцилаторни смичући индекс

У циљу проучавања струјања крви кроз кардиоваскуларни систем у новије време врши се детаљна анализа расподеле смичућег напона на зидовима крвних судова. Стручњаци са водећих америчких универзитета практикују рачунање следећих величина [C.A.Taylor et al., 1998]:

$$\tau_{\text{mean}} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\tau}_s dt \right|$$

где је τ_{mean} скаларна величина која се назива средњи (eng. mean-wall) смичући напон, а $\vec{\tau}_s$ вектор смичућег напона у чвору мреже коначних елемената;

$$\tau_{\text{mag}} = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{\tau}_s| dt$$

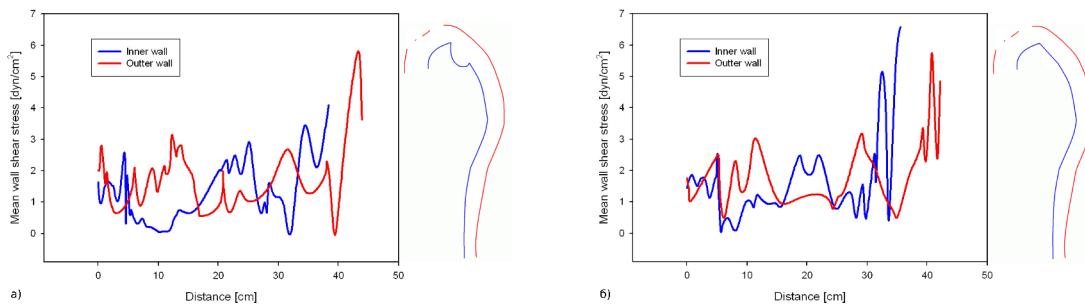
τ_{mag} је такође скаларна величина, која се уводи ради рачунања осцилаторног смичућег индекса - OSI (eng. oscillatory shear index):

$$OSI = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau_{\text{mag}}}{\tau_{\text{mean}}} \right).$$

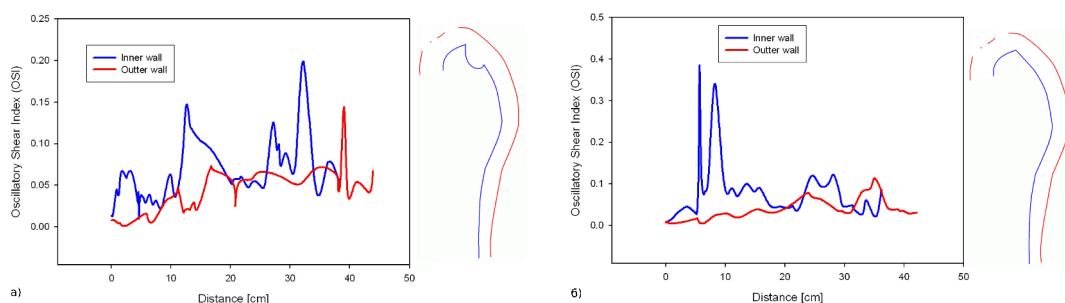
Расподела OSI прати се по одређеним линијама, које се сматрају битним са медицинског аспекта. Ово се практикује јер је у новије време установљено да је за механичка оштећења крвних судова од круцијалног значаја осцилаторни карактер смичућег напона. Дакле није толико битно колика је апсолутна вредност смичућег напона већ каквом динамиком се та вредност мења у времену. У склопу софтвера развијеним у овом раду постоји модул који служи за ову намену. Улазни подаци за овај модул су .UNV фајлови са резултатима нестационарне симулације, као и скуп тачака које чине линију за

7. Пост процесирање резултата

коју је неопходно нацртати график зависности OSI и средњег смичућег напона од дужине те линије. Поред тога неопходно је унети податке о периоду и интервалу временских корака у симулацији. Из .UNV фајлова врши се учитавање вредности смичућег напона за чврлове који дефинишу интересантну линију, након тога врши се рачунање према горе наведеним формулама и креирање табеле са резултатима.



Сл. 57: Дистрибуција mean-wall смичућег напона дуж унутрашње и спољашње линије за моделе грудне аорте са и без анеуризме [N.Filipovic et al., 2011B]



Сл. 58: Дистрибуција OSI дуж унутрашње и спољашње линије за моделе грудне аорте са и без анеуризме [N.Filipovic et al., 2011B]

8. Детаљи програмске имплементације

Софтверски систем STL Toolz, који је резултат овог рада, настао је услед потреба да се превазиђу проблеми пре и пост процесирања неструктурних мрежа коначних елемената. Захтеви које је овај систем морао да испуни су:

- одговарајућа брзина извршавања;
- модуларна структура;
- могућност за једноставну и логичну надоградњу;
- доступност целокупног извornог кода;
- компатибилност са излазним и улазним форматима софтвера који се повезују са овим софтверским системом;
- портабилност софтвера на различите платформе.

Брзина извршавања код овог софтверског система више је него задовољавајућа. Алгоритми претраживања изложени у четвртом поглављу веома су ефикасни јер се њима сужава претраживање на чворове коначних елемената који имају заједничку границу, а превазиђен је и временски најзахтевнији део спајања чворова након генерисања нових мрежа. Обзиром да се број суседа за чворове неструктурне мреже не може знати, и да број суседа зависи од броја страна на омотачу модела, ово унапређење није могуће

8. Детаљи програмске имплементације

описати неком строго дефинисаном формулом за све типове мрежа коначних елемената. На примеру креирања мреже основних осмочворних изопараметарских коначних елемената од мреже тетраедара биће илустрована ефикасност метода развијених у овом раду у односу на стандардне.

Приликом поделе тетраедара на брик елементе од сваког четврочворног тетраедарног елемента формира се петнаесточворни. У стандардној методи поделе нови чворови групе I и II су проблематични јер могу бити заједнички за више елемената те се приликом њиховог креирања могу појавити и дупликати. Процес спајања дуплих чворова и реферисања елемената на спојене чворове у литератури је познат као спајање (eng. merging). Обзиром на то да се нови чворови групе III, као и иницијални чворови не дуплирају, спајање се на њих не мора применити. Број дупликата за овакав случај није могуће описати математичком формулом јер у неструктурној тетраедарској мрежи не постоји дефинисан број суседних тетраедара као и због тога што и број страна на омотачу (облик модела) за исту величину мреже може варирати. Стране на омотачу свакако имају мањи број дуплираних чворова јер чворови у тежиштима тих страна немају дупликате.

У стандардном спајању итеративно се проверава, за сваки чвор у низу чворова на који се овај процес примењује, да ли се остали чворови налазе у толерантном растојању до датог чвора. Проверава се дакле колико је растојање између чвора (за све чворове из низа) са којим се спаја и осталих чворова (из низа чворова на које се спајање примењује), а затим сваки чвор који се нађе у датом толерантном растојању елиминише из низа и елементи којима је припадао чвор реферишу се на чвор са којим је поређење вршено. Алтернатива елиминисању чвора кога треба спојити је да он добије редни број

8. Детаљи програмске имплементације

чвора са којим се спаја (без елиминације) те се након тога приликом штампања само врши реферисање на жељени чврор (на исти начин тада се и елементи ваљано штампају).

У софтверу развијеном у овом раду проблем дуплих чвророва не постоји, јер се пре евентуалног креирања новог чвора у одговарајућој тачки (тежишту I или II реда) прво врши провера да ли чврор на датој локацији већ постоји. То се врши према његовом редном броју на основу листи суседа чвророва који граде елемент у чије тежиште нови чврор треба поставити (овиј процес објашњен је у четвртом поглављу). Број провера једнак је броју чвророва који би се нашли у низу чвророва на који би требало применити спајање. Означимо тај број са $Nodez_c$ (у тај скуп ушли би само чвророви групе I и II). За квалитетно генерисане тетраедарне мреже коначних елемената $Nodez_c$ уобичајено је 50 до 100 пута већи од броја иницијалних чвророва (у зависности од облика модела).

Начин на који се приликом евентуалног додавања чвора у тежиште датог елемента врши проверава да ли чврор на датој локацији већ постоји и исти је за сваки тип елемента. Уколико постоји исти редни број чвророва у низовима суседа свих иницијалних чвророва датог елемента, то је редни број траженог чвора. Број поређења суседа у једној провери приликом евентуалног креирања новог чвора у најгорем случају једнак је произвodu броја чланова низова суседа иницијалних чвророва елемента у чије тежиште треба додати нови чврор. Уколико број поређења означимо са N_s важи:

$$N_s \leq \prod_{i=1}^x Neighbours_i$$

Број суседа i -тог чвора означен је са $Neighbours_i$, а x је број иницијалних

8. Детаљи програмске имплементације

чвррова елемента у чијем тежишту треба додати нови чврор. За стране тетраедарне мреже $x=3$, а за ивице $x=2$. Пошто се претрага прекида када се заједнички сусед пронађе, N_s је уобичајено мањи од производа броја суседа иницијалних чвррова елемента у чије тежиште треба додати нови чврор.

Укупан број поређења N_{total} приликом креирања нове мреже коначних елемената теоријски мањи је или једнак производу броја провера и поређења у оквиру једне провере те важи:

$$N_{total} \leq Nodez_c \prod_{i=1}^x Neighbours_i$$

Уобичајено је N_{total} далеко мањи од десне стране претходног израза.

Овде треба напоменути да једно поређење није ништа друго до упоређивање две целобројне вредности.

Број $Neighbours_i$ може бити веома различит. За чврове који се налазе у унутрашњости модела он је уобичајено већи од оних на омотачу. За квалитетно генерисане мреже тај број је мањи него код неквалитетних - пошто је код њих велики број суседа по елементу у појединим зонама. За квалитетно генерисане тетраедарне мреже у просеку тај број може бити око 10.

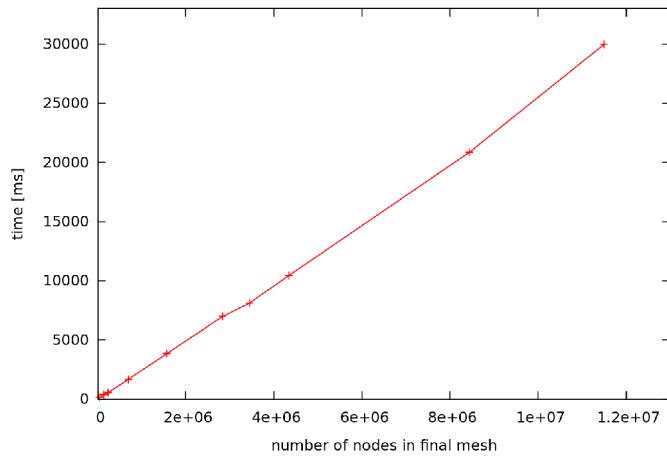
У табели 12 приказани су релевантни подаци упоредног теста креирања мреже основних осмочворних изопараметарских коначних елемената од мреже тетраедара модела лопте. Креирани су модели различите густине, а употребљена је стандардна метода спајања чвррова као и метода суседа развијена у овом раду.

8. Детаљи програмске имплементације

број чвррова иницијалне мреже	број чвррова финалне мреже	$Nodez_c$	N_{total}	број претрага (приликом спајања)	укупно време [ms] (употребом суседа)	укупно време [ms] (употребом спајања)
141	2405	4830	211561	7671210	10	320
224	4251	8850	424993	24727600	10	1010
462	9247	19590	1011290	120158000	20	4330
701	13949	29450	1594530	271970000	40	9670
820	16999	36460	2014320	413290000	50	14690
1264	26871	58040	3348780	1039520000	90	38580
1760	37619	81390	4777880	2051150000	120	76970
2148	46795	101930	6191830	3207790000	150	119540

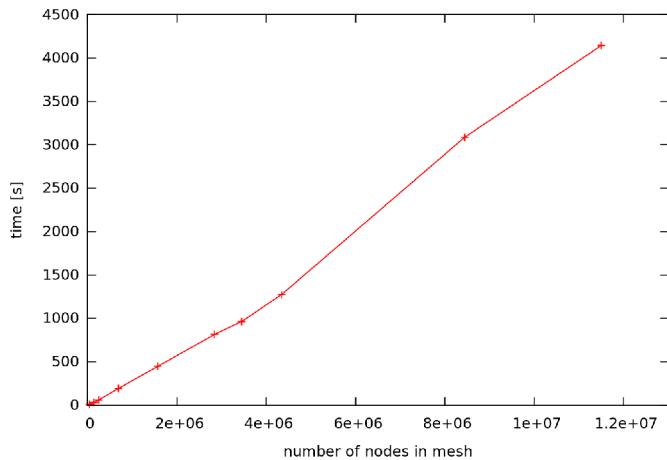
Табела 12: Упоредни тест креирања мреже основних осмочворних коначних елемената модела лопте од мреже тетраедара употребом стандардног спајања и суседа

У следећем тести вршено је креирање мрежа основних осмочворних изопараметарских коначних елемената од мрежа тетраедара модела лопте, искључиво методом суседа. Прилично квалитетне мреже различитих густине креиране су да би било проверено колико је софтверу развијеном у овом раду потребно времена за њихово креирање. Време је у овом примеру мерено од момента када софтвер почне да учитава улазни фајл док не формира финалну мрежу коначних елемената (без снимања нове мреже у излазни фајл). Временска зависност приказана је графички на слици 59. Уочљиво је да са повећањем броја чвррова практично линеарно расте време потребно за креирање нове мреже.



Сл. 59: Време потребно за креирање мрежа основних осмочворних коначних елемената модела лопте различите густине од мреже тетраедара

Мреже креиране у претходном примеру употребљене су у наредном као иницијалне пошто је за сваку од њих вршено проналажење омотача. Као и у претходном случају време је мерено од момента када софтвер почне да учитава улазни фајл док не формира финалну мрежу коначних елемената са адекватним омотачем (без снимања нове мреже у излазни фајл). Временска зависност приказана је графички на слици 60.



Сл. 60: Време потребно за проналажење омотача на мрежама основних осмочворних коначних елемената модела лопте различитих густине

Целокупан софтвер настао у овом раду, развијан је „из нуле“ (eng. from scratch) у програмском језику C++. Од библиотека употребљена је само стандардна C++ библиотека, као и бесплатна библиотека FLTK (eng. Fast Light Toolkit). Тиме су захтеви за доступности целокупног изворног кода као и за портабилношћу остварени. Писан је у духу објектно-оријентисане парадигме програмирања, те је са програмерског аспекта олакшан развој и прилично добро остварен захтев за једноставном и логичном надоградњом. Софтвер има модуларну структуру и подржан је рад са форматима из најзаступљенијих савремених софтвера. Принципи објектно-оријентисане парадигме програмирања могу бити илустровани на једном примеру из софтверског система STL Toolz.

8.1 Пример објектно-оријентисаног кода у имплементацији софтвера STL Toolz

Објектно оријентисана парадигма програмирања била је позната још почетком друге половине прошлог века. Њен потенцијал, међутим, дошао је до изражaja тек у последњих десетак година. Један од основних разлога за то је што у новије време уобичајени начин за развој софтвера подразумева рад више људи на истом софтверу. Софтвер често мора да буде надограђиван услед нових захтева, а уобичајено је и да тим програмера у току развоја буде делимично или потпуно промењен. Употребом објектно оријентисане парадигме организација рада значајно је олакшана, те је и у индивидуалном развоју софтвера свака модификација кода далеко лакша.

Основни принципи објектно оријентисаног програмирања су:

- енкапсулација;
- апстракција;
- наслеђивање;
- полиморфизам.

Њихова примена биће илустрована на примеру извornog кода софтверског система насталог у овом раду.

Основна библиотека коју упошљавају сви модули овог софтвера зове се dMyLib. Она обухвата и класу (eng. class) чвора мреже коначних елемената. На најопштијем нивоу објекат те класе (један чвор) има информације о

8. Детаљи програмске имплементације

просторним координатама његове локације. За неке модуле овог софтвера та информација довољна је - пример за то може бити неки модел коначних елемената код кога је од интереса искључиво геометрија. Да би, дакле, био дефинисан такав модел неопходно је имати дефинисане ентитете: чвор, елемент као и низове тих ентитета; те ће бити описане три класе:

- Geom_Node - најопштији облик чвора;
- Geom_Element - елемент;
- Collection - контејнерска класа (која може садржати низ било каквих објеката).

Обзиром на то да се геометрија дефинише чворовима и елементима неопходно је да чворови имају информацију о координатама и да имају јединствене редне бројеве. Редне бројеве није неопходно чувати као информацију за сваки чвор јер они могу бити једнозначно одређени позицијом чворова у контејнерској класи која садржи све чворове модела.

```
class Geom_Node
{
protected:
    double m_dCoordinates[3];
public:
    void set_coordinate(double coordinate_value, int coordinate);
    void set_coordinate_X(double Xcoordinate);
    void set_coordinate_Y(double Ycoordinate);
    void set_coordinate_Z(double Zcoordinate);
    double get_coordinate(int & coordinate) const;
    double get_coordinate_X() const;
    double get_coordinate_Y() const;
    double get_coordinate_Z() const;
    Geom_Node & operator =(const Geom_Node & otherGeom_Node);
    Geom_Node & operator +(const Geom_Node & otherGeom_Node);
    Geom_Node & operator -(const Geom_Node & otherGeom_Node);
    Geom_Node();
    Geom_Node(const Geom_Node & node);
    ~Geom_Node();
};
```

Елементи поседују информацију о томе који чворови их граде (према

8. Детаљи програмске имплементације

редном броју). Редни број сваког елемената такође је дефинисан његовом позицијом у контејнерској класи која садржи све елементе модела. Обзиром да број чвррова по коначном елементу може варирати, сваки елемент чува, као приватну информацију, показивач на низ целобројних вредности (редних бројева чвррова) који се креира приликом инстанцирања објекта класе елемента. Конструктору класе елемента - Geom_Element може бити прослеђен број чвррова елемента да би низ целобројних вредности био адекватне величине. Уколико се конструктору не проследи број чвррова елемента, креира се низ са подразумеваним бројем чвррова (eng. default constructor).

Класа Collection је контејнерска темплејт (eng. template) класа која служи као динамички низ било каквих објеката. Објекти су чувани у низу који је објекат std::vector класе стандардне C++ библиотеке који је приватни члан класе Collection.

Употребом класе Geom_Node, Geom_Element и Collection, дакле могуће је формирање геометрије модела коначних елемената.

На примеру класе чврса може са на веома једноставан начин уочити енкапсулација информација. Подаци (координате чврса) смештени су у приватни члан класе који је заправо статички низ реалних вредности. Ван класе Geom_Node (и класа које је наслеђују) није могуће директно приступити координатама чврса - подаци су скривени. Могуће је међутим употребом за то намењених функција приступити им на различите начине у зависности од потреба. На примеру исте класе можемо уочити и функционалну енкапсулацију. Уколико се класа Geom_Node употребљава за креирање вектора могуће је преклопљеним операторима сабирања и одузимања вршити сабирање и одузимање вектора - без увида у то на који начин се то заиста ради.

Познато је међутим да је за моделе који служе за нумеричку симулацију неопходно поред геометријских података везаних за мрежу знати и почетне и граничне услове мреже коначних елемената. Употребом објеката класа које су описане то није могуће обзиром да ни једна од њих нема простор за смештање тих информација. Поред података о почетним и граничним условима чворови, настали инстанцирањем класе `Geom_Node`, немају могућност да "памте" који чворови су им суседи, а уколико би настала потреба за променом редног броја одређених чворова ни ту информацију не би имали где да сместе. Уколико би пак у неком софтверском модулу било вршено пост процесирање чворови не би имали где да смештају информације о резултатима симулације.

Овај проблем је у библиотеци превазиђен увођењем нових класа `Mesh_Node`, `Init_Node` и `Post_Node` које наслеђују `Geom_Node`. Наслеђена класа поред наслеђених добија и нове квалитете.

```
class Mesh_Node_New : public Geom_Node
{
protected:
    UINT m_uID;
    bool m_bFlag;
    char m_cBoundary;
    Collection <UINT> m_vNeighbourNodes;
public:
    void set_ID(UINT & ID);
    UINT get_ID() const;
    void set_flag();
    void set_flag(bool flag);
    bool get_flag() const;
    void set_boundary(char boundary);
    void clear_boundary(char boundary);
    void clear_boundary();
    char get_boundary() const;
    bool is_velocity_boundary();
    void add_neighbour_node(UINT nodeID);
    UINT get_neighbour_node(UINT & neighbour_node);
    UINT how_many_neighbours();
    Mesh_Node_New & operator =(const Mesh_Node_New & otherMesh_Node_New);
    Mesh_Node_New();
    Mesh_Node_New(Geom_Node node);
    Mesh_Node_New(const Mesh_Node_New & node);
    ~Mesh_Node_New();
};
```

У горе приказаном коду може се видети да чвор који се добије

инстанцирањем класе Mesh_Node има могућност да чува информације о редном броју, граничним условима као и о суседима.

Као пример за полиморфизам може послужити било која функција која као параметар узима објекат класе Geom_Node. Нека то буде функција која враћа координате тежишта два чвора. Декларација функције приказана је у коду:

```
Geom_Node get_gravitycenter(Geom_Node & node1, Geom_Node & node2);
```

Уколико се функцији get_gravitycenter проследе два чвора типа Geom_Node, она ће вратити објекат истог типа са координатама тежишта. Уколико се укаже потреба за добијањем тежишта за два чвора типа Mesh_Node или комбинација разнородних чворова, могуће је употребити исту функцију. Тада се упошљава полиморфизам обзиром да функција добија објекте класа које су наследиле Geom_Node. Функција употребљава релевантне информације тих објеката, а затим такође враћа објекат типа Geom_Node.

Уколико се, примера ради, укаже потреба за креирање чвора са неким новим квалитетима, могуће је поново наследити било коју класу чвора неком новом, и поново користити функције које су намењене за основну класу Geom_Node.

8.2 Организација библиотеке софтверског система STL Toolz

Софтверски систем STL Toolz, који је настао као резултат овог рада модуларан је систем, код кога софтверски модули упошљавају заједничку библиотеку. У зависности од потреба сваки софтверски модул користи за њега неопходне делове библиотеке.

Имена свих функција, класа и објеката у коду су веома дугачка и самодескриптивна, те је обзиром на педантно написан објектно оријентисани код, особи која се први пут сусреће са њим, могуће једноставно сналажење. Библиотека је логички организована према следећим категоријама:

- Base - садржи контејнерске класе и константе;
- Benc - садржи класе које се користе за тест примере;
- Geom - опште геометријске класе и функције;
- Init - садржи класу иницијалног чвора;
- Mesh - садржи класе и функције које се тичу мреже коначних елемената;
- Misc - садржи специфичне класе и функције које не спадају ни у једну од других категорија;
- Post - садржи класу чвора за постпроцесирање;
- Prin - садржи класе за штампање резултата;
- Read - садржи класе и функције које се тичу читања улазних фајлова.

Свака од категорија има свој истоимени директоријум у коме су смештени фајлови са кодом. Целокупна библиотека састоји се од класа и функција. Функције су распоређене по различитим, логички одвојеним, просторима имена (eng. namespace) осим оних које су (намерно) глобалне. У следећем тексту биће дат преглед основних делова категорија библиотеке у циљу бољег разумевања програмског кода софтвера STL Toolz.

- Collection (Base) - Основна контејнерска темплејт класа чији објекти служе као универзални динамички низови за било које типове података;
- SuperCollection (Base) - Контејнерска темплејт класа чији објекти служе као универзални дводимензионални динамички низови за било које типове података;
- constants (Base) - Простор имена за све константе;
- Benc_Cylindric_tube_fluid_flow (Benc) - Класа чији објекат се може употребити за тест пример струјања флуида кроз цев кружног попречног пресека. Врши прорачунавање аналитичке вредности брзине, а након тога може проверавати релативне грешке нумеричких у односу на аналитичко решење. Поред овога врши рачунање и штампање протока на отворима модела;
- Geom_Node (Geom) - Класа општег чвора мреже коначних елемената;
- Geom_Element (Geom) - Класа елемента мреже коначних елемената, поседује више преклопљених конструктора, те јој се на различите начине може дефинисати број чворова по елементу (тип елемента);
- Geom_Functions и Geom_TFunctions (Geom) - Скуп општих геометријских

функција. Углавном је свака од њих више пута преклопљена да би могла бити на једноставан начин употребљена са различитим параметрима. Обзиром да су функције из овог скупа у свим модулима заступљене оне нису смештене у независтан простор имена, ради једноставнијег позивања. Опште геометријске темплејт функције одвојене су од осталих, јер су оне декларисане и дефинисане у једном фајлу. Основни разлог за употребу темплејт функција је што се приликом прослеђивања контејнерских класа различитих наслеђених типова не може упослити полиморфизам;

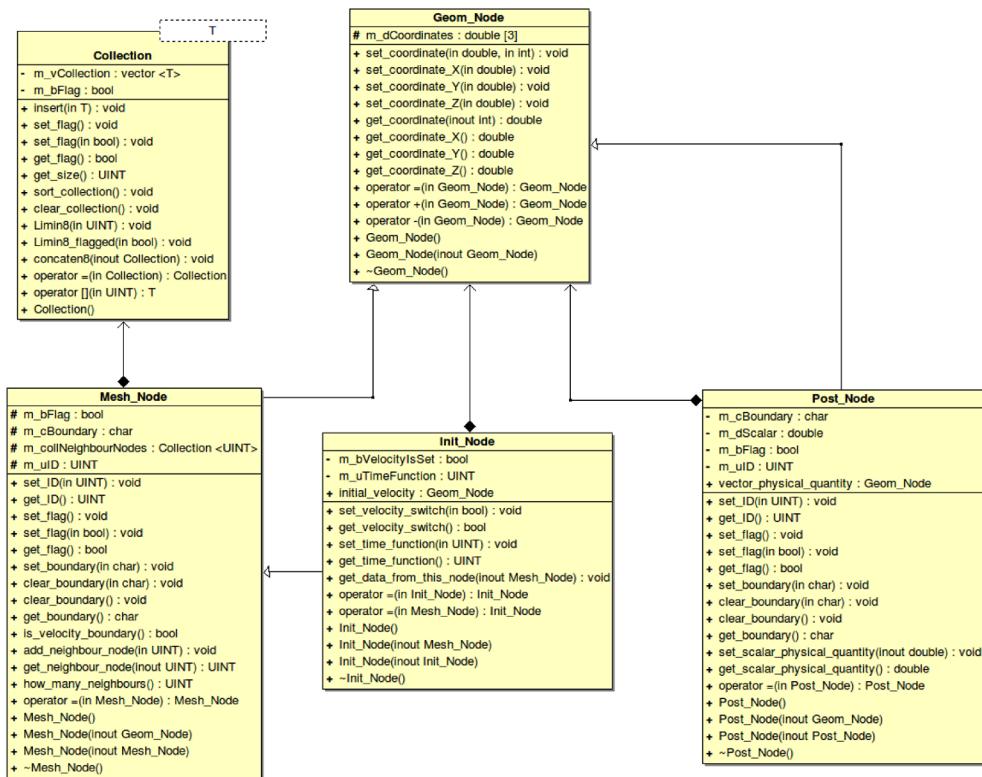
- Geom_Plane (Geom) - Класа равни, чији објекти се углавном користе као филтери за чворове коначних елемената;
- Mesh_Node (Mesh) - Класа чвора мреже коначних елемената. Ова класа наслеђује Geom_Node, али поседује и граничне услове, листу суседа, редни број и флаг (eng. flag);
- neighbours (Mesh) - Простор имена за функције које се тичу претраге по суседима и додавања нових чворова на елементе уз претходну претрагу суседа;
- boundary_and_loads (Mesh) - Простор имена за функције које узимају и постављају почетне и граничне услове;
- meshing и tmeshing (Mesh) - функције ових простора имена служе да деле елементе иницијалне мреже као и да од издаљених елемената преузимају нове;
- Directory_Miner (Misc) - објекат ове синглтон (eng. singleton) класе служи

за проналажење свих имена фајлова на траженој путањи, могуће је сортирање имена према абецедном реду и њихово преузимање у виду стринга;

- Percent (Misc) - Синглтон класа чији објекат служи за информисање корисника о процентажи колико је завршена одређена операција;
- Timer (Misc) - Објекат ове синглтон класе служи да информише корисника о временском интервалу који је протекао за време извршавања одређених делова кода;
- Post_Node (Post) - Ова класа дефинише чвор који се користи у фази постпроцесирања. Слична је као Mesh_Node али може чувати резултате (скаларних и векторских величина);
- Info (Prin) - Објекат ове синглтон класе служи за информисање корисника софтвера о раду софтвера, штампањем информација употребом std::ostream из стандардне C++ библиотеке;
- DAT_Printer (Prin) - Ово је синглтон класа чији објекат служи за штампање DAT фајлова. Да би фајл био штампан објекту ове класе неопходно је проследити колекције чвррова и елемената. Објекат ове класе обе колекције може третирати на различите начине у зависности од потреба. Позивањем функција из meshing простора имена може раздавати композитне елементе (нпр. петнаесточврти тетраедар). Уколико колекција чвррова која се прослеђује има више чвррова, може се нагласити колико чвррова мреже треба сместити у DAT. Могуће је нумерисање чвррова и елемената према позицији у колекцијама или према њиховим редим бројевима;

8. Детаљи програмске имплементације

- POS_Printer (Prin) - Ова класа такође је синглтон, и слична је као и DAT_Printer са изузетком што служи за штампање POS фајлова. Употребом објекта ове класе могуће је штампање скаларних и векторских физичких величина (по чврзовима и елементима), линија и четворочврорних елемената;
 - Info (Prin) - Синглтон класа чији објекат служи за штампање информација о раду софтвера у конзолу. Употребљава се у свим модулима;
 - DAT_Reader, UNV_Reader, Femap_Reader, STL_Reader, Tetgen_Reader (Read) - Синглтон класе чији објекти служе за читање релевантних података из различитих фајлова.



Сл. 61: UML класни дијаграм различитих класа чворова у оквиру библиотеке софтвера STL Toolz

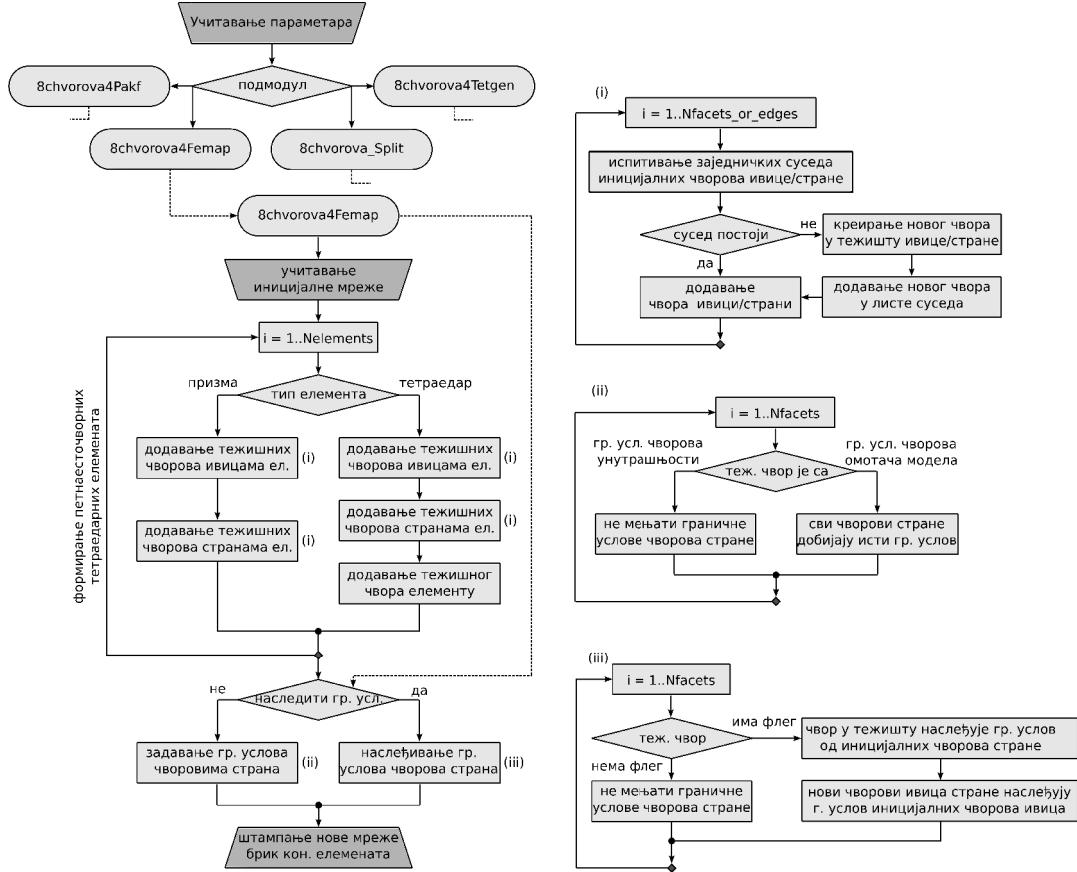
8.3 Организација модула софтверског система STL Toolz

Модули софтверског система STL Toolz организовани су на следећи начин:

- **STL_repair** - Намена овог софтверског модула је да се њиме врши поправљање и елиминисање артефакта мреже троуглова записане у STL формату. Елиминисање свих независних објеката записаних у STL фајлу врши се једноставним кликом на дугме. Тада се учитава фајл и сви независни објекти осим објеката са највећим бројем веза (треуглова) бивају елиминисани. Ради ефикасне елиминације артефакта који су закачени за основни објекат предвиђено је да корисник користи Gmsh (или неки други софтвер сличне намене) за прегледање фајла и елиминацију прикачених артефакта истовремено са овим модулом. Могуће је, употребом овог софтверског модула, једновремено поправљање једног или више отвора на моделу (видети део 3.2.2).
- **8chvorova** - Овај софтверски модул користи се за добијање нове мреже коначних елемената на основу иницијалне, која се учитава из улазног фајла. Учитавање је могуће вршити из фајлова који употребљавају различити софтвери: PAKF, Tetgen, Femap. Када се учитавање врши из фајла који је предвиђен за Femap или PAKF могуће је задати да софтверски модул формира граничне услове чвровима нове мреже на основу наслеђених граничних услова из иницијалне. Уколико ова опција није задата чврови омотача модела добијају граничне вредности чврова на омотачу, а сви остали граничне услове чврова у унутрашњости. Нова мрежа коначних елемената штампа се у DAT фајл (за PAKF). Чврови мреже могу се ради провере штампати у независне POS фајлове (са

8. Детаљи програмске имплементације

њиховим редним бројевима или граничним условима). Елементи се такође ради провере могу штампати у независтан POS фајл.



Сл. 62: Поједностављена алгоритамска шема подмодула 8chvorova4Femap (који је саставни део модула 8chvorova)

- otvarach - Софтверски модул који се користи за прављење отвора на моделу. Улазни фајл за овај модул је DAT фајл. На основу равни која се задаје употребом три референтна чвора модела, или референтним координатним ортом и бројем који дефинише растојање од координатног почетка, овим модулом креира се отвор. Уколико је неопходно може се приликом креирања отвора као додатни услов задати и референтни чвр и толерантна дистанца (на начин објашњен у 5.2). У оквиру овог модула

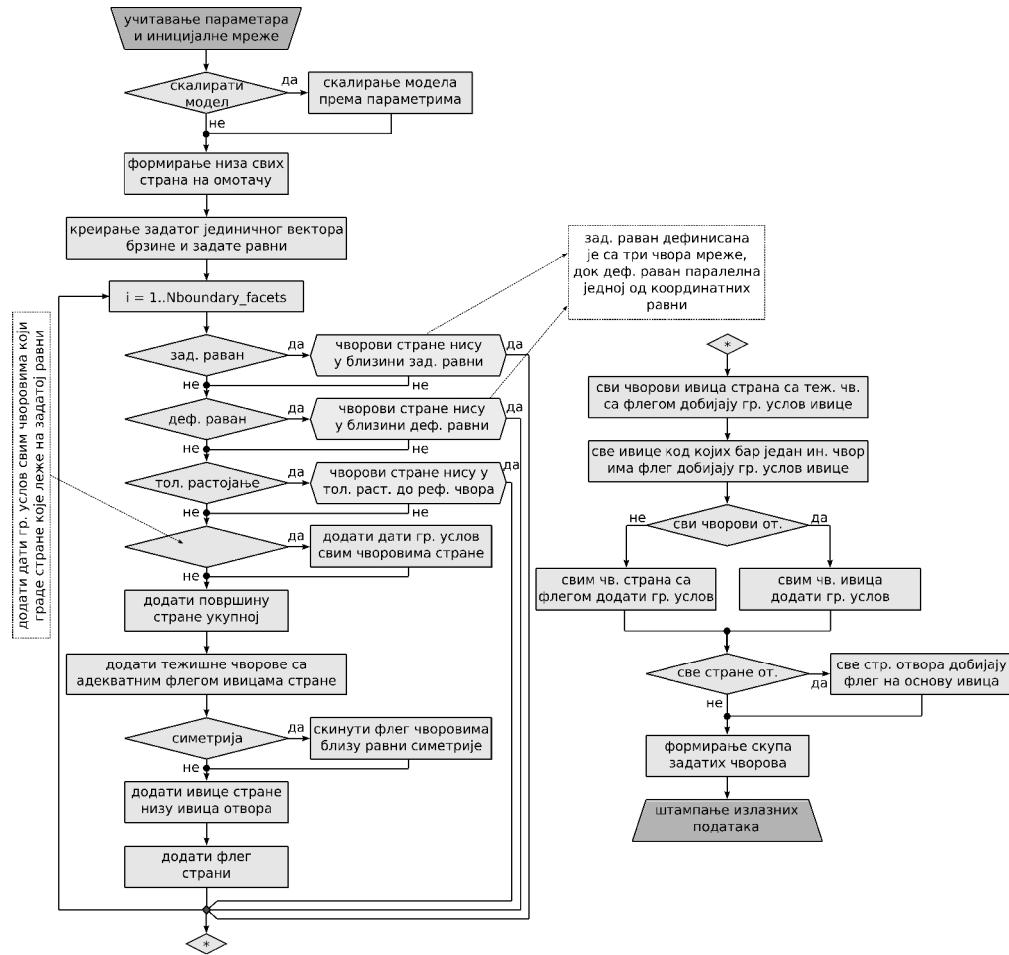
8. Детаљи програмске имплементације

могуће је подесити:

- (а) да ли се задаје притисак или брзина
- (б) на које ће временске функције бити реферисани чворови и стране отвора
- (в) да ли ће бити параболичан профил задате брзине
- (г) да ли ће и чворови на ивицама отвора бити укључени или не
- (д) да ли су дефинисане равни симетрије
- (ђ) који су фактори скалирања (уколико треба извршити и скалирање модела)

Пошто се добије одговарајућа мрежа коначних елемената овим модулом се врши њено штампање у DAT фајл. Ради провере могуће је и штампање POS фајлова (чворова, елемената, иницијалних брзина, страна новог улаза или излаза на моделу и омотача) који служе за проверу.

8. Детаљи програмске имплементације



Сл. 63: Поједностављена алгоритамска шема модула *otvarach*

- ограничења - Овај модул врши учитавање мреже осмочворних изопараметарских елемената из DAT фајла, а након тога врши задавање граничних услова мреже - чврзови на омотачу, добијају граничне услове чвррова на омотачу, а сви остали добијају граничне услове чвррова у унутрашњости модела. Овај модул не узима у обзир постојеће граничне услове модела приликом проналажења омотача. Може се подесити да модул врши проверу квалитета свих елемената мреже, као и да израчуна укупну запремину цelog модела (на начин објашњен у 4.1). Уколико је потребно могуће је и задржавање граничних услова иницијалне мреже.

Као и претходни и овај модул поред DAT фајла може штампати и POS фајлове ради провере.

- unv2pos - Намена овог софтверског модула је приказивање резултата UNV фајла у POS формату. Могуће је наместити да овај модул врши штампање:
 - (а) чворова и елемената
 - (б) брзине, смичућег напона и силе у векторском облику
 - (в) брзине, смичућег напона, силе, притиска и померања у скаларном облику
 - (г) четврочврне мреже омотача модела

За приказивање резултата за брзину у појединим равнима од интереса (профила брзине) могуће је задавање равни која употребом три референтна чвора модела, или референтним координатним ортом и бројем који дефинише растојање од координатног почетка (на исти начин као и у модулу *otvarach*). Овај модул уколико је потребно такође може направити DAT фајл на основу улазног UNV-а (што може бити веома корисно уколико су иницијални DAT фајлови изгубљени).

- streamlinevizualizR - Модул који се користи за приказивање струјница у POS формату. Уобичајено је неопходно филтрирати резултат за струјне линије пошто се углавном састоји од веома великог броја струјница. У овом модулу могуће је наместити да се:
 - (а) искључе струјнице које имају број чвррова који излази из задатог опсега
 - (б) искључе струјнице чија дужина излази из задатог опсега
 - (в) прореди број чвррова струјница

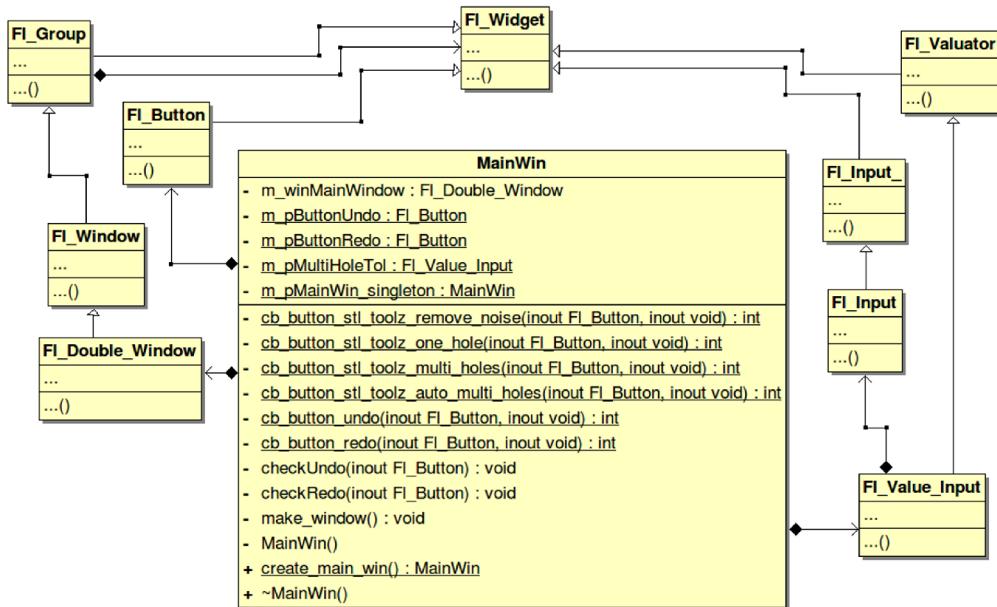
- (г) прореди број струјница
- (д) искључе све струјнице код којих се бар један чвор налази у дефинисаној сфере
- (ђ) искључе све струјнице код којих се сви чврорви не налазе у дефинисаној сфере
- (е) искључе све струјнице код којих се крајњи чвор не налази у дефинисаној сфере
- (ж) искључе све струјнице код којих се крајњи чвор налази у дефинисаној сфере
- (з) искључе све струјнице код којих се бар један чвор не налази у дефинисаној четворострраној призми
- (и) искључе све струјнице код којих се сви чврорви не налазе у дефинисаној четворострраној призми
- (ј) искључе све струјнице код којих се крајњи чвор не налази у дефинисаној четворострраној призми
- (к) искључе све струјнице код којих се крајњи чвор налази у дефинисаној четворострраној призми

Овим модулом могуће је штампање четврочврорних елемената омотача модела, а жељене струјнице могу бити смештене у виду тачака или изломљених линија (eng. polyline).

- mean_wall_and_osi - Овај модул користи се за прорачунавање OSI. Улазни подаци за овај програм су UNV фајлови са резултатима свих временских корака симулације, као и фајл са скупом чврорвима који дефинише жељену линију по којој се рачуна OSI. За обезбеђивање скупа чврорвима линије за коју треба израчунати OSI може се користи било који програм који може тродимензионално приказати чврорве (Gmsh, Femap). У циљу валидног

8. Детаљи програмске имплементације

рачунања OSI било вршено овом модулу неопходно је обезбедити информације о временском периоду симулације, као и о временском интервалу временских корака. По завршетку рачунања овај модул штампа табелу са резултатима као и скуп чворова употребљених за рачунање (у независном POS фајлу).



Сл. 64: UML класни дијаграм графичког корисничког интерфејса модула STL_repair, креираног употребом FLTK библиотеке

9. Закључна разматрања |

Анализе различитих физичких проблема веома ефикасно врше се употребом компјутерских симулација које се базирају на методи коначних елемената већ неколико деценија. Методе и софтвер који су настали у овој дисертацији развијени су из потребе за софтверским алатом који је требао да служи за ефикасно креирање модела коначних елемената са неструктурним мрежама, као и за одговарајуће постпроцесирање резултата. Употребом оваквих мрежа могуће је моделовати реалне физичке проблеме далеко једноставније од структурних те је то једна од главних њихових предности.

Софтверски систем настао у овом раду, који је и глобални циљ ове дисертације, успешно је употребљен велики број пута у компјутерском моделовању различитих реалних физичких проблема. Делови овог система уgraђени су као модули и у неколико обимнијих софтвера у којима служе за специфичне намене које се тичу моделовања мрежа коначних елемената.

У оквиру ове дисертације извршена је провера тачности решења добијених комбинацијом PAKF солвера и мрежа које су добијене употребом софтвера развијеног у овом раду. У овој провери употребљени су класични тест примери из механике флуида.

Основни циљеви који су постигнути у овом раду су следећи:

- Описани су основни појмови везани за компјутерске симулације, као и метод компјутерске симулације. Посебна пажња поклоњена је CFD

симулацијама методом коначних елемената.

- Дате су математичке дефиниције основних појмова који се тичу моделовања методом коначних елемената.
- Објашњени су савремени медицински уређаји за скенирање пацијената, пошто се подаци које ови уређаји испоручују користе као иницијални подаци за компјутерске симулације.
- Објашњен је метод за директно генерирање тродимензионалне мреже изопараметарских коначних елемената на основу медицинских слика
- Развијен је и приказан метод за ефикасно креирање омотача модела коначних елемената на основу података добијених са медицинских апарати
- Описан је тродимензионални изопараметарски коначни елемент, пошто је овај елемент најзначајнији за компјутерске симулације које се тичу овог рада
- Развијене су и описане методе за ефикасно креирање мрежа дводимензионалних и тродимензионалних изопараметарских коначних елемената на основу иницијалних мрежа различитих типова.
- Развијене су и описане методе за формирање улазних података за компјутерску симулацију. У том циљу развијени су алгоритми за наслеђивање и креирање почетних и граничних услова компјутерске симулације.
- Извршена је детаљна анализа тачности решења добијених употребом

програма PAKF у комбинацији са моделима креираних софтверским системом који је настао у овој дисертацији. У овој анализи употребљени су класични примери из механике флуида. Решења која су добијена поређења су са аналитичким и нумеричким решењима.

- Објашњене су и методе за пост-процесирање које су коришћење у различитим научним радовима који су објављени у последњих неколико година, у којима су употребљени модели који су добијени софтвером насталим у овом раду.
- Најобимнији посао у овој дисертацији свакако је био развој софтверског система. У глави 8. приказани су детаљи везани за развој софтвера као и комплетна организација софтверског кода.

Обзиром на веома добро поклапање решења тест примера из дела 6. овог рада са очекиваним резултатима, ова дисертација потврдила је своју сврху. Употребом софтвера насталог у овој дисертацији могуће је моделовати веома разнолике типове проблема. За проблеме који укључују велике деформације, елементи који се добијају овим софтервом нису погодни, те се за такву намену овај софтвер не може користити.

9.1 Смернице за даљи рад

Софтверски систем STL Toolz који је настао као резултат ове дисертације у великој мери је већ испунио очекивања аутора. Захтеви које је овај софтвер морао испунити константно су расли у току рада али је у форми коју софтвер сада има он прилично заокружен.

Обзиром на то да је софтвер који је настао у овом раду универзалан, односно да модели који се могу креирати употребом овог софтвера не морају нужно радити у комбинацији са солвером за који су примарно намењени (PAKF), занимљиво би било у будућности тестирати каква се решења добијају употребом неког другог програма за рачунање. Тада би било могуће направити поређење тачности решења тест примера са различitim квалитетима мреже (као и типовима примера), те би се у зависности од добијених резултата за дате реалне проблеме у будућности могла правити другачија конфигурација мрежа коначних елемената као и софтвера за рачунање.

У новије време прилично су распрострањени графички мулти-процесори за рачунање, што није био случај у време када је започет развој софтвера који је настао у овом раду. Мада је прилично оптимизован и брз овај софтвер, обзиром на доступност оваквих графичких процесора данас, могуће би било извршити његову оптимизацију за овакав хардвер. То би нарочито употребљиво могло бити у појединим сегментима рада софтвера (на пример проналажење омотача модела). Занимљиво би могло бити да се тестира и са неким другим ефикасним алгоритмима претраге по чворовима коначних елемената (осим претраге по суседима).

Као што је већ било наглашено, обзиром на начин на који је направљена, садашња софтверска платформа може се на једноставан начин проширивати у складу са новим захтевима, те са програмерског аспекта будући развој не представља проблем.

10. Додатак |

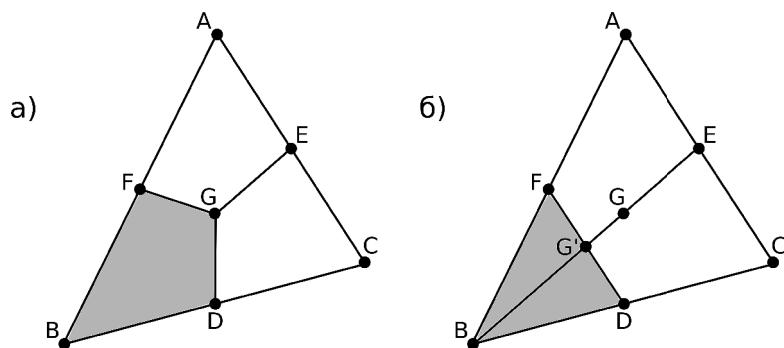
10.1 Математички доказ валидности добијених мрежа коначних елемената

У овом делу биће дати математички докази да су елементи нових мрежа коначних елемената добијени поделом елемената иницијалних мрежа, на начин приказан у овом раду, нужно конвексни.

10.1.1 Подела троугла на три четворочврна елемента

Претпоставимо да су тачке D, E и F средишта странница BC, CA и AB троугла ABC. Нека је G његово тежиште, односно пресек тежишних линија AD, BE и CF.

Желимо да докажемо да су сви четворочврни AFGE, BDGF и CEGD конвексни као на слици 65a).



Сл. 65: Конвексност нових четворочврних елемената

То јеовољно доказати на примеру једног четворочврног елемента пошто су друга два доказа слична. Нека то буде елемент $BDGF$.

Означимо са G' пресек правих DF и BE , односно средиште дужи BE , као на слици 65б). Тада је на основу познате особине троугла:

$$BG = \frac{2}{3}BE > \frac{1}{2}BE = BG'$$

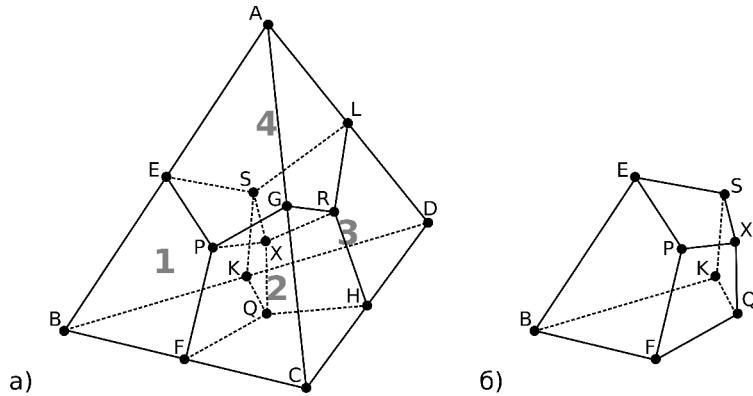
Одавде следи да се тачка G налази на продужењу дужи DG' ($G' \in DF$), иза тачке G' у односу на тачку B . Стога је непосредно четворочврни елемент $BDGF$ конвексан, јер су сви његови унутрашњи углови мањи од π .

10.1.2 Подела тетраедра на четири осмочврна (брлик) елемента

Следећи доказ преузет је из рада професора Кереја [G.F.Carey, 2002].

Нека су: A, B, C, D ; линеарно независне тачке и чворови тетраедра. Размотримо поделу тетраедра у осмочврне (брлик) елементе.

Нека су тачке: E, F, G, H, K, L ; тежишта ивица тетраедра и нека су: P, Q, R, S ; тежишта страна тетраедра. Обзиром да осмочврни елемент има четворочврне стране, свака страна тетраедара дели се на три четворочврна елемента. Спајањем тежишта ивица тетраедра и тежишта одговарајућих страна, као на слици 66а), могу се добити жељени четворочврни елементи. Тако добијени елементи конвексни су према претходном доказу.



Сл. 66: Подела тетраедра на осмочворне - брик елементе

Нека је X "одговарајући" чврор у унутрашњости тетраедра чија тачна позиција тек треба да буде одређена. Спајањем X са тежиштима иницијалних страна формирају се ивице: XP , XQ , XR , XS ; тиме је декомпозиција потпуна.

Обзиром на то да се декомпозиција тетраедра врши на четири брик елемента, сваки чврор тетраедра садржан је у једном брику. Пошто иста правила могу бити примењена на сваки од њих, у разматрање можемо узети само један. Нека то буде брик који садржи чврор B . Према нумерацији брика која је поменута раније то је елемент EPXSBFQK.

Уколико упослимо барицентрични координатни систем за све чврлове важи следеће:

(1) иницијални чврлови тетраедра: $A \equiv (1, 0, 0, 0)$, $B \equiv (0, 1, 0, 0)$,

$C \equiv (0, 0, 1, 0)$, $D \equiv (0, 0, 0, 1)$;

(2) тежишта ивица: $E \equiv (1/2, 1/2, 0, 0)$, $F \equiv (0, 1/2, 1/2, 0)$,

$G \equiv (1/2, 0, 1/2, 0)$, $H \equiv (0, 0, 1/2, 1/2)$, $K \equiv (0, 1/2, 0, 1/2)$,

$$L \equiv (1/2, 0, 0, 1/2);$$

$$(3) тежишта страна: Q \equiv (0, 1/3, 1/3, 1/3), R \equiv (1/3, 0, 1/3, 1/3),$$

$$S \equiv (1/3, 1/3, 0, 1/3), P \equiv (1/3, 1/3, 1/3, 0);$$

(4) чвр у унутрашњости X.

Тежишта страна тетраедра: P, Q, R, S; дефинишу тетраедар. Његова страна PRS паралелна је страни BCD иницијалног тетраедра, страна BSQ паралелна је страни ABC и тако даље. Из овога следи да су два тетраедра слична и да имају исто тежиште $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. У том тежишту се секу дужи: EH, FL, GK. У тој тачки може се сместити чвр X. Због тога је X у средини дужи EH и лежи у равни коју дефинишу EP и ES те: E, P, X, S; леже у истој равни. Исто резоновање може се применити за чвр X и дужи FL и GK, те и остале новодобијене четворочврне стране леже у равнима. Тежиште тетраедара једина је тачка у унутрашњости у коју када се постави чвр X важи да ће чворови нових четворочврних страна лежати у равнима. За троугао CED са тежишном линијом EH, X је средина EH. Тако да права која пролази кроз X и паралелна је CD сече дужи EC и ED у њиховим срединама. P и S су "горње" тачке трисекције EC и ED. Тако је угао $\angle PXS$ мањи је од π , а EPXS је конвексна четворочврна страна. Исто важи и за остале четворочврне стране у унутрашњости тетраедра, те су све стране свих нових брик елемената конвексне. Из овога следи да су сви брик елементи конвексни.

У случају када је иницијални елемент једнакостранични тетраедар, стране тетраедра су једнакостранични троуглови. Унутрашњи углови на странама тетраедра као и нових брик елемената код чврова тетраедра су $\pi/3$. Унутрашњи углови четворочврних страна добијених дељењем страна

тетраедра код тачака које су тежишта страна једнаки $2\pi/3$, а код тежишта ивица су $\pi/2$. Унутрашњи углови четворочворних страна у унутрашњости тетраедра код чвора у тежишту елемента су $\pi - 2\arcsin(1/\sqrt{3})$, а код тежишта ивица су $2\arcsin(1/\sqrt{3})$. Остали углови четворочворних страна у унутрашњости тетраедра су π . Из овога можемо видети да чак и у идеалном случају одступање нових, мада конвексних, брик елемената од коцке прилична. Већим одступањем иницијалног тетраедра од једнакостраничног значи да ће нови брик елементи још више одступати од коцке.

10.2 Софтверски код

Целокупан софтверски код софтвера насталог у овом раду могуће је преузети са интернет адресе <http://www.bioirc.ac.rs/dmilashinovic/code>.

Литература |

- [1] R.E.Shannon: Systems Simulation: The Art and Science; Prentice Hall, 1975.
- [2] R.E.Shannon: Introduction to the art and science of simulation; 30th Winter Simulation Conference, Washington DC, 1998.
- [3] R.E.Shannon: Simulation modeling and methodology; 15th Winter Simulation Conference, Arlington, 1983.
- [4] G.Meller: A Typology of Simulators for Medical Education; Journal of Digital Imaging, 1997.
- [5] N.Bostrom: Are you living in a computer simulation?; Philosophical Quarterly, 2003.
- [6] J.H.Ferziger, M. Perić: Computational Methods for Fluid Dynamics; Springer Ed., 1997.
- [7] J.Blazek: Computational Fluid Dynamics: principles and applications; Elsevier, 2001.
- [8] H.K.Versteeg, W.Malalaskera: An Introduction to Computational Fluid Dynamics: the Finite Volume Method; Longman Scientific and Technical, 1995.
- [9] M.Kojić, R.Slavković, M.Živković, N.Grujović: Metod konačnih elemenata I;

Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1998.

- [10] N.Filipovic, D.Milasinovic, N.Jagic, V.Miloradovic, H.Hetterich, J.Rieber: Numerical simulation of the flow field and mass transport pattern within the coronary artery; Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Vol 14 (4), 379-388, 2011A.
- [11] N.Filipovic, D.Milasinovic, N.Zdravkovic, D.Boeckler, H.vonTengg-Kobligk: Impact of aortic repair based on flow field computer simulation within the thoracic aorta; Computer Methods and Programs in BiomedicineComputer Methods and Programs in Biomedicine, Vol 101 (3), 243-252, 2011B.
- [12] N.Filipovic, N.Meunier, M.Kojic, V.Isailovic, M.Radovic, Z.Milosevic, D.Nikolic, D.Milasinovic, T.Exarchos, O.Parodi, D.Fotiadis: Computer Simulation of Plaque formation and Development; Transactions on Internet Research, Vol 7(2) ISSN 1820-4503. 2011.
- [13] M.Tošovic, M.Radovic, D.Petrovic, D.Milašinovic, G.Devedžić, V.Rankovic, N.Filipovic: Mining Data from Hemodynamic Simulations for Human Aorta; Transactions on Internet Research, Vol 7(2) ISSN 1820-4503. 2011.
- [14] D.Milašinović, V.Cvjetković, D.Böckler, H.vonTengg-Kobligk, N.Filipović: Software tools for manipulating FE mesh, virtual surgery and post-processing; Chemical industry (ser: Hemija i industrija), 63 (3), 275-279, 2009A.
- [15] D.Milašinović, M.Ivanović, N.Filipović, M.Kojić: Software tools for automatic generation of finite element mesh and application of biomechanical calculation in medicine; Chemical Industry (ser: Hemija i industrija), 62 (3), 177-180, 2008A.

- [16] D.Milašinović, M.Ivanovic, H.vonTengg-Kobligk, D.Böckler, N.Filipović: Software Tools for Generating CFD Simulation Models of Blood Flow from CT Images, and for Postprocessing; Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics, Vol 2 (2), 51-58, 2008B.
- [17] N.Filipovic, D.Milasinovic, N.Jagic, V.Miloradovic, D.Böckler, H.vonTengg-Kobligk: High resolution CFD simulation of blood flow through the thoracic aorta, 6th Balkan Congress of Radiology; Vrnjacka Spa, Serbia, 2008.
- [18] D.Milasinovic, N.Jagic, V.Miloradovic, D.Bockler, H.vonTengg-Kobligk, N.Filipovic, M.Kojic: Simulation of blood flow through aorta with and without aneurism using computational virtual surgery; SEECCM, Island of Rhodes, Greece, 2009B.
- [19] N.Filipovic, D.Nikolic, D.Milasinovic, M.Kojic, V.Tsakanakis, D.Fotiadis: Patient-specific computer model of coronary artery using CFD; 2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2009) Palić, Serbia, 2009.
- [20] D.Milasinovic, D.Nikolic, A.Tsuda, N.Filipovic: Pre- and post-processing of 3D alveolar models for CFD simulation; 2nd International Congress of Serbian Society of Mechanics (IConSSM 2009) Palić, Serbia, 2009C.
- [21] N.Filipovic, D.Haberthür, F.Henry, D.Milasinovic, D.Nikolic, J.Schittny, A.Tsuda: Recirculation identified in a 3D alveolar duct reconstructed using synchrotron radiation based X-ray tomographic microscopy; ATS meeting, 2010.
- [22] V.Isailovic, I.Koncar, D.Veljkovic, D.Milasinovic, D.Nikolic, M.Markovic, L.Davidovic, M.Kojic, N.Filipovic: Computer Model and Clinical Relevance

of Abdominal Aorta Aneurysm with Compliant Nonlinear Material Wall;
ITAB 2010. Corfu, Greece, 2010.

- [23] D.Milašinović, N.Filipović: CFD Simulacija strujanja krvi, virtuelna hirurgija i post-procesiranje rezultata; VII conference of young researchers "Science and engineering of new materials", Serbian Academy of Science and Arts, Serbia, Belgrade, 2008C.
- [24] D.Milašinović: Softverski alati za automatsko generisanje mreže konačnih elemenata i primena u medicini sa ciljem utvrđivanja opterećenja tkiva; VI conference of young researchers "Science and engineering of new materials", Serbian Academy of Science and Arts, Serbia, Belgrade, 2007.
- [25] N.Filipović, M.Kojić: Computer simulations of blood flow with mass transport through the carotid artery bifurcation; Theoret. Appl. Mech. 31(1), 2004.
- [26] G.Paul-Louis, H.Borouchaki: Delaunay Triangulation and Meshing, Application to Finite Elements; HERMES, 1998.
- [27] D.Adnađević: Topologija; Naučna Knjiga - Beograd, 1980.
- [28] S.W.Smith: The Scientist & Engineer's Guide to Digital Signal Processing; California Technical Pub, 1997.
- [29] W.R.Hendee, E.R.Ritenour: Medical imaging physics; A John Wiley & sons, 2002.
- [30] J.P.Hornak: The Basics of MRI;
<http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri/index.html>, 2008.

- [31] J.C.Chatham, S.J.Blackband: Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy and Imaging in Animal Research; ILNAR 42 (3), 2001.
- [32] A.Tsuda, N.Filipovic, D.Haberthür, R.Dickie, Y.Matsui, M.Stampanoni, J.C.Schittny: Finite element 3D reconstruction of the pulmonary acinus imaged by synchrotron X-ray tomography; Journal of Applied Physiology, 2008.
- [33] S.Zachow, M.Zilske, H.C.Hege: 3D reconstruction of individual anatomy from medical image data: Segmentation and geometry processing; ZIB-Report 07-41, Dec. 2007.
- [34] P.Polverelli: Procedures for cooling water flow simulation in MAN B&W medium-speed Diesel engines; 20th CAD-FEM Users' Meeting, 2002.
- [35] A.Oppelt(ed.): Imaging Systems for Medical Diagnostics: Fundamentals, Technical Solutions, Applications for Systems Applying Ionizing Radiation, Nuclear Magnetic Resonance and Ultrasound; Publicis Corporate Publishing, 2005.
- [36] R.C.Lindenberg: Limieten van Voronoi Diagrammen; Faculteit der Wiskunde en Informatica Universiteit Utrecht, 2002.
- [37] K.Voronjec, N.Obradović: Mehanika fluida; Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
- [38] D.Trebotich, J.D.Zahn, B.Prabhakarpandian, D.Liepmann: Modeling of Microfabricated Microneedles for Minimally Invasive Drug Delivery, Sampling and Analysis; Biomedical Microdevices, Vol 5 (3), 2003.

- [39] S.A.Berger, L.Talbot, L.S.Yao: Flow in curved pipes; *Ann. Rev. Fluid Mech.* (15), 1983.
- [40] N.Filipovic, S.Mijailovic, A.Tsuda, M.Kojic: An implicit algorithm within the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for solving incompressible fluid flow with large boundary motions; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (195), 2006.
- [41] S.Taneda: Flow past a sphere; *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol 11 (10), 1956.
- [42] C.A.Taylor, T.J.R.Hughes, C.K.Zarins: Finite Element Modeling of Three-Dimensional Pulsatile Flow in the Abdominal Aorta: Relevance to Atherosclerosis; *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 26, 1998.
- [43] G.F.Carey: Hexing the Tet; *Comm. Numer. Methods in Eng*, Vol 18 (3), 223-227, 2002.

Софтвер |

- [A] M.Kojić, N.Filipović, R.Slavković, M.Živković, N.Grujović: PAKF, Program for FE analysis of fluid flow with heat transfer; Faculty of Mechanical Engineering University of Kragujevac, Kragujevac, Serbia (<http://www.mfkg.kg.ac.rs/>).
- [B] C.Geuzaine, J.F.Remacle: Gmsh, A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and postprocessing facilities (<http://geuz.org/gmsh/>).
- [C] H.Si: Tetgen, A Quality Tetrahedral Mesh Generator and Three-Dimensional Delaunay Triangulator; Research Group: Numerical Mathematics and Scientific Computing, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Germany (<http://tetgen.berlios.de/>).
- [D] J.R.Shewchuk: Triangle, A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator; Computer Science Division, University of California at Berkeley, Berkeley, California, USA
(<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>).
- [E] H.B.Broeker, J.Campbell, R.Cunningham, D.Denholm, G.Elber, R.Fearick, C.Grammes, L.Hart, L.Hecking, T.Koenig, D.Kotz, E.Kubaitis, R.Lang, A.Lehmann, A.Mai, C.Steger, T.Tkacik, J..Woude, J.R.Zandt, A.Woo, E.Merritt, P.Mikulík, J.Zellner: Gnuplot, portable command-line driven graphing utility for linux, OS/2, MS Windows, OSX, VMS, and many other platforms (<http://www.gnuplot.info>).