# Домашнее задание 4

Это домашнее задание по материалам 4-8 неделей семестра (4-7 семинары). Дедлайн по отправке - 23:59 8 мая.

- Домашнее задание желательно оформлять в LaTeX, но можно прислать скан **разборчивого и аккуратного** рукописного текста (предварительно согласуйте с Георгием Кормаковым разборчивость и аккуратность своего почерка).

- Файл с решением домашнего задания необходимо назвать: **Фамилия_Имя**. Пример: **Иванов_Иван**.

- ДЗ нужно отправлять на **OptimizationHomework@yandex.ru**. Тема письма: **МГУ_номер задания** (без пробелов в начале и конце). Для данного ДЗ тема письма: **МГУ_4**.

- В качестве решения присылается 1 файл, а не набор сканов/фотографий на каждую задачу.

- Не забывайте добавлять необходимые пояснения и комментарии, а не просто набор формул.

- Суммарный балл за задание равен 160. Чтобы получить максимальный оценку за задание, нужно набрать 75 баллов. Баллы сверх 75 позволяют набрать оценку выше максимума.

- Часть задач помечена $\triangle$. Они также входят в максимальный балл за задание, но мы считаем, что достаточно выполнить задания без $\triangle$, чтобы вникнуть в основные вещи, происходящие в соотвествующей части задания.

Желаем успехов!

## Часть 1. Сопряженность. Двойственность. ККТ

**Задача 1. (всего 30 баллов)** Для каждой из следующих функций $f$ вычислите сопряженную функцию $f^*$:

**а). (8 баллов)** $f : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$, где $f(x) = -\left(\prod_{i=1}^d x_i\right)^{1/d}$, а $\mathbb{R}^d_+$ – векторы с неотрицательными компонентами.

**б). (10 баллов)** $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \max_{i=1,\ldots,d}\{x_i\}$.

**в). (12 баллов)** $f : \mathbb{S}^d_{++} \to \mathbb{R}$, где $f(X) = \mathrm{trace}(X^{-1})$ и $\mathbb{S}^d_{++}$ – положительно определенные матрицы.

**Задача 2. (10 баллов)** Постройте двойственную задачу для следующей задачи оптимизации:

$$\min_x \; -\sum_{i=1}^m \log(b_i - a_i^T x)$$

с областью определения $\{x \in \mathbb{R}^d \mid a_i^T x < b_i \; \forall i = 1 \ldots m\}$.

*Hint:* Сначала введите дополнительные переменные $y_i$ и ограничения $y_i = b_i - a_i^T x$.

**Задача 3. (всего 30 баллов)** Рассмотрим задачу следующего вида:

$$\begin{aligned} \min_x \; & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax \preceq b, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \; \forall i = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Эта задачу довольно трудно решать, поэтому есть две релаксации, которые помогают построить нижнюю оценку на оптимальное значение исходной задачи. Рассмотрим следующие две задачи оптимизации, которые схожи с начальной:

$$\begin{aligned}\min_x\ & c^T x\\ \text{s.t. } & Ax \preceq b,\\ & 0 \le x_i \le 1,\ \forall i = 1, \dots, d\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\min_x\ & c^T x\\ \text{s.t. } & Ax \preceq b,\\ & x_i(1 - x_i) = 0,\ \forall i = 1, \dots, d.\end{aligned}$$

Первая задача называется LP-релаксацией исходной задачи, и, как следует из ее записи, она дает нижнюю оценку на наше исходное оптимальное значение, а вторая задача является прямой перезаписью исходной задачи.

**а). (10 баллов)** Выпишите двойственные задачи к LP-релаксации и ко второй задаче.

**б). △ (20 баллов)** Двойственная задача ко второй задаче называется Лагранжевой релаксацией. Как следствие, она тоже дает нижнюю оценку на оптимальное значение исходной задачи. Покажите, что нижние оценки, которые вытекают из LP-релаксации и Лагранжевой релаксации, совпадают.

**Задача 4. △ (15 баллов)** Рассмотрим следующую функцию $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]},$$

где $r$ - число от 1 до $d$ и $x_{[1]} \ge \ldots \ge x_{[d]}$. Другими словами, это функция равна сумме $r$ наибольших компонент вектора $x$. Покажите, что $f(x)$ равняется оптимальному значению следующей задачи оптимизации:

$$\begin{aligned}\max_{y \in \mathbb{R}^d}\ & x^T y\\ \text{s.t. } & 0 \le y \le 1.\\ & 1^T y = r.\end{aligned}$$

Постройте двойственную задачу к задаче выше, изменив задачу максимизации на задачу минимизации.

**Задача 5. (10 баллов)** Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\begin{aligned}\min_{x \in \mathbb{R}^d}\ & \|Ax - b\|_2^2\\ \text{s.t. } & Gx = h,\end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, rank $A = d$ и $G \in \mathbb{R}^{n \times d}$, rank $G = n$. Выпишите ККТ для этой задачи, и найдите оптимальные значения $x^*$ и $\nu^*$ прямых и двойственных переменных соответственно.

## Часть 2. Субградиент и субдифференциал

**Задача 1. (5 баллов)** Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = \max\{-x, x, x^2\}$. Найдите субдифференциал данной функции $\partial f(x)$.

**Задача 2. (5 баллов)** Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = |x-2| + |x+2| + |x-1|$. Найдите субдифференциал данной функции $\partial f(x)$.

**Задача 3. (10 баллов)** Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задана следующим образом $f(x) = \exp\left(\|Ax - b\|_p\right)$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $p \in [1; +\infty]$. Найдите субдифференциал $\partial f(x)$.

**Задача 4. (10 баллов)** Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть индикаторная функция следующего множества

$$\mathcal{B}_{\|\cdot\|}(0,1) = \left\{x : \|x\|_p \leq 1\right\},$$

где $p \in [1; +\infty]$. Найдите субдифференциал $\partial f(x)$.

**Задача 5.** $\triangle$ **(15 баллов)** Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ - функция, определенная на множестве $S$ из Евклидова пространства $E$. Пусть $x_0 \in S$ и пусть $f^* : S_* \to \mathbb{R}$ – сопряженная функция, где $S_*$ из сопряженного пространства $E^*$. Покажите,что

$$\partial f(x) = \{g \in S_* : \langle g, x \rangle = f^*(g) + f(x)\}$$

**Задача 6.** $\triangle$ **(всего 20 баллов)**

**а).** $\triangle$ **(10 баллов)** Пусть $\lambda_{\max} : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ - функция максимального собственного значения, заданная на $\mathbb{S}^d$. Найдите субдифференциал $\partial \lambda_{\max}(X)$. Здесь $\mathbb{S}^d$ – симметричные матрицы.

*Hint:* воспользуйтесь вариационным представлением $\lambda_{\max}$ и формулой для субдифференциала максимума.

**б).** $\triangle$ **(10 баллов)** Покажите, что функция $\lambda_{\max}(X)$ дифференцируема в точке $X \in \mathbb{S}^d$ тогда и только тогда, когда максимальное собственное значение матрицы $X$ является простым (т. е. имеет кратность 1). Чему равен градиент $\nabla \lambda_{\max}(X)$?