Домашнее задание 2

Это домашнее задание по материалам 1-3 недели семестра (1-3 семинары). Дедлайн по отправке - 23:59 14 апреля.

- Домашнее задание желательно оформлять в LaTeX, но можно прислать скан **разборчивого и аккуратного** рукописного текста (предварительно согласуйте с Георгием Комраковым разборчивость и аккуратность своего почерка).

- Файл с решением домашнего задания необходимо назвать: **Фамилия_Имя**. Пример: **Иванов_Иван**.

- ДЗ нужно отправлять на **OptimizationHomework@yandex.ru**. Тема письма: **МГУ_номер задания** (без пробелов в начале и конце). Для данного ДЗ тема письма: **МГУ_2**.

- В качестве решения присылается 1 файл, а не набор сканов/фотографий на каждую задачу.

- Не забывайте добавлять необходимые пояснения и комментарии, а не просто набор формул.

- Суммарный балл за задание равен 150. Чтобы получить максимальный оценку за задание, нужно набрать 75 баллов. Баллы сверх 75 позволяют набрать оценку выше максимума.

- Часть задач помечена $\triangle$. Они также входят в максимальный балл за задание, но мы считаем, что достаточно выполнить задания без $\triangle$, чтобы вникнуть в основные вещи, происходящие в соотвествующей части задания.

Желаем успехов!

Часть 1. Матрично-векторное дифференцирование

В этой части используется следующие обозначения:

$\mathbb{R}_+$ – неотрицательные вещественные числа

$\mathbb{R}_{++}$ – положительные вещественные числа

I_d – матрица с единицами на диагонали (вне диагонали 0)

$A \in \mathbb{S}^d \quad \Longleftrightarrow \quad A = A^\top$

$A \in \mathbb{S}^d_+ \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathbb{S}^d; \quad \forall x: \quad x^\top A x \geq 0$

$A \in \mathbb{S}^d_{++} \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathbb{S}^d; \quad \forall x \neq 0: \quad x^\top A x > 0$

Норма Фробениуса для матрицы $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ определяется как $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d A_{ij}^2}$

Для матриц скалярное произведение определено как $\langle X, Y\rangle := \mathrm{Tr}(X^\top Y)$

Задача 1. (всего 10 баллов) Вычислите первую и вторую производные $f'(t)$ и $f''(t)$ для следующих функций:

а). (5 баллов) $f : E \to \mathbb{R}$ – функция $f(t) := \det(A - tI_d)$, где $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $E := \{t \in \mathbb{R} : \det(A - tI_d) \neq 0\}$.

б). (5 баллов) $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(t) := \|(A + tI_d)^{-1}b\|_2^2$, где $A \in \mathbb{S}^d_{++}$, $b \in \mathbb{R}^d$.

Задача 2. (всего 20 баллов) Вычислите градиент ∇f и гессиан $\nabla^2 f$ для следующих функций:

а). (10 баллов) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$, где $A \in \mathbb{S}^d_{++}$.

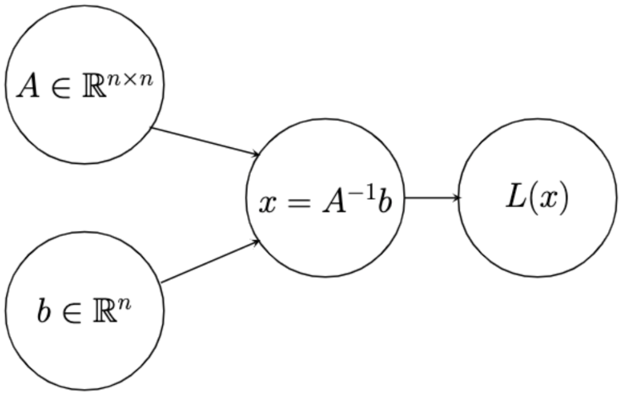
б). (10 баллов) $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) = \langle x, x \rangle^{\langle x, x \rangle}$.

Задача 3. $\triangle$ **(всего 30 баллов)** Для каждой из следующих функций f покажите, что вторая производная является знакоопределенной (как квадратичная форма) и установите ее знак:

а). (15 баллов) $f : \mathbb{R}^d_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(x) := \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \geq 0$, $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$.

б). (15 баллов) $f : \mathbb{S}^d_{++} \to \mathbb{R}$ – функция $f(X) := \langle X^{-1}, A \rangle$, где $A \in \mathbb{S}^d_{+}$.

Задача 4. (10 баллов) Для указанного графа вычислений найдите градиент $\nabla_A L, \nabla_b L$ функции потерь L по входным переменным A, b соответственно. Градиент по x считать известным и равным $\nabla_x L$. Рекомендуется использовать алгоритм backpropogation.



Часть 2. Выпуклость

Задача 1. (10 баллов) Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^d$ и пусть $\|\cdot\|$ - норма на $\mathbb{R}^d$.

а). (5 баллов) Для $a \geq 0$ определим множество S_a как:

$$S_a = \{x \mid \text{dist}(x, S) \leq a\},$$

где

$$\text{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|.$$

Множество S_a называется расширенным на a относительно S. Докажите, что если S выпукло, то S_a также выпукло.

б). (5 баллов) Для $a \geq 0$ определим множество S_{-a} как:

$$S_{-a} = \{x \mid B(x, a) \subset S\},$$

где $B(x, a)$ – открытый шар (в норме $\|\cdot\|$) с центром в x и радиусом a. Множество S_{-a} называется суженным на a относительно S. Докажите, что если S выпукло, то S_{-a} также выпукло.

Задача 2. (5 баллов) Пусть дана функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Выясните является ли функция выпуклой/μ-сильно выпуклой, если $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i^4$. В случае μ-сильной выпуклости нужно найти и μ.

Задача 3. (всего 10 баллов) Пусть дана функция $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$. Здесь $\mathbb{S}$ – симметричные матрицы. Выясните является ли функция выпуклой/вогнутой, если

а). (5 баллов) $f(X) = \lambda_{\max}(X)$

б). (5 баллов) $f(X) = \lambda_{\min}(X)$

Задача 4. (10 баллов) Выясните является ли функция $f : \mathbb{S}^d_{++} \to \mathbb{R}$ выпуклой/вогнутой, если $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{-1})$.

Задача 5. $\triangle$ **(15 баллов)** Воспользовавшись неравенством Йенсена для выпуклой на $\mathbb{R}_{++}$ функции $f(x) = -\ln x$, докажите неравенство Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^{d} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

для $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. $\mathbb{R}_{++}$ - положительные действительные числа.

Задача 6. $\triangle$ **(15 баллов)** Назовем множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ "средневыпуклым если для любых его элементов x и y их середина также принадлежит X, т.е. $\frac{x+y}{2} \in X$. Докажите, что для замкнутых множеств "средневыпуклость"равносильна выпуклости.

Задача 7. $\triangle$ **(15 баллов)** Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_{d+2}\}$ – множество из $d+2$ точек в $\mathbb{R}^d$. Покажите, что X можно разбить на два подмножества S и $T = X \setminus S$ таким образом, что пересечение их выпуклых оболочек (смотри определение в части "Выпуклые множества"пособия) непусто.