Московский Государственный Университет

Матричные вычисления и выпуклость

Выполнил: Курцев Д.В.

Группа: 517

Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Кафедра Математических методов прогнозирования

Апрель 2024

Часть 1. Матрично-векторное дифференцирование

Задача 1

a)$f(t) = det(A - tI_n)$
$df(t) = d(det(A - tI_n)) = det(A - tI_n)\langle (A - tI_n)^{-T}, d(A - tI_n)\rangle = det(A - tI_n)\langle (A - tI_n)^{-T}, -I_n\rangle dt = -det(A - tI_n)\ \ tr(A - tI_n)^{-1} dt \Rightarrow f'(t) = -det(A - tI_n)\ \ tr(A - tI_n)^{-1}$

$d^2 f(t) = d(df(t)) = d(-det(A - tI_n)\ \ tr(A - tI_n)^{-1} dt) = d(-det(A - tI_n))\ \ tr(A - tI_n)^{-1} dt - det(A - tI_n)\, d(tr(A - tI_n)^{-1}) dt \quad (=)$
Первое слагаемое мы уже знаем, т.к. в нём стоит $df(t)$:
$d(-det(A - tI_n))\, tr(A - tI_n)^{-1} dt = det(A - tI_n)\ \ tr^2(A - tI_n)^{-1} dt^2$
$d(tr(A - tI_n)^{-1}) = tr(d(A - tI_n)^{-1}) = tr(-(A - tI_n)^{-1}\ d(A - tI_n)\ (A - tI_n)^{-1}) = tr(-(A - tI_n)^{-1}\ (-I_n) dt\ (A - tI_n)^{-1}) = tr(A - tI_n)^{-2}\ dt$ Тогда получаем:
$(=)\ det(A - tI_n)\ [tr^2(A - tI_n)^{-1} - tr(A - tI_n)^{-2}]\ dt^2$

Ответ: $f'(t) = -det(A - tI_n)\ \ tr(A - tI_n)^{-1}$
$f''(t) = det(A - tI_n)\ [tr^2(A - tI_n)^{-1} - tr(A - tI_n)^{-2}]$

b) $f(t) = \|(A + tI_n)^{-1} b\|^2$
$A \in \mathbb{S}^n \Rightarrow A + tI_n \in \mathbb{S}^n \Rightarrow (A + tI_n)^{-1} \in \mathbb{S}^n \Rightarrow (A + tI_n)^{-1} = (A + tI_n)^{-T}$
$df(t) = d\langle (A + tI_n)^{-1} b, (A + tI_n)^{-1} b\rangle = 2\langle (A + tI_n)^{-1} b, d((A + tI_n)^{-1} b)\rangle =$

$$2\langle (A + tI_n)^{-1} b, -(A + tI_n)^{-2} b\rangle dt = -2b^T (A + tI_n)^{-T} (A + tI_n)^{-2} b\ dt =$$

$$-2b^T (A + tI_n)^{-3} b\ dt$$

$d^2 f(t) = d(-2b^T (A + tI_n)^{-3} b\ dt) = = -2b^T\ d(A + tI_n)^{-3}\ b = -2b^T\ 3(A + tI_n)^{-2} d(A + tI_n)^{-1}\ b = 6b^T\ (A + tI_n)^{-4}\ b\ dt$, где $d(A + tI_n)^{-1}$ был посчитан в пункте a).

Ответ: $f'(t) = -2b^T (A + tI_n)^{-3} b$
$f''(t) = 6b^T (A + tI_n)^{-4} b$

Задача 2

a) $f(x) = \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$, $A \in \mathbb{S}^n, xx^T \in \mathbb{S}^n \Rightarrow xx^T - A \in \mathbb{S}^n$

$df(x) = \frac{1}{2}\, d\langle xx^T - A, xx^T - A\rangle = \frac{1}{2}\,(\langle d(xx^T - A),\, xx^T - A\rangle + \langle xx^T - A,\, d(xx^T - A)\rangle) = \frac{1}{2}\; 2\; \langle xx^T - A, d(xx^T - A)\rangle = \langle xx^T - A, d(x)\, x^T - x\,(dx)^T)\rangle = \langle (xx^T - A)x, dx\rangle + tr[(xx^T - A)^T x (dx)^T] = \langle (xx^T - A)x, dx\rangle + tr[(dx)^T(xx^T - A)x] = \langle (xx^T - A)x, dx\rangle + \langle (xx^T - A)x, dx\rangle = 2\langle (xx^T - A)x, dx\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = 2(xx^T - A)x$

$d^2 f(x) = d\, 2\, \langle (xx^T - A)x, dx_1\rangle = 2\, \langle d[(xx^T - A)x], dx_1\rangle \quad (=)$

$d(xx^T - A)x = d(xx^T x - Ax) = d(x\langle x, x\rangle) - d(Ax) = \langle x, x\rangle dx_2 + x d\langle x, x\rangle - Adx_2 = \|x\|^2 I_n\, dx_2 + 2x\, \langle x, dx_2\rangle - Adx_2 = \|x\|^2 I_n\, dx_2 + 2xx^T dx_2 - Adx_2 = (\,\|x\|^2 I_n + 2xx^T - A)dx_2$

Тогда получаем:

$(=) \quad 2\langle(\,\|x\|^2 I_n + 2xx^T - A)dx_2, dx_1\rangle = 2\langle(\,\|x\|^2 I_n + 2xx^T - A)^T\, dx_1, dx_2\rangle = 2\langle(\,\|x\|^2 I_n + 2xx^T - A)\, dx_1, dx_2\rangle \Rightarrow \nabla^2 f(x) = 2(\|x\|^2 I_n + 2xx^T - A)$

Ответ: $\nabla f(x) = 2(xx^T - A)x$

$\nabla^2 f(x) = 2(\|x\|^2 I_n + 2xx^T - A)$

b) $f(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}$

Для начала найдём $dg(x)$, где $g(x) = x^x = e^{x\, lnx}$

$dg(x) = de^{x\, lnx} = e^{x\, lnx}\, d(x\, lnx) = x^x(lnx + 1)dx$

Тогда отсюда следует, что

$df(x) = \langle x, x\rangle^{\langle x, x\rangle}\, (ln\langle x, x\rangle + 1)\, d\langle x, x\rangle = 2f(x)\, (ln\|x\|^2 + 1)\, \langle x, dx\rangle \Rightarrow \nabla f(x) = 2f(x)\, (ln\|x\|^2 + 1)x$

$d^2 f(x) = 2df(x)\, (ln\|x\|^2 + 1)\langle x, dx_1\rangle + 2f(x)\, d(ln\|x\|^2 + 1)\, \langle x, dx_1\rangle + 2f(x)(ln\|x\|^2 + 1)\, d\langle x, dx_1\rangle \quad (=)$

$$d(ln\langle x, x\rangle + 1) = \frac{2\langle x, dx_2\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

$d\langle x, dx_1\rangle = \langle dx_1, dx_2\rangle$ Тогда получим:

$(=)\;\; 2\; [2f(x)(ln\|x\|^2 + 1)^2\; \langle x, dx_1\rangle\langle x, dx_2\rangle + \frac{2f(x)}{\|x\|^2}\langle x, dx_1\rangle\langle x, dx_2\rangle + 2f(x)(ln\|x\|^2 + 1)\langle dx_1, dx_2\rangle] = \{\langle x, dx_1\rangle\langle x, dx_2\rangle = x^T dx_1\; x^T dx_2 = dx_1^T xx^T dx_2 = \langle xx^T dx_1, dx_2\rangle\} = 4f(x)(ln\|x\|^2 + 1)^2\; \langle xx^T dx_1, dx_2\rangle + \frac{4f(x)}{\|x\|^2}\langle xx^T dx_1, dx_2\rangle + 2f(x)(ln\|x\|^2 + 1)I_n\langle dx_1, dx_2\rangle \Rightarrow$

$\nabla^2 f(x) = f(x)\ [4(ln\|x\|^2+1)^2\ xx^T + \frac{4}{\|x\|^2}xx^T + 2(ln\|x\|^2+1)I_n]$

Ответ: $\nabla f(x) = 2f(x)\ (ln\|x\|^2+1)x$

$\nabla^2 f(x) = f(x)[4(ln\|x\|^2+1)^2\ xx^T + \frac{4}{\|x\|^2}xx^T + 2(ln\|x\|^2+1)I_n]$

Задача 3

а) $f(x) = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$

Найдем гессиан данной функции. Для этого посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i, x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i, x_j}\prod_k x_k^{\alpha_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_i}\alpha_j x_j^{\alpha_j-1}\prod_{k\neq j} x_k^{\alpha_k} = \alpha_i\alpha_j x_i^{\alpha_i-1}x_j^{\alpha_j-1}\prod_{k\neq i,j} x_k^{\alpha_k},\ \ i\neq j$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i}\alpha_i x_i^{\alpha_i-1}\prod_{k\neq i} x_k^{\alpha_k} = \alpha_i(\alpha_i-1)x_i^{\alpha_i-2}\prod_{k\neq i} x_k^{\alpha_k}$$

То есть гессиан имеет вид:

$$H = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}\begin{bmatrix} \frac{\alpha_0(\alpha_0-1)}{x_0^2} & \frac{\alpha_0\alpha_1}{x_0x_1} & \cdots & \frac{\alpha_0\alpha_d}{x_0x_d} \\ \frac{\alpha_0\alpha_1}{x_0x_1} & \frac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{x_1^2} & \cdots & \frac{\alpha_1\alpha_d}{x_1x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_0\alpha_d}{x_0x_d} & \frac{\alpha_1\alpha_d}{x_1x_d} & \cdots & \frac{\alpha_d(\alpha_d-1)}{x_d^2} \end{bmatrix}$$

Видно, что $\prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i} > 0$ и H можно переписать следующим образом:

$$H = \frac{\alpha}{x}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^T - D,$$

где $\left[\frac{\alpha}{x}\right]_i = \frac{\alpha_i}{x_i}, D = \operatorname{diag}\left(\frac{\alpha_0}{x_0^2}\ldots\frac{\alpha_d}{x_d^2}\right)$

Докажем знакопостоянство гессиана H. Для $\forall y \in \mathbb{R}^d$:

$$y^THy = y^T\frac{\alpha}{x}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^T y - y^TDy = \left(y^T\frac{\alpha}{x}\right)^2 - y^TDy = \left(\sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i y_i}{x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i y_i^2}{x_i^2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i z_i\right)^2 - \sum_{i=1}^d \alpha_i z_i^2$$

По неравенству Йенсена для выпуклой функции $f(z) = z^2$ имеем:

$$\left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i^2$$

Отсюда следует, что $y^T H y \le 0$ для $\forall y \in \mathbb{R}^d$

Ч.т.д.

b) $f(X) = \langle X^{-1}, A\rangle, \;\; X \in \mathbb{S}^n_{++} \Rightarrow X^{-1} \in \mathbb{S}^n_{++}$

$df(X) = d\langle X^{-1}, A\rangle = -\langle X^{-1}dX\ X^{-1}, A\rangle = -\langle dX, X^{-1}AX^{-1}\rangle$

$d^2f(X) = -d\langle dX, X^{-1}AX^{-1}\rangle = -\langle dX_1, d(X^{-1})AX^{-1} + X^{-1}Ad(X^{-1})\rangle =$

$\langle dX_1, X^{-1}dX_2\ X^{-1}AX^{-1} + X^{-1}AX^{-1}dX_2\ X^{-1})\rangle = \{X^{-1}, A \in \mathbb{S}^n_+ \Rightarrow \exists L, M :$

$X^{-1} = LL^T, A = MM^T\} = \langle dX\ X^{-1}, LL^T dX\ X^{-1}MM^T\rangle$

$+ \langle X^{-1}\ dX, MM^T X^{-1}dX\ LL^T\rangle = \langle L^T dX\ X^{-1}M, L^T dX\ X^{-1}M\rangle$

$+ \langle M^T X^{-1}\ dXL, M^T X^{-1}dX\ L\rangle \ge 0$

Ч.т.д.

Задача 4

$L(x) = L(A^{-1}b), x = A^{-1}b \Rightarrow Ax = b$

$dL = \nabla_x L(x)^T dx = tr\nabla_A L^T dA + \nabla_b L^T db$

$Ax = b \Rightarrow dAx + Adx = db \;\;\Rightarrow\;\; dx = A^{-1}(db - dAx)$

$dL = \nabla_x L(x)^T dx = \nabla_x L(x)^T A^{-1}(db - dAx) = \nabla_x L(x)^T A^{-1}db - \nabla_x L(x)^T A^{-1}dAx =$

$\nabla_x L(x)^T A^{-1}db - tr(x\nabla_x L(x)^T A^{-1}dA)$

$\Rightarrow \;\; \nabla_b L = A^{-T}\nabla_x L(x); \;\; \nabla_A L = -A^{-T}\nabla_x L(x)x^T = -\nabla_b L(x)\ x^T$

Часть 2. Выпуклость

Задача 1

a) $S_a = \{x | dist(x, S) \leq a\}, \quad S \subseteq \mathbb{R},\ dist(x, S) = inf_{y \in S}\|x - y\|$ и S - выпукло

Рассмотрим произвольные точки $x_1, x_2 \in S_a$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тогда для выпуклости S_a необходимо показать, что точка $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S_a$.

Так как $x_1, x_2 \in S_a$, то $\exists y_1, y_2 \in S : \|x_1 - y_1\| \leq a, \|x_2 - y_2\| \leq a$. Так как S - выпуклое, то $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in S$. Тогда получим, что:

$dist(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, S) = inf_{y \in S}\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - y\| \leq \|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \lambda y_1 - (1-\lambda)y_2\| = \|\lambda(x_1 - y_1) + (1-\lambda)(x_2 - y_2)\| \leq \|\lambda(x_1 - y_1)\| + \|(1-\lambda)(x_2 - y_2)\| \leq \lambda a + (1 - \lambda)a = a$

Таким образом, имеем: $dist(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, S) \leq a$. Отсюда следует, что S_a - выпуклое множество.

Ч.т.д.

b) $S_{-a} = \{x | B(x, a) \subset S\}, \quad a \geq 0,\ S-$ выпукло

Докажем по определению. S_{-a} будет выпулым множеством, если для $\forall x_1, x_2 \in S_{-a}$ и $\lambda \in [0, 1]$, точка $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S_{-a}$.

Возьмём произвольный $x \in B(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, a)$, покажем, что $x \in S$.

Так как, $x \in B(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, a)$, отсюда следует, что $\|x - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2\| \leq a$. Обозначим $r = x - \lambda x_1 - (1 - \lambda)x_2$ и $\|r\| \leq a$. Получим:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 + r = \lambda(x_1 + r) + (1 - \lambda)(x_2 + r)$$

Где $x_1 + r \in B(x_1, r) \Rightarrow x_1 + r \in S$ и $x_2 + r \in B(x_2, r) \Rightarrow x_2 + r \in S$. Следовательно и $\lambda(x_1 + r) + (1 - \lambda)(x_2 + r) \in S$ в силу выпуклости. Таким образом имеем $\forall x \in B(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, a) \Rightarrow x \in S$, что доказывает выпуклость S_{-a}.

Ч.т.д.

Задача 2

$f(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^4, f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

По критерию дважды дифференцируемой функции $f(x)$, для выпуклости необходимо и достаточно, чтобы гессиан данной функции был неотрицательно определён, а для $\mu-$сильной выпуклости необходимо и достаточно, чтобы гессиан данной функции был положительно определён и имел все собственные значения больше или равные μ $(\mu > 0)$. Найдём гессиан $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(x_i^4\right) = 12x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(4x_j^3\right) = 0$$

Отсюда получим, что гессиан будет диагональной матрицей, где каждый диагональный элемент равен $12x_i^2$. Видно, что все $12x_i^2 \geq 0$, тогда получим, что гессиан имеет все неотрицательные собственные значения, таким образом данная функция будет выпуклой.

Для μ-сильной выпуклости необходимо, чтобы $12x_i^2 \geq \mu$ для всех i. Это должно выполняться для всех $x_i \in \mathbb{R}^d$. Однако, для $x_i = 0$, $12x_i^2 = 0$, что меньше μ, если $\mu > 0$. Это означает, что функция не может быть μ-сильной выпуклой для $\mu > 0$.

Ответ: выпукла, но не $\mu-$сильно выпукла

Задача 3

а) $f(X) = \lambda_{\max}(X), f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$

По определению функция выпукла, если для любых матриц $X, Y \in \mathbb{S}^d$ и для всех $\alpha \in [0, 1]$, верно:

$$f(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha f(X) + (1-\alpha) f(Y)$$

Рассмотрим две произвольные матрицы $X, Y \in \mathbb{S}^d$ и параметр $\alpha \in [0, 1]$. Определим $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$. Тогда необходимо доказать, что:

$$\lambda_{\max}(Z) \leq \alpha \lambda_{\max}(X) + (1-\alpha)\lambda_{\max}(Y)$$

Пусть x будет собственным вектором матрицы X, соответствующим $\lambda_{\max}(X)$, и пусть y будет собственным вектором матрицы Y, соответствующим $\lambda_{\max}(Y)$. Собственные векторы можно выбирать единичной длины, поэтому $x^T x = y^T y = 1$.

Пусть v будет собственным вектором матрицы Z, соответствующим $\lambda_{\max}(Z)$, также нормированным до единичной длины. Теперь оценим максимальное собственное значение Z по v:

$$\lambda_{\max}(Z) = v^T Z v = v^T(\alpha X + (1-\alpha)Y)v = \alpha v^T X v + (1-\alpha) v^T Y v$$

Так как $v^T X v$ и $v^T Y v$ это скаляры, они являются значениями квадратичной формы, соответствующей X и Y, определенных на векторе v, которые по определению максимального собственного значения меньше или равны $\lambda_{\max}(X)$ и $\lambda_{\max}(Y)$ соответственно. То есть:

$$v^T X v \leq \lambda_{\max}(X)$$

$$v^T Y v \leq \lambda_{\max}(Y)$$

Таким образом, получим что:

$$\lambda_{\max}(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha \lambda_{\max}(X) + (1-\alpha)\lambda_{\max}(Y)$$

Отсюда следует, что функция $f(X) = \lambda_{\max}(X)$ выпукла.

b) $f(X) = \lambda_{\min}(X), f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$

Аналогично по определению вогнутой функции $f(\alpha X + (1-\alpha)Y) \geq \alpha f(X) + (1-\alpha)f(Y)$, для $X, Y \in \mathbb{S}^d$ и $\alpha \in [0,1]$, получим:

$$\lambda_{\min}(Z) = v^T Z v = v^T(\alpha X + (1-\alpha)Y)v = \alpha v^T X v + (1-\alpha) v^T Y v$$

Где

$$v^T X v \geq \lambda_{\min}(X)$$

$$v^T Y v \geq \lambda_{\min}(Y)$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_{\min}(Z) \geq \alpha \lambda_{\min}(X) + (1-\alpha)\lambda_{\min}(Y)$$

и функция $f(X) = \lambda_{\min}(X)$ вогнута.

Ответ: a) выпукла

b) вогнута

Задача 4

$f(X) = tr(X^{-1}), \quad X \in \mathbb{S}^n_{++}$
$f(X) = tr(X^{-1}) = tr(X^{-1}I) = \langle X^{-1}, I \rangle, I \in \mathbb{S}^n_{++}$
Тогда по задаче 3b из первой части получим, что $d^2 f(X) > 0$. Тогда по критерию получим, что данная функция выпукла (гессиан неотрицательный)
Ответ: выпуклая

Задача 5

Докажем неравенство Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

с помощью неравенства Йенсена для выпуклой на $\mathbb{R}_{++}$ функции $f(x) = -\ln x$, где $p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$.

По неравенству Йенсена, получим:

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \ln x_i \leq \ln \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i$$

Возведём в степень данное неравернство:

$$e^{\sum_{i=1}^{d} \alpha_i \ln x_i} \leq e^{\ln \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i} \quad \Rightarrow \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i$$

Пусть теперь $d = 2$, тогда

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2$$

Обозначим $u = x_1^{\alpha_1}, v = x_2^{\alpha_2}$, тогда получим неравенство Юнга:

$$uv \leq \alpha_1 u^{1/\alpha_1} + \alpha_2 v^{1/\alpha_2}, \quad p = \frac{1}{\alpha_1} > 1$$

Докажем теперь неравенство Гёльдера. Введём обозначения

$$X = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad Y = \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

По неравенству Юнга для $\forall i$:

$$\left(\frac{|x_i|}{X}\right)\left(\frac{|y_i|}{Y}\right) \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{X}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{Y}\right)^q$$

Сложим по i:

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{|x_i y_i|}{XY} \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{|x_i|}{X}\right)^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{|y_i|}{Y}\right)^q = \frac{1}{p}\frac{1}{X^p}\sum_{i=1}^{d}|x_i|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{Y^q}\sum_{i=1}^{d}|y_i|^q =$$

$$= \frac{1}{p}\frac{1}{X^p}X^p + \frac{1}{q}\frac{1}{Y^q}Y^q = 1$$

Таким образом, получим, что:

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{|x_i y_i|}{XY} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{d}|x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{d}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{d}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

Ч.т.д.

Задача 6

Докажем через двустороннюю вложенность.

1. $\boxed{\Leftarrow}$ Сначала докажем, что выпуклое множество X средневыпукло.

По определению выпуклого множества для $\forall x, y \in X$ и $\lambda \in [0,1]$ точка $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$. Тогда возьмём $\lambda = \frac{1}{2}$ и отсюда получим, что $\frac{x+y}{2} \in X$. Что по определению является средневыпуклым множеством.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Теперь покажем, что средневыпуклое множество X выпукло.

По определению средневыпуклого множества получим, что для $\forall x, y \in X \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in X$. Теперь применим средневыпуклость к точкам x и $\frac{x+y}{2}$, и получим, что $\frac{3x+y}{4} \in X$, и аналогично к $\frac{x+y}{2}$ и $y \Rightarrow \frac{x+3y}{4} \in X$. Продолжая этот процесс, в итоге мы покажем, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и для любого $k \in \{0, ..., n\}$, точка $\frac{k}{n}x + \left(1 - \frac{k}{n}\right)y$ лежит в X.

Теперь, используя тот факт, что X замкнуто, и что множество точек вида $\frac{k}{n}x + \left(1 - \frac{k}{n}\right)y$ является плотным в отрезке между x и y для $n \to \infty$, мы заключаем, что весь отрезок между x и y содержится в X, что и означает выпуклость X.

Ч.т.д.