

# Зачетная контрольная работа 2023

---

1. Предложить алгоритм для упорядочения  $n$  чисел таким образом, чтобы все отрицательные числа находились перед всеми положительными числами. Использование вспомогательного массива для временного хранения чисел не разрешается. Массив не содержит нулей. Оценить время исполнения алгоритма.
2. База данных содержит записи о 10 000 клиентов в отсортированном порядке. Из них 40% считаются хорошими клиентами, т.е. на них приходится в сумме 60% обращений к базе данных. Такую базу данных и поиск в ней можно реализовать двумя способами:
  - поместить все записи в один массив и выполнять поиск требуемого клиента посредством двоичного поиска;
  - поместить хороших клиентов в один массив, а остальных – в другой. Двоичный поиск сначала выполняется в первом массиве, и только в случае отрицательного результата – во втором.Выясните, какой из этих подходов даёт лучшую ожидаемую производительность. Будут ли результаты иными, если в обоих случаях вместо двоичного поиска применить линейный поиск в неотсортированном массиве?
3. Дана отсортированная последовательность  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  разных целых чисел в диапазоне от 1 до  $m$ , где  $n < m$ . Предложите  $O(\log n)$  алгоритмы
  - а) поиска целого числа  $x \leq m$ , отсутствующего в этой последовательности,
  - б) поиска наименьшего такого целого числа.
4. Пусть  $A$  – матрица размером  $m \times n$ , в которой элементы каждой строки отсортированы в возрастающем порядке слева направо, а элементы каждого столбца отсортированы в возрастающем порядке сверху вниз. Разработайте эффективный алгоритм для определения местонахождения целого числа  $x$  в матрице  $A$  или для определения, что матрица не содержит данное число. Сколько сравнений числа  $x$  с элементами матрицы выполняет ваш алгоритм в наихудшем случае?
5. Алгоритм сортировки выполняет сортировку 1000 элементов за 1 секунду. Сколько времени займёт сортировка 10000 элементов,
  - (а) если время исполнения алгоритма прямо пропорционально  $n^2$ ?

- (b) если время исполнения алгоритма, по грубым оценкам, пропорционально  $n \log n$ ?
6. У вас есть 25 лошадей, но нет часов. В каждой скачке могут участвовать не более 5 лошадей. Требуется определить 1, 2 и 3 по скорости лошадь. Найдите минимальное количество скачек, позволяющих решить эту задачу.
7. Какое значение возвращает следующая функция? Ответ должен быть в форме функции числа  $n$ . Найдите время исполнения в наихудшем случае, используя обозначение  $O(f(n))$ .

```

function mystery(n)
    r:=0;
    for i:=1 to n-1 do
        for j:=i+1 to n do
            for k:=1 to j do
                r:=r+1;
    return (r)

```

8. Функция  $f(n)$  является членом одного из множеств функций  $O(g(n))$ ,  $\Omega(g(n))$  или  $\Theta(g(n))$ . Определите, членом какого множества является  $f(n)$  в каждом случае, и обоснуйте свой вывод.

(a)  $f(n) = \log n^2$ ;  $g(n) = \log n + 5$

(b)  $f(n) = \sqrt{n}$ ;  $g(n) = \log n^2$

(c)  $f(n) = \log^2 n$ ;  $g(n) = \log n$

(d)  $f(n) = n$ ;  $g(n) = \log^2 n$

(e)  $f(n) = n \log n + n$ ;  $g(n) = \log n$

(f)  $f(n) = 10$ ;  $g(n) = \log 10$

(g)  $f(n) = 2^n$ ;  $g(n) = 10n^2$

(h)  $f(n) = 2^n$ ;  $g(n) = 3^n$

9. Исходные данные – рождественский клип [https://www.youtube.com/watch?v=QYyhDvuq8\\_Y](https://www.youtube.com/watch?v=QYyhDvuq8_Y). Допустим, что рождественские праздники длятся  $n$  дней. Сколько всего подарков прислала герою клипа за эти дни «любовь его верная» (my true love)?

10. Будет ли путь между двумя вершинами в минимальном остовном дереве обязательно самым коротким путём между этими двумя вершинами в полном графе? Если да, предоставьте доказательство, если нет, то приведите контрпример.
11. Могут ли алгоритмы Прима и Крускала выдавать разные минимальные остовные деревья?
12. Рассмотрим строку над алфавитом из четырёх символов  $A, C, G, T$  с частотами 31%, 20%, 9% и 40% соответственно. Каким будет код Хаффмана для этой строки?
13. Пусть частоты вхождения символов  $a, b, c, d, e$  в строку равны  $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16$  соответственно.
- a) Каким будет код Хаффмана?
- b) Если использовать данный код для сжатия строки длины 1 000 000 с указанными выше частотами, какова будет длина закодированной строки (в битах)?
14. Постройте линейный по времени алгоритм для следующей задачи.  
*Вход:* связный неориентированный граф  $G$  с  $n$  вершинами.  
*Вопрос:* есть ли в  $G$  ребро, после удаления которого граф перестает быть связным?  
Можно ли обеспечить время работы алгоритма  $O(n)$ ?
15. Имеется алгоритм поиска минимального числа в массиве  $A[0..n]$ . Текущая переменная  $tmp$ . Начиная с  $A[0]$  значение переменной  $tmp$  сравнивается со значениями  $A[1], A[2], \dots, A[n]$ . Если  $A[i] < tmp$ , то присвоение  $tmp := A[i]$ . Сколько нужно ожидать операций присваивания?
16. Есть три алгоритма решения задачи:  $A, B, C$ . Нужно определить наиболее эффективный.
- $A$ : Производит пять рекурсивных вызовов для подзадач вдвое меньшей размерности и строит ответ за линейное время.
- $B$ : Для задачи размера  $n$  делает два рекурсивных вызова для задач размера  $n-1$  и находит ответ за  $O(1)$ .
- $C$ : Рекурсивно решает 9 задач размера  $n/3$  и строит ответ за  $O(n^2)$ .
17. Слияние  $k$  упорядоченных массивов длины  $n$ .
- a) Сливать процедурой Merge последовательно за линейное время по суммарной длине сливаемых массивов.
- b) Построить более эффективный алгоритм «разделяй и властвуй».

18. Заданы два выпуклых многоугольника  $P_1$  и  $P_2$ , число вершин которых в сумме равно  $N$ . Построить алгоритм, который вычислит объединение  $P_1$  и  $P_2$  за время  $O(N)$ .
19. Заданы три выпуклых многоугольника  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , число вершин которых в сумме равно  $N$ . Построить алгоритм, который вычислит пересечение  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  за время  $O(N)$ .
20. Вычислить редакторское расстояние между словами:
- антиквар – травинка
  - стационар – соратница
  - австралопитек – ватерполистка
  - вертикаль - кильватер