

Теория 2. Матричные вычисления

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, осень 2019

1. Доказать тождество Вудбери:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}.$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

2. Пусть $p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{A}\mathbf{x}, \Gamma)$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Найти распределение $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$.
3. Пусть $p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{A}\mathbf{x}, \Gamma)$. Доказать, что $p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \Gamma + \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T)$.
4. Вычислить $\frac{\partial}{\partial X} \det(X^{-1} + A)$ (все матрицы не являются симметричными);
5. Вычислить $\frac{\partial}{\partial X} \text{tr}(AX^{-T}BXC)$ (все матрицы не являются симметричными, матрицы A, C не являются квадратными).