

Московский Государственный Университет

Байесовские рассуждения

Выполнил: Курцев Д.В.

Группа: 417

Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Кафедра Математических методов прогнозирования

Сентябрь 2022

1 $p(a)$, $p(b)$

$a \sim \text{Unif}[a_{\min}, a_{\max}]$, $b \sim \text{Unif}[b_{\min}, b_{\max}]$

Найдём математическое ожидание и дисперсию для случайной величины a (для b всё аналогично):

$$\mathbb{P}(a = k) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = a_{\max} - a_{\min} + 1, k \in [a_{\min}, a_{\max}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда:

$$\mathbb{E} a = \sum_{k=a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{1}{n} k = \frac{1}{n} \sum_{k=a_{\min}}^{a_{\max}} k = \frac{1}{n} \frac{(a_{\min} + a_{\max}) n}{2} = \frac{(a_{\min} + a_{\max})}{2}$$

Дисперсию вычислим, воспользовавшись свойством, по формуле:

$$\mathbb{D}a = \mathbb{E}a^2 - \mathbb{E}^2a$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}a^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=a_{\min}}^{a_{\max}} k^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{a_{\max}} k^2 - \sum_{k=1}^{a_{\min}-1} k^2 \right) = \left\{ \sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right\} = \\ &= \frac{1}{6n} (a_{\max}(a_{\max}+1)(2a_{\max}+1) - a_{\min}(a_{\min}-1)(2a_{\min}-1)) = \frac{1}{6n} (3a_{\max}^2 + 2a_{\max}^3 + a_{\max} - \\ &\quad - 2a_{\min}^3 + 3a_{\min}^2 - a_{\min}) \quad (=) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{\max}^3 - a_{\min}^3 &= (a_{\max} - a_{\min} + 1)(a_{\max}^2 + a_{\max}a_{\min} + a_{\min}^2) - (a_{\max}^2 + a_{\max}a_{\min} + a_{\min}^2) \\ (=) &\frac{1}{6n} (2n(a_{\max}^2 + a_{\max}a_{\min} + a_{\min}^2) - 2a_{\max}^2 - 2a_{\max}a_{\min} - 2a_{\min}^2 + 3a_{\max}^2 + 3a_{\min}^2 + a_{\max} - a_{\min}) = \\ &= \frac{1}{6n} (2n(a_{\max}^2 + a_{\max}a_{\min} + a_{\min}^2) + a_{\max}^2 + a_{\min}^2 - 2a_{\max}a_{\min} + a_{\max} - a_{\min}) = \\ &= \frac{1}{6n} (2n(a_{\max}^2 + a_{\max}a_{\min} + a_{\min}^2) + a_{\max}(a_{\max} - a_{\min} + 1) - a_{\min}(a_{\max} - a_{\min} + 1)) = \\ &= \frac{1}{6} (2a_{\max}^2 + 2a_{\max}a_{\min} + 2a_{\min}^2 + a_{\max} - a_{\min}) \end{aligned}$$

Таким образом, получим, что дисперсия равна:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}a = \mathbb{E}a^2 - \mathbb{E}^2a &= \frac{1}{6} (2a_{\max}^2 + 2a_{\max}a_{\min} + 2a_{\min}^2 + a_{\max} - a_{\min}) - \frac{1}{4} (a_{\max}^2 - 2a_{\max}a_{\min} + a_{\min}^2) = \\ &= \frac{1}{12} (a_{\max}^2 + a_{\min}^2 - 2a_{\max}a_{\min} + 2a_{\max} - 2a_{\min}) = \frac{n^2 - 1}{12} \end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$\mathbb{E}a = \frac{a_{min} + a_{max}}{2}, \quad \mathbb{E}b = \frac{b_{min} + b_{max}}{2}$$

$$\mathbb{D}a = \frac{(a_{max} - a_{min} + 1)^2 - 1}{12}, \quad \mathbb{D}b = \frac{(b_{max} - b_{min} + 1)^2 - 1}{12}$$

2 p(c)

$$p(a, b, c) = p(c|a, b)p(a)p(b)$$

$$p(c) = \sum_a \sum_b p(a, b, c) = \sum_a \sum_b p(c|a, b)p(a)p(b)$$

То есть

$$\mathbb{P}(c = k) = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)$$

Найдём мат ожидание $p(c)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} c &= \sum_k \mathbb{P}(c = k) k = \sum_k \sum_a \sum_b \mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)k = \\ &= \sum_a \mathbb{P}(a) \sum_b \mathbb{P}(b) \sum_k \mathbb{P}(c = k|a, b)k = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)\mathbb{E}(c|a, b) \quad (=) \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(c|a, b)$ для обеих моделей равно $ap_1 + bp_2$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} (=) \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)(ap_1 + bp_2) &= \sum_b \mathbb{P}(b) \sum_a \mathbb{P}(a)ap_1 + \sum_a \mathbb{P}(a) \sum_b \mathbb{P}(b)bp_2 = \\ &= p_1 \sum_b \mathbb{P}(b)\mathbb{E}a + p_2 \sum_a \mathbb{P}(a)\mathbb{E}b = p_1\mathbb{E}a + p_2\mathbb{E}b \end{aligned}$$

Чтобы найти дисперсию, найдём мат ожидание квадрата c

$$\begin{aligned} \mathbb{E}c^2 &= \sum_k \mathbb{P}(c = k) k^2 = \sum_k \sum_a \sum_b \mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)k^2 = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)\mathbb{E}(c^2|a, b) = \\ &= \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)(\mathbb{D}(c|a, b) + \mathbb{E}^2(c|a, b)) \end{aligned}$$

Для 1 модели:

$$\sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)\mathbb{D}(c|a, b) = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)(ap_1(1 - p_1) + bp_2(1 - p_2)) =$$

$$\begin{aligned}
& p_1(1-p_1) \sum_b \mathbb{P}(b) \sum_a \mathbb{P}(a)a + p_2(1-p_2) \sum_a \mathbb{P}(a) \sum_b \mathbb{P}(b)b = \\
& = p_1(1-p_1)\mathbb{E}a \sum_b \mathbb{P}(b) + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b \sum_a \mathbb{P}(a) = p_1(1-p_1)\mathbb{E}a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b
\end{aligned}$$

Для 2 модели:

$$\sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)\mathbb{D}(c|a, b) = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)(ap_1 + bp_2) = p_1\mathbb{E}a + p_2\mathbb{E}b$$

$$\begin{aligned}
& \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)\mathbb{E}^2(c|a, b) = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)(ap_1 + bp_2)^2 = \\
& = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)(a^2p_1^2 + 2abp_1p_2 + b^2p_2^2) = p_1^2 \sum_b \mathbb{P}(b) \sum_a \mathbb{P}(a)a^2 + \\
& + p_2^2 \sum_a \mathbb{P}(a) \sum_b \mathbb{P}(b)b^2 + 2p_1p_2 \sum_a \mathbb{P}(a)a \sum_b \mathbb{P}(b)b = p_1^2\mathbb{E}a^2 + p_2^2\mathbb{E}b^2 + 2p_1p_2\mathbb{E}a\mathbb{E}b
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}^2c = (p_1\mathbb{E}a + p_2\mathbb{E}b)^2 = p_1^2\mathbb{E}^2a + p_2^2\mathbb{E}^2b + 2p_1p_2\mathbb{E}a\mathbb{E}b$$

Тогда в итоге получим:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_1c &= p_1(1-p_1)\mathbb{E}a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_1^2\mathbb{E}a^2 + p_2^2\mathbb{E}b^2 + 2p_1p_2\mathbb{E}a\mathbb{E}b - p_1^2\mathbb{E}^2a - p_2^2\mathbb{E}^2b - 2p_1p_2\mathbb{E}a\mathbb{E}b = \\
&= p_1(1-p_1)\mathbb{E}a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_1^2\mathbb{D}a + p_2^2\mathbb{D}b \\
\mathbb{D}_2c &= p_1\mathbb{E}a + p_2\mathbb{E}b + p_1^2\mathbb{D}a + p_2^2\mathbb{D}b
\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}c &= p_1\mathbb{E}a + p_2\mathbb{E}b \\
\mathbb{D}_1c &= p_1(1-p_1)\mathbb{E}a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_1^2\mathbb{D}a + p_2^2\mathbb{D}b \\
\mathbb{D}_2c &= p_1\mathbb{E}a + p_2\mathbb{E}b + p_1^2\mathbb{D}a + p_2^2\mathbb{D}b
\end{aligned}$$

3 $p(c|a)$

$$p(c|a) = \frac{p(a, c)}{p(a)} = \frac{\sum_b p(a, b, c)}{p(a)} = \frac{\sum_b p(c|a, b)p(a)p(b)}{p(a)} = \sum_b p(c|a, b)p(b)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(c = k|a) = \sum_b \mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(b)$$

Аналогично $p(c)$ найдём мат ожидание и дисперсию для $p(c|a)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(c|a) &= \sum_k \sum_b \mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(b) k = \sum_b \mathbb{P}(b)\mathbb{E}(c|a, b) = \sum_b \mathbb{P}(b)(ap_1 + bp_2) = \\ &= p_1a + p_2\mathbb{E}b \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(c^2|a) = \sum_k \sum_b \mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(b)k^2 = \sum_b \mathbb{P}(b)\mathbb{E}(c^2|a, b) = \sum_b \mathbb{P}(b)(\mathbb{D}(c^2|a, b) + \mathbb{E}^2(c|a, b))$$

Для 1 модели:

$$\sum_b \mathbb{P}(b)\mathbb{D}(c^2|a, b) = \sum_b \mathbb{P}(b)(p_1(1-p_1)a + p_2(1-p_2)b) = p_1(1-p_1)a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b$$

Для 2 модели:

$$\sum_b \mathbb{P}(b)\mathbb{D}(c^2|a, b) = \sum_b \mathbb{P}(b)(p_1a + p_2b) = p_1a + p_2\mathbb{E}b$$

$$\sum_b \mathbb{P}(b)\mathbb{E}^2(c|a, b) = \sum_b \mathbb{P}(b)(ap_1 + bp_2)^2 = p_1^2a^2 + p_2^2\mathbb{E}b^2 + 2p_1p_2a\mathbb{E}b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_1(c|a) &= p_1(1-p_1)a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_1^2a^2 + p_2^2\mathbb{E}b^2 + 2p_1p_2a\mathbb{E}b - p_1^2a^2 - p_2^2\mathbb{E}^2b - 2p_1p_2a\mathbb{E}b = \\ &= p_1(1-p_1)a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_2^2\mathbb{D}b \end{aligned}$$

$$D_2(c|a) = p_1a + p_2\mathbb{E}b + p_2^2\mathbb{D}b$$

В итоге имеем:

$$\mathbb{E}(c|a) = p_1a + p_2\mathbb{E}b$$

$$\mathbb{D}_1(c|a) = p_1(1-p_1)a + p_2(1-p_2)\mathbb{E}b + p_2^2\mathbb{D}b$$

$$\mathbb{D}_2(c|a) = p_1a + p_2\mathbb{E}b + p_2^2\mathbb{D}b$$

4 $p(c|b)$

Абсолютно аналогично $p(c|a)$ получим, что

$$p(c|b) = \sum_a p(c|a, b)p(a) \quad \mathbb{P}(c = k|b) = \sum_a \mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(a)$$

$$\mathbb{E}(c|b) = p_1\mathbb{E}a + p_2b$$

$$\mathbb{D}_1(c|b) = p_1(1 - p_1)\mathbb{E}a + p_2(1 - p_2)b + p_1^2\mathbb{D}a$$

$$\mathbb{D}_2(c|b) = p_1\mathbb{E}a + p_2b + p_1^2\mathbb{D}a$$

5 $p(d)$

$$p(d, c) = p(d|c)p(c) \Rightarrow p(d) = \sum_c p(d, c) = \sum_c p(d|c)p(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(d = k) = \sum_c \mathbb{P}(d = k|c)\mathbb{P}(c)$$

Найдём мат ожидание $p(d)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} d &= \sum_k \mathbb{P}(d = k) k = \sum_k \sum_c \mathbb{P}(d = k|c)\mathbb{P}(c)k = \sum_c \mathbb{P}(c) \sum_k \mathbb{P}(d = k|c)k = \\ &= \sum_c \mathbb{P}(c)\mathbb{E}(d|c) = \sum_c \mathbb{P}(c)(\mathbb{E}c + \mathbb{E} \text{Bin}(c, p_3)) = \sum_c \mathbb{P}(c)c + \sum_c \mathbb{P}(c)cp_3 = \\ &\mathbb{E}c + p_3 \sum_c \mathbb{P}(c)c = (1 + p_3)\mathbb{E}c \end{aligned}$$

Найдём мат ожидание d^2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} d^2 &= \sum_k \mathbb{P}(d = k) k^2 = \sum_k \sum_c \mathbb{P}(d = k|c)\mathbb{P}(c)k^2 = \sum_c \mathbb{P}(c)\mathbb{E}(d^2|c) = \\ &= \sum_c \mathbb{P}(c)(\mathbb{D}(d|c) + \mathbb{E}^2(d|c)) \end{aligned}$$

Так как в $\mathbb{D}(d|c)$ и $\mathbb{E}^2(d|c)$ c является константой, то:

$$\mathbb{E}^2(d|c) = (\mathbb{E}c + \mathbb{E}\text{Bin}(c, p_3))^2 = (c + cp_3)^2 = c^2(1 + p_3)^2$$

$$\mathbb{D}(d|c) = \mathbb{D}(c + \text{Bin}(c, p_3)) = \mathbb{D}\text{Bin}(c, p_3) = cp_3(1 - p_3)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{E} d^2 &= \sum_c \mathbb{P}(c)(c^2(1+p_3)^2 + cp_3(1-p_3)) = p_3(1-p_3)\mathbb{E} c + (1+p_3)^2\mathbb{E} c^2 = \\ &= p_3(1-p_3)\mathbb{E} c + (1+p_3)^2(\mathbb{D} c + \mathbb{E}^2 c)\end{aligned}$$

Тогда получим, что:

$$\begin{aligned}\mathbb{D} d &= \mathbb{E} d^2 - \mathbb{E}^2 d = p_3(1-p_3)\mathbb{E} c + (1+p_3)^2(\mathbb{D} c + \mathbb{E}^2 c) - (1+p_3)^2\mathbb{E}^2 c = \\ &= p_3(1-p_3)\mathbb{E} c + (1+p_3)^2\mathbb{D} c\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\mathbb{E} d = (1+p_3)\mathbb{E} c \quad \mathbb{D} d = p_3(1-p_3)\mathbb{E} c + (1+p_3)^2\mathbb{D} c$$

6 $p(c|d)$

Для вывода формулы распределения воспользуемся теоремой Байеса:

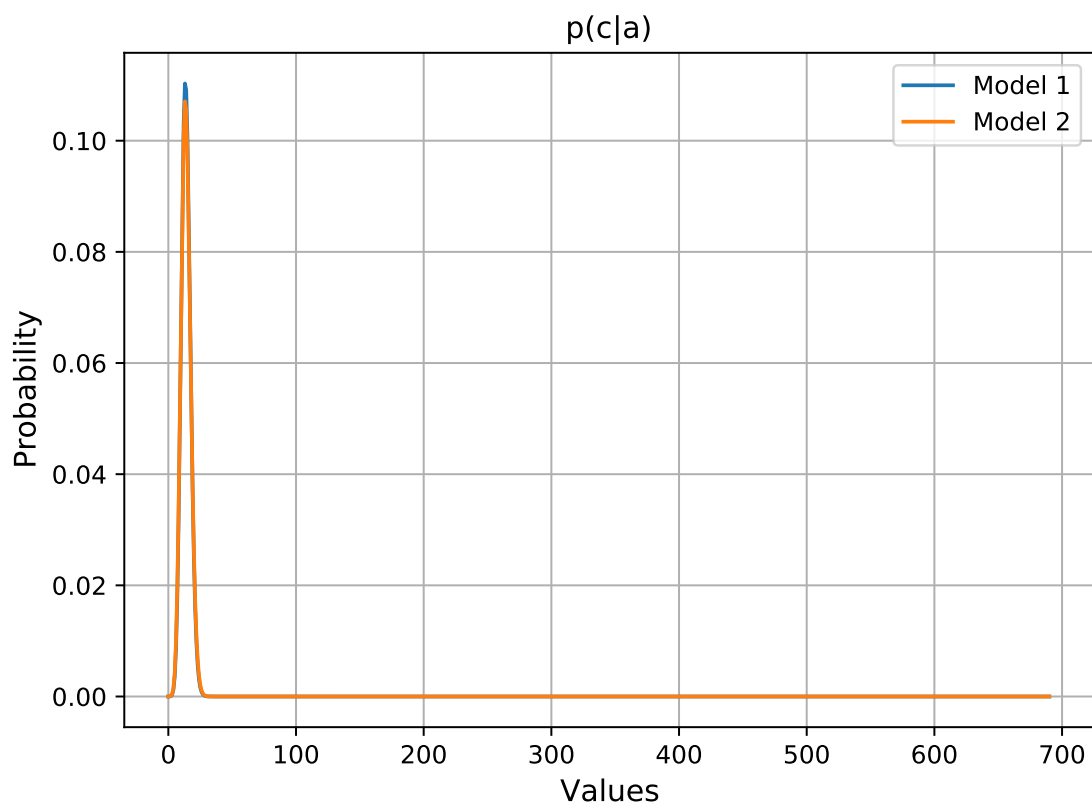
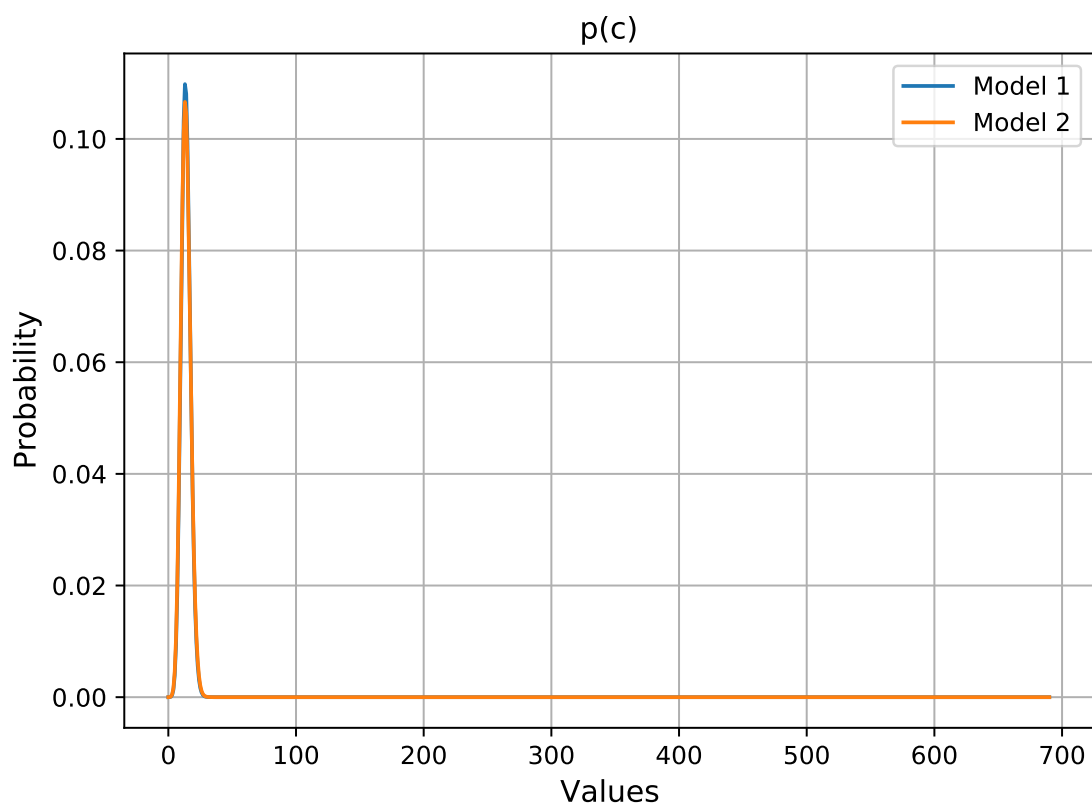
$$\begin{aligned}p(c|d) &= \frac{p(d|c)p(c)}{\sum_c p(d|c)p(c)} = \frac{p(d|c)p(c)}{\sum_c p(c, d)} = \frac{p(d|c)p(c)}{p(d)} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(c = k|d) &= \frac{\mathbb{P}(d|c = k)\mathbb{P}(c = k)}{\mathbb{P}(d)}\end{aligned}$$

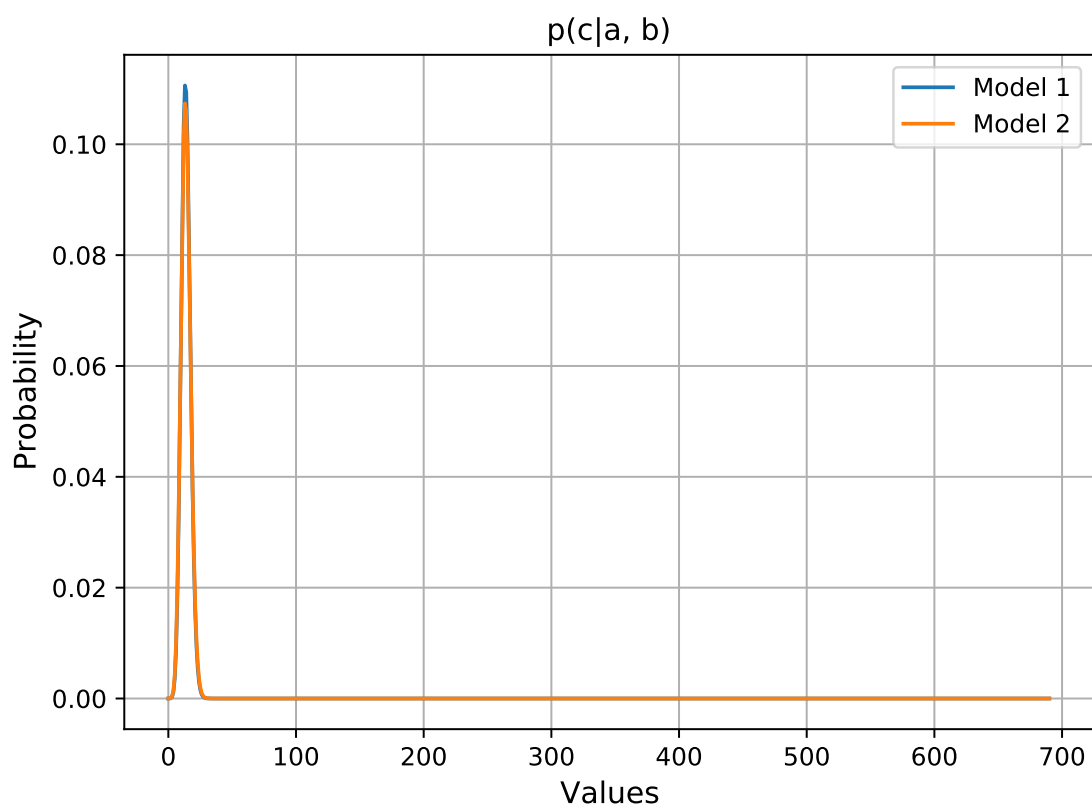
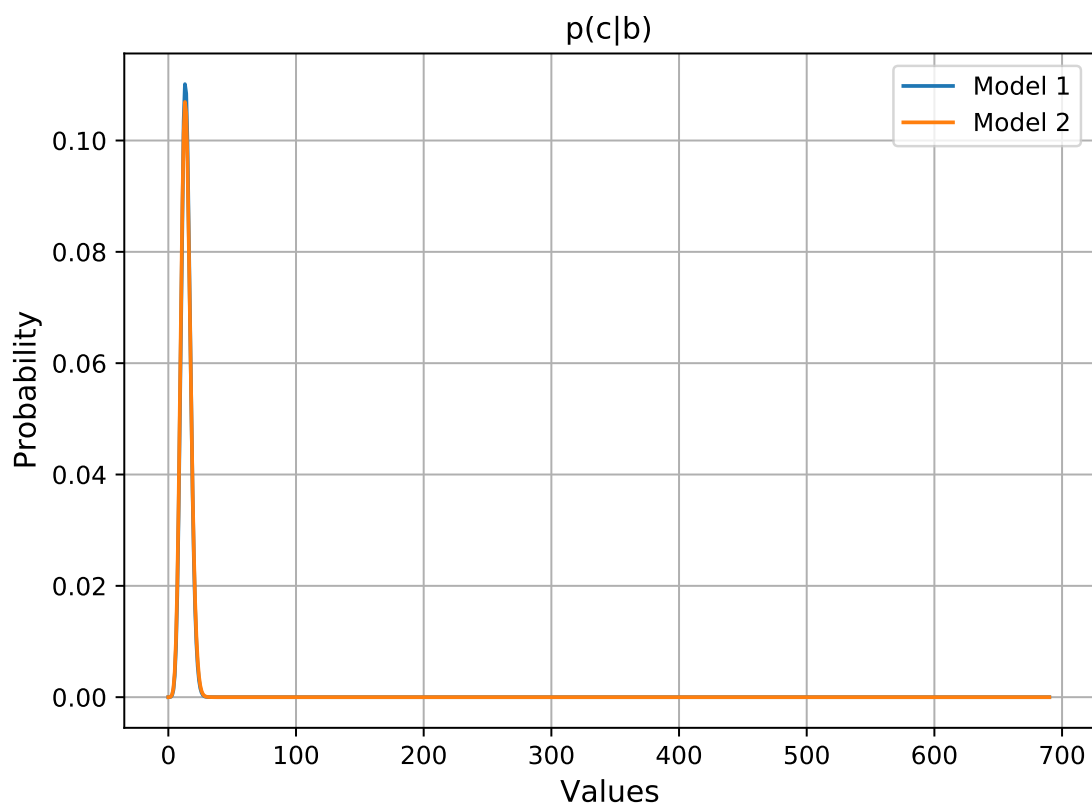
7 $p(c|a, b, d)$

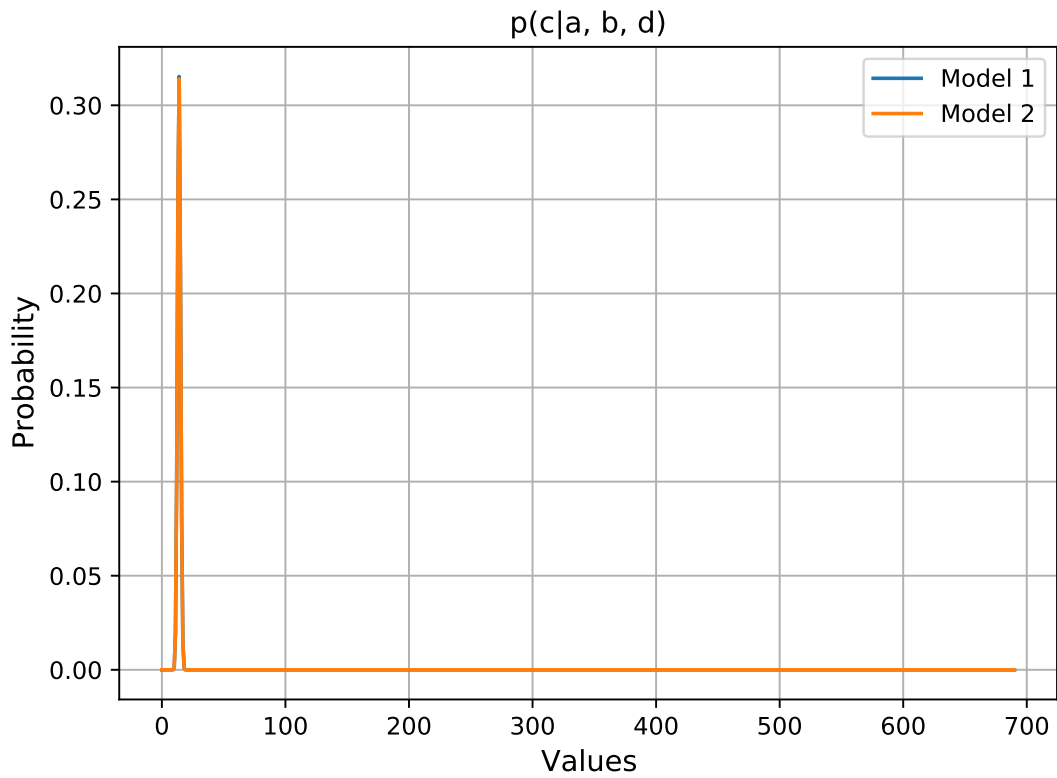
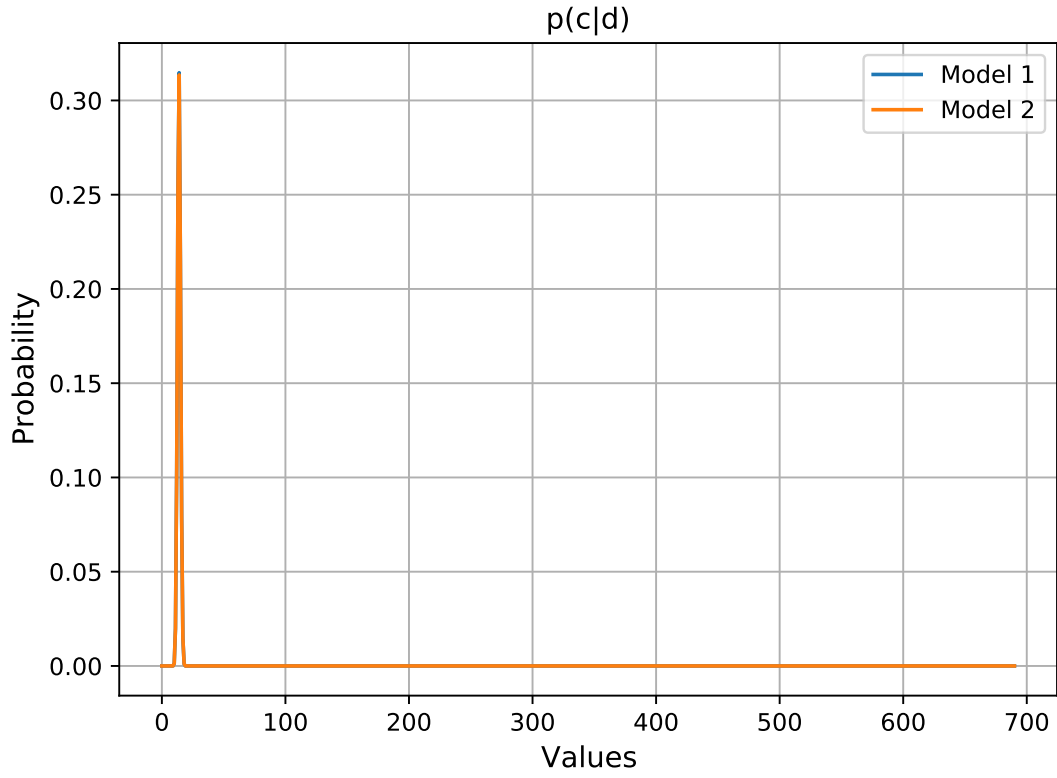
$$\begin{aligned}p(a, b, c, d) &= p(c|a, b, d)p(a, b, d) \Rightarrow p(c|a, b, d) = \frac{p(a, b, c, d)}{p(a, b, d)} = \frac{p(a, b, c, d)}{\sum_c p(a, b, c, d)} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(c = k|a, b, d) &= \frac{\mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)\mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(d|c = k)}{\sum_c \mathbb{P}(a)\mathbb{P}(b)\mathbb{P}(c = k|a, b)\mathbb{P}(d|c = k)}\end{aligned}$$

8 Графики распределений

Мат ожидания для обеих моделей совпадают. Обозначим за \mathbb{D}_1 дисперсию для первой модели, а за \mathbb{D}_2 для второй. За t_i будем принимать время работы i -ой модели







$\mathbb{E} c = 13.75$ $\mathbb{D}_1 c = 13.1675$ $\mathbb{D}_2 c = 14.0475$ $t_1 = 208 \text{ ms}$ $t_2 = 8.82 \mu s$
 $\mathbb{E} (c|a = 83) = 13.8$ $\mathbb{D}_1 (c|a = 83) = 13.0$ $\mathbb{D}_2 (c|a = 83) = 13.885$ $t_1 = 117 \text{ ms}$ $t_2 = 9.3 \mu s$

$$\mathbb{E}(c|b = 550) = 13.75 \quad \mathbb{D}_1(c|b = 550) = 13.0825 \quad \mathbb{D}_2(c|b = 550) = 13.9625 \quad t_1 = 11.9 \text{ ms} \quad t_2 = 4 \text{ ms}$$

$$\mathbb{E}(c|a = 83, b = 550) = 13.8 \quad \mathbb{D}_1(c|a = 83, b = 550) = 12.915 \quad \mathbb{D}_2(c|a = 83, b = 550) = 13.8 \quad t_1 = 15.4 \text{ ms} \quad t_2 = 2.03 \text{ ms}$$

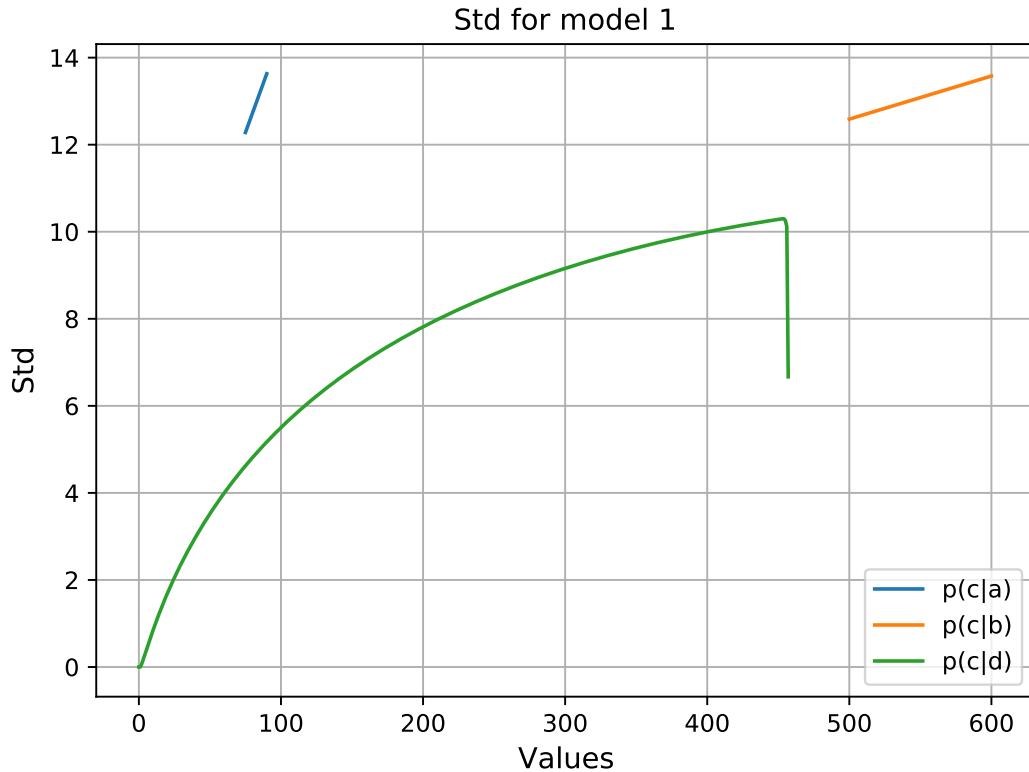
$$\mathbb{E}(c|d = 18) = 13.9 \quad \mathbb{D}_1(c|d = 18) = 1.534 \quad \mathbb{D}_2(c|d = 18) = 1.544 \quad t_1 = 1.23 \text{ s} \quad t_2 = 685 \text{ ms}$$

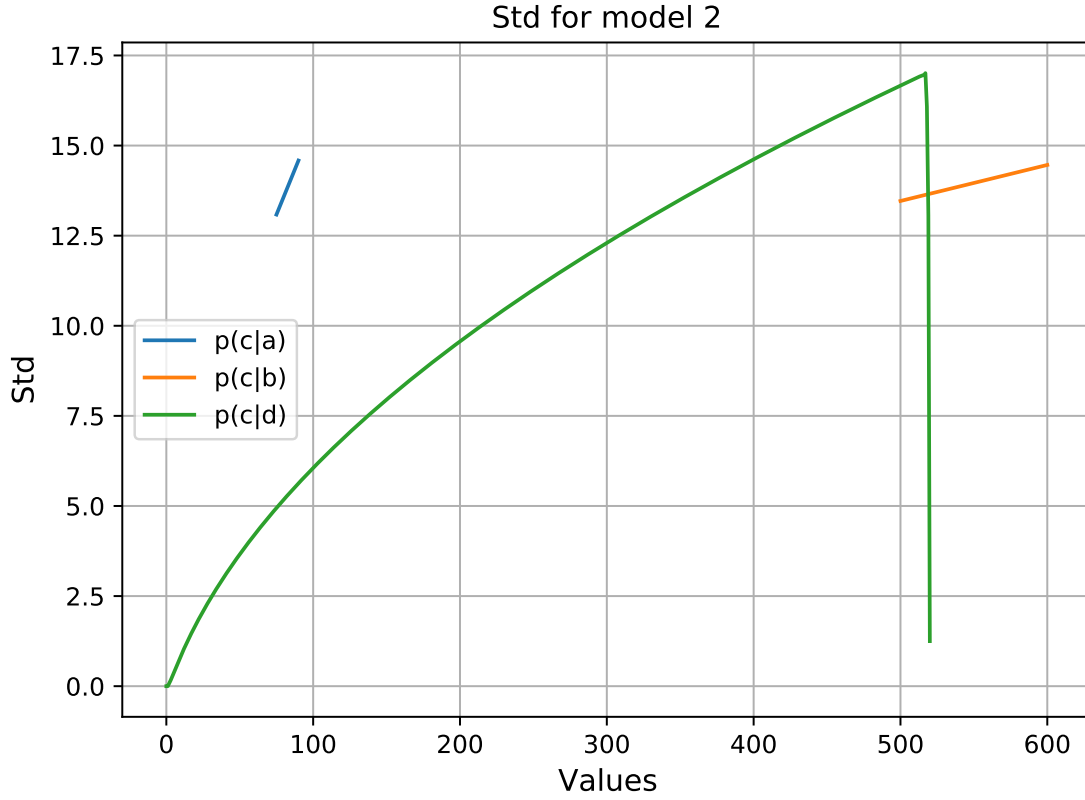
$$\mathbb{E}(c|a = 83, b = 550, d = 18) = 13.9 \quad \mathbb{D}_1(c|a = 83, b = 550, d = 18) = 1.530 \quad \mathbb{D}_2(c|a = 83, b = 550, d = 18) = 1.540 \quad t_1 = 423 \text{ ms} \quad t_2 = 253 \text{ ms}$$

$$\mathbb{E} d = 17.875 \quad \mathbb{D}_1 d = 25.14 \quad \mathbb{D}_2 d = 26.63 \quad t_1 = 622 \text{ ms} \quad t_2 = 333 \text{ ms}$$

Как видно из графиков и из значений дисперсий лучше всего на прогноз c влияет d . Что неудивительно, так как количество присутствующих студентов намного сильнее коррелирует с отметившимися, чем с общим количеством записанных на курс. Заметим так же, что a вносит чуть больше ясности, чем b .

9 Уточнение прогноза





Заметим, что во второй модели при достаточно больших d $\mathbb{D}(c|d) > \mathbb{D}(c|b)$. Следовательно нельзя сказать, что d вносит наибольший вклад в уточнение для прогноза c . Напротив, в первой модели $\mathbb{D}(c|d)$ растёт с ростом d , однако потом начинает уменьшаться. Что вполне предсказуемо, так как становится меньше возможных вариантов для c . Поэтому в первой модели можно утверждать, что d играет большую роль в оценке c . (Для больших значений d не получается вычислить дисперсию из-за точности вычислений на компьютере)

Найдём множества $A = \{(a, b) \mid \mathbb{D}(c|b) < \mathbb{D}(c|a)\}$ и $B = \{(a, b) \mid \mathbb{D}(c|b) \geq \mathbb{D}(c|a)\}$

Обозначим за $p'_i = p_i$ или $p'_i = p_i(1 - p_i)$, $i \in \{1, 2\}$ в зависимости от модели.

Тогда: $\mathbb{D}(c|a) = p'_1 a + p'_2 \mathbb{E}b + p_2^2 \mathbb{D}b$, $\mathbb{D}(c|b) = p'_1 \mathbb{E}a + p'_2 b + p_1^2 \mathbb{D}a$

$$\mathbb{D}(c|a) - \mathbb{D}(c|b) = p'_1(a - \mathbb{E}a) + p'_2(\mathbb{E}b - b) + p_2^2 \mathbb{D}b - p_1^2 \mathbb{D}a > 0$$

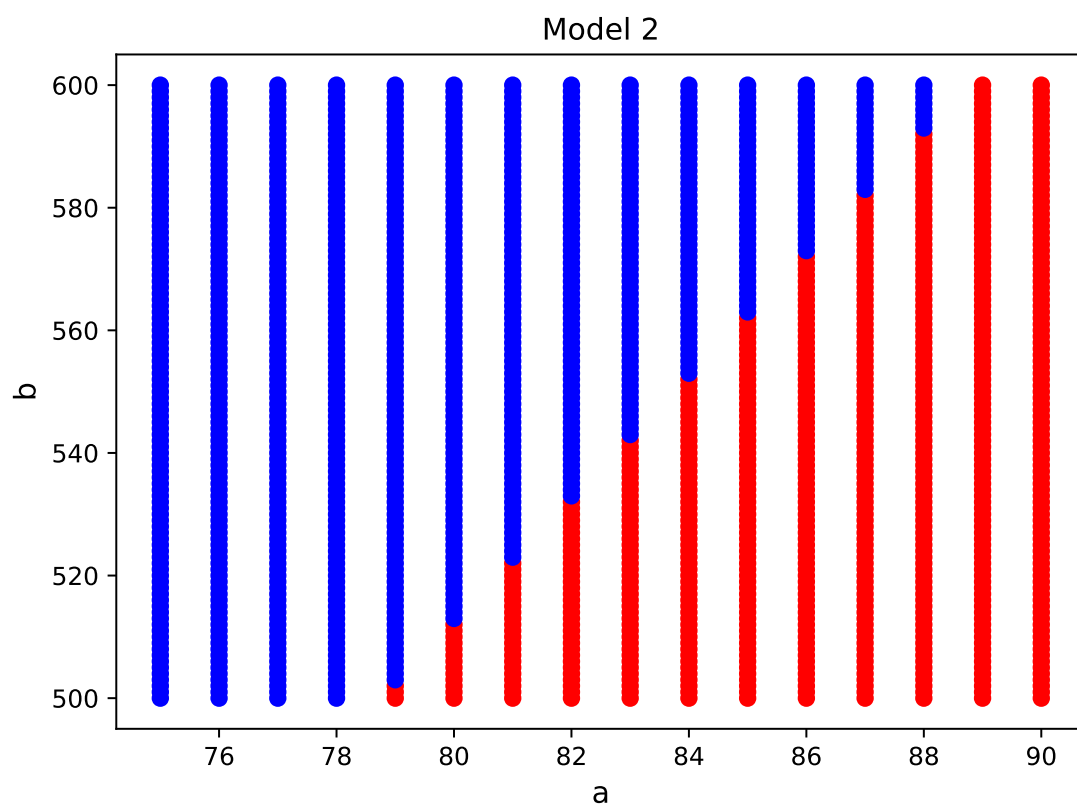
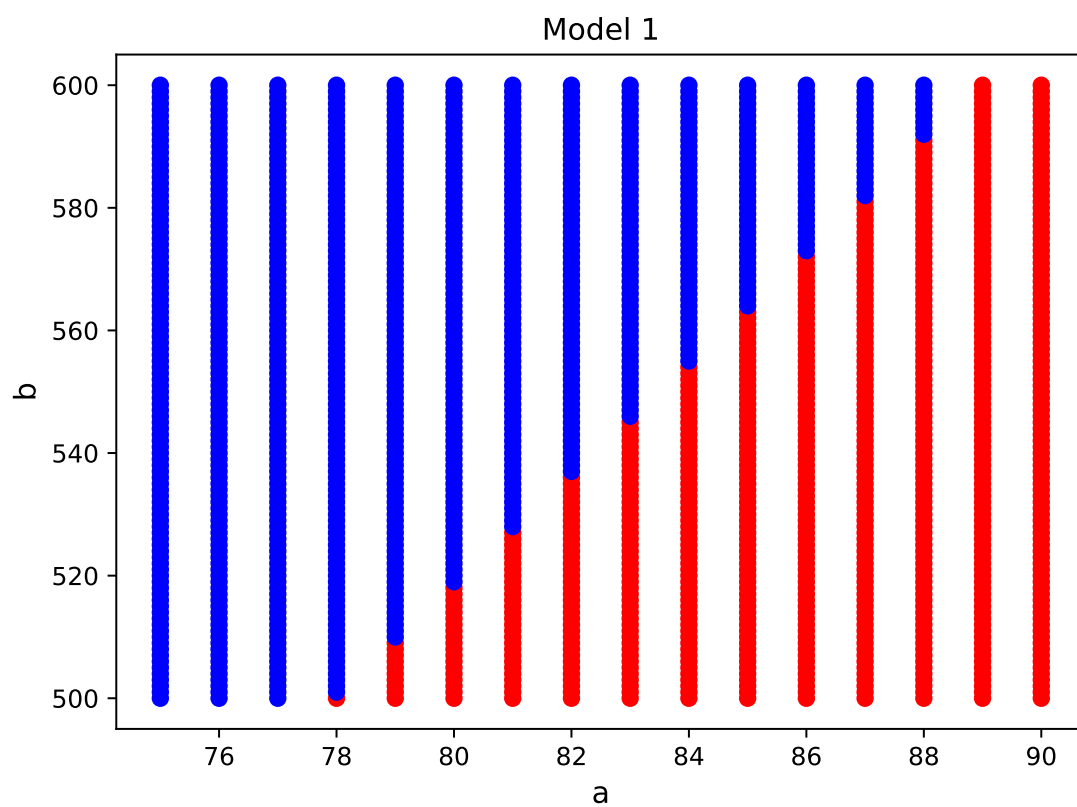
$$\Rightarrow p'_1 a - p'_2 b > p'_1 \mathbb{E}a - p'_2 \mathbb{E}b - p_2^2 \mathbb{D}b + p_1^2 \mathbb{D}a = \text{const}$$

$$\Rightarrow p'_1 a - p'_2 b > \text{const}$$

Получили линейную зависимость от a и b . Следовательно множества A и B линейно разделимы. И множество A состоит из пар удовлетворяющих уравнению $p'_1 a - p'_2 b > \text{const}$.

Изобразим на графике эти множества. Синими точками обозначены элементы B , а красными A . Как видно из рисунка данные множества линейно раздели-

МЫ.

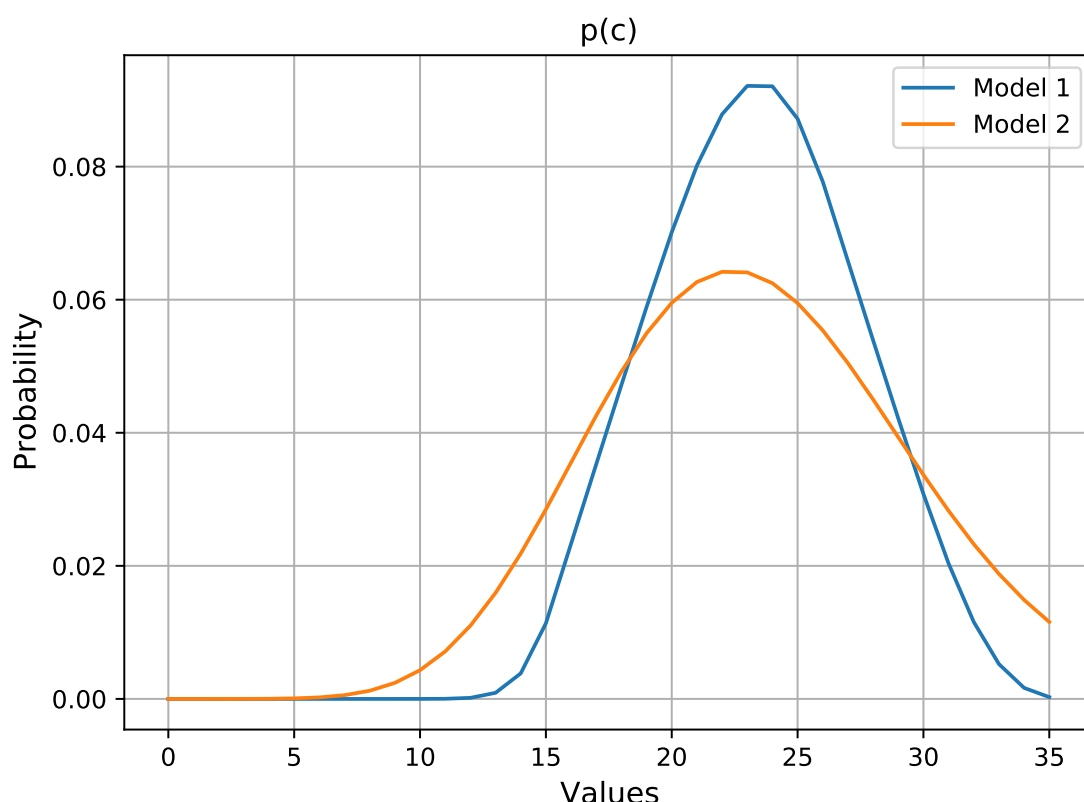


10 Сравнение моделей

Как уже было получено в предыдущем разделе модели отличаются в уточнении прогноза s . Так же заметим, что вторая модель является лишь приближением первой. Известно, что биномиальное распределение $Bin(n, p)$ при большом количестве испытаний и маленькой вероятности успеха может быть с высокой точностью приближено пуассоновским распределением $Poiss(\lambda)$ с $\lambda = np$. Но если у нас мало испытаний и большая вероятность успеха, то тогда данные модели будут показывать совершенно разный результат.

Пусть на излюбленный курс по байесовским методам ходит только кафедра ММП, на которой из года в год 15-25 человек. А так как это не совсем простые студенты, то они посещают абсолютно все пары. Тогда вероятность их присутствия 0.95. Студенты других кафедр менее ответственные, поэтому их ходит до 10 человек с вероятностью 0.8 (среди них тоже есть матёрые).

Построим графики вероятностей распределения $p(c)$.



Как видно из рисунка, вероятности довольно сильно отличаются. Вторая модель менее точная, поэтому имеет более большую дисперсию.

P.s. автор не хотел никого обидеть, просто слегка утрировал реальность.