

Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

24 апреля 2023 г.

Содержание

| | |
|--|-----------|
| 1. Теория меры | 1 |
| 1.1 Система множеств | 2 |
| 1.2 Объем и мера | 6 |
| 1.3 Продолжение мер | 9 |
| 1.4 Мера Лебега | 13 |
| 2. Интеграл Лебега | 19 |
| 2.1 Измеримые функции | 20 |
| 2.2 Последовательности измеримых функций | 23 |
| 2.3 Определение интеграла | 26 |
| 2.4 Суммируемые функции | 29 |
| 2.5 Предельный переход под знаком интеграла | 34 |
| 2.6 Произведение мер | 36 |
| 2.7 Замена переменной | 42 |
| 3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы | 46 |
| 3.1 Собственные интегралы с параметрами | 47 |
| 3.2 Несобственные интегралы с параметрами | 49 |
| 3.3 В- и Г-функции Эйлера | 54 |
| 3.4 Криволинейные интегралы | 57 |
| 3.5 Точные и замкнутые формы | 64 |
| 4. ТФКП | 70 |
| 4.1 Голоморфные функции | 71 |
| 4.2 Теоремы единственности | 78 |
| 4.3 Аналитическое продолжение | 81 |
| 4.4 Ряды Лорана | 84 |
| 4.5 Вычеты | 91 |
| 4.6 Конформные отображения | 102 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 4.7 | Производящие функции | 107 |
| 5. | Ряды Фурье | 114 |
| 5.1 | Пространства Лебега | 115 |
| 5.2 | Гильбертовы пространства | 120 |
| 5.3 | Тригонометрические ряды Фурье | 129 |

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные обозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B , такие что $A \cap B = \emptyset$

Определение 1.1. Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

Определение 1.2. E – мн-во; если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E .

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

Определение 1.3. \mathcal{A} – система подмн-в X : $A \subset 2^X$

1. (δ_0) : если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0) : если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ) : если $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ) : если $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Определение 1.4. \mathcal{A} – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Утверждение 1.1. Если \mathcal{A} – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$.

Доказательство. $A_{\alpha \in I} \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ □

Определение 1.5. \mathcal{A} – алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симметр., $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\forall A, B \in \mathcal{A}: A \cup B \in \mathcal{A}$ (по утв. 1.1 $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$; смотри [опр. алгебры](#)).

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

Определение 1.6. \mathcal{A} - σ -алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симм., $\emptyset \in \mathcal{A}$ и свойство (σ) выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множеств; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$).

Замечание. σ -алгебра \implies алгебра.

Пример. 1. 2^X - σ -алгебра.

2. $X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{A} - всевозможные [огр. подмн-ва](#) \mathbb{R}^2 и их дополнения. (\mathcal{A} – алгебра, но не σ -алгебра).

Рем: ограничение – в метрич. пр-ве это множество ограниченного диаметра ($d(x, y) := \|x - y\|$), т.е. $\sup\{d(x, y) | x, y \in X\}$ – ограничен.

3. \mathcal{A} - алгебра (σ -алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ -алгебра).

4. Пусть \mathcal{A}_α – алгебры (σ -алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ -алгебра).
5. $A, B \subset X$ ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей A, B :
- $$\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A).$$

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X , тогда существует наименьшая по включению σ -алгебра (алгебра) \mathcal{A} , такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. \mathcal{A}_α – всевозможные σ -алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon. \text{ Теперь проверим, что } \mathcal{A} \text{ – наим. по вкл. } \mathcal{A} \subset A_\alpha \forall \alpha \in I.$$

Определение 1.7. 1. Такая σ -алгебра – борелевская оболочка ϵ – $(\mathcal{B}(\epsilon))$.

2. $X = \mathbb{R}^n$; такая σ -алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская σ -алгебра (\mathcal{B}^n) .

Замечание. $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

□

Определение 1.8. R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$.

Замечание. Кольцо $+ (X \in R) \implies$ алгебра.

Определение 1.9. P – полукольцо, если

1. $\emptyset \in P$
2. $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$
3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in P$, такие что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

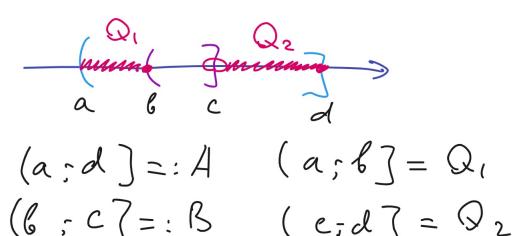
Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

Свойство 2:



miro

Свойство 3:



miro

Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}.$

Доказательство. $\supset:$ Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \emptyset \implies B_n \cap B_m = \emptyset.$

$\subset:$ Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m , такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. \square

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n . База – опр. полукольца. Переход ($n \rightarrow n+1$):

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$$

\square

Замечание. В (2) можно писать $n = \infty$.

Определение 1.10. \mathcal{P} – полукольцо подмн-ва X .

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-ва Y .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколоц.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколоц – полукольцо.

Доказательство.

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

\square

Замечание. Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

Определение 1.11. Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

Открытый параллелепипед:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_m, b_m)$$

Ячейка:

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_m, b_m]$$

Теорема 1.5. Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$$P_n \supset P_{n+1} \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$$

$$Q_n \subset Q_{n+1} \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$$



□

Обозначения: \mathcal{P}^m – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m .

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m с рациональными координатами вершин.

Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m = \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^{m-1} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^1$$

□

Теорема 1.7. $G \neq \emptyset$ – открытое множество в \mathbb{R}^m . Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объединение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатами вершинами).

Доказательство. R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$, $x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.



□

Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

G – открытое $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \supset \mathcal{B}^m$

□

1.2. Объем и мера

Определение 1.12. \mathcal{P} – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup_{k=1}^n P_k) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Определение 1.13. μ – мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu \underbrace{\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \right)}_{\text{счетная аддитивность}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\emptyset = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. \mathcal{P}^1 , $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – нестрого монотонная

(а) $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).

3. \mathcal{P}^m (m-мерные ячейки), $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$, $a := (a_1, \dots, a_m)$, $b := (b_1, \dots, b_m)$ – классический объем.

4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} a, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

μ – мера.

5. \mathcal{P} – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

μ – объем, но не мера.

Теорема 1.8. μ – объем на полукольце \mathcal{P}

1. Монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$

2. (а) Усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$
 (б) Пункт (а), но $n = \infty$

3. Полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство. 1. Очев типо.

$$2. \text{ (a)} \quad P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$\text{(b)} \quad \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$$

$$3. P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P} \quad (\mathcal{P} - \text{полукольцо}), \quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\leq \mu P'_k \leq \mu P_k \text{ (свойство 2(a))}} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

Замечание. 1. Если \mathcal{P} – кольцо и A, B ($B \subset A$) $\in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$$

$$\text{Если } \mu B \neq +\infty, \text{ то } \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$$

Теорема 1.9. \mathcal{P} – полукольцо подмн-в X , μ – объем на \mathcal{P}

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-в Y , ν – объем на \mathcal{Q}

$$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q, \text{ где } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$$

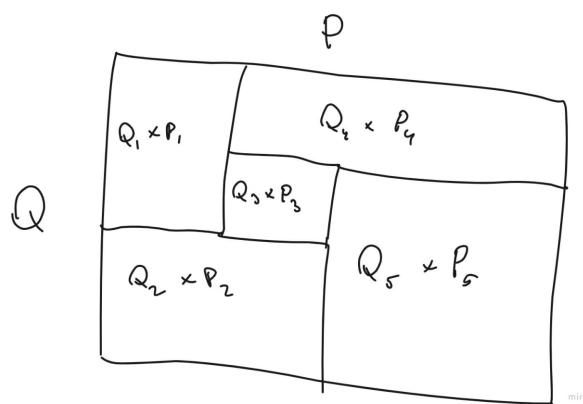
Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, тогда:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j, \text{ докажем, что } \underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$$

Общий случай.



$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.
(Rem: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ – непрерывность слева).
3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.
4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множество, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \rightarrow \mu$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

1. $\sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (*)$.
 2. $\sum_{k: t_k \in A} w_k (**)$.
 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (***)$.
1. $\mu A = \sum_{k: t_k \in A} w_k (**) \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (*)$ – т.к. $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($\forall i, j : i \neq j$), то каждое слагаемое w_k не более 1 раза попадет в $(*)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (***) \geq \sum_{k: t_k \in A}$ – нер-во верно, так как мы можем к каждому w_k из $(**)$ найти этот же w_k в $(***)$.

Итого имеем равенство:

$$(**) = (***) : \sum_{k: t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n, \text{ чтд.}$$

(От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

□

Теорема 1.10. (О счетной аддитивности меры).

μ – объем на полукольце \mathcal{P} . Тогда μ -мера \Leftrightarrow если $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P, P_n \in \mathcal{P}$, то $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$ (счетная полуаддитивность).

Доказательство. " \Leftarrow ": Пусть $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$, тогда надо д-ть, что $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$: для " \leq " – счетная полуаддитивность, для " \geq " – усиленная монот. объема.

" \Rightarrow ": $P'_n := P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n}$ – усиленная монот. объема. $\bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$. □

Следствие. Если μ – мера на σ -алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

Доказательство. $\mu A_n = 0 \implies \mu (\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$. □

Теорема 1.11. (О непрерывности меры снизу).

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} . Тогда μ – мера \Leftrightarrow если $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$, то $\mu (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ – непр. меры снизу.

Доказательство. " \Rightarrow ": $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $A_0 = \emptyset$.

B_n – дизъюнктыны: $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\mu(\bigcup A_n) = \mu \bigsqcup B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \lim \mu A_n.$$

" \Leftarrow ": Пусть $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$$A_n := \bigsqcup_{k=1}^n C_k, \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$\underbrace{\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)}_{=\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n)} = \lim \mu A_n = \lim \mu (\bigsqcup_{k=1}^n C_k) = \lim \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$$

□

Теорема 1.12. (О непрерывности меры сверху).

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} и $\mu X < +\infty$.

Тогда равносильны:

1. μ – мера
2. если $A_n \supset A_{n+1}$, то $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu A_n$
3. если $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\lim \mu A_n = 0$.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2): $A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\Rightarrow \underbrace{\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)}_{\mu(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3) \Rightarrow (1): $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$, $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, тогда $\lim \mu A_n = 0$.

$$C = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu C = \sum_{k=1}^n \mu C_k + \mu A_n.$$

□

Следствие. Если μ – мера, $A_n \supset A_{n+1}$ и существует m , такое что $\mu A_m < +\infty$, тогда $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Просто берем $X := A_m$ и пользуемся теоремой о непрерывности меры сверху.

□

Упражнение. Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

1.3. Продолжение мер

Определение 1.14. $\nu : 2^X \rightarrow [0; +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu \emptyset = 0$
2. монотонность: если $A \subset B$, $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

Замечание. 1. счетная полуаддитивность \Rightarrow конечная.

2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности) $A \subset B$, $n = 1$.

Определение 1.15. μ – полная мера на σ -алгебре \mathcal{A} , если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$.

Замечание. это означает, что $\mu A = 0$.

Определение 1.16. ν – субмера, назовем $E \subset X$ ν -измеримым, если $\forall A \subset X \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

Замечание. Достаточен знак " \geq " (следует из счетной полуаддитивности).

Теорема 1.13. Каратаедори.

Пусть ν – субмера. Тогда все ν -измеримые мн-ва образуют σ -алгебру и сужение ν на эту σ -алгебру – это полная мера.

Доказательство. Обозначим через \mathcal{A} ν -измеримые мн-ва.

1. Если $E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.

$$\forall A \subset X, \nu A \underset{?}{\geq} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$$

$A \cap E \subset E, \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$, тогда доказали вопросик сверху.

2. \mathcal{A} – симметричное семейство мн-в.

$$E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$A \cap E = A \setminus (X \setminus E)$$

$$A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$$

3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\nu(A \cap E)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \cap F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} + \nu((A \setminus E) \setminus F) \geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$$

4. \mathcal{A} – алгебра.

5. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathcal{A} \underset{?}{\implies} E \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \nu A &= \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^n E_k) \geq \underbrace{\nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies \\ &\implies \nu A \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E). \end{aligned}$$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $E \in \mathcal{A}$.

7. \mathcal{A} – σ -алгебра.

8. ν – мера на \mathcal{A} .

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \underset{?}{\implies} \nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n.$$

Докажем, что $\nu E \geq \sum_{k=1}^n \nu E_k$ (т. к. \leq уже есть из определения субмеры). Знаем, что $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu E_k$

□

Определение 1.17. μ – мера на полукольце \mathcal{P} , $A \subset X$.

$$\mu^*A := \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \wedge A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\}$$

если покрытия нет, то $+\infty$.

– внешняя мера, порожд. μ .

Замечание. 1. Можно считать, что P_k – дизъюнктны

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_n} Q_{nk}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

2. Если μ задана на σ -алгебре \mathcal{A} , то $\mu^*A = \inf \{\mu B : B \in \mathcal{A} \wedge A \subset B\}$

Теорема 1.14. Пусть μ – мера на полукольце \mathcal{P} . Тогда μ^* – субмера, совпадающая с мерой μ на полукольце \mathcal{P} .

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{P}$, хотим доказать, что $\mu A = \mu^*A$.

” \geq ”: очевидно, так как множество покрывает само себя. $\mu^*A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\}$

$$\text{”}\leq\text{”: } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \xrightarrow[\text{счетная полуаддитивность}]{} \mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \leq \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\} = \mu^*A$$

2. μ^* – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \xrightarrow[?]{} \mu^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*A + \epsilon$$

$\mu^*A_n = \inf \dots$, берем покрытие $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^*A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*A_n + \epsilon$ и $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ – устремляем ϵ к нулю.

□

Определение 1.18. Стандартное продолжение меры – конструкция, полученная следующими действиями:

1. Берем меру μ_0 на полукольце \mathcal{P} .
2. Берем μ_0^* – внешняя мера.
3. Сужаем полученную внешнюю меру на множество всех μ_0^* -измеримых множеств.

Получилась полная мера μ на σ -алгебре $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ и $\mu P = \mu_0 P$ для $P \in \mathcal{P}$.

Множества, содержащиеся в \mathcal{A} , назовем μ -измеримыми.

Теорема 1.15. Это действительно продолжение, то есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$.

Доказательство. Надо доказать, что $E \in \mathcal{P} \wedge A \subset X$, $\mu_0^*A \geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$.

Рассмотрим случаи:

1. $A \in \mathcal{P}$.

$$\mu_0^*A = \mu_0 A, \quad \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$$

$$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k, \quad Q_k \in \mathcal{P}$$

$$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k \implies \mu_0^*A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2. $A \notin \mathcal{P}$.

Если $\mu_0^* A = +\infty$, то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$. Возьмем $P_k \in \mathcal{P}$, такое что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$.

Знаем, что $\mu_0^* P_k \geq \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

$$\begin{aligned} \mu_0^* A + \epsilon &> \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)} \\ &\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E) \end{aligned}$$

□

Замечание. 1. Дальше меру и ее продолжение обозначаем как μ .

Если A – μ -измеримое множество, то $\mu A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P}\}$

2. Стандартное продолжение, примененное к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

Упражнение. Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же врешнюю меру, что и μ .

3. Можно ли распространить меру на более широкую σ -алгебру.

4.

Определение 1.19. ν – σ -конечная мера на полукольце \mathcal{P} , если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P} \wedge \mu P_n < +\infty$.

Можно ли по-другому продолжить на σ -алгебру μ -измерим. мн-в?

Если μ – σ -конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на μ -измеримых множествах.

Если μ – σ -конечная мера, то обязательно.

Теорема 1.16. μ – стандартное продолжение меры с полукольца \mathcal{P} , μ^* – соответствующая внешняя мера, $A \subset X$, $\mu^* A < +\infty$. Тогда $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$, такие что $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$, $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A \wedge \mu^* A = \mu C$.

Доказательство. $\mu^* A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P}\}$, берем покрытие с суммой $< \mu^* A + \frac{1}{n}$.

$$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A.$$

$$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$$

□

Следствие. μ – стандартное продолжение с полукольца \mathcal{P} . A – μ -измеримое мн-во и $\mu A < +\infty$. Тогда $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство. Берем $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ из теоремы. $A \subset C$, и $\mu A = \mu C$.
получаем автоматически

$e_1 := C \setminus A$, $\mu e_1 = 0$, теперь подставляем e_1 в теорему:

найдется $e_2 : e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \wedge e_2 \supset e_1 \wedge \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A$.

$C \setminus e_2 \subset B \subset C$, $\mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \mu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A$. $e = A \setminus B \implies \mu e = 0$

□

Теорема 1.17. (Единственность продолжения).

μ – стандартное продолжение с полукольца \mathcal{P} на σ -алгебру \mathcal{A} .

ν – другая мера на \mathcal{A} , совпадающая с μ на \mathcal{P} . Если μ – σ -конечная, то $\mu = \nu$.

Доказательство. Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$ (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$$\mu A = \inf \{\sum \mu P_n\} \geq \nu A.$$

Возьмем $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$: $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если $\mu P < +\infty$, то равенство вместо неравенства.

$$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \text{ т.ч. } \mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A$$

□

1.4. Мера Лебега

Теорема 1.18. Классический объем λ_m на полукольце ячеек \mathcal{P}^m – мера.

Доказательство. Так как λ_m – объем, то нам необходимо проверить счетную полуаддитивность, то есть следующую стрелочку:

$$(a; b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a^{(n)}; b^{(n)}) \xrightarrow{?} \lambda(a; b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a^{(n)}; b^{(n)}).$$

Берем $\epsilon > 0$.

Затем возьмем:

1. $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\lambda_m[a, b) < \lambda_m[a, b'] + \epsilon$.
2. $(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \supset (a^{(n)}, b^{(n)})$ и $\lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] < \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \frac{\epsilon}{2^n}$.

Тогда получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{открытое мн-во}}$ \implies существует конечное подпокрытие, то есть $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$.

Далее можно написать ячейки и вложенность сохранится:

$$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^N [\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}].$$

Теперь давайте запишем конечную полуаддитивность для объема:

$$\begin{aligned} \lambda_m[a, b') &\stackrel{\text{кон. полуаддитивность}}{\leq} \sum_{n=1}^N \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] < \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \frac{\epsilon}{2^n}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \epsilon. \end{aligned}$$

Теперь поймем, что у нас есть нер-во в другую сторону и мы можем зажать $\lambda_m[a, b')$ с двух сторон:

$$\lambda_m[a, b) - \epsilon < \lambda_m[a, b') < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \epsilon.$$

Переносим ϵ в другую сторону и устремляем к 0:

$$\lambda_m[a, b) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + 2\epsilon$$

$\lambda_m[a, b) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}]$ – получили, что хотели. □

Определение 1.20. Мера Лебега в \mathbb{R}^m (обозначение λ_m) – стандартное продолжение классического объема с \mathcal{P}^m .

σ -алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская σ -алгебра (\mathcal{L}^m).

Замечание. $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : P_k – ячейки и \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\}$.

Можно вместо $P_k \in \mathcal{P}^m$ писать $P_k \in \mathcal{P}_Q^m$.

Свойства. Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого > 0 .

Доказательство. Пусть G – открытое, $x \in G$, B – шар, накрывающий x и $B \subset G$, вписываем ячейку в шар. \square

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва $= 0$.

Доказательство. Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по ϵ), тогда $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$. \square

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

Доказательство. Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик. \square

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

Доказательство. Берем все \mathbb{R}^m и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$, тогда $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$. \square

5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$.

$A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$ и $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$, тогда $E \in \mathcal{L}^m$

Доказательство. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ и $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$.

$A \subset E \subset B$, $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$.

$\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$.

$E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathcal{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathcal{L}^m$. \square

6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \exists B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$, такое что $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$ и $E \subset B_\epsilon$.

Тогда $E \in \mathcal{L}^m$ и $\lambda_m E = 0$.

Доказательство. $A_\epsilon := \emptyset \xrightarrow[\text{свойство (5)}]{} E$ – измеримое.

$\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$. \square

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Int}E \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E$. \square

10. Если $\lambda e = 0$, то существуют кубические ячейки Q_j , такие что $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset e$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$.

Доказательство. $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \wedge \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$, нарезаем P_j на кубические ячейки. \square

11. Если $m \geq 2$, то гиперплоскость $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$ имеет нулевую меру.

Доказательство. $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$, $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Достаточно доказать, что $\lambda E_n = 0$. $E_n \subset Y := (-n, n] \times \dots \times (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$.

$\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$, так как n фиксированное, а ϵ – произвольное $\implies \lambda E_n = 0$. \square

Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединение таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12. $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$ – по предыдущему свойству.

Замечание. Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

Замечание. 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если $m \geq 2$, то пример это гиперплоскость $H_1(c)$ подходит.

Если $m = 1$, то подходит [Канторово множество](#).

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0}$$

K – несчетно, $K = \{x \in [0, 1] : \text{в троичной записи нет цифры } 1\}$, а у таких чисел есть биекция между $[0, 1]$, просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

Теорема 1.19. (Регулярность меры Лебега).

Если E – измеримое, то найдется G – открытое, такое что оно накрывает E и мера зазора $< \epsilon$, то есть $E \subset G \wedge \lambda(G \setminus E) < \epsilon$.

Доказательство. $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \text{ – ячейка и } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$.

(1): Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем покрытие, для которого $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$.

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$, хотим $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$.

Тогда $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b'_j)$ – открытое и $E \subset G$.

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть $\lambda E = +\infty$. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, такие что $\lambda E_n < +\infty$.

Возьмем G_n – открытое $\supset E_n$, такое что $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$.

$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ – открытое $G \supset E$.

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}.$$

□

Следствие. 1. Если E – измеримо, то найдется $F \subset E$ – замкнутое, такое что $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$.

Доказательство. $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$, такое что $\underbrace{\lambda(G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E))}_{=E \setminus (\mathbb{R}^m \setminus G) = E \setminus F} < \epsilon$, где $F := \mathbb{R}^m \setminus G$ – замкнутое и $F \subset E$. □

2. Если E – измеримо, то

$$\lambda E = \inf\{\lambda G : G \text{ – открытое и } G \supset E\}.$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda F : F \text{ – замкнуто и } F \subset E\}$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda K : K \text{ – компакт и } K \subset E\}$$

Доказательство. $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$$

Возьмем F – замкнутое из второго вывода и $K_n := [-n, n]^m \cap F$ – компакт. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$ и $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если $\lambda F = +\infty$, то есть K_n со сколь угодно большой мерой.

Если $\lambda F < +\infty$, то есть K_n , такие что $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$ □

3. Если E – измеримо, то существует последовательность компактов K_n , такая что компакты $K_n \subset K_{n+1}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, где $\lambda e = 0$.

Доказательство. (1) Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем $\tilde{K}_n \subset E \wedge \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n}$

$$K_n := \bigcup_{j=1}^n \tilde{K}_j \subset E, \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n} \leq \lambda K_n + \frac{1}{n}.$$

$$e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \lambda e = \lambda E - \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0.$$

(2) Пусть $\lambda E = +\infty$. Берем $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \lambda E_j < +\infty$.

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e, \text{ где } e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \wedge \lambda e = 0.$$

Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет). □

Упражнение. E – измеримое. Д-ть, что $\exists G_n$ – открытое $\supset E$, $G_n \supset G_{n+1}$, т.ч. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$, где $\lambda e = 0$.

Теорема 1.20. При сдвиге мн-ва на вектор \vec{v} измеримость сохраняется и мера не изменяется.

Доказательство. $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$, μ, λ заданы на ячейках и на них совпадают $\implies \mu = \lambda$ по единственности продолжения. □

Теорема 1.21. μ -мера на \mathcal{L}^m , т.ч.

1. μ – инвариантна относительно сдвигов.

2. μ конечна на ячейках = μ конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда $\exists k \in [0; +\infty)$, т.ч. $\mu = k \cdot \lambda$ (т.е. $\mu E = k\lambda E \forall E \in \mathcal{L}^m$)

Доказательство. $Q := (0, 1]^m$, $k := \mu Q$, $k \in [0, +\infty)$

Рассмотрим случаи:

1. $k = 1$. Надо доказать, что $\mu = \lambda$, достаточно доказать, что $\mu = \lambda$ на $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies$ достаточно доказать на $(0, \frac{1}{n}]^m$.

Q можно сложить из n^m сдвигов $(0, \frac{1}{n}]^m$.

$$\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m} \mu Q = \frac{1}{n^m} \lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m.$$

2. $k > 0$. $\nu E := \frac{1}{k} \mu E$. Тогда $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$.

3. $k = 0$. Покажем, что $\mu \equiv 0$.

$$\mu Q = 0, \mathbb{R}^m - \text{счетное объединение сдвигов } Q \implies \mu \mathbb{R}^m = 0.$$

□

Теорема 1.22. $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема. Тогда

1. Если $e \subset G$, т.ч. $\lambda e = 0$, то $\Phi(e)$ – мн-во нулевой меры.
2. Если E – измеримое, то $\Phi(E)$ – измеримое.

Замечание. Для Φ – непрер. или даже дифф. это неверно.

Доказательство. Пункт (1):

Случай:

1. $e \subset P \subset CLP \subset G$, P – ячейка $\implies \|\Phi'\|$ непрерывно на $G \supset Cl P$ – компакт $\implies \|\Phi'\| \leq M$ на $Cl P$ (норма ограничена на замыкании P).

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \|\Phi'(c)\| \cdot \|x - y\|, \text{ где } x, y \in P; c \in P \implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M \|x - y\|$$

Существуют кубические ячейки, такие что Q_j , т.ч. $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$

Рассмотрим $\Phi(Q_j)$

Пусть a_j – стороная кубика Q_j . $x, y \in Q_j \implies \|x - y\| < \sqrt{m} \cdot a_j$ (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка) $\implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M \sqrt{m} a_j$.

Зафиксируем x и меняем $y \implies \Phi(Q_j)$ содержится в шаре с центром в $\Phi(x)$ и радиусом $M \sqrt{m} a_j \implies \Phi(Q_j)$ содержится в ячейке R_j со стороной $2M \sqrt{m} a_j$.

$$\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty} (2M \sqrt{m})^m a_j^m = (2M \sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M \sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e) \text{ измеримо и } \lambda(\Phi(e)) = 0.$$

2. e – произвольное $\subset G$, $\lambda e = 0$. Представим G как $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, где P_j – ячейка $Cl P_j \subset G$.

$$e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j) – \text{мн-ва нулевой меры} \implies \lambda(\Phi(e)) = 0.$$

Пункт (2):

E – измеримое $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, $\lambda e = 0$, K_n – компакт $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$. $\lambda(\Phi(e)) = 0$ и $\Phi(K_n)$ – компакт \implies измеримое. □

Теорема 1.23. λ – инвариантна относительно движения.

Доказательство. Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что λ не меняется. Проверим поворот:

пусть $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U \text{ – линейное отображение}}, \mu, \lambda \text{ – заданы на } \mathcal{L}^m.$$

μ – инварианта относительно сдвига. $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$. μ конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда $\mu = k\lambda$.

Хотим показать, что $k = 1$. Но на единичном шаре B , $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$. \square

Теорема 1.24. (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейное, E – измеримое. Тогда $\lambda(TE) = |\det T| \cdot \lambda E$

Доказательство. $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как } T \text{ – лин. отображ.}}, \mu$ инвариантно относительно сдвига и

конечно на огр. мн-вах. $\implies \mu k \cdot \lambda$, где $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |\det T|$

 \square

Пример. неизмеримое мн-во в \mathbb{R} .

$x \sim y$ если $(x - y) \in \mathbb{Q}$ – отношение эквивалентности.

Разобьем \mathbb{R} на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку $(0, 1]$.

A – получившееся мн-во. Докажем, что A не может быть измеримым.

От противного. Если $\lambda A = 0$, то $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) = \mathbb{R}$. Но тогда $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda \mathbb{R} = 0$ – противоречие.

Если $\lambda A > 0$. $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \lambda(A + r) \leq 2 \implies$ противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

2. Интеграл Лебега

2.1. Измеримые функции

Определение 2.1. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, лебеговы мн-ва функции f:

$$E\{f \leq a\} := \{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

$$E\{f < a\} := \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$$

$$E\{f \geq a\} := \{x \in E : f(x) \geq a\}$$

$$E\{f > a\} := \{x \in E : f(x) > a\}$$

Теорема 2.1. E – измеримое, $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, тогда равносильны:

1. $E\{f \leq a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

2. $E\{f < a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

3. $E\{f \geq a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

4. $E\{f > a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leq a\}$

2. $(2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \geq a\}$

3. $(1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \leq a - \frac{1}{n}\}$

4. $(3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$

□

Определение 2.2. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\forall a \in \mathbb{R}$ все ее лебеговы мн-ва измер.

Замечание. E – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

Пример. 1. $f = \text{const}$, лебеговы множества: \emptyset, X .

2. $E \subset X$ – измеримое, $f = \mathbf{1}_E(x) = 1$, если $x \in E$, иначе 0.

Лебеговы множества: $\emptyset, X, E, X \setminus E$.

3. \mathcal{L}^m – лебеговская σ -алгебра на \mathbb{R}^m

$f \in C(\mathbb{R}^m)$ – измеримая.

$f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{измеримое}})$ – открытое \implies измеримое.

Свойства. 1. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\implies E$ – измеримое.

2. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измеримая и $E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0}$ – измеримое.

Доказательство. $E_0\{g \leq c\} = E\{ \underbrace{f \leq c}_{\text{измеримое}} \} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}$. □

3. Если f – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.

Доказательство. $E\{a \leq f \leq b\} = E\{ \underbrace{a \leq f}_{\text{измеримое}} \} \cap E\{ \underbrace{f \leq b}_{\text{измеримое}} \}$. □

4. Если f – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

Доказательство. $U \subset \mathbb{R}$ – открытое мн-во $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \implies f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}}.$ \square

5. Если f – измеримая, то $|f|$ и $-f$ – измеримы.

Доказательство. $E\{-f \leq c\} = E\{f \geq -c\}, E\{|f| \leq c\} = E\{-c \leq f \leq c\}.$ \square

6. Если $f, g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измеримы, то $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ – измеримы.

В частности, $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ – измеримы.

Доказательство. $E\{\max\{f, g\} \leq c\} = E\{f \leq c\} \cap E\{g \leq c\}$ \square

7. Если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, f|_{E_n}$ – измерима $\forall n \implies f$ – измеримая.

$f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}.$

Доказательство. $E\{f \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \{f \leq c\}.$ \square

8. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измерима, то найдется $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, такая что $f = g|_E$

Доказательство. $g(x) := 0$, если $x \notin E, g(x)$, иначе. \square

Теорема 2.2. Пусть $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – последовательность измеримых функций. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ – измеримые.
2. $\underline{\lim} f_n$ и $\overline{\lim} f_n$ – измеримые.
3. Если существуют $\lim f_n$, то он измеримый.

Доказательство. 1. $E\{\sup f_n \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leq c\}$

2. $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$ и $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$

3. Если существует $\lim f_n$, то $\lim f_n = \underline{\lim} f_n.$

\square

Теорема 2.3. Пусть $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow H \subset \mathbb{R}$ – измеримые, $\phi \in C(H)$, тогда $g : E \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$ – измеримая.

Доказательство. $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$ – открытое в $H \implies \exists G$ – открытое в \mathbb{R}^m , т.ч. $U = H \cap G$

$\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки $(\alpha, \beta]$, что $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$ – измерима, $\bigcup_{k=1}^n E\{\alpha_k < f_k \leq \beta_k\}$

\square

Следствие. Если в теореме ϕ – поточечный предел непрерывных, то g – измерима.

Доказательство. $\phi = \lim \phi_n$, $\phi_n \vec{f}$ – измер. и поточечно стремится к $\phi_0 \vec{f}$ □

Арифметические операции в \mathbb{R} :

1. Если $x \in \mathbb{R}$, то $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$ и т.д.
2. $(+\infty) + (-\infty) = 0$, $(+\infty) - (+\infty) = 0$, $(-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$, то $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, где знак $\pm : \pm = +$, $\pm : \mp = -$
4. $0 \cdot \pm\infty = 0$ и $\frac{x}{\pm\infty} = 0$, $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}$, т.е. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$.
5. Делить на 0 не умеем.

Теорема 2.4. 1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримая.

2. Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая и $\phi \in C(\mathbb{R})$, то $\phi \circ f$ – измеримая.
3. Если $f \geq 0$ – измеримая, то f^p ($p > 0$) – измеримая, $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$, то $\frac{1}{f}$ – измерима на \tilde{E} .

Доказательство. 1. $f + g$. Для каждой функции рассмотрим три множества:

$$E\{f \neq \pm\infty\}, E\{f = +\infty\}, E\{f = -\infty\}$$

$$E\{g \neq \pm\infty\}, \underbrace{E\{g = +\infty\}}_{= \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}}, E\{g = -\infty\}$$

Для конечного случая ($E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\}$) можем сослаться на предыдущую теорему, взяв в качестве непрерывной $\phi(f, g) = f + g$.

На остальных случаях тоже рассматриваем $f + g$: измеримость будет, т.к. $f + g = const$.

2. Частный случай предыдущей теоремы.

3. $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4. $f|_{\tilde{E}}$ – измерима и $\neq 0$

$$\tilde{E} \left\{ \frac{1}{f} \leq c \right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad (3)$$

□

Следствие. 1. Произведение конечного числа измер. – измер.

2. Натуральная степень измер. функции – измер.
3. Линейная комбинация измер. функций – измер.

Теорема 2.5. $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое, $f \in C(E)$. Тогда f – измер. относительно меры Лебега.

Доказательство. $U := f^{-1}(-\infty, c)$ – открытое мн-во в $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, т.ч. $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$ (E измеримо по условию, а G измеримо в σ -алгебре) □

Определение 2.3. Измеримая функция – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение X – разбиение X на конечное число измеримых множеств, таких что на каждом множестве простая функция константна.

Следствие. 1. Если X разбито на конечное число измеримых мн-в и f постоянна (то есть сужение на каждом кусочке X это какая-та константа) на каждом из них, то f – простая.
2. Если f и g – простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

Доказательство. $X = \bigsqcup_{k=1}^m A_k = \bigsqcup_{j=1}^n B_j \implies X = \bigsqcup_{k=1}^m \bigsqcup_{j=1}^n (A_k \cap B_j)$ – допустимое для f и g . □

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.
4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.
5. \max и \min конечного числа простых функций – простая функция.

Теорема 2.6. (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – неотрицательная измеримая функция, тогда \exists последовательность простых функций ϕ_1, ϕ_2, \dots , такие что $\phi_i \leq \phi_{i+1}$: $\forall i$ в каждой точке и $\lim \phi_n = f$. Более того, если f – ограничена сверху, то можно выбрать ϕ_n так, что $\phi_n \rightrightarrows f$ на X .

Доказательство. $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ при $k = 0, \dots, (n^2 - 1)$ и $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$.

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k$, $A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$ – измеримое мн-во.

ϕ_n на A_k равно $\frac{k}{n} \implies 0 \leq \phi_n(x) \leq f(x) \quad \forall x$ и $f(x) \leq \phi_n(x) + \frac{1}{n}$ при $x \notin A_{n^2}$.

$\phi_n(x) \rightarrow f(x)$:

1. если $f(x) = +\infty$, то $x \in A_{n^2}^{(n)}$ $\forall n \implies \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$
2. если $f(x) \neq +\infty$, то $x \notin A_{n^2}^{(n)}$ при больших $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \leq \phi_n(x) \leq f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое n , а только степени двойки, тогда нам нужно взять $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ (тут должна быть картинка)

Равномерность: если f ограничена, начиная с некоторого момента A_{n^2} пусто \implies все $x \notin A_{n^2} \implies \forall x \in E : f(x) - \frac{1}{n} < \phi_n(x) \leq f(x) \implies |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \implies$ есть равномерная сходимость. □

2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание. $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Поточечная сходимость: $f_n \rightarrow f$, $\forall x \in E : f_n(x) \rightarrow f(x)$

Равномерная сходимость: $f_n \rightrightarrows f$ на E , $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

Определение 2.4. $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые.

f_n сходится к f **почти везде**, если $\exists e \subset E$, $\mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$

Замечание. Обозначение: $\mathcal{L}(E, \mu) = \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} - \text{измеримые}, \mu E\{f = \pm\infty\} = 0\}$

Пусть $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, f_n сходится к f почти везде.

$\exists e \subset E, \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$

Определение 2.5. $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, f_n сходится по мере μ к f , если $\forall \varepsilon > 0$, $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, $f_n \Rightarrow_\mu f$

Замечание. Зависимость: равномерная \implies (поточечная \implies почти везде) | (сходимость по мере).

Равномерная \implies поточечная – знаем.

Поточечная \implies почти везде – у нас уже есть сходимость во всех точках, поэтому для “почти везде” ничего не надо выкидывать.

Равномерная \implies сходимость по мере – начиная с некоторого момента $E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$ будет пустым множеством по определению равномерной сходимости.

Утверждение 2.7. 1. Если f_n сходится к f п.в. (почти везде) и f_n сходится к g п.в., то $f = g$ (за исключением мн-ва нулевой меры)

2. Если $f_n \Rightarrow_\mu f$ и $f_n \Rightarrow_\mu g$, то $f = g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. 1. Берем $e \subset E, \mu e = 0$ и $\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in E \setminus e$

$\tilde{e} \subset E, \mu \tilde{e} = 0$ и $\lim f_n(x) = g(x), \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

Тогда на $E \setminus (e \cup \tilde{e})$ $\lim f_n(x) = g(x)$ и $\lim f_n(x) = f(x) \implies f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$

2. $\mu E\{f \neq g\} \underset{?}{=} 0, E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}.$

Достаточно доказать, что $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$.

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0 ?} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

Знаем, что $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \rightarrow 0$

$\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ вложены по убыванию

$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \dots = \lim_N \left(\mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \right) \leq \lim_N (\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) = 0$

□

Теорема 2.8. Лебега.

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Пусть $\mu E < +\infty$ и f_n сходится к f почти везде.

Тогда f_n сходится к f по мере μ .

Доказательство. Найдется $e \subset E, \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Выкинем e и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\}, \mu A_n \rightarrow 0$.

1. Частный случай ($f_n \searrow 0$): $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$.

$$\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mu \emptyset = 0.$$

Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies 0 < f_n(x) > \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \implies$ таких x не существует.

2. Общий случай: $g_n(x) := \sup_{k \geq n} \{|f_k(x) - f(x)|\}$. $g_n(x) \searrow$, т.к. множество уменьшается.

$$\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k \geq n} \{ \dots \} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$$

$$\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\rightarrow 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

$$E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

□

Замечание. 1. Условие $\mu E < +\infty$ существенно.

$$E = \mathbb{R}, \mu = \lambda, f_n = \mathbf{1}_{[n, +\infty)} \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \equiv 0$$

$$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\rightarrow 0.$$

2. Обратное неверно. Более того, может быть сходимость по мере и расходимость во всех точках вообще: $E = [0, 1], \mu = \lambda$

$$\mathbf{1}_{[0,1]} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2})} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{3})} \mathbf{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} \mathbf{1}_{[\frac{2}{3}, 1)} - \text{ни для какого аргумента нет предела: } [0, \frac{1}{n}) [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \dots [\frac{n-1}{n}, 1)$$

Теорема 2.9. Рисса.

$f, f_n \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Если $f_n \Rightarrow_{\mu} f$, то существует подпоследовательность f_{n_k} , т.ч. f_{n_k} сходится к f почти везде.

Доказательство. $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Выберем n_k так, что $n_k > n_{k-1}$, и $\underbrace{\mu E\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}}_{=:A_k} < \frac{1}{2^k}$

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

$B_1 \supset B_2 \supset \dots \implies \underbrace{\mu B_n}_{\mu B_n \rightarrow 0} = 0$, проверим, что если $x \notin B$, то $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, где $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

$x \notin B \implies \exists m$, т.ч. $x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$

$$\implies x \notin A_k \forall k \geq m \implies \forall k \geq m \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\rightarrow k \rightarrow 0 0} \leq \frac{1}{k}$$

□

Следствие. Если $f_n \leq g$ и $f_n \Rightarrow_{\mu} f$, то $f \leq g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. Выберем f_{n_k} сходится к f почти везде. Пусть e – искл. мн-во $\mu e = 0$.

$$\lim \underbrace{f_{n_k}}_{\leq g(x)} = f(x) : \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in E \setminus e$$

□

Теорема 2.10. Фреше.

Если $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ измерима относительно λ_m (мера Лебега), то $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, т.ч. f_n сходится к f почти везде.

Теорема 2.11. Егорова.

Пусть $\mu E < +\infty$, $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Если f_n сходится к f почти везде, то найдется $e \subset E$, $\mu e < \epsilon$, т.ч. $f_n \rightharpoonup f$ на $E \setminus e$.

Теорема 2.12. Лузина.

$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримо, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измерима (относительно λ_m – мера Лебега). Тогда найдется $e \subset E$, $\mu e < \epsilon$, т.ч. $f|_{E \setminus e}$ – непрерывна.

Фреше + Егоров \implies Лузин:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ – измеримое } \underbrace{\implies}_{\text{Фреше}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m), f_n \text{ сходится к } f \text{ почти везде} \underbrace{\implies}_{\text{Егоров}} \exists e : \lambda_m e < \epsilon,$$

т.ч. $f_n \underbrace{\rightharpoonup}_{\mathbb{R}^m \setminus e} f$, равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

2.3. Определение интеграла

Лемма. Пусть $f \geq 0$ простая функция A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_m – допустимые разбиения.

a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_m значения f на соответственных мн-вах.

Тогда $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j)$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

(1) $\underbrace{=}_{?}$ (2).

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если $A_k \cap B_j \neq \emptyset$, то $a_k = b_j$, если $A_k \cap B_j = \emptyset$, то $\mu(\dots) = 0$.

Условие $f \geq 0$ важно, т.к. в ином случае могли бы получиться ∞ разных знаков и равенство зависело бы от порядка сложения. \square

Определение 2.6. $f \geq 0$ простая, $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k)$, где A_1, \dots, A_n – допустимые разбиения ($\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$), a_1, \dots, a_n – соответст. значения.

Свойства. 1. $\int_E c d\mu = c \mu E$, $c \geq 0$

2. Если f, g – простые и $0 \leq f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

3. Если $f, g \geq 0$ – простые, то $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

4. Если $c \geq 0$ и $f \geq 0$ – простая, то $\int_E c f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$

Доказательство. $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$ – общее допустимое разбиение, a_k, b_k – значения на A_k .

3. $\int_E (f + g) d\mu = \sum (a_k + b_k) \mu(E \cap A_k) = \sum a_k \mu(A_k \cap E) + \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

2. $\int_E f d\mu = \sum a_k \mu(A_k \cap E) \leq \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E g d\mu$ \square

Определение 2.7. Интеграл от неотриц. измеримой ф-ции $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$.

$\int_E f d\mu := \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая и } 0 \leq \phi \leq f \}$

Определение 2.8. Интеграл от измеримой функции

$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$ (если тут $+\infty - (+\infty)$, то интеграл не определен)

Замечание. Новое определение на простых функциях совпадает со старым.

Доказательство. $f \geq 0$ – простая \Rightarrow

- (1): $\phi = f$ подходит (новое \geq старое, т.к. берем супремум).
- (2): $\phi \leq f \Rightarrow \int_E \phi d\mu \leq \int_E f d\mu$ (sup \leq старое, т.к. задали $\phi : 0 \leq \phi \leq f$).
- (3): В определении для произвольных измеримых: $\int_E (f)_- d\mu = 0$

□

Свойства. 1. Если $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

2. Если $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$

3. f – измеримая $\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_X \mathbf{1}_E f d\mu$

Доказательство. Проверим для f_{\pm} :

$\int_E f_+ d\mu = \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq f_+ \} = \sup \{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq \mathbf{1}_E f_+ \} = \int_X \mathbf{1}_E f_+ d\mu$ (в одном случае сужаем ϕ на множество E , в другом – дополняем нулями на $X \setminus E$) □

4. Если $f \geq 0$ – измеримая, $A \subset B$, то $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

Доказательство. $\int_A f d\mu = \int_X \mathbf{1}_A f d\mu \underset{\substack{\leq \\ \text{т.к. } \mathbf{1}_A f \leq \mathbf{1}_B f}}{\leq} \int_X \mathbf{1}_B f d\mu = \int_B f d\mu$. □

Упражнение. Доказать, что $\int_{[1;+\infty)} \frac{\sin x}{x} d\lambda_1$ не определен.

Теорема 2.13. Беппо Леви.

Пусть $f_n \geq 0$ – измеримые функции, $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, последовательность поточечно возрастающая $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. $f(x) := \lim f_n(x)$ – поточечный предел.

Тогда $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. (1): $f_n \leq f \Rightarrow \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(2): $f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$

(1) и (2) $\Rightarrow \exists L := \lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

Осталось проверить, что $L \geq \int_E f d\mu$ (можно считать, что $L < +\infty$ т.е. конечна, иначе утверждение очевидно).

$\int_E f d\mu = \sup \{ \int_E \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ – простая} \}$

Достаточно доказать, что $L \geq \int_E \phi d\mu$ для ϕ – простая и $0 \leq \phi \leq f$.

Возьмем $0 < \theta < 1$ и докажем, что $L \geq \int_E \theta \phi d\mu$:

$E_n := E\{f_n \geq \theta \phi\}, f_n \nearrow \Rightarrow E_n \subset E_{n+1}$. Покажем, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Пусть $x \in E$:

1. если $\phi(x) = 0$, то $\forall n : x \in E_n$

2. если $\phi(x) > 0$, то $\lim f_n(x) = f(x) \geq \phi(x) > \theta \phi(x) \underset{\substack{\Rightarrow \\ \text{при больших } n}}{\Rightarrow} f_n(x) > \theta \phi(x) \underset{\substack{\Rightarrow \\ \text{при больших } n}}{\Rightarrow} x \in E_n$

Посмотрим на $\underbrace{\int_E f_n d\mu}_{(*)} \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \underbrace{\int_{E_n} \theta \phi d\mu}_{(**)}$.

Переходим к пределу $n \rightarrow \infty$: $\underbrace{L}_{\text{получили из } (*)} \geq \underbrace{\int_E \theta \phi d\mu}_{\text{это нужно понять для } (**)}$

Осталось понять, что $\underbrace{\int_{E_n} \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m a_k \mu(E_n \cap A_k)} \rightarrow \underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \mu(E \cap A_k)}.$

Поймем, что $\mu(E_n \cap A_k) \rightarrow \mu(E \cap A_k)$ – непрерывность меры снизу, $E_n \cap A_k \subset E_{n+1} \cap A_k$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_n \cap A_k) = E \cap A_k$. \square

Свойства. Продолжаем писать свойства:

5. $f, g \geq 0$ – измеримые $\Rightarrow \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ – аддитивность.
6. $f \geq 0, \alpha \geq 0 \Rightarrow \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$ – однородность.
7. $\alpha, \beta \geq 0, f, g \geq 0$ – измеримые, тогда $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

Доказательство. 5. $f \geq 0$ измеримая $\Rightarrow \exists 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ – простые, причем $\phi_n \rightarrow f$ поточечно.

$g \geq 0$ измеримая $\Rightarrow \exists 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots$ – причем $\psi_n \rightarrow g$ поточечно.

$\Rightarrow 0 \leq \phi_1 + \psi_1 \leq \dots$ простые и $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g$.

$$\underbrace{\int_E (\phi_n + \psi_n) d\mu}_{\rightarrow \int_E (f+g) d\mu} = \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E f d\mu} + \underbrace{\int_E \psi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E g d\mu}$$

по Леви

\square

Свойства. Продолжаем свойства.

8. Аддитивность по мн-ву. Если $A \cap B = \emptyset$, $f \geq 0$ измеримая, то $\underbrace{\int_{A \cup B} f d\mu}_{(*)} = \underbrace{\int_A f d\mu}_{(**)} + \underbrace{\int_B f d\mu}_{(***)}$

Доказательство. $(*) = \int_X \mathbb{1}_{A \cup B} f d\mu$

$$(**) = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu$$

$$(***) = \int_X \mathbb{1}_B f d\mu$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f$$

\square

9. Если $\mu E > 0$ и $f > 0$ измери., то $\int_E f d\mu > 0$.

Доказательство. $E_n := E\{f \geq \frac{1}{n}\}, E_n \subset E_{n+1}, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$\Rightarrow \lim \mu E_n = \mu E > 0 \Rightarrow \mu E_n > 0$ для больших n

$\Rightarrow \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu E_n > 0$. \square

Пример. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное, $w_1, w_2, \dots \geq 0$.

$\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$ – мера.

$\int_E f d\mu = \sum_{k: t_k \in E} w_k = (*)$.

Пусть $f = \mathbb{1}_A$, тогда $\int_E f d\mu = \int_E \mathbb{1}_A d\mu = \mu(E \cap A) = \sum_{k: t_k \in E \cap A} w_k = \sum_{k: t_k \in E} \mathbb{1}(t_k) w_k = (*)$.

\Rightarrow равенство есть и на простых функциях

Пусть $f \geq 0$ измерим. $\phi_n = f \cdot \mathbb{1}_{\{t_1, t_2, \dots, t_n\}}$, $0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq f$.

$$\lim \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{= \lim \sum_{k < n: t_k \in E} f(t_k) w_k = \sum_{k: t_k \in E} f(t_k) w_k} = \int_E \underbrace{\lim \phi_n}_{\leq f} d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Проверим, что $\underbrace{\int_E f d\mu}_{\sup\{\dots\}} \leq \sum_{f(t_k)w_k}$. Берем $0 \leq \underbrace{\phi}_{\text{простая}} \leq f$ и проверяем, что $\underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k: t_k \in E} \phi(t_k) w_k} \leq \sum_{k: t_k \in E} f(t_k) w_k$

Замечание. $T = \mathbb{N}$, $w_n \equiv 1$.

$$\mu A = \#\{A \cap \mathbb{N}\}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Определение 2.9. $P(x)$ – св-во, зависящее от точки. $P(x)$ выполняется **почти везде**, если на E (для **почти всех** точек из E), если $\exists e \subset E$, $\mu e = 0$ и $P(x)$ выполнено $\forall x \in E \setminus e$.

Замечание. P_1, P_2, \dots последовательность св-в, каждое из которых верно почти везде на E , то они все вместе верны почти везде на E .

Теорема 2.14. (Неравенство Чебышева).

$$f \geq 0 \text{ измер., } t, p > 0. \text{ Тогда } \mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \cdot \int_E f^p d\mu.$$

Доказательство. $\int_E f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} t^p d\mu = t^p \cdot \mu E\{f \geq t\}$. □

Свойства. Свойства интеграла, связанные с понятием "почти везде".

1. Если $\int_E |f| d\mu < +\infty$, то f почти везде конечна.
2. Если $\int_E |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ почти везде.
3. Если $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$, то $\int_A f d\mu$ и $\int_B f d\mu$ либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.
4. Если $f = g$ почти везде на E , тогда $\int_E f$ и $\int_E g$ либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.

Доказательство. 1. $E\{|f| = +\infty\} \subset E\{|f| \geq t\}$

$$\mu E\{|f| = +\infty\} \leq \mu E\{|f| \geq t\} \leq \underbrace{\frac{\int_E |f| d\mu}{t}}_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$$

2. Если $\mu E\{f > 0\} > 0$, то $\int_E f d\mu = \int_{E\{f > 0\}} f d\mu > 0$ (св-во. 9 из уже доказанных выше).

$$3. \int_B f_{\pm} d\mu = \int_{B \setminus A} f_{\pm} d\mu + \int_A f_{\pm} d\mu = \int_A f_{\pm} d\mu$$

$$4. A := E\{f = g\}, \mu(E \setminus A) = 0 \quad \int_E f d\mu = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_E g d\mu$$
□

2.4. Суммируемые функции

Определение 2.10. f – суммируема на мн-ве E , если f измерима и $\int_E f_{\pm} d\mu < +\infty$.

Замечание. В этом случае $\int_E f d\mu$ конечен.

Свойства. 1. f – суммируема на $E \Leftrightarrow \int_E |f|d\mu < +\infty$ и f – измерима.

В этом случае $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f|d\mu$

Доказательство. $0 \leq f_{\pm} \leq |f| = f_+ + f_-$

” \Rightarrow ”: $\int_E |f|d\mu = \int_E f_+d\mu + \int_E f_-d\mu < +\infty$

” \Leftarrow ”: $\int_E f_{\pm}d\mu \leq \int_E |f|d\mu < +\infty$

$$\text{Нер-во: } -\int_E |f|d\mu = -\int_E f_+d\mu - \int_E f_-d\mu \leq \underbrace{\int_E f_+d\mu}_{\int_E f d\mu} - \underbrace{\int_E f_-d\mu}_{\int_E f d\mu} \leq \int_E f_+d\mu + \int_E f_-d\mu = \int_E |f|d\mu$$

□

2. f суммируема на $E \implies f$ почти везде конечна на E .

3. Если $A \subset B$ и f суммируема на B , то f суммируема на A .

Доказательство. $\int_A |f|d\mu \leq \int_B |f|d\mu < +\infty$

□

4. Ограниченнная функция суммируема на мн-ве конечной меры.

Доказательство. $|f| \leq M \implies \int_E |f|d\mu \leq \int_E M d\mu = M \cdot \mu E < +\infty$

□

5. Если f и g суммируемы и $f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

Доказательство. $f_+ - f_- = f \leq g = g_+ - g_- \implies 0 \leq f_+ + g_- \leq f_- + g_+ \implies \int_E f_+d\mu + \int_E g_-d\mu \leq \int_E f_-d\mu + \int_E g_+d\mu$ – переносим слагаемые в нужные стороны и чтд.

□

6. f и g – суммируемы $\implies f + g$ суммируема и $\int_E (f + g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

Доказательство. $|f + g| \leq |f| + |g| \implies f + g$ суммируема.

$h := f + g$, $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$

$\implies h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \geq 0$

$\implies \int_E h_+d\mu + \int_E f_-d\mu + \int_E g_-d\mu = \int_E f_+d\mu + \int_E g_+d\mu + \int_E h_-d\mu$ – далее просто переносим нужные слагаемые через равно.

□

7. f – суммируема, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f$ суммируема и $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

Доказательство. $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \implies |\alpha f|$ – суммируема.

Если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$ и $(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$ и $\int_E (\alpha f)_{\pm}d\mu = \alpha \cdot \int_E f_{\pm}d\mu$

Если $\alpha = -1$, то $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$ $\implies \int_E (-f)d\mu = \int_E f_- - \int_E f_+ = -\int_E f d\mu$

□

8. Линейность.

Если f, g – суммируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ – суммируема и $\int_E (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

9. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$. Тогда f – суммируема на $E \Leftrightarrow f$ – суммируема на $E_k : \forall k = 1, \dots, n$. А если f суммируема на $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$, то $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$

Доказательство. $\mathbb{1}_{E_k}|f| \leq \mathbb{1}_E|f| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}|f| \implies \int_{E_k} |f| d\mu \leq \sum_{k=1}^n \int_{E_k} |f| d\mu$.

Если $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, то $\mathbb{1}_E = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} \implies \mathbb{1}_E f_\pm = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} f_\pm \implies \int_E f_\pm d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_\pm d\mu$ \square

10. Интегрирование по сумме мер. Пусть μ_1 и μ_2 – меры, заданные на одной σ -алгебре, $\mu := \mu_1 + \mu_2$.

Если $f \geq 0$ измерима, то $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2 (*)$.

f – суммируема относительно $\mu \Leftrightarrow f$ – суммируема относительно μ_1 и μ_2 и в этом случае есть равенство (*).

Доказательство. (*) для $f \geq 0$:

$$(*) \text{ есть для простых } \phi \geq 0, \int_E \phi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\mu(E \cap A_k)}_{\mu_1(E \cap A_k) + \mu_2(E \cap A_k)} = \int_E \phi d\mu_1 + \int_E \phi d\mu_2.$$

$f \geq 0$ – измеримая \implies возьмем $0 \leq \phi \leq \dots \leq \phi_n$ – простые, $\phi_n \rightarrow f$.

$\int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n d\mu_1 + \int_E \phi_n d\mu_2$ по т. Леви получаем (предельный переход) $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$ \square

Определение 2.11. Интеграл от комплекснозначной функции $f : E \rightarrow \mathbb{C}$.

$Re(f)$ и $Im(f)$ – измеримые функции.

$$\int_E f d\mu := \int_E Re(f) d\mu + i \cdot \int_E Im(f) d\mu$$

Замечание. Все св-ва, связанные с равенствами, сохраняются:

Доказательство. $Re(if) = -Im(f), Im(if) = Re(f)$

$$\int_E if d\mu = i \int_E f d\mu$$

Замечание. $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $|\int_E f d\mu| = e^{i\alpha} \cdot \int_E f d\mu = \int_E e^{i\alpha} f d\mu =$

$$= \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \underbrace{\int_E Im(e^{i\alpha} f) d\mu}_{=0, \text{ т.к. слева от равенства вещественное число}} = \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu \leq \int_E |Re(e^{i\alpha} f)| d\mu \leq \int_E |e^{i\alpha}| d\mu =$$

$$\int_E |f| d\mu.$$

$$|Re(f)|, |Im(f)| \leq |f|$$

$$|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

Теорема 2.15. (О счетной аддитивности интеграла).

Пусть $f \geq 0$ – измеримая и $E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n$.

$$\text{Тогда } \int_E f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu$$

Доказательство. $\sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f d\mu = \lim \int_E \left(\underbrace{\mathbb{1}_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f}_{:= g_n} d\mu \right) =$

$$\lim \int_E g_n d\mu \underset{\text{т. Леви}}{=} \int_E f d\mu$$

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots, \lim g_n = f, g_n(x) = f(x) \text{ если } x \in \bigsqcup_{k=1}^n E_k.$$

Следствие. 1. Если $f \geq 0$ – измеримая, то $\nu E := \int_E f d\mu$ – мера, заданная на той же σ -алгебре, что и μ .

2. Если $f \geq 0$ и $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
3. Если f – суммируема и $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
4. Если f – суммируема на E , $\epsilon > 0$, то $\exists A \subset E : \mu A < +\infty \wedge \int_{E \setminus A} |f| d\mu < \epsilon$

Доказательство. 1. $\nu \emptyset = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$ + счетная аддитивность из теоремы: $\int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$ все конечно, поэтому можно вычесть.

2. $\nu A := \int_A f d\mu$ – мера $\implies \nu A$ непрерывна снизу.

$$\underbrace{\nu E}_{\int_E f d\mu} = \underbrace{\lim}_{\lim \int_{E_n} f d\mu} \nu E_n$$

3. $\nu_{\pm} A := \int_A f_{\pm} d\mu$, $\nu_{\pm} A$ – конечные меры $\implies \nu_{\pm}$ – непрерывна сверху.
 $\implies \int_E f_{\pm} d\mu = \nu_{\pm} E = \lim \nu_{\pm} E_n = \lim \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$

4. $E_n := E\{|f| \leq \frac{1}{n}\} \implies E_n \supset E_{n+1}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\} \implies \lim \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0 \implies \exists n : \epsilon > \int_{E_n} |f| d\mu \geq \left| \int_{E_n} f d\mu \right|$$

$$A := E \setminus E_n = E\{|f| > \frac{1}{n}\}$$

$$\mu A \leq \underbrace{\frac{\int_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}}}_{\text{Чебышев}} < +\infty$$

□

Теорема 2.16. (Абсолютная непрерывность интеграла).

f – суммируема на E , тогда $\forall \epsilon : \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall e$ – измер. $\mu e < \delta \implies |\int_e f d\mu| < \epsilon$

Доказательство. $\int_E |f| d\mu < +\infty \implies \exists \underbrace{\phi}_{\leq f}$ – неотрицательная простая, т.ч.

$$\int_E |f| d\mu < \int_E \phi d\mu + \epsilon.$$

Пусть C – наибольшее значение ϕ . Возьмем $\delta = \frac{\epsilon}{C}$.

Если $\mu e < \delta$, то $\int_e |f| d\mu < \underbrace{\int_e \phi d\mu}_{\leq \int_e C d\mu + \epsilon \leq \epsilon} + \epsilon$ – это следует из того, что $|f| - \phi \geq 0$,

$$\int_e (|f| - \phi) d\mu \leq \int_e (|f| - \phi) d\mu < \epsilon.$$

□

Следствие. Если f суммируема на E и $\mu A_n \rightarrow 0$, $A_n \subset E$, то $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$.

Доказательство. Берем $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ для него из теоремы, тогда если $\mu A_n < \delta$, то $|\int_{A_n} f d\mu| < \epsilon$

□

Определение 2.12. Пусть μ и ν меры на одной σ -алгебре \mathcal{A} . Если существует измеримая функция $w \geq 0$, т.ч. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu A = \int_A w d\mu$.

Тогда w плотность меры ν относительно меры μ .

Замечание. Если w существует, то ν обладает свойством: если $\mu e = 0$, то $\nu e = 0$.

Теорема 2.17. Пусть f, g – суммируемые функции. Если $\forall A$ – измерим. $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, то $f = g$ почти везде.

Доказательство. $h := f - g$, $E_+ := E\{f \geq g\}$, $E_- := E\{f < g\}$

$$\int_E |h| d\mu = \underbrace{\int_{E_+} h d\mu}_{=0} - \underbrace{\int_{E_-} h d\mu}_{=0} = 0 \implies h = 0 \text{ почти везде.} \quad \square$$

Теорема 2.18. (Единственность плотности).

Если ν – σ -конечная мера (на σ -алгебре \mathcal{A}) и w – плотность ν относительно μ , то w – единственна с точностью до **почти везде**.

Доказательство. Так как наша мера – σ -конечна, то все пространство представляется как $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$, т.ч. $\nu X_n < +\infty \implies$ т.к. w – плотность $\nu|_{X_n}$ относительно $\mu|_{X_n} \implies w$ – суммируема на X_n .

Пусть w_1, w_2 – плотности ν относительно μ на сужении одного кусочка, тогда по определению плотности верно, что $\forall A \in \mathcal{A} : \nu A = \int_A w_1 d\mu = \int_A w_2 d\mu \implies w_1 = w_2$ почти везде.
по пред. теореме

Ну если две плотности на каждом из кусочков отличаются на множество нулевой меры, тогда и на объединении кусочков тоже будут отличаться на множество нулевой меры, тогда плотность единственна почти везде и на всей σ -алгебре. \square

Определение 2.13. ν, μ – меры, заданные на одной σ -алгебре. ν абсолютно непрерывна относительно μ , если $\forall e$ – измер., т.ч. $\mu e = 0 \implies \nu e = 0$.

Обозначение $\nu \prec \mu$ или $\nu \ll \mu$.

Теорема 2.19. (Радона-Никодима).

Пусть меры μ и ν заданы на одной σ -алгебре. Тогда $\nu \prec \mu \Leftrightarrow$ существует плотность меры ν относительно μ .

Теорема 2.20. w – плотность ν относительно μ . Тогда

1. Если $f \geq 0$, то $\int_E f d\nu = \int_E f w d\mu : (*)$
2. fw – суммируема, относительно $\mu \Leftrightarrow f$ – суммируема относительно ν , и в этом случае есть формула $(*)$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbb{1}_A$, тогда $\int_E f d\nu = \nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} w d\mu = \int_E \mathbb{1}_A w d\mu$. По линейности $(*)$ верна для неотрицательных простых.

Пусть $f \geq 0$ – измер. Тогда найдутся простые $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ ($0 \leq w\phi_1 \leq w\phi_2 \leq \dots$) и

$$\phi_n \rightarrow f \text{ поточечно. } \underbrace{\int_E \phi_n d\nu}_{\rightarrow \int_E f d\nu} = \underbrace{\int_E \phi_n w d\mu}_{\rightarrow \int_E f w d\mu} - \text{по т. Леви.}$$

2. $\int_E |f| d\nu = \int_E |f| w d\mu \implies f$ – суммируема относительно $\nu \Leftrightarrow fw$ суммируема относительно μ
 $\int_E f_{\pm} d\nu = \int_E f_{\pm} w d\mu$ и вычитаем.

\square

Свойства. Неравенство Гельдера.

Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $\int_E |fg| d\mu \leq (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_E |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} = A \cdot B$

Доказательство. Пусть $f, g \geq 0$ (просто чтобы не писать модули), $A^p := \int_E f^p d\mu$, $B^q := \int_E g^q d\mu$.

Случай $A = 0 \implies f^p = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде $\implies fg = 0$ почти везде $\implies \int_E fgd\mu = 0$.

Можно считать, что $A, B > 0$.

Случай $A = +\infty$. Очевидно.

Можно считать $0 < A, B < +\infty$.

$$u := \frac{f}{A}, \quad v := \frac{g}{B}$$

$\int_E u^p d\mu = 1 = \int_E v^q d\mu$, $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ верно (Упражнение, ну конечно. Фиксируем одну из переменных как параметр и исследуем нер-во по второй переменной).

Интегрируем полученное нер-во: $\frac{1}{AB} \int_E fgd\mu = \int_E uv d\mu \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int_E u^p d\mu}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int_E v^q d\mu}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \square$

Свойства. Неравенство Минковского.

$$p \geq 1, \text{ тогда } (\int_E |f+g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_E |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Можно считать, что $f, g \geq 0$, также можно считать, что $\int_E f^p d\mu$ и $\int_E g^p d\mu < +\infty$.

Проверим, что $\int_E (f+g)^p d\mu < +\infty$:

$$f+g \leq 2 \max\{f, g\} \implies (f+g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p (f^p + g^p)$$

$$\underbrace{\int_E (f+g)^p d\mu}_{=:C^p} \leq 2^p (\int_E f^p d\mu + \int_E g^p d\mu) < +\infty \text{ -- показали, что левая часть конечна.}$$

Можем считать, что $0 < C < +\infty$:

$$C^p = \int_E (f+g)^p d\mu = \int_E (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu = \int_E f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f+g)^{p-1} d\mu$$

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q = \frac{p}{p-1}$, $(p-1)q = p$, тогда:

$$\int_E f \cdot (f+g)^{p-1} d\mu \underset{\substack{\text{нер-во Гельдера} \\ \text{напомним}}} \leq (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_E ((f+g)^{p-1})^q d\mu)^{\frac{1}{q}} = (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{(C^p)^{\frac{1}{q}}}_{=:C^{p-1}} \leq (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} C^{p-1} +$$

$$(\int_E g^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{p-1} \text{ -- сокращаем на } C^{p-1}. \quad \square$$

2.5. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 2.21. Леви.

$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ и $f = \lim f_n$, тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Следствие. Пусть $u_n \geq 0$. Тогда $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n d\mu$

Доказательство. $s_n := \sum_{k=1}^n u_k$, $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$ и $s_n \rightarrow s := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$\int_E s d\mu = \lim \int_E s_n d\mu = \lim \int_E \sum_{k=1}^n u_k d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k d\mu \quad \square$$

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится при почти всех $x \in E$.

Доказательство. $+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ -- суммируем.

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ почти везде конечна $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ абс. сходится при почти всех $x \in E \implies$ сходится при почти всех $x \in E$. \square

Лемма. Фату.

Если $f_n \geq 0$, то $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. $\underline{\lim} f_n = \liminf_{=:g_n} \underbrace{\{f_n, f_{n+1}, \dots\}}_{=:g_n}$

$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ и $g_n \rightarrow \underline{\lim} f_n$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{\text{теорема Леви}} \quad \overbrace{\lim_{\int_E g_n d\mu}}^{=:\underline{\lim} \int_E g_n d\mu} = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \\ = \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \end{array}$$

$$g_n \leq f_n \implies \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \implies \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

□

Замечание. Равенства может и не быть:

$$\mu = \lambda, E = \mathbb{R}, f_n = \mathbf{1}_{[n, +\infty)}$$

$$\int_E f_n d\mu = +\infty, \text{ но } f_n \rightarrow 0$$

Из этих двух условие следует, что $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$

Следствие. (Усиленный вариант теоремы Леви).

Пусть $0 \leq f_n \leq f$ и $f = \lim f_n$. Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

Доказательство. $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \implies \int_E f d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

□

Теорема 2.22. Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть $f = \lim f_n$ и $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$ — суммируема на E .

Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$, более того $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

Доказательство. $g_n := 2F - |f_n - f| \leq 2F$ и $g_n \rightarrow 2F$.

$$g_n \geq 2F - |f_n| - |f| \geq 0.$$

Тогда предел $\lim \int_E g_n d\mu = 2 \int_E F d\mu$

$$\int_E g_n d\mu = \int_E 2F d\mu - \int_E |f_n - f| d\mu$$

Из двух строчек выше делаем вывод, что

$$\begin{aligned} & \int_E |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \\ & \geq |\int_E (f_n - f) d\mu| = |\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu| \end{aligned}$$

□

Замечание. 1. Без суммир. мажоранты неверно:

$$f_n = n \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow f = \begin{cases} +\infty, & \text{в точке } 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0, \quad \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1, \quad F := \sup f_n, \quad F(x) = n \text{ при } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

2. Поточечную сходимость можно заменить на сходимость почти везде, можно заменить и на сходимость по мере.

Теорема 2.23. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Доказательство. $a = x_0$

$$b = x_n$$

$$S_* := \sum_{k=1}^n \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$S^* := \sum_{k=1}^n \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Если мелкость дробления $\rightarrow 0$, то $S_*, S^* \rightarrow \int_a^b f$.

$$g_*(x) := \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$g^*(x) := \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\int_{[a,b]} g_* d\lambda = S_*, \quad \int_{[a,b]} g^* d\lambda = S^*$$

$g_* \leq f \leq g^*$ почти везде.

$$\underbrace{S_*}_{\rightarrow \int_a^b f} = \int_{[a,b]} g_* d\lambda \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_{[a,b]} g^* d\lambda = \underbrace{S^*}_{\rightarrow \int_a^b f} \implies \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f$$

□

Замечание. На самом деле это верно для любой функции, интегрируемой по Риману на $[a, b]$.

Теорема 2.24. (Критерий Лебега интегрированности по Риману).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f – интегрируема по Риману \Leftrightarrow множество точек разрыва f имеет нулевую меру Лебега.

Пример. Возьмем $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \mathbf{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$.

$f = 0$ почти везде $\implies \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$, но точки разрыва – весь отрезок $[0, 1]$.

2.6. Произведение мер

Определение 2.14. (X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с σ -конечными мерами.

$$\mathcal{P} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu A < +\infty \wedge \nu B < +\infty\}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B < +\infty, \quad A \times B \text{ – измеримый прямоугольник.}$$

Теорема 2.25. \mathcal{P} – полукольцо, а m_0 – σ -конечная мера на нем.

Доказательство. $\{A \in \mathcal{A} : \mu A < +\infty\}$ и $\{B \in \mathcal{B} : \nu B < +\infty\}$ – полукольца (проверяем определение полукольца для обоих множеств).

\mathcal{P} – декартово произведение полуколец, то есть тоже полукольцо (это по теореме, которая была выше).

Проверяем, что m_0 – мера. Пусть $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$.

$$\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) = \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \times \mathbf{1}_{B_k}(y)$$

$$\int_Y \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(Y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \mathbf{1}_{B_k}(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

$$\int_X \mathbf{1}_A(x) \nu B d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \cdot \nu B_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_0(A_k \times B_k)$$

$$\sigma\text{-конечность } m_0: X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_j, \quad Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j, \quad \mu X_j < +\infty, \quad \nu Y_j < +\infty$$

$$X \times Y = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} X_j \times Y_k$$

$$m_0(X_j \times Y_k) < +\infty.$$

□

Определение 2.15. (X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с σ -конечными мерами. Произведения меры μ и ν – стандартное продолжение меры m_0 .

Обозначение: $\mu \times \nu$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – σ -алгебра, на которую продолжили. $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

Свойства. 1. Декартово произведение измеримых – измеримо.

2. Если $\mu e = 0$, то $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$.

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A_n < +\infty$

$$B \in \mathcal{B} \implies B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \nu B_n < +\infty$$

$$A \times B = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \underbrace{A_k \times B_k}_{\in \mathcal{P}} - \text{измер.}$$

2. $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \nu Y_k < +\infty$

$$e \times Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} e \times Y_k, (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu e \cdot \nu Y_k = 0$$

□

Замечание. Обозначения: $C \subset X \times Y$, $x \in X$.

$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$ – сечения мн-ва C .

$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$

Следствие. 1. $(\bigcup_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcup_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

2. $(\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcap_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

Определение 2.16. Пусть функция f задана на мн-ве E , за исключением некоторого мн-ва e , $\mu e = 0$. Если f измерима на $E \setminus e$, то f измерима на E в **широком смысле**.

Определение 2.17. Система множеств – **монотонный класс**, если

1. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

2. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

Теорема 2.26. Если монотонный класс содержит алгебру \mathcal{A} , то он содержит и $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Докажем, что минимальный монотонный класс \mathcal{M} , содержащий \mathcal{A} – σ -алгебра.

Рассмотрим $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий \mathcal{A} .

Если $B \in \mathcal{A}$, то $B \cap A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ и $A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \implies \mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$

$E_1 \subset E_2 \subset \dots, E_n \in \mathcal{M}_A \implies E_n \cap A \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{E_n} \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \in \mathcal{M}$

Следовательно $\mathcal{M}_A = \mathcal{M} \implies \forall B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \setminus B \in \mathcal{M}$

$\implies \mathcal{M}$ – симметричная структура.

Рассмотрим $B \in \mathcal{M}$: $\mathcal{N}_B := \{C \in \mathcal{M} : B \cap C \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий \mathcal{A} (проверка по аналогии с предыдущим случаем).

$\implies \mathcal{N}_B = \mathcal{M} \implies \forall C \in \mathcal{M}, B \cap C \in \mathcal{M} \implies \mathcal{M}$ – алгебра.

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$

$\implies \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{=A} \in \mathcal{M}$, так как \mathcal{M} – монотонный класс.

□

Теорема 2.27. Принцип Кавальieri.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $m = \mu \times \nu$. Тогда

1. $C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \nu C_x$ измеримая в широком смысле.
3. $mC = \int_X \nu C_x d\mu(x)$

Доказательство. Меры конечны и $C \in$

$$\underbrace{\mathcal{B}}_{\text{борелевская оболочка (см. определение 1.7)}} (\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

\mathcal{E} – система мн-в, в $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, такая что, если $E \in \mathcal{E}$, то $E_x \in \mathcal{B} \forall x \in X$ и $\phi(x) = \nu E_x$ – измеримая функция.

Шаг 1. $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

а. \mathcal{E} – измеримая система.

$$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}, \quad \nu(Y \setminus E_x) = \nu Y - \phi(x) – \text{измеримая.}$$

б. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcup E_n \in \mathcal{E}$.

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(E_n)_x}_{\in \mathcal{B}}$$

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) = \lim \nu(E_n)_x – \text{измеримая функция.}$$

в. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$ (можно переходить к дополнениям).

г. (б) + (в) $\implies \mathcal{E}$ – монотонный класс.

д. $\mathcal{E} \supset$ измеримый прямоугольник $E = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \implies E_x = \begin{cases} \mathcal{B}, & \text{если } x \in \mathcal{A} \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$,

$$\nu E_x = \begin{cases} 0 \\ \nu \mathcal{B} \end{cases} – \text{измеримая функция.}$$

е. Если E и $\tilde{E} \in \mathcal{E}$, то $E \sqcup \tilde{E} \in \mathcal{E}$.

$$(E \sqcup \tilde{E})_x = \underbrace{E_x}_{\in \mathcal{B}} \sqcup \underbrace{\tilde{E}_x}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$$\nu((E \sqcup \tilde{E})_x) = \nu E_x + \nu \tilde{E}_x – \text{сумма измеримых функций.}$$

ж. \mathcal{E} содержит дизъюнктивное объединение всевозможных изм. прямоугольников $\implies \mathcal{E}$ содержит кольцо $\implies \mathcal{E}$ содержит алгебру $\implies \mathcal{E} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

по т. о монотонном классе

Мы сейчас проверили, что если $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, то первые два пункта теоремы выполнены. Давайте для этой эе упрощенной ситуации проверять 3-ий пункт.

Шаг 2. Формула (3) для $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Рассмотрим $\int_X \nu E_x d\mu(x) =: \tilde{m}E$ – хотим сказать, что это мера на $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Пусть E_n – дизъюнктны $\implies \tilde{m}(\bigsqcup E_n) = \int_X \nu(\bigsqcup (E_n)_x) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}E_n$.

$m = \tilde{m}$ на измеримых прямоугольниках \implies они совпадают. Получили, что хотели.

Шаг 3. $mC = 0, C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies$ найдется $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, т.ч. $C \subset \tilde{C}$ и $m\tilde{C} = 0$.

$$0 = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) \implies \nu \tilde{C}_x = 0 \text{ при почти всех } x \in X.$$

$C_x \subset \tilde{C}_x \implies C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$ и $\nu C_x = 0$ при почти всех $x \in X$.

$$mC = 0 = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

Шаг 4. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e, \tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}), me = 0$.

$$C_x = \underbrace{\tilde{C}_x}_{\text{изм. } \forall x \in X} \sqcup \underbrace{e_x}_{\text{изм. при почти всех } x}, \nu C_x = \nu \tilde{C}_x + \nu e_x = \nu \tilde{C}_x.$$

$$mC = m\tilde{C} + me = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

Шаг 5. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n, Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \mu X_n < +\infty$.

$$X \times Y = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} X_n \times Y_k$$

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, C_{nk} = C \cap X_n \times Y_k \implies C_{nk}$ удовлетворяет теореме.

$$C_x = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} (C_{nk})_x$$

$$mC = \sum_{n,k=1}^{\infty} mC_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \int_X \nu(C_{nk})_x d\mu(x) = \int \sum \cdots = \int_X \nu C_x d\mu. \quad \square$$

Замечание. 1. Нужна лишь полнота ν .

2. Измеримость всех C_x не гарантирует измеримость C .

Доказательство. $\mathbb{R}^2, E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, $E \times [0, 1]$ \square

3. Среди C_x могут попадаться неизмеримые.

Доказательство. $\mathbb{R}^2, E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримые, $\{0\} \times E$ \square

4. Хочется интегрировать не по X , а по проекции, то есть $P := \{x \in X : C_x \neq \emptyset\}$. Но P может быть неизмеримо.

Доказательство. $E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, решение проблемы, это взять $\tilde{P} := \{x \in X : \nu C_x > 0\}$ – измеримое. \square

Определение 2.18. (X, \mathcal{A}, μ) – пр-во с σ -конечной мерой.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0, E \in \mathcal{A}, m = \mu \times \underbrace{\lambda_1}_{\text{одномерная мера Лебега}}.$$

График функции над мн-вом E :

$$\Gamma_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Подграфик функции над мн-вом E :

$$\mathcal{P}_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Лемма. (Лемма 1).

Если f – измеримая, то $m\Gamma_f = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu X < +\infty$. Возьмем $\epsilon > 0$ и $A_n := X\{\epsilon \cdot n \leq f < \epsilon \cdot (n+1)\}$

$$\Gamma_f \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) =: A.$$

$$mA = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) = \epsilon \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu A_n = \epsilon \cdot \mu X – сколь угодно маленькое.$$

Пусть μ – σ -конечна. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n, \mu X_n < +\infty$,

$$\Gamma_f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_f(X_n) – нулевой меры. \quad \square$$

Лемма. (Лемма 2).

$f \geq 0$ – измерима в широком смысле $\implies \mathcal{P}_f$ – измеримое мн-во.

Доказательство. 1. Пусть f – простая $\implies f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k} \implies \mathcal{P}_f = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \times [0, a_k]$ – измеримое.

2. Пусть f – измеримая $\implies 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \rightarrow f$ – простые ϕ_i , $\mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$.

$$\mathcal{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f.$$

Берем $x \in X$.

Если

(a) $f(x) = +\infty$, то $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$, над точкой x , $[0, \phi_n(x)]$ их объединение будет луч.

(b) $f(x) < +\infty$, то $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$, $\bigcup [0, \phi_n(x)] \supset [0, f(x)]$

□

Теорема 2.28. (О мере подграфика).

(X, \mathcal{A}, μ) – пространство с σ -конечной мерой, $f \geq 0$, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $m = \mu \times \lambda_1$.

Тогда f – измеримая в широком смысле $\Leftrightarrow \mathcal{P}_f$ – измер. и в этом случае $\int_X f d\mu = m \mathcal{P}_f$.

Доказательство. " \Rightarrow ": Лемма 2.

" \Leftarrow ": принцип Кавальieri для \mathcal{P}_f :

$$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{при } f(x) = +\infty \\ [0, f(x)), & \text{при } f(x) < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(x) := \lambda_1((\mathcal{P}_f)_x) = \underbrace{f(x)}_{\text{измеримая в широком смысле}}$$

$$m \mathcal{P}_f = \int_X \underbrace{\lambda((\mathcal{P}_f)_x)}_{=f(x)} d\mu(x) - \text{получили, что хотели.}$$

□

Теорема 2.29. Тонелли.

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримая, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – измерима, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – измерима относительно ν .
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbf{1}_C$ (характеристическая функция мн-ва C), тогда $f_x(y) = \mathbf{1}_{C_x}(y)$.

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y \mathbf{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu C_x$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_{X \times Y} \mathbf{1}_C dm = mC = \int_X \nu C_x d\mu(x) = \int_X \phi d\mu.$$

2. Пусть $f \geq 0$ – простая, тогда $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$

3. Пусть $f \geq 0$ – измеримая, тогда берем последовательность простых функций $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $\lim f_n = f$.

$(f_n)_x(y)$ – измерим. при почти всех x .

$(f_n)_x \nearrow f_x$ – измерим. при почти всех x .

$\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$ – измерим. и $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$

$\lim \phi_n(x) = \int_Y \lim f_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \phi(x)$ – измерим.

$$\int_{X \times Y} f dm \underset{\substack{\leftarrow \\ \text{т. Леви}}}{=} \int_{X \times Y} f_n dm = \int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu.$$

□

Теорема 2.30. Фубини.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, суммируема, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – суммируема, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – суммируема относительно ν .
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$

Доказательство. $(*) : \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty$ – следует из суммируемости f .

$$\begin{aligned} (*) \underset{\substack{= \\ \text{т. Тонелли}}}{=} & \int_X \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{:=\alpha(x)} d\mu(x) \\ \implies \alpha(x) = & \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{\implies f_x \text{ – суммируема при почти всех } x \in X} \quad \text{– конечна при почти всех } x \in X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_X |\phi| d\mu &= \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty \\ \implies \phi &\text{ – суммируема.} \end{aligned}$$

$$\int_{X \times Y} f_\pm dm = \int_X \left(\int_Y f_\pm(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ и вычтем } f = f_+ - f_-.$$

□

Следствие. Если $f \geq 0$ и измеримая или f – суммируемая, то

$$(**): \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Следствие. $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по μ , $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по ν .

Тогда $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ суммируема по $m = \mu \times \nu$ и $\int_{X \times Y} h dm = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$.

Доказательство. $\int_{X \times Y} |h| dm \underset{\substack{= \\ \text{т. Тонелли}}}{=} \int_X \left(\int_Y |f(x)| |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) =$

$$= \int_X |f(x)| \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y |g| d\nu \cdot \int_X |f| d\mu < +\infty \implies h \text{ – суммируема.}$$

По Фубини пишем все без модулей.

□

Замечание. 1. Суммируемости $f_x(y) = f(x, y)$, $f^y(x) = f(x, y)$, $\phi(x) = \int_X f_x d\nu$, $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$ не хватает для суммируемости f по мере m .

2. Без суммируемости f по m равенства $(**)$ может не быть.

Пример. \mathbb{R}^2 , $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $g(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

Первообразные:

$$1. \int f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$2. \int g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Подставляем:

$$1. \int_{[-1,1]} f(x,y)dx = -\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{y^2+1}$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)dxdy = -2 \int_{[-1,1]} \frac{dy}{y^2+1} = -2 \cdot \arctan(y) \Big|_{-1}^1 = -\pi$$

$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)dydx = \pi$ – не совпали из-за отсутствия суммируемости.

$$2. \int_{[-1,1]} g(x,y)dx = -\frac{y}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

Теорема 2.31. (X, \mathcal{A}, μ) – пространство с σ -конечной мерой, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измерим.

$$\int_X |f|d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t\}dt \quad (\text{в скобках записана функция распределения}).$$

Доказательство. $m = \mu \times \lambda_1$.

$$\int_X |f|d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} = \int_{[0,+\infty]} \left(\int_X \underbrace{\mathbf{1}_{\mathcal{P}_{|f|}}(x,t)}_{=1 \Leftrightarrow |f(x)| \geq t} d\mu(x) \right) d\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty]} \mu X\{|f| \geq t\}d\lambda_1(t).$$

□

Следствие. 1. В условии теоремы $\int_X |f|d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\}dt$

Доказательство. $g(t) := \mu X\{|f| \geq t\}$ – монотонно возраст., не более чем счетное число точек разрыва.

$$\mu X\{|f| > t\} = \lim \mu X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \frac{1}{n}) = \lim_{s \rightarrow t+} g(s) = g(t) \text{ при почти всех } t.$$

$$X\{|f| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\}$$

□

$$2. \int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \mu X\{|f| \geq t\} dt \text{ при } p > 0.$$

Доказательство. $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t^{\frac{1}{p}}\} dt = \int_0^{+\infty} g(t^{\frac{1}{p}}) dt = \int_0^{+\infty} ps^{p-1} g(s) ds$

$$\text{Где } t = s^p, s = t^{\frac{1}{p}}, dt = ps^{p-1}ds.$$

□

2.7. Замена переменной

Определение 2.19. Ω и $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые.

$$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

Φ – диффеоморфизм, если

1. Φ – биекция.
2. Φ – непр. дифф.
3. Φ^{-1} – непр. дифф.

Замечание. $Id = \Phi^{-1} \circ \Phi \implies x = (\Phi(x)^{-1})' \cdot (\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \implies 1 = \det(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \det(\Phi'(x)).$

Замечание. Обозначение.

$$J_\Phi := \det \Phi'$$

якобиан = определитель матрицы Якоби.

Теорема 2.32. (о замене переменной).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ диффеоморфизм. $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ открыты, $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$ измеримая. Тогда $\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| d\lambda_m$.

Такая же формула есть и для суммир. функций f .

Частные случаи:

1. Сдвиг: $\Phi(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}^m$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x+a) d\lambda_m(x)$$

2. $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ обратимое линейное отображение.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(Lx) |det L| d\lambda_m(x)$$

3. Гомотетия: $Lx = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = c^m \cdot \int_{\mathbb{R}^m} f(c \cdot x) d\lambda_m(x).$$

Лемма. (о расщеплении).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые, $a \in \Omega$, $1 \leq k \leq m - 1$.

Тогда существует U_a и $\Phi_2 : U_a \rightarrow \mathbb{R}_m$, $\Phi_1 : \Phi_2(U_a) \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$.

Φ_1 – остался на месте k координат, а Φ_2 – оставляет на месте $m - k$ координат.

Доказательство. $x, u \in \mathbb{R}^m$, $y, v \in \mathbb{R}^{m-k}$, $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \underbrace{\phi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, \underbrace{\psi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}} \end{pmatrix}$.

$$\Phi_1(x, y) = (x, \underbrace{f(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}})$$

$$\Phi_2(x, y) = (\underbrace{g(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, y)$$

$$\Phi_1(\Phi_2(x, y)) = (*)$$

$$(*) = \Phi_1(g(x, y), y) = (g(x, y), f(g(x, y), y))$$

$$(*) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \implies g(x, y) := \phi(x, y)$$

$$\implies f(u, v) = \psi(\Phi_2^{-1}(u, v))$$

$$f(\phi_2(x, y)) = f(\phi(x, y), y) = \psi(x, y)$$

Нужна локальная обратимость Φ_2 , а для этого нужна обратимость $\Phi'_2(a)$, то есть $det(\Phi'_2(a)) \neq 0$.

$$\Phi_2(x, y) = (\phi(x, y), y), \quad \Phi'_2(x, y) = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad det(\Phi'_2) = det(\Phi_x).$$

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{pmatrix}$$

блок $k \times k$, ненулевой минор найдется. □

Следствие. $\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $a \in \Omega$, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые.

Тогда существует U_a , т.ч. $\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_m$, где Φ_j – диффеоморфизм, оставляющие на месте все координаты, кроме одной (но их перенумерующие).

Доказательство. Индукция + предыдущая лемма. □

Теорема 2.33. Линделефа.

$A \subset \mathbb{R}^m$, A – покрыто открытыми мн-вами.

Тогда из него можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

Доказательство. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} \left(\underbrace{G_\alpha}_{\text{открытое}} \right)$.

Берем $a \in A$, рисуем картинку, которую кто-нибудь *обязательно* добавит.

Пусть U_a – шарик с рациональным центром и рациональным радиусом. $a \in U_a$ и U_a содержатся в каком-то элементе покрытия. Очевидно, что $a \in U_a \subset G_{\alpha_i}$, тогда выкинем все лишние G_α , а остальных останется не более чем счетное кол-во (так как U_a с рациональным центром и радиусом, а таких счетное кол-во), при этом они покрывают A . \square

Теорема 2.34. (об изменении меры множества при диффеоморфизме).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые, $A \subset \Omega$ – измеримое.

Тогда $\lambda_m \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m$.

Замечание. Если теорема верна для конкретного Φ и произвольного A , то для того же Φ верна формула замена переменной.

Формула замены переменной:

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda_m.$$

Доказательство. Замечания.

$$f = \mathbf{1}_{\Phi(A)}, \quad A \subset \Omega.$$

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{1}_{\Phi(A)} d\lambda_m = \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A |J_\Phi| d\lambda_m.$$

$$\mathbf{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x)) = \mathbf{1}_A.$$

Нужно проверить для простых, а дальше для измеримых, в общем, все раскручивается (так говорил Храбров...). \square

Доказательство. Теоремы.

Шаг 1. Пусть $\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Если т. верна для каждого G_α , то она верна и для Ω .

Выбираем нбчс подпокрытие $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

$$\lambda_m \Phi(A \cap G_k) = \int_{A \cap G_k} |J_\Phi| d\lambda_m \text{ и просуммируем } A \cap \left(G_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j \right).$$

Шаг 2. Если т. верна для диффеоморфизмов Φ и Ψ , то она верна и для $\Psi \circ \Phi$.

$$\lambda_m \Psi(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} |J_\Psi| d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \underbrace{\mathbf{1}_{\Phi(A)} \cdot |J_\Psi|}_{=: f} d\lambda_m =$$

$$= \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{1}_{\Phi(A)} \circ \Phi}_{= \mathbf{1}_A} \cdot |J_\Psi \circ \Phi| \cdot |J_\Phi| d\lambda_m =$$

$$= \int_A |J_\Psi(\Phi(x))| |J_\Phi(x)| d\lambda_m(x).$$

$$\det(\Psi'(\Phi(x))) \cdot \det(\Phi'(x)) = \det(\Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)) = \det(\Psi \circ \Phi)' = J_{\Psi \circ \Phi}.$$

Шаг 3. $m = 1$. $\Phi(x)$ – строго монот. и непр. дифф.

$$\nu A := \lambda_1(\phi(A)) – \text{мера.}$$

$$\mu A := \int_A |\phi'| d\lambda_1 - \text{мера.}$$

Хотим проверить, что $\nu = \mu$, тогда проверим, что они совпадают на ячейках $(a, b]$ (а по единственности продолжения получим, что нужно).

$$\lambda(\phi(a, b]) = \int_{(a,b]} |\phi'| d\lambda.$$

Эти значения стремятся к тем, что выше, соответственно. $\lambda(\phi[a + \frac{1}{n}, b]) = \int_{[a+\frac{1}{n}, b]} |\phi'| d\lambda$

Эти равны тем, что выше, соответственно. $\phi(b) - \phi(a + \frac{1}{n}) = \int_{a+\frac{1}{n}}^b \phi' d\lambda$, если ϕ – возрастает, $\phi[a + \frac{1}{n}, b] = [\phi(a + \frac{1}{n}), \phi(b)]$

Шаг 4. Φ оставляет на месте $m - 1$ коорд. $x = (\underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{m-1}}, \underbrace{t}_{\in \mathbb{R}})$.

$$\Phi(y, t) = (y, \phi(y, t)).$$

$$\lambda_m \Phi(A) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\lambda_1 \Phi(A))_y d\lambda_{m-1}(y) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \lambda_1(\phi(y, A_y)) d\lambda_{m-1}(y) \underset{(*)}{=}.$$

$t \in (\Phi(A))_y \Leftrightarrow (y, t) \in \Phi(A) \Leftrightarrow \exists (y', t') \in A, \text{ т.ч. } (y, t) = \Phi(y', t') = (y', \phi(y', t')) \Leftrightarrow \exists t' :$
 $\underbrace{(y, t') \in A}_{t' \in A_y} \text{ и } \underbrace{(y, t) = (y, \phi(y, t'))}_{t = \phi(y, t')}$

$$\underset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{A_y} |\phi'(y, t)| d\lambda_1(t) d\lambda_{m-1}(y) \right) = \int_A |J_\Phi| \lambda_m.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \phi'_y & \phi'_t \end{pmatrix}$$

Дальше были какие-то умные слова. Я не успел записать...

□

Пример. Полярная замена. \mathbb{R}^2 .

$$(r, \phi) \rightarrow (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

$$r \in (0, +\infty)$$

$$\phi \in (0, 2\pi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2 = \int_{[0, 2\pi] \times [0, +\infty)} (f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot r) dr d\phi.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\det = r$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx, \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Полярная замена:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\phi dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi \cdot (-e^{-t})|_0^{+\infty} = \pi.$$

$$t = r^2, \quad df = 2r dr$$

3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы

3.1. Собственные интегралы с параметрами

Утверждение 3.1. (X, \mathcal{A}, μ) – пр-во с мерой, T – метрическое пр-во, $f : X \times T \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, $\forall t \in T$, $E_t \in \mathcal{A}$, $f(\cdot, t)$ – измеримая.

$$F(t) := \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x).$$

1. t_0 – предельная точка.

$$\forall x \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{f(x, t)}} \dots \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}}$$

2. $f(x, t)$ непрер. в точке t_0 , $\forall x \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F$ непрер. в t_0 .

3. $f(x, t)$ дифф. по t , $\forall x \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F$ дифф., какая формула для производной?

4. Если ν – мера на T . $\int_T F(t) d\nu(t) = \int_T \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x) d\nu(t) = \int_T \int_X \mathbf{1}_{E_t}(x) \cdot f(x, t) d\mu(x) d\nu(t)$

Теорема 3.2. t_0 – предельная точка T . $f(\cdot, t)$ – суммируема $\forall t \in T$, $g(x) := \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$.

Локальное условие Лебега:

Пусть найдется окр-ть U_{t_0} и суммир. ф-я $\Phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, т.ч. $|f(x, t)| \leq \Phi(x) \forall t \in U_{t_0}$.

Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} (\int_X f(x, t) d\mu(x)) = \int_X g(x) d\mu(x)$.

Доказательство. Проверяем по Гейне. Берем $t_n \rightarrow t_0$, $f_n(x) := f(x, t_n)$, $\Phi(x) \geq |f(x, t_n)| = |f_n(x)|$ при больших n .

$$\underset{\text{т. Лебега}}{\overbrace{\Rightarrow}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=g(x)} d\mu(x)$$

□

Определение 3.1. $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, t_0 – предельная точка T , $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, $\forall t \in T : \rho_T(t, t_0) < \delta$, $\forall x \in X : |f(x, t) - g(x)| < \epsilon$.

Замечание. $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x, t) - g(x)| \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}} 0$

Следствие. Если $\mu X < +\infty$, $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x)$, то $\int_X f(x, t) d\mu(x) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}} \int_X g d\mu$ и g – суммируемая ф-я.

Доказательство. При t близких к t_0 : $|f(x, t) - g(x)| \leq 1 \implies$ берем t_1 , для которого верно $|f(x, t_1) - g(x)| \leq 1 \implies |g(x)| \leq 1 + |f(x, t_1)|$ – суммируема \implies при t близких к t_0 : $|f(x, t)| \leq 1 + |g(x)|$ – суммируема.

□

Замечание. Условие $\mu X < +\infty$ существенно.

$$X = [0, +\infty), \mu = \lambda_1, f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]}(x) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} 0,$$

$$\int_{[0, +\infty)} f_n d\lambda_1 = 1.$$

Следствие. $f(x, t)$ непрер. в точке t_0 , $\forall x \in X$ и существует суммир. $\Phi(x)$, т.ч. $|f(x, t)| \leq \Phi(x)$ при t близких к t_0 , $\forall x \in X$.

Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ непрер. в точке t_0 .

Доказательство. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ и подставляем в теорему. \square

Лемма. Декартово произведение компактов – компакт.

$(X, \rho), (Y, d)$ – метрические про-ва. $A \subset X, B \subset Y$ – компакты.

Тогда $A \times B$ – компакт в $(X \times Y, r)$, $r((x, y), (x', y')) = \rho(x, x') + d(y, y')$

Доказательство. Проверяем секвенциальную компактность.

$x_n \in A, y_n \in B, (x_n, y_n)$

хотим выбрать сх-ся подпосл. Выбираем x_{n_k} , т.ч. она сходится, а затем из y_{n_k} подпосл $y_{n_{k_j}}$, которая сх-ся.

Тогда $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ сх-ся покоординатно \Rightarrow сх-ся по метрике r . \square

Теорема 3.3. $\mu X < +\infty, X$ и T – компакты, $f \in C(X \times T)$. Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(T)$.

Доказательство. f – непр-на на компакте \Rightarrow ограничена $\Rightarrow |f(x, t)| \leq M$ – суммир. мажоранта. \square

Следствие. Если $\mu X < +\infty, X$ – компакт, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ открытое, $f \in C(X \times \Omega)$.

Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(\Omega)$.

Доказательство. Берем $a \in \Omega$. Хотим проверить непрер. в точке a .

Возьмем $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$ – компакт $\Rightarrow f \in C(X \times \overline{B}_r(a))$
 $\Rightarrow F \in C(\overline{B}_r(a)) \Rightarrow F$ непрер. в точке a . \square

Теорема 3.4. $T \subset \mathbb{R}$ промежуток, $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}, f'_t(x, t)$ существ. $\forall x \in X, \forall t \in T$ и $f'_t(x, t)$ удовлетворяет **локальным условиям Лебега** в точке t_0 .

Тогда F – дифф. в точке t_0 и $F'(t_0) = \int_X f'_t(x, t_0) d\mu(x)$.

Доказательство. $\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \int_X \underbrace{\frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h}}_{=:g(x, h)} d\mu(x)$.

Нужно локальное условие Лебега для $g(x, h)$.

$$f(x, t_0 + h) - f(x, t_0) = h \cdot f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$$

$$g(x, h) = f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$$

Знаем, что $\exists U_{t_0}$, т.ч. $|f'_t(x, t)| \leq \Phi(x)$ – суммир. $\forall x, \forall t \in U_{t_0}$.

Рассмотрим $\|h\| < \epsilon$, т.ч. $t_0 + h \in U_{t_0}$

$\Rightarrow t_0 + \theta_h \cdot h \in U_{t_0} \Rightarrow |f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)| = |g(x, h)| \leq \Phi(x) \Rightarrow$ можно переходить к пределу под знаком интеграла, а предел $\lim_{h \rightarrow 0} g(x, h) = f'_t(x, t_0)$. \square

Следствие. $T \subset \mathbb{R}$ – отрезок, X – компакт, $\mu X < +\infty, f, f'_t \in C(X \times T)$.

Тогда $F \in C^1(T)$ и $F'(t) = \int_X f'_t(x, t) d\mu(x)$.

Доказательство. f'_t – непр. на компакте \Rightarrow ограничена $\Rightarrow |f'_t(x, t)| \leq M$ – сумм. мажоранта. \square

Теорема 3.5. Формула Лейбница.

$f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_t \rightarrow \mathbb{R}$, $f, f'_t \in C([a, b] \times [c, d])$, $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ непр. дифф.

$$F(t) := \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx.$$

Тогда F – дифф. и $F'(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x, t) dx + f(\psi(t), t) \cdot \psi'(t) - f(\phi(t), t) \cdot \phi'(t)$.

Доказательство. $\Phi(\alpha, \beta, t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx$.

$$\frac{d\Phi}{d\beta} = f(\beta, t) \text{ – непр. по условию}$$

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = -f(\alpha, t) \text{ – непр.}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} f'_t(x, t) dx \text{ – непр.}$$

Так как все частные производные непр., то Φ – дифф.

$$F(t) = \Phi(\phi(t), \psi(t), t) \implies F'(t) = \frac{d\Phi}{d\alpha}\phi'(t) + \frac{d\Phi}{d\beta}\psi'(t) + \frac{d\Phi}{dt}.$$

Пример. $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(tx) dx$

Так как есть локальное условие Лебега (на самом деле $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx < +\infty$):

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx) \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \sin(tx) \cdot d(e^{-x^2}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \sin(tx) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t \cos tx e^{-x^2} dx. \\ F'(t) &= -\frac{1}{2}tF(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{F'}{F}}_{= (\ln F)'} &= -\frac{t}{2} \implies \ln F = -\frac{t^2}{4} + C_0 \implies F(t) = C \cdot e^{\frac{-t^2}{4}}. \\ F(t)e^{\frac{t^2}{4}} &= C. \end{aligned}$$

Более строго:

$$\left(F(t)e^{\frac{t^2}{4}} \right)' = F'e^{\frac{t^2}{4}} + F \cdot \underbrace{\frac{t}{2}e^{\frac{t^2}{4}}}_{=0} = e^{\frac{t^2}{4}} \cdot (F' + \frac{t}{2} \cdot F) = 0.$$

Хотим узнать константу:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\frac{-t^2}{4}}.$$

3.2. Несобственные интегралы с параметрами

$$F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx : \forall t \in T \text{ интеграл сх-ся.}$$

Определение 3.2. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ – равномерно сх-ся, если $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : |\int_b^{+\infty} f(x, t) dx| < \epsilon$

Замечание. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx$.

$$\int_a^{+\infty} \dots \text{ – равном сх-ся} \Leftrightarrow F_b \underset{b \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} F \text{ равном. по } t \in T.$$

Доказательство. $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F(t)|}_{= - \int_b^{+\infty} f(x, t) dx} < \epsilon$

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx, t > 0$

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx} dx = -\frac{e^{-tx}}{t} \Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-bt}}{t}.$$

1. $t \geq t_0 > 0$:

$$\frac{e^{-bt}}{t} \leq \frac{e^{-bt_0}}{t_0} < \epsilon$$

2. $t > 0$:

$$\frac{e^{-bt}}{t} \underset{t \rightarrow 0+}{\curvearrowright} +\infty \implies \text{нет равномерной сх-ти.}$$

Теорема 3.6. Критерий Коши.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ равн. сх-ся} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

Доказательство. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равн. сх-ся \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow F_b \rightrightarrows F \text{ (где } F_b(t) = \int_a^b f(x, t) dx, F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx)$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F_c(t)|}_{\int_b^c f(x, t) dx} < \epsilon. \quad \square$$

Следствие. $f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная.

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ сх-ся } \forall t \in (c, d) \text{ и расх-ся при } t = c \text{ или } t = d.$$

Тогда сходимость неравномерная.

Доказательство. Пусть $\int_a^{+\infty}$ сх-ся равномерно \implies :

по Критерию Коши и тому, что f непр. на $[b, b'] \times [c, d]$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \forall t \in (c, d) : \underbrace{\left| \int_b^{b'} f(x, t) dx \right|}_{\rightarrow \int_b^{b'} f(x, c) dx, \text{ при } t \rightarrow c} < \epsilon \implies$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \left| \int_b^{b'} f(x, c) dx \right| \leq \epsilon \underset{\substack{\text{критерий Коши}}}{\curvearrowright} \int_a^{+\infty} f(x, c) dx \text{ сх-ся} \implies \text{противо-} \\ \text{речие.} \quad \square$$

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx, t > 0$ сх-ся неравномерно, так как при $t = 0$ расходится.

Теорема 3.7. Признак Вейерштрасса.

$$f, g : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } |f(x, t)| \leq g(x, t) : \forall x \geq a, \forall t \in T.$$

Если $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$ равном. сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равн. сх-ся.

Доказательство. Пишем критерий Коши для $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B : \underbrace{\int_b^c g(x, t) dx}_{< \epsilon} \geq \int_b^c |f(x, t)| dx \geq \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| \quad \square$$

Следствие. Если $|f(x, t)| \leq g(x) \forall x \geq a, \forall t \in T$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ сх-ся равномерно.

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1} dx$ равн. сх-ся при $t \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{\cos(xt)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ и } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} < +\infty.$$

Теорема 3.8. Признак Дирихле.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx.$$

Пусть

$$1. \exists M : \forall b > a, \forall t \in T : \left| \int_a^b f(x, t)dx \right| \leq M$$

$$2. g \text{ монотонна по } x : \forall t \in T.$$

$$3. g \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$ равномерно сх-ся.

Доказательство. Для дифф. ф-й g :

$$F(y, t) = \int_a^y f(x, t)dx.$$

$$(1) \Rightarrow |F(y, t)| \leq M : \forall y, \forall t.$$

$$\int_a^y f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F(x, t)g(x, t)|_{x=a}^{x=y}}_{=F(y, t)g(y, t)} - \int_a^y F(x, t)g'_x(x, t)dx$$

$$|F(y, t)g(y, t)| \leq M|g(y, t)| \underset{y \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$$\int_a^{+\infty} F(x, t)g'_x(x, t)dx - \text{равном. сх-ся.}$$

$$|F(x, t)g'_x(x, t)| \leq M|g'_x(x, t)|.$$

Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} |g'_x(x, t)|dx$ равн. сх-ся.

$$\int_a^y |g'_x(x, t)|dx = \left| \int_a^y g'_x(x, t)dx \right| = |g(x, t)|_{x=a}^{x=y} = \left| \underbrace{g(y, t)}_{\rightrightarrows 0 \text{ по усл.}} - g(a, t) \right| \rightrightarrows |g(a, t)|.$$

□

Теорема 3.9. Признак Абеля.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx. \text{ Пусть}$$

$$1. \int_a^{+\infty} f(x, t)dx \text{ равн. сх-ся.}$$

$$2. g \text{ монотонна по } x : \forall t \in T.$$

$$3. |g(x, t)| \leq M, \forall x \geq a, \forall t \in T$$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$ равн. сх-ся.

Доказательство. Для дифф. ф-й g :

$$F_b(y, t) = \int_b^y f(x, t)dx$$

$$\int_b^c f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F_b(x, t)g(x, t)|_{x=b}^{x=c}}_{=F_b(c, t)g(c, t)} - \int_b^c F_b(x, t)g'_x(x, t)dx$$

Применим крит. Коши для $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$:

$$\exists B : \forall y, b > B \forall t \in T : |F_b(y, t)| < \epsilon, \text{ смотрим на } b > B \implies |F_b(x, t)| < \epsilon.$$

$$|F_b(c, t)g(c, t)| < \epsilon \cdot M.$$

$$\left| \int_b^c F_b(x, t) g'_x(x, t) dx \right| \leq \int_b^c \underbrace{|F_b(x, t)|}_{<\epsilon} |g'_x(x, t)| dx < \epsilon \cdot \int_b^c g'_x(x, t) dx = \epsilon \left| \int_b^c g'_x(x, t) dx \right| = \epsilon |g(x, t)|_{x=b}^{x=c} \leq \epsilon \cdot 2M.$$

Получается, что оценили $\int_b^c f(x, t) g(x, t) dx < 3\epsilon M$, то есть проверили критерий Коши для исходного интеграла. \square

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^t} dx, t > 0$.

1. $t \geq t_0 > 0$. Дирихле: $f(x, t) = \sin(x)$, $g(x, t) = \frac{1}{x^t}$ – вторая монотонно убывает.

$$\left| \int_1^b \sin(x) dx \right| \leq 2.$$

$$g(x, t) \rightrightarrows 0: |g(x, t)| = \frac{1}{x^t} \leq \frac{1}{x^{t_0}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightharpoonup} 0.$$

Есть равн. сх-ть.

2. $t > 0$. Нет равн. сх-ти, так как расх-ся при $t = 0$.

Теорема 3.10. $f : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R}$, t_0 – предельная точка T .

Если

1. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равномерно сх-ся (по $t \in T$).
2. $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\rightrightarrows} \phi(x)$ равномер. по x на любом конечном отрезке.

Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^{+\infty} f(x, t) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx$ и второй интеграл сх-ся.

Доказательство. (1) $\underset{\text{кр. Коши для } f}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \underbrace{\left| \int_b^c f(x, t) dx \right|}_{\rightarrow \left| \int_b^c \phi(x) dx \right| \text{ при } t \rightarrow t_0} < \epsilon$.

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^{+\infty} \phi(x) dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right|}_{<\epsilon} + \underbrace{\left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right|}_{<\epsilon} + \left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right|.$$

$$(1) \Rightarrow \exists B_1 \forall b > B_1 \text{ и } \forall t \in T : \left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

$$\int_a^{+\infty} \phi(x) dx - \text{сх-ся} \Rightarrow \exists B_2 \forall b > B_2 : \left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right| < \epsilon.$$

Фиксируем $b \geq \max\{B_1, B_2\}$.

$$\left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right| \leq (b-a) \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} \{ |f(x, t) - \phi(x)| \}}_{\rightarrow 0} < \epsilon \text{ при } t \text{ близких к } t_0. \quad \square$$

Замечание. Равн. сх-ть интеграла существенна:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{при } 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^t \frac{1}{t} dx = 1 \neq 0.$$

Теорема 3.11. $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$, $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равном. сх-ся.

Тогда $F \in C[c, d]$.

Доказательство. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} F(t)$.

Достаточно понять, что $F_b \in C[c, d]$, а это знаем. \square

Замечание. Без равном. сх-ти неверно.

$$f(x, t) = te^{-t^2 x}, t \in \mathbb{R}.$$

$$F(t) := \int_0^{+\infty} te^{-t^2 x} dx - \text{сх-ся}.$$

$$F(0) = 0$$

$$F(t) = \frac{1}{t}$$
 при $t \neq 0$ нет непрер.

Теорема 3.12. (Интегральный аналог теоремы Абеля для степенных рядов).

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится и $f \in C[a, +\infty)$. Тогда $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x) e^{-tx} dx \in C[0, +\infty)$

Доказательство. Признак Абеля.

$g(x, t) = e^{-tx}$: монотонно убывает при фиксированном t .

$|g(x, t)| \leq 1$: равномерно ограничена. \square

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \text{сх-ся} \implies F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$ непрер. при $t \geq 0$.

Теорема 3.13. $f'_t, f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$

1. $\Phi(t) := \int_a^{+\infty} f'_t(x, t) dx$ равномерно сх-ся.

2. $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ сх-ся при $t = t_0$.

Тогда F равномерно сх-ся, $F \in C^1[c, d]$ и $F' = \Phi$.

Доказательство. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \implies F'_b(t) = \int_a^b f'_t(x, t) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} \Phi(t)$.

$$F_b(t) = \left(\underbrace{\int_{t_0}^t F'_b(u) du}_{\Rightarrow \int_{t_0}^t \Phi(u) du} \right) + \underbrace{F_b(t_0)}_{\rightarrow F(t_0)} \implies \underbrace{F_b(t)}_{\rightarrow F(t)} \Rightarrow \int_{t_0}^t \Phi(u) du + F(t_0)$$

\implies равномерная сх-ть и $F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{\Phi(u)}_{\text{непр. ф-я}} du \implies F \in C^1[c, d]$ и $F'(t) = \Phi(t)$. \square

Пример. $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx$. Знаем, что $F \in C[0, +\infty)$

$$\Phi(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{-tx} \cdot (-x) dx = \underbrace{- \int_0^{+\infty} \sin(x) \cdot e^{-tx} dx}_{=-\frac{1}{1+t^2} \text{ два раза инт. по частям}} - \text{равномерно сх-ся при } t \geq t_0 > 0.$$

$$\implies F'(t) = \Phi(t) \implies F(t) = C - \arctan(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx \underset{\text{по предыдущим теоремам...}}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx = 0.$$

$\left| e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq e^{-x} \cdot \frac{|\sin(x)|}{x} \leq e^{-x}$ – суммируемая мажоранта.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} C - \arctan(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \implies C[0, +\infty) \ni F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \in C[0, +\infty)$ при $t > 0$

$\implies F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$ при $t \geq 0 \implies F(0) = \frac{\pi}{2}$, то есть $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

3.3. В- и Г-функции Эйлера

Определение 3.3. $\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$, $p > 0$ – гамма-функция.

$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, $p, q > 0$ – бета-функция.

Свойства. Г-функции.

- Интеграл сходится в нуле эквивалентно тому, что $\frac{1}{x^{1-p}}$ сх-ся в $+\infty$

Доказательство. $x^{p-1} \leq e^{\frac{x}{2}}$ при больших x , $x^{p-1} \cdot e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}} \implies$ сх-ся. \square

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Доказательство. $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) = -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$. \square

- $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

Далее индукция. \square

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Доказательство. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$, где $y^2 = x$, $dx = 2ydy$. \square

- $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$.

Доказательство. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) = \dots = (n - \frac{1}{2}) \cdot (n - \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ – получилось ровно то, что хотели. \square

- Γ бесконечно дифф. ф-я и $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^n e^{-x} dx$

Доказательство. Надо обосновать дифф. под знаком интеграла. Для этого надо потребовать равномерную сх-ть полученного интеграла.

$0 < a \leq p \leq b < +\infty$

(a) $0 \leq x \leq 1$:

$$x^{a-1} |\ln(x)|^n e^{-x}$$

(b) $1 \leq x$:

$$x^{b-1} |\ln(x)|^n e^{-x} \leq x^{n+b} e^{-x}$$

\square

7. Γ – строго выпуклая.

Доказательство. $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx > 0$

□

Свойства. B -функции.

1. Интеграл сх-ся

- (a) В нуле $\Leftrightarrow \frac{1}{x^{1-p}}$ – сх-ся.
- (b) В единице $\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^{1-q}}$ – сх-ся.

2. $B(p, q) = B(q, p)$.

Доказательство. $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = -\int_1^0 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = B(q, p)$, где $y = 1-x$, $dy = -dx$. □

3. $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$.

Доказательство. $B(p, q) = \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx$, где $y = \frac{x}{1+x}$, $y = 1 - \frac{1}{1+x}$, $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$. □

Теорема 3.14. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Доказательство. $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy =$
 $= \int_0^{+\infty} \int_0^u x^{p-1} (u-x)^{q-1} e^{-u} dx du \quad \underbrace{=}_{\text{замена } x=uv, dx=u \cdot dv} \int_0^{+\infty} \int_0^1 (uv)^{p-1} (u-uv)^{q-1} e^{-u} u dv du =$
 $= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} \cdot \underbrace{\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv}_{=B(p,q)} du = B(p, q) \Gamma(p+q)$. □

Следствие. (формула дополнения)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad p \in (0, 1).$$

Доказательство. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \Gamma(1)B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad \underbrace{=}_{\text{просто верим в это}} \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. □

Следствие. (формула удвоения)

$$\Gamma(p)\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$$

Доказательство. $\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx =$
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx \quad \underbrace{=}_{x=\frac{1}{2}-t} 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} d(-t) =$
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} dt \quad \underbrace{=}_{t=\frac{\sqrt{u}}{2}} 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{u}{4}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du =$
 $= \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{B(p, \frac{1}{2})}{2^{2p-1}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2^{2p-1}} =$
 $= \frac{\Gamma(p)\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2}) \cdot 2^{2p-1}}$

□

Теорема 3.15. $\Gamma(t+a) \sim t^a \Gamma(t)$ при $t \rightarrow +\infty$

Доказательство. $\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+a)}$ при больших t

$$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} = B(t+1, a) = \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx$$

$$t^a \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx \underset{y=xt}{=} t^a \int_0^t \left(\frac{y}{t}\right)^{a-1} \underbrace{\left(1 - \frac{y}{t}\right)^t}_{\rightarrow e^{-y}} \frac{1}{t} dy \rightarrow \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)$$

На самом деле интегрируем $\mathbb{1}_{[0,t]} y^{a-1} (1 - \frac{y}{t})^t \leq y^{a-1} e^{-y}$ – это суммируемая мажоранта, поэтому можем перейти к пределу по т. Лебега. \square

Следствие. При $a = \frac{1}{2}$ это формула Валлиса.

Доказательство. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \sim n^{\frac{1}{2}} \Gamma(n)$ \square

Теорема 3.16. формула Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

Доказательство. $\Gamma(n+p) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdots (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p)$

$$n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)} = \frac{n^p}{p+n} \cdot \frac{n! \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \underbrace{\frac{n}{p+n}}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left(n^p \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+p)} \right)}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \Gamma(p)$$

Пример. $1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdots (5n+1) = 5^n \cdot \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5}+1) \cdot (\frac{1}{5}+2) \cdots (\frac{1}{5}+n) \sim 5^{n+1} \frac{n^{\frac{1}{5}} n!}{\Gamma(\frac{1}{5})}$

Пример. 1. $\int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)$ при $p > 0$.

$$\text{Док-во: } \int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt \underset{x=t^p}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} dx = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right).$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

$$\text{В частности, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}.$$

$$\text{Док-во: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\phi))^{\frac{p-2}{2}} \cdot (\cos^2(\phi))^{\frac{q-2}{2}} \cdot 2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \underset{t=\sin^2(\phi)}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{\frac{p}{2}-1} (1-t)^{\frac{q}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

3. Объем n -мерного шара $V_n(r) = C_n \cdot r^n$, где $C_n = V_n(1)$ – объем n -мерного шара, радиуса 1.



$$\begin{aligned} V_n(1) &= \int_{-1}^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{n-1} dx \\ &= 2 \cdot C_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\phi))^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Получили, что $C_n = C_{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi} \cdot C_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdots \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} C_1 = \\ &= 2 \cdot \frac{(\sqrt{\pi})^{n-1} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \end{aligned}$$

3.4. Криволинейные интегралы

Определение 3.4. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая кривая

f – функция, заданная на $\gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

Криволинейный интеграл (I рода (интеграл по длине дуги)):

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt, \text{ где } \|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2}$$

Теорема 3.17. 1. Не зависит от параметризации кривой

2. Не зависит от направления

3. $\int_{\gamma} ds = l(\gamma)$ – длина кривой

4. Линейность по функции

5. Аддитивность по кривой: если $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$, то $\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$

6. Если $f \leq g$, то $\int_{\gamma} f \leq \int_{\gamma} g$

7. $|\int_{\gamma} f ds| \leq \int_{\gamma} |f| ds$

8. $\int_{\gamma} f ds \leq \max f \cdot l(\gamma)$

Доказательство. 1-2 $\tilde{\gamma}$ – другая параметризация. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, где $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ – гладкая строго монотонная биекция

$$\int_{\tilde{\gamma}} f ds = \int_c^d f(\gamma(\tau(u))) \|\tilde{\gamma}'(u)\| du$$

$$\tilde{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'_1(u) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \circ \tau, \tilde{\gamma}_1'(u) = \gamma_1'(\tau(u))\tau'(u)$$

$\|\tilde{\gamma}'(u)\| = |\tau'(u)| \cdot \|\gamma'(\tau(u))\|$ – если бы не было модуля, могли бы просто сделать замену переменной, но надо что-то умнее

Если $\tau \uparrow$, тогда $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds$, где $t = \tau(u)$

А если $\tau \downarrow$, то лишний минус появится, когда поменяем местами концы

В итоге не зависим от убывания/возрастания

3 Формула для длины кривой

$$4 \int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \int_a^b (\alpha f(\gamma(t)) + \beta g(\gamma(t))) \|\gamma'(t)\| dt = \alpha \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt + \dots = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds$$

$$5 \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b), \gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$$

и по аналогии

$$6 \int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

и если заменим на g , станем только больше

$$7 \left| \int_{\gamma} f ds \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \right| = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} |f| ds$$

$$8 f \leq \max f \implies \int_{\gamma} f ds \leq \int_{\gamma} \max f ds = l(\gamma) \cdot \max f$$

□

Замечание. Можно определить $\int_{\gamma} f ds$ для кусочно-гладких γ . Содержательная тут только проверка на корректность, но она проверяется с помощью аддитивности по кривой

Упражнение. $\int_{\gamma} f ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(\gamma(\xi_k)) \cdot l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]})$, где $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, при мелкости дробления $\rightarrow 0$.



Определение 3.5. Дифференциальная форма (1-го порядка) в \mathbb{R}^n .

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n, \text{ где}$$

$$f_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega(x) – линейное отображение: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$dx_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} – проекция на k-ую координату, то есть dx_k(\underbrace{h}_{\substack{\text{вектор} \\ =(h_1, \dots, h_n)}}) = h_k.$$

$$\text{Пример записи: } \omega(x, h) = f_1(x)h_1 + \dots + f_n(x)h_n.$$

Определение 3.6. Криволинейный интеграл *II* рода (интеграл от дифференциальной формы)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая кривая

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \cdots + f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'_n(t)) dt$$

Если коротко: $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

Свойства. 1. Не зависит от параметризации

2. Смена направления меняет знак интеграла

3. (**Связь с интегралом по длине дуги**). $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds$, где $\bar{\sigma}$ – единичный касательный вектор к кривой

4. Линейность по \bar{f}

5. Аддитивность по кривой

$$6. |\int_{\gamma} \omega| \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| ds \leq \max \|\bar{f}\| \cdot l(\gamma)$$

Доказательство. 1. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau, \tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ – строго возрастает, гладкая, $\tau(c) = a, \tau(d) = b$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\tilde{\gamma}'(u)) du = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\tau(u))) \gamma'_k(\tau(u)) \tau'(u) du = (*)$$

$$\text{Делаем замену } t = \tau(u) : (*) = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_{\gamma} \omega$$

2. Доказали вместе с первым: если меняется направление, то $\tau(c) = b, \tau(d) = a, \int_b^a = - \int_{\gamma} \omega$

$$3. \bar{\sigma}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \text{ Тогда } \int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \bar{\sigma}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \\ = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

4, 5. следуют из 3 (по линейности интеграла *I* рода и линейности скалярного произведения).

$$6. |\int_{\gamma} \omega| = |\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds| \leq \int_{\gamma} |\langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle| ds \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| \cdot \|\bar{\sigma}\| ds$$

□

Упражнение. Доказать формулу: $\int_{\gamma} \omega = \lim \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\xi_j))(\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))$, если мелкость дробления $\rightarrow 0$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Определение 3.7. ω – дифференциальная форма, заданная в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытом множестве

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная для ω , если $dF = \omega$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n, \text{ т.е нужно, чтобы } \frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k \text{ при } k = 1, 2, \dots, n$$

Теорема 3.18. Пусть F – первообразная, ω, γ – кривая, соединяющая точки A, B

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A)$$

Доказательство. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_k(t)}_{(F \circ \gamma)'(t)} dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F \circ \gamma(b) - F \circ \gamma(a) =$$

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A).$$

□

Определение 3.8. Ω – область, если Ω – открытое линейно связное множество

Линейная связность – любая пара точек может быть соединена какой-либо кривой $\in \Omega$

Следствие. 1. Если у ω есть первообразная, то $\int_{\gamma} \omega$ зависит только от концов кривой, но не зависит от самой кривой

2. Если Ω – область, то все первообразные отличаются друг от друга на **const**

Доказательство.

2. F и G – первообразные ω , возьмем точки A, B из Ω и соединим кривой $\gamma \implies G(B) - G(A) = \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A) \implies G(B) = F(B) + \underbrace{G(A) - F(A)}_{=const, \text{ при фикс. } A}$ (фиксируем A и меняем B). □

Лемма. Ω – область \implies между любыми двумя её точками можно провести ломанную, все звенья которой параллельны осям координат

Доказательство. $A, B \in \Omega \implies \exists \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ такая что $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$. Для $t \in [a, b]$ рассмотрим шар $B_{r(t)}(\gamma(t)) \in \Omega$

$\gamma([a, b])$ – компакт \implies выберем конечное подпокрытие. Тогда можем перемещаться между центрами шариков по звеньям, параллельным осям координат

□

Теорема 3.19. Пусть Ω – область, $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ – дифференциальная форма в Ω и $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Тогда следующие условия равносильны

1. ω имеет первообразную $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
2. $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любой замкнутой кривой γ
3. $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любой замкнутой ломаной γ со звеньями, параллельными осям координат

Доказательство. 1) \implies 2) \implies 3) очевидны

3) \implies 1):

Соединим c и $x \in \Omega$ ломаной со звеньями, параллельными осям координат.

$F(x) := \int_{\gamma} \omega$. Поймем, что результат не зависит от выбора ломаной γ

$0 = \int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega$, где $\tilde{\gamma}^{-1}$ – инвертированная по направлению вторая ломаная

Осталось проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma \cup [x, x+h]} \omega}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \omega =$$

$$\underset{[0, h] = [x, x+h] \text{ (сдвиг на } x\text{)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{f_1(\gamma(t))}_{x+e_1 t} \underbrace{\gamma'(t)}_1 dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_1(x + e_1 t) dt =$$

$$\underset{= h \cdot f_1(x + e_1 h \cdot \theta), \theta \in (0, 1)}{=} f_1(x)$$

$= f_1(x)$, т.к. $\gamma(t) = x + e_1 \cdot t$, $\gamma'_1(t) = 1$, $\gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0$

□

Замечание. Для \mathbb{R}^2 3) можно заменить на 3'): $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любого прямоугольного γ со сторонами, параллельными осям координат

Доказательство. Индукция по числу звеньев. Когда отсекаем новый прямоугольник, то по его ребру мы считаем интеграл в разные стороны, то есть с остатком фигуры значение сократится, поэтому такой индукционный переход сделать можно:



□

Замечание. ω в $\Omega \in \mathbb{R}^n$. В каждой точке Ω своё линейное отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

dx_1 - функция $g_1(x) = x_1$

$$dg_1$$

$g_1(x+h) = g_1(x) + dg_1(g) = o(h)$, поэтому dx_i в определении ω - проекции на соотв. координаты

Определение 3.9. Живём в \mathbb{R}^2 . Назовём элементарной областью в \mathbb{R}^2 , если

$\Omega = \{(x, y) : a < x < b \wedge \phi(x) < y < \psi(x)\} = \{(x, y) : c < y < d \wedge \alpha(y) < x < \beta(y)\}$, причем ограничивающие функции непрерывны.

Может показаться, что такого не бывает, но вот пример:



miro

Теорема 3.20. Формула Грина

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ область, граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких простых замкнутых кривых, ориентированных положительно.

$P, Q : Cl(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны.

Тогда $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2$, где γ – граница Ω .

Заметим, что направление на кусочках границ такое, что область слева. То есть ориентация устроена так:



Область всегда по левую руку
при обходе

Доказательство. Хотим доказывать это: $\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Qdy$ и $-\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Pdx$, при этом формулы никак не связаны, то есть можно и по-отдельности доказывать. Проверим вторую формулу:

1. $\Omega = \{(x, y) : x \in (a, b), \phi(x) < y < \psi(x)\}$ – элементарная область.

Левая часть: $\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$

Правая часть: $\int_{\gamma} Pdx = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$



$$x \rightarrow (x, \phi(x)) : (I) = \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$$

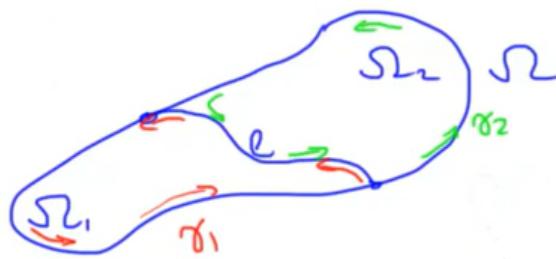
$$y \rightarrow (b, y) : (II) = \int_{\phi(b)}^{\psi(b)} P(b, y) b' dy = 0$$

$$x \rightarrow (x, \psi(x)) : (III) = - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx$$

$$y \rightarrow (a, y) : (IV) = - \int_{\phi(a)}^{\psi(x)} P(a, y) a' dy = 0$$

Записывая сумму $(I) + (II) + (III) + (IV)$, получим ровно то, что записано в левой части со знаком минус.

2. $\Omega = \Omega_1 \cup l \cup \Omega_2$. Пусть формула верна для Ω_1, Ω_2 , выведем ее для Ω .



$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2 = \int_{\Omega_1} + \underbrace{\int_l}_{=0, \text{ т.к. мера } l \text{ это } 0} + \int_{\Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} =$$

$= \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy$ (обходя l с разных сторон, слагаемое сократится).

3. Формула верна для конечного объединения элементарных областей.

4. Формула верна для области из условия, так как та нарезается на конечное число элементарных областей (без доказ-ва).

□

Следствие. Формулы площади.

$$\lambda_2 \Omega = \int_{\gamma} xdy = - \int_{\gamma} ydx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} xdy - ydx$$

Доказательство. Просто подставляем в формулу Грина подходящие P и Q (кто-то из них 0, а кто-то x , либо y). □

3.5. Точные и замкнутые формы

Определение 3.10. Ω – область, ω – дифф. форма в Ω . ω – точная форма, если у нее существует первообразная.

Определение 3.11. ω – локально точная форма, если $\forall a \in \Omega$ найдется U_a , такая что в U_a есть первообразная ω .

Определение 3.12. $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ – замкнутая, если $\forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Замечание. Точность \Rightarrow локальная точность (но не наоборот).

Возьмем $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и покажем, что она замкнутая, локально точная, но не точная.

Проверим на замкнутость, то есть на равенство частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\frac{y}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{-\frac{x}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Проверим на локальную точность: везде, кроме оси Ox , есть первообразная $F(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ (можно честно продифференцировать и проверить)

А теперь покажем, что точности нет: для этого нужно, чтобы интеграл любой замкнутой кривой был равен нулю. Возьмем тогда интеграл по единичной окружности с параметризацией $(x, y) \rightarrow (\cos t, \sin t)$:

$$\int_{\text{един. окр.}} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)(\sin(t))' - \sin(t)(\cos(t))'}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Теорема 3.21. Если коэффиц. формы f_i из C^1 , тогда локальная точность \Rightarrow замкнутость.

Доказательство. Берем $a \in \Omega$ и U_a , где есть первообразная $F \Rightarrow f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \quad \underbrace{=}_{\text{т.к. непрер. слева и справа от равенства}} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Rightarrow \text{замкнутость}$$

w. \square

Лемма. Пуанкаре.

Если Ω – выпуклая область и коэффиц. формы из C^1 , то замкнутость \Rightarrow точность.

Доказательство. Только для \mathbb{R}^2 .

Для существования первообр. достаточно чтобы интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат был равен 0.

$$\omega = Pdx + Qdy : \int_{\text{обход контура}} \omega = \int_{\text{заполненные прямоуг.}} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)}_{\text{этот интеграл} = 0 \text{ из-за замкнутости}} d\lambda_2 = 0.$$

Выпуклость Ω важна, чтобы внутри заполненного прямоугольника не было дырок. \square

Следствие. 1. Замкнутая форма с коэффиц. из C^1 в любом открытом шаре из Ω имеет первообразную.

2. Замкнутая форма с коэффиц. из C^1 лок. точная.

Определение 3.13. ω – лок. точная форма в Ω .

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ путь.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ первообразная ω вдоль пути γ , если $\forall t \in [a, b]$ у $\gamma(t)$ найдется окр. $U_{\gamma(t)}$, а в ней первообразная F формы ω , т.ч. $f(\tau) = F(\gamma(\tau))$ при τ близких к t .



Теорема 3.22. Первообразная вдоль пути существует и единственная с точностью до константы.

Лемма. Локально постоянная функция (в каждой точке есть окрестность, что функция на ней постоянная) – константа.

Доказательство. Док-во теоремы.

Единственность: f_1, f_2 – первообр. вдоль пути γ .

$f_1 - f_2$ – лок. постоянная, покажем это:

Берем $t \in [a, b]$, есть $U_{\gamma(t)}$ и в ней первообр. F_1 и F_2 , т.ч. $f_1(\tau) = F_1(\gamma(\tau))$ и $f_2(\tau) = F_2(\gamma(\tau))$ при τ близких к t , но $F_1 - F_2 = \text{const} \Rightarrow f_1 - f_2 = \text{const}$ при τ близких к t .

Существование: берем $t \in [a, b]$, у $\gamma(t)$ есть окр-ть $U_{\gamma(t)}$, в которой существует первообр.

$\bigcup_{t \in [a,b]} U_{\gamma(t)}$ – покрытие $\gamma[a,b]$ – компакт.

Выберем конечные подпокрытия U_1, \dots, U_m и F_1, \dots, F_m – первообр. в соответствующем U_j .

Из леммы Лебега $\exists r > 0 : \forall t \in [a,b] : B_r(\gamma(t))$ целиком содержится в каком-то эл-те покрытия.

Нарежем $[a,b]$ на кусочки длины $< \delta$, где $\delta > 0$ выбрано по $\epsilon = r$ из равномерной непрерывности γ .

$a =: t_0, t_1, \dots, t_n := b$ – нарезка.

Тогда образы маленьких отрезков целиком содержатся в своих элементах покрытия.

$\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$, так занумеруем F_i — первообр. в U_i .

$f|_{[t_0, t_1]} = F_1 \circ \gamma, f|_{[t_1, t_2]} = F_2 \circ \gamma$.

В $\underbrace{U_1}_{\exists \gamma(t_1)} \cap U_2 \neq \emptyset \implies F_1, F_2$ – первообр. \implies они отличаются на $const \implies F_2 = F_1 + c$,

подменяя c так, что в $U_1 \cap U_2$ они совпадали. И так далее для всех остальных кусочков. \square

Следствие. f – первообраз. ω вдоль пути $\gamma : [a,b] \rightarrow \Omega$. Тогда $\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$

Доказательство. Смотрим на нарезку из предыдущей теоремы. Тогда $\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}} \omega = \sum_{i=1}^n (F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))) = F_n(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$.

$F_i(\gamma(t_i)) = F_{i+1}(\gamma(t_i))$ так согласованы F_j . \square

Определение 3.14. Ω – область в \mathbb{R}^2 .

$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \rightarrow \Omega$ пути в Ω .

1. $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

γ_0, γ_1 – гомотопные пути с неподвижными концами, если $\exists \gamma : [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$ непрерывное, т.ч. $\forall t : \gamma(t,0) = \gamma_0(t), \gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ и $\forall u : \gamma(a,u) = \gamma_0(a), \gamma(b,u) = \gamma_0(b)$.

$\gamma_u(t) := \gamma(t,u)$ путь, соединяющий точки $\gamma_0(a)$ и $\gamma_0(b)$.



2. $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$.

γ_0, γ_1 – гомотопно замкнутые пути, если $\exists \gamma : [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$ непрерывное, т.ч. $\forall t : \gamma(t,0) = \gamma_0(t), \gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ и $\forall u : \gamma(a,u) = \gamma(b,u)$.



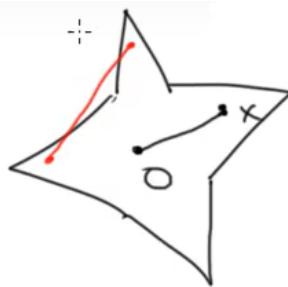
Определение 3.15. γ – стягиваемы замкнутый путь в Ω , если он гомотопен точке.

Определение 3.16. Ω – односвязная область, если любой замкнутый путь в ней – стягиваемый.

Пример. 1. Выпуклая область односвязна (для любых двух точек верно, что отрезок, соединяющий их лежит в области).

2. Звездная область односвязна (одна точка фиксирована и верно, что отрезок, соединяющий ее и любую другую, лежит в области)

PS. Напомним, что для обычной выпуклости нужно было, чтобы отрезок для двух произвольных точек из области целиком содержался в ней.



Доказательство. Ω – звездная, O – фикс. точка.

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ – замк. путь.

$\gamma_u(t) := u \cdot \gamma_1(t) \in \Omega$.

$\gamma_0(t) = 0$.

Хз, что это доказывает, но вот оно есть :/ □

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не явл. односвязной.

Упражнение. Ω – односвязна, $f : \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{окр. единичного радиуса}} \rightarrow \Omega$ непрер. отображ.

Доказать, что существует g : замк. круг. един. радиуса $\rightarrow \Omega$ – непрер.

Определение 3.17. $\gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega$ непрер. отображ.

ω – лок. точная форма в Ω .

$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная w относительно отображения γ , если $\forall (t, u) \in [a, b] \times [c, d]$ существует окр-ть $U_{\gamma(t, u)}$ и первообр F в этой окр-ти, т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ для (τ, ν) близких к (t, u) .

Теорема 3.23. Первообразная отн-но отображения существует и единственна с точностью до константы.

Доказательство. Единственность: f, g – первообразные отн-но отображения γ , то $(f - g)$ – локально постоянная функция двух переменных $\Rightarrow (f - g) = const$.

То что $(f - g)$ – локально постоянная следует отсюда:

Берем $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$, в окр-ти $U_{\gamma(t,u)} : \exists F_1, F_2$ – первообразные, т.ч. $f(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu))$ и $g(\tau, \nu) = F_2(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (t, u) .

Знаем, что $F_1 = F_2 + const \Rightarrow f(\tau, \nu) - g(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu)) - F_2(\gamma(\tau, \nu)) = const$.

Существование: берем $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$, у $\gamma(t, u)$ есть окр-ть $U_{\gamma(t,u)}$ в которой существует первообразная $\Rightarrow [a, b] \times [c, d] \subset \bigcup_{(t,u) \in [a,b] \times [c,d]} U_{\gamma(t,u)}$.

Выбираем конечное подпокрытие, по нему $r > 0$ из леммы Лебега $\Rightarrow B_r(\gamma(t, u))$ целиком содержится в эл-те подпокрытия.

$\gamma \in C([a, b] \times [c, d]) \Rightarrow$ равном. непрер. Берем по $\epsilon = r$ такое $\delta > 0$ из равн. непрерывности \Rightarrow если (t, u) и (t', u') на расстоянии $< \delta$, то $\gamma(t, u)$ и $\gamma(t', u')$ на расстоянии $< r$.



$\gamma([t_{i-1}, t_i] \times [u_{j-1}, u_j]) \subset U_{ij}$ и F_{ij} первообразная в U_{ij} .

$$f|_{[t_0, t_1] \times [u_0, u_1]} = F_{11} \circ \gamma$$

$$f|_{[t_1, t_2] \times [u_0, u_1]} = F_{21} \circ \gamma$$

$\gamma(\{t_1\} \times [u_0, u_1]) \subset U_{11} \cap U_{21} \leftarrow$ тут F_{11}, F_{21} – первообраз. \Rightarrow они отличаются на $const$.

Подправим F_{21} так, что в $U_{11} \cap U_{21}$ они совпадают.

В итоге построим $f_1 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообр. отн-но $\gamma|_{[a,b] \times [u_0, u_1]}$.

Аналогично $f_j : [a, b] \times [u_{j-1}, u_j] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообр. отн-но $\gamma|_{[a,b] \times [u_{j-1}, u_j]}$.

осталось склеить их в f .

Рассмотрим f_1, f_2 . $f_1(\cdot, u_1), f_2(\cdot, u_1)$ – первообр. вдоль пути $\gamma_{u_1} \Rightarrow$ они отличаются на константу.

Подправим f_2 так, что $f_1(\cdot, u_1) = f_2(\cdot, u_1)$.



□

Теорема 3.24. γ_0, γ_1 – гомотопные пути с неподвижными концами в Ω . ω – локально точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Доказательство. $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ гомотопия между γ_0, γ_1 .

f – первообразная ω относительно отображения γ , $f(\cdot, 0), f(\cdot, 1)$ – первообразные вдоль путей γ_0, γ_1 , соответственно.

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0).$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1).$$

Докажем, что $f(a, \cdot)$ – лок. постоянная. Рассмотрим (a, u) : у $\gamma(a, u)$ есть окр-ть U и в ней первообразная F , т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (a, u) .

$f(a, \nu) = F(\gamma(a, \nu)) = F(\gamma_0(a))$ не зависит от ν (по аналогии делаем с другим концом, то есть доказываем, что $f(b, \cdot)$ – локальная постоянная, тогда получили, что $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$). \square

Теорема 3.25. γ_0, γ_1 – замкнутые гомотопные пути в Ω . ω – лок. точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Доказательство. $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ – гомотопия, f – первообразная ω относительно γ .

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0)$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1)$$

Докажем, что $(f(b, \cdot) - f(a, \cdot))$ лок. постоянна.

Рассмотрим (a, u) , у $\gamma(a, u)$ есть окр-ть U и в ней первообраз. F , т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (a, u) .

Рассмотрим (b, u) , у $\gamma(b, u)$ есть окр-ть \tilde{U} и в ней первообраз. \tilde{F} , т.ч. $f(\tau, \nu) = \tilde{F}(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (b, u) .

$$\gamma(a, u) = \gamma(b, u) \in U \cap \tilde{U}$$

$$F \text{ и } \tilde{F} \text{ – первообразные в } U \cap \tilde{U} \implies \tilde{F} = F + C \text{ в } U \cap \tilde{U}.$$

$$f(b, \nu) - f(a, \nu) = \tilde{F}(\gamma(b, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = \tilde{F}(\gamma(a, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = C.$$

\square

Следствие. Если γ_1 – стягиваемый путь в Ω , ω – лок. точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_1} \omega = 0$.

Теорема 3.26. Если Ω – односвязна, а ω – лок. точная, то ω – точная.

Доказательство. γ_1 – замкнутая кривая $\implies \gamma_1$ – стягиваемая $\implies \int_{\gamma_1} \omega = 0 \implies$ существует первообр. \square

Замечание. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не односвязна, т.к. там есть лок. точная форма, не являющаяся точной.

4. ТФКП

4.1. Голоморфные функции

Если доказательство не указано, то оно повторяет то, что было в \mathbb{R} (смотреть 1 семестр).

Определение 4.1. Ω – область в \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

f – голоморфна в точке z_0 , если существует $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$.

Определение 4.2. f комплексно дифф. в точке z_0 , если $\exists k \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ при } z \rightarrow z_0.$$

Утверждение 4.1. f – голоморфна в точке $z_0 \Leftrightarrow f$ комплексно дифф. в точке z_0 и $k = f'(z_0)$.

Следствие. f и g голоморфны в точке z_0 . Тогда

1. $f \pm g$ голом. в точке z_0
2. $f \cdot g$ голом. в точке z_0
3. Если $g(z_0 \neq 0)$, то $\frac{f}{g}$ голом. в точке z_0 .
4. Если h голом. в точке $f(z_0)$, то $h \circ f$ голом. в точке z_0 .

Замечание. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$z = x + iy, \quad f(z) = f(x + iy) = g(x + iy) + ih(x + iy) : g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} = \frac{f'(z_0)}{i} = i \cdot f'(z_0).$$

Замечание. $\begin{pmatrix} g(x+iy) \\ h(x+iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x+iy_0) \\ h(x+iy_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(||(x-x_0, y-y_0)||)$.

$$k = \alpha + i\beta$$

$$k \cdot (z - z_0) = (\alpha + i\beta)((x - x_0) + i(y - y_0)) = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + i(\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0))$$

Вещественная линейность $+ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ комплексная линейность.

Замечание. Комплексная дифференцируемость \Leftrightarrow вещественная дифференцируемость + матрица Якоби $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Комплексная дифференцируемость \Leftrightarrow вещественная дифференцируемость + условия Коши-

$$\text{Римана} \quad \begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \end{cases}$$

Замечание. $f(z) = f(z_0) + \underbrace{k}_{\in \mathbb{C}}(z - z_0) + o(z - z_0)$

$$k(z - z_0) = kw = |k| \cdot e^{i\phi} \cdot w, \quad \phi = \arg(k)$$

Замечание. Обозначения.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$dz = dx + idy$$

$$d\bar{z} = dx - idy$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Теорема 4.2. Условия Коши-Римана.

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, a \in \Omega$$

f – дифф. в точке a как функция из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^2 . Следующие условия равносильны:

1. f – голоморфна в точке a .
2. $d_a f$ – комплексно линеен
3. условия Коши-Римана
4. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$

Доказательство. Мы выяснили все, кроме $(3) \Leftrightarrow (4)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{– а это}$$

и есть условия Коши-Римана. \square

Замечание. Обозначения.

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ и голоморфна во всех точках из } \Omega.$$

Следствие. Ω – область, $f \in H(\Omega)$ и $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{const} \implies f = \operatorname{const}$

Доказательство. $\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0$$

$$\implies \operatorname{Re}(f) = \operatorname{const}$$

\square

Теорема 4.3. Коши (ah, shit, here we go again...)

$$f \in H(\Omega) \implies \text{форма } f(z)dz \text{ локально точная.}$$

Доказательство. Будет два разных док-ва.

1. Для случая непрерывно-дифф. $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}, \dots$ (имеются в виду все частные производные).

Тогда замкнутость \implies локальная точность.

$$f(z)dz = f(z)(dx + idy) = (\operatorname{Re}(f) + i \cdot \operatorname{Im}(f)) \cdot (dx + idy) = \operatorname{Re}(f)dx - \operatorname{Im}(f)dy + i(\operatorname{Im}(f)dx + \operatorname{Re}(f)dy).$$

$$Pdx + Qdy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\operatorname{Re}(f)dx - \operatorname{Im}(f)dy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}$$

$$\operatorname{Im}(f)dx + \operatorname{Re}(f)dy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}$$

2. Общий случай.

Надо доказать, что интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат из шарика $U \subset \Omega$, содержащего произвольную точку, равен 0.

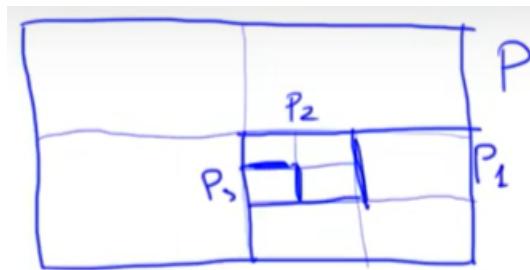
От противного: пусть нашелся прямоугольник P , т.ч. $\alpha(P) := \int_P f(z)dz \neq 0$.



Режем прямоугольник на 4 части, индексируем как P^1, P^2, P^3, P^4 , строим обходы каждого (против часовой стрелки). Тогда $\alpha(P) = \alpha(P^1) + \alpha(P^2) + \alpha(P^3) + \alpha(P^4)$, $|\alpha(P)| \leq |\alpha(P^1)| + |\alpha(P^2)| + |\alpha(P^3)| + |\alpha(P^4)|$.

Хотя бы одно из слагаемых $\geq \frac{1}{4}|\alpha(P)|$, назовем такое P_1 (индекс уже снизу!). Разрежем его на 4 равные части. Пусть P_2 такой, что $|\alpha(P_2)| \geq \frac{1}{4}|\alpha(P_1)|$ и т.д.

$$|\alpha(P_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\alpha(P)|.$$



Берем a из P_n :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + o(z - a)$$

$$\alpha(P_n) = \int_{P_n} f(z) dz = \underbrace{\int_{P_n} f(a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \underbrace{\int_{P_n} f'(a)(z - a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \int_{P_n} o(z - a) dz$$



$$o(z - a) = (z - a) \cdot \beta(z - a), \text{ где } \beta(z - a) \xrightarrow[z \rightarrow a]{} 0$$

$$\left| \int_{P_n} (z - a) \beta(z - a) dz \right| \leq \max_{z \in P_n} |z - a| \cdot |\beta(z - a)| \cdot \underbrace{l(P_n)}_{\text{периметр}} \leq \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \cdot \frac{l(P)}{2^n} \cdot \frac{l(P)}{2^n} \implies$$

$$\implies \frac{|\alpha(P)|}{4^n} \leq |\alpha(P_n)| \leq \frac{l(P) \cdot l(P)}{4^n} \cdot \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \implies \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \geq \frac{|\alpha(P)|}{l(P) \cdot l(P)} > 0 - \text{противоречие, т.к. } \beta(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow a.$$

□

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$, то у каждой точки $a \in \Omega$ есть окрестность, в которой существует ф-я F , т.ч. $F' = f$ в этой окрестности.

Доказательство. Пусть F первообразная формы $f(z)dz$. Поймем, что $F' = f$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \cdot f(z) \implies \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

□

$$2. f \in H(\Omega), \gamma \text{ стягиваемый в } \Omega \text{ путь} \implies \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Теорема 4.4. $f \in C(\Omega)$, Δ – прямая параллельная осям координат.

$$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$$

Тогда $f(z)dz$ локально точная.

Доказательство. Надо проверять, что интеграл по довольно маленькому прямоугольнику (со сторонами паралл. осям) это 0.



Очевидно, что если прямоугольник не пересекает Δ , то там все очевидно. Хотим рассматривать только те, что задевают. Те, что пересекают Δ , можно разбить на две части (верхнюю и нижнюю). По каждой из частей будет 0, тогда и в сумме тоже будет 0. То есть нас вообще интересуют только те прямоугольники, у которых Δ это одна из сторон. Рассмотрим их:



$$\int_{P_\epsilon} f(z)dz = 0 \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} \int_P f(z)dz$$

$$\left| \int_P f(z)dz - \int_{P_\epsilon} f(z)dz \right| \leq |J_1 + J_3| + |J_2| + |J_4|$$

$$|J_2 f(z)dz| \leq M \cdot (\text{длина 2}) = M\epsilon$$

$$|J_1 + J_3| = \left| \int_a^b (f(x + iy_0) - f(x + i(y_0 + \epsilon))) dx \right| \leq \int_a^b | \dots | dx = (*)$$

f непрер. на компакте \implies равномерно непрер.

$\forall \gamma > 0 : \exists \epsilon > 0$ если $\rho(\text{аргумент}) < \epsilon \implies |f(\dots) - f(\dots)| < \gamma$, тогда

$$(*) \leq (b-a) \cdot \gamma$$

□

Следствие. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$f \in C(\Omega)$ и f голоморфна в Ω за исключением мн-ва изолированных точек, тогда форма $f(z)dz$ все равно лок. точная.

Доказательство. Рассмотрим окр-ть, в которой ровно одна плохая точка.

Давайте проведем прямую через это точку, тогда работает теорема.

□

Определение 4.3. Индекс кривой отн-но точки $Ind(\gamma, z_0)$.

γ – замкнутая кривая, не проходящая через точку z_0 .

$Ind(\gamma, 0) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ – кол-во оборотов γ вокруг 0.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$, ϕ – непрерывна (полярная замена).

Теорема 4.5. Пусть γ – замкнутая кривая, не проходящая через 0. Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i Ind(\gamma, 0).$$

Доказательство. Берем параметризацию $r, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$z(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, dz = (r'e^{i\phi} + ri\phi'e^{i\phi}) dt$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{r'}{r} + i\phi'$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_a^b \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\phi'(t) \right) dt = (\ln(r(t)) + i\phi(t))|_{t=a}^{t=b} = i(\phi(b) - \phi(a)) = 2\pi i Ind(\gamma, 0)$$

□

Следствие. Пусть γ – замкнутая кривая, не проходящая через точку a . Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i Ind(\gamma, a).$$

Теорема 4.6. (интегральная формула Коши).

$$f \in H(\Omega)$$

γ – стягиваемая в Ω кривая, не проходящая через $a \in \Omega$.

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a) Ind(\gamma, a)$$

Доказательство. $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{при } z \neq a, \\ f'(a), & \text{иначе} \end{cases}$

$$g \in C(\Omega)$$

$$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$$

$\Rightarrow g(z)dz$ – локально точная форма $\Rightarrow \int_{\gamma} g(z)dz = 0$, так как γ – стягиваемая

$$\Rightarrow 0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{f(a)dz}{z-a} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = f(a) \cdot 2\pi i \cdot Ind(\gamma, a)$$

□

Пример. Берем круг. f – голоморфна в окр-ти этого круга.

$$\int_{\text{окр.}} \frac{f(z)dz}{z-a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ вне круга} \\ f(a) \cdot 2\pi i, & \text{если } a \text{ внутри круга} \end{cases}$$

Замечание. Обозначение.

$$\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\} – \text{единичный круг.}$$

$$\mathbb{T} = \{|z| = 1\} – \text{единичная окружность, обход против часовой стрелки.}$$

$$r\mathbb{T} + a = \{|z - a| = r\}$$

Теорема 4.7. $f \in H(r\mathbb{D}) \implies f$ аналитична (= функция раскладывается в ряд) в этом круге.

Доказательство. В нашем круге радиуса r берем еще два круга с тем же центром, но меньшими радиусами ($r > r_1 > r_2 > 0$). Берем $z : |z| < r_2$ – точка внутри наименьшего круга. Хотим интегрировать по средней окружности.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} = (*) \text{ равномерно сх-ся, так как } \left| \frac{z}{\zeta} \right| \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=:a_n \cdot 2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
□

Следствие. 1. Если $f \in H(r\mathbb{D})$ и $0 < r_1 < r$, то

$$\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = f^{(n)}(0)$$

$$2. f \in H(r\mathbb{D} + a), 0 < r_1 < r \implies \frac{n!}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a)$$

$$z = w + a$$

$$g(w) = f(w + a)$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw$$

$$3. f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

Тогда f – голоморфна в $\Omega \Leftrightarrow f$ – аналитична в Ω .

$$4. f \in H(\Omega) \implies f \text{ – бесконечно дифференцируема.}$$

$$5. f \in H(\Omega) \implies f' \in H(\Omega)$$

$$6.$$

Определение 4.4. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гармоническая, если $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = 0$.

Продолжаем свойство:

$f \in H(\Omega) \implies \operatorname{Re}(f)$ и $\operatorname{Im}(f)$ – гармонические функции.

Доказательство. $\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial y^2}$

про $\operatorname{Im}(f)$ аналогично доказывается. □

Замечание. Если $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ гармоническая ф-я, то существует единств. (с точностью до прибавления $\operatorname{const} \in \mathbb{R}$) гармоническая ф-я $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, т.ч. $g + ih \in H(\Omega)$

Теорема 4.8. Мореры.

$f \in C(\Omega)$. Если $f(z)dz$ локально точная, то $f \in H(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем $a \in \Omega$. Существует окр-ть a , что для f в ней есть первообразная F (т.е. $F' = f$ в U).

Тогда $F \in H(U) \implies F' = f \in H(U)$ – это локальное свойство, поэтому на всей Ω тоже будет гомоморфность. □

Следствие. $f \in C(\Omega)$, Δ – прямая, параллельная оси координат.

$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$. Тогда $f \in H(\Omega)$.

Доказательство. $f \in C(\Omega)$ и $f \in H(\Omega \setminus \Delta) \implies f(z)dz$ локально точная в $\Omega \underset{\substack{\text{т. Мореры} \\ \Rightarrow}}{\underset{\curvearrowright}{\sim}} f \in H(\Omega)$. \square

Теорема 4.9. (интегральная формула Коши).

$f \in H(\Omega)$

$K \subset \Omega$ – компакт, граница которого – конечное число кусочно-гладких замкнутых кривых. Тогда

1. $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$
2. Если $a \in \text{Int}(K)$, то $\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$.

Доказательство. 1. Пишем формулу Грина.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z)dz &= \int_{\partial K} f(z)dx + i \cdot f(z)dy \underset{\substack{\text{Грин} \\ \Rightarrow}}{\sim} \int_K \left(i \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= i \cdot \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Берем круг, содержащий a , не вылезающий за границу формы $B_r(a)$.

$\tilde{K} = K \setminus B_r(a)$ – компакт.

$\frac{f(z)}{z-a} \in H(\Omega \setminus \{a\})$, $\tilde{K} \subset \Omega \setminus \{a\}$.

$$0 = \int_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz - \underbrace{\int_{r\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{z-a} dz}_{=2\pi i f(a)}$$

\square

Упражнение. $f \in H(r\mathbb{D})$ и $f \in C(Cl(r\mathbb{D}))$

$a \in \mathbb{D}$.

Доказать, что $\int_{r\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$

Теорема 4.10. $f \in C(\Omega)$. Следующие условия равносильны (равносильность всех утверждений, так или иначе, уже доказывалась ранее):

1. $f \in H(\Omega)$
2. $f(z)dz$ – локально точная в Ω
3. В окр-ти каждой точки $z \in \Omega$ есть первообразная
4. f аналитична в Ω
5. $\int f(z)dz = 0$ по любому достаточно малому прямоугольнику со сторонами параллельными осям
6. $f(z)dz$ – замкнутая и частн. производные по x и y непрерывны.

Теорема 4.11. Неравенство Коши.

$f \in H(R\mathbb{D})$, $0 < r < R$.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тогда $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$, где $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Теорема 4.12. $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot r = \frac{M(r)}{r^n}$$

Теорема 4.13. Луивилля.

Если $f \in H(\mathbb{C})$ и f – ограничена, то $f = \text{const}$.

Доказательство. f – ограничена $\Rightarrow |f| \leq M$.

$$f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ и ряд сходится } \forall z \in \mathbb{C} \xrightarrow[\text{неп-во Коши}]{} |a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow a_n = 0 : \forall n \geq 1 \quad \square$$

Замечание. \sin и \cos неограничены в \mathbb{C} .

Определение 4.5. Целая функция – функция, голоморфная в \mathbb{C} .

Теорема 4.14. Основная теорема алгебры.

P – многочлен степени ≥ 1 . Тогда у P есть хотя бы один корень.

Следствие. Если $\deg P = n$, то $P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ для некоторых $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Если z_1 – корень P , то $P(z) = (z - z_1) \cdot Q(z)$, где $\deg Q = n - 1$. \square

Доказательство. Основной теоремы алгебры.

От противного:

пусть $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Тогда $f(z) = \frac{1}{P(z)} \in H(\mathbb{C})$.

Докажем, что f – ограниченная функция.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

$$R := 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|. \text{ Пусть } |z| \geq R, |P(z)| \geq |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_1||z| - |a_0| \geq |z|^n - |z|^{n-1}(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|) = \underbrace{|z|^{n-1}}_{\geq 1} \underbrace{(|z| - |a_0| - |a_1| - \dots - |a_{n-1}|)}_{\geq 1} \Rightarrow |P(z)| \geq 1$$

при $|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \leq 1$ при $|z| \geq R$.

Докажем, что при $|z| \leq R$, $|f(z)|$ – ограничена.

$f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f$ непрер. в $\mathbb{C} \Rightarrow f$ непрер. в $\{|z| \leq R\}$ – компакт $\Rightarrow |f|$ ограничена в $\{|z| \leq R\}$.

Тогда по т. Луивилля $f(z) = \text{const} \Rightarrow P(z) = \frac{1}{\text{const}}$, что противоречит условию, что $P(z)$ – многочлен степени ≥ 1 . \square

4.2. Теоремы единственности

Теорема 4.15. $f \in H(\Omega)$, Ω – область, $z_0 \in \Omega$. След. условия равносильны:

1. $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n = 0, 1, 2, \dots$
2. $f = 0$ в некоторой окр-ти точки z_0 .

3. $f \equiv 0$ в Ω

Лемма. Ω – область в метрическом пространстве, $E \subset \Omega$, т.ч. $E \neq \emptyset$, E – открыто в Ω , E – замкнуто в Ω . Тогда $E = \Omega$.

Доказательство. Леммы.

Пусть $\Omega \setminus E \neq \emptyset$, берем $a \in E$ и $b \in \Omega \setminus E$. Возьмем путь γ , соединяющий эти точки.

$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$, т.ч. $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$. γ – непрер. $\Rightarrow \gamma^{-1}(E)$ – открыто, $\gamma^{-1}(\Omega \setminus E)$ – открыто $\Rightarrow \gamma^{-1}(E)$ – открыто. и замкнут. подмн-во $[\alpha, \beta]$, $\alpha \in \gamma^{-1}(E)$, $\beta \notin \gamma^{-1}(E)$.

$s := \sup \gamma^{-1}(E)$ из замкн. $s \in \gamma^{-1}(E) \Rightarrow s < \beta$.

Возьмем окр-ть s , т.ч. $(s - \delta, s + \delta) \subset \gamma^{-1}(E) \cap (\alpha, \beta) \Rightarrow$ в $\gamma^{-1}(E)$ есть точки $> s \Rightarrow s$ не sup. Противоречие. \square

Доказательство. Теоремы.

(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) – очевидно.

(1) \Rightarrow (2) – почти очевидно:

Берем $z_0 \in \Omega$ и $B_r(z_0) \subset \Omega$, тогда в круге $|z - z_0| < r$: f раскл. в свой ряд Тейлора \Rightarrow в нем $f \equiv 0$.

(2) \Rightarrow (3):

$E := \{z \in \Omega : \text{в некоторой окр-ти точки } z, f = 0\}$

$z_0 \in E$ по условию $\Rightarrow E \neq \emptyset$.

E – открыто. Если $w \in E$, то в круге $|z - w| < r$, $f = 0$.

$\forall z$ из этого круга есть круг меньшего радиуса, содержит. $\{|z - w| < r\}$, в нем $f = 0$.

E – замкнуто. Пусть z_* – предельная точка E , то есть $z_n \in E$ и $\lim z_n = z_*$. $f^{(m)}(z_n) = 0 \forall m, \forall n$ (так как есть (2) \Rightarrow (1)). По непрерывности $f^{(m)} f^{(m)}(z_*) = \lim f^{(m)}(z_n) = 0 \xrightarrow{(1) \Rightarrow (2)} z_* \in E$.

Тогда по лемме $E = \Omega$. \square

Следствие. $f, g \in H(\mathbb{C})$, т.ч. $f(z) = g(z)$ в окр-ти точки $z_0 \in \Omega \Rightarrow f \equiv g$.

Теорема 4.16. О среднем.

$f \in H(\Omega)$ и $a \in \Omega$, причем $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$, тогда $f(a) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi$ (т.е. среднее значение на окружности радиуса r с центром в a равно $f(a)$).

Доказательство. $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\phi})}{re^{i\phi}} re^{i\phi} id\phi$, где $z = a + re^{i\phi}$, $dz = re^{i\phi} id\phi$. \square

Следствие. $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$. Тогда $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|\leq r} f(z) d\lambda_2$.

Доказательство. $\int_{|z-a|\leq r} f(z) d\lambda_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) \rho d\phi d\rho = \int_0^r 2\pi f(a) \rho d\rho = 2\pi f(a) \frac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a)$. \square

Теорема 4.17. Принцип максимума.

$f \in H(\mathbb{C})$, $a \in \Omega$. Если $|f(a)| \geq |f(z)| \forall z$ из окр-ти точки a , то $f \equiv const$.

Доказательство. Пусть $|f(a)| =: M$. Домножим f на $e^{i\alpha}$ так, что $f(a) = M > 0$.

$$|f(a)| = M = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = M.$$

Все нер-ва обращаются в равенства $\implies |f(a + re^{i\phi})| = M \forall \phi \forall$ маленьких r .

$Re(f(a)) = M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f(a + re^{i\phi})) d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq M$. Это все равенства $\implies Re(f(a + re^{i\phi})) = |f(a + re^{i\phi})| = M \implies f(z) = M$ в окр-ти точки $a \implies f(z) \equiv const.$ \square

т. о единственности

Следствие. $f \in H(\Omega)$, Ω – огранич. область, $f \in C(Cl(\Omega))$. Тогда $|f|$ достигает своего max на границе Ω .

Доказательство. $Cl(\Omega)$ – компакт, $|f|$ непрер. на компакте \implies в какой-то точке $a \in Cl(\Omega)$ достигает max.

Если $a \in \Omega$, то по принципу максимума $f \equiv const$, значит на границе то же самое значение.

Если $a \notin \Omega$, то это точка на границе. \square

Определение 4.6. $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, a – ноль функции f , если $f(a) = 0$.

Теорема 4.18. $f \not\equiv 0$, $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, $f(a) = 0$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ и $g \in H(\Omega)$, т.ч. $g(a) \neq 0$ и $f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$.

Доказательство. Разложим f в ряд Тейлора в окр-ти точки a .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n, m := \min\{n : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m}, & z \neq a \\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!}, & z = a \end{cases}$$

$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$, g – непрерывная в точке a , $\implies g \in H(\Omega)$.

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-m} \underset{z \rightarrow a}{\underbrace{\longrightarrow}} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

\square

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$ и $a \in \Omega$ – ноль функции f , то $\exists U_a$ – кор-ть точки a , т.ч. $f(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$ (проколотая окр-ть).

Доказательство. $f(z) = (z - a)^m g(z)$, $g(a) \neq 0$ из теоремы.

g – непрер. в точке $a \implies g(z) \neq 0$ в окр-ти точки $a \implies f(z) = (z - a)^m g(z) \neq 0$ в прокол. окр-ти точки a . \square

2. Если $f, g \in H(\Omega)$ и $fg \equiv 0$, то либо $f \equiv 0$, либо $g \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f \not\equiv 0$. Если $f(z) \neq 0 \forall z$, то $g \equiv 0$. Иначе найдется $a \in \Omega$, т.ч. $f(a) = 0 \implies f(z) \neq 0, \forall z \in U_a^\circ \implies g(z) = 0 \forall z \in U_a^\circ \implies g \equiv 0$. \square

Теорема 4.19. Единственности.

$f, g \in H(\Omega)$ и $z_n \in \Omega$, z_n – различные, т.ч. $f(z_n) = g(z_n)$. Если $\lim z_n \in \Omega$, то $f \equiv g$.

Следствие. $f, g \in H(\Omega)$, $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. Если какая-то предельная точка мн-ва A лежит в Ω , то $f \equiv g$.

Доказательство. Теоремы.

$h(z) = f(z) - g(z)$. По условию $h \in H(\Omega)$ и $h(z_n) = 0$. $a := \lim z_n$, по непрерывности $h(a) = 0 \implies \exists U_a$, т.ч. $h(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$, но z_n начиная с некоторого места лежат в U_a . \square

по следствию 1

Следствие. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

4.3. Аналитическое продолжение

Определение 4.7. $f_1 \in H(\Omega_1), f_2 \in H(\Omega_2)$.

Δ – компонента связности $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.



f_2 непосредственное аналитическое продолжение f_1 через Δ , если $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Delta$.

Замечание. 1. При фиксации $\Omega_1, \Omega_2, \Delta, f_1$, функция f_2 определена однозначно.

Доказательство. g – непоср. аналитическое продолжение f_1 :

$$g(z) = f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in \Delta$$

$$g, f_2 \in H(\Omega_2) \quad \xrightarrow{\text{по т. единственности}} \quad f_2 \equiv g.$$

□

2. Для другой компоненты продолжение может быть другим (тут понятнее на картинке, добавьте, плиз).

Определение 4.8. $f \in H(\Omega), \tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$.

\tilde{f} – аналитическое продолжение f на цепочке областей, если $\exists \Omega_1, \dots, \Omega_n$ и $f_1 \in H(\Omega_1), \dots, f_n \in H(\Omega_n)$, т.ч. f_1 – непосредственное аналитическое продолжение f , f_2 – непосредственное аналитическое продолжение f_1, \dots, \tilde{f} – непосредственное аналитическое продолжение f_n .



Замечание. Рассмотрим всевозможные пары (f, Ω) , т.ч. $f \in H(\Omega)$, тогда существование аналитического продолжения по цепочке областей – отношение эквивалентности на мн-ве таких пар.

Определение 4.9. Полная аналитическая функция – класс эквивалентности.

F – полная аналитическая ф-я. $M := \bigcup_{(f, \Omega) \in F} \Omega$ – область определения (существования) F .

Утверждение 4.20. M – область.

Доказательство. **Открытость:** объединения открытых – открытое.

Линейная связность: $a, b \in M \implies a \in \Omega, b \in \tilde{\Omega}$. $(f, \Omega), (\tilde{f}, \tilde{\Omega})$ связана аналитическим продолжением по цепочке, будем переходить по соответствующим областям и дойдем из a в b . \square

Определение 4.10. F – полная аналитическая функция, M – область определения F , $z \in M$.

$$F(z) := \{f(z) : (f, \Omega) \in F \wedge z \in \Omega\}.$$

Теорема 4.21. Пуанкаре-Вольтерры.

$F(z)$ – не более чем счетное мн-во.

Пример. $\underbrace{\frac{1}{1-z}}_{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ – ряд сх-ся при $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$$

$\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$ – круг сходимости ряда.

$$|z - a| < |1 - a|$$

Определение 4.11. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, R – радиус сх-ти ряда.

Берем точку w на границе круга ($|w - z_0| = R$). w – правильная точка, если найдется U_w – окр-ть точки w и $g \in H(U_w)$ являющаяся непосредственным продолжением f .

Определение 4.12. Особая точка – точка, не являющаяся правильной.

Теорема 4.22. На границе круга сх-ти лежит хотя бы одна особая точка.

Доказательство. От противного.

Пусть все точки правильные $|z| = R$ – правильные.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, R – радиус сх-ти.$$

$\forall w : |w| = R$ – правильная, тогда найдется $B_{r_w}(w)$ и $g \in H(B_{r_w}(w))$, т.ч. $f = g$ на пересечении $\{|z| < R\} \cap \{|z - w| < r_w\}$.

То есть круги $B_{r_w}(w)$ покрывают окр-ть $|w| = R$. Это компакт, выберем конечное подпокрытие.

По лемме Лебега $\exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(w)$ целиком содержится в элементе подпокрытия.

$\{|z| < R + \epsilon\} \subset \{|z| < R\} \cup$ конечное подпокрытие.

$$h(z) := \begin{cases} f(z), & |z| < R \\ g_{w_j}(z), & |z - w_j| < r_{w_j} \end{cases} \in H(\{|z| < R + \epsilon\}).$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n – ряд Тейлора для g , он сх-ся в круге $|z| < R + \epsilon$.$$

Противоречие тому, что радиус сходимости был R . \square

Пример. 1. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ сх-ся при $|z| \leq 1$.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

$$(zf'(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ – сх-ся при $|z| < 1$, все точки $|z| = 1$ – особые.

Начало 4-ого семестра.

Теорема 4.23. $f \in H(\Omega)$, Ω – односвязная, $f \neq 0$ в Ω .

Тогда существует $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = f(z)$ и g – единственна с точностью до аддит. константы $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Существование:

$\frac{f'}{f} \in H(\Omega) \implies$ есть первообразная $g \in H(\Omega)$.

Подберем константу так, что $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ для некоторого $z_0 \in \Omega$.

Покажем, что g подходит: $h(z) := e^{-g(z)} \cdot f(z)$.

Хотим доказать, что $h \equiv 1$. Знаем, что $h(z_0) = 1$ и

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} + f(z)e^{-g(z)}(-g'(z)) = e^{-g(z)} \left(f'(z) - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \equiv 0.$$

Единственность:

Пусть $e^{g(z)} = f(z) = e^{\tilde{g}(z)} \implies e^{g(z)-\tilde{g}(z)} \equiv 1 \implies \underbrace{g(z) - \tilde{g}(z)}_{\in H(\Omega) \subset C(\Omega)} = 2\pi ik_z : k_z \in \mathbb{Z} \implies g(z) - \tilde{g}(z) = 2\pi ik$ □

Следствие. Пусть $0 \notin \Omega$ – односвязна, тогда существует единственный с точностью до $+2\pi ik$ функция $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = z$.

Замечание. $g(z) = \ln|z| + i \arg z$

Замечание. Обозначение:

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$$

ветви логарифма

Свойства. 1. $e^{\text{Ln}(z)} = z : \forall z \neq 0$

$$2. \text{Ln}(zw) = \text{Ln}(z) + \text{Ln}(w)$$

$$3. \text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z), \text{ где } \text{Arg}(z) = \{\arg z + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$$

Замечание. Св-во 2 для ветви может быть неверно.

Берем конкретную ветку и точку: $0 < \arg < 2\pi$

$$\text{Ln}(-i) = \underbrace{\ln|-i|}_{=0} + i \text{Arg}(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

$$\text{Ln}((-i)^2) = \text{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \text{Arg}(-1) = \pi i$$

$$\text{Но } \pi i \neq \frac{3\pi i}{2} + \frac{3\pi i}{2}$$

Замечание. $z^p := e^{p\text{Ln}(z)}$ – полная аналит. функция.

Если $p \in \mathbb{Z}$, то все однозначно, т.к. $e^{p(2\pi ik)} = 1$.

Если $p \in \mathbb{Q}$, $p = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{несократимая}}$, то $e^{\frac{m}{n}(2\pi ik)}$ – принимает n значений.

Если $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, то $e^{p(2\pi ik)}$ – принимает счетное кол-во значений.

Упражнение. 1. Найти i^i

$$2. \text{Д-ть, что } (z^p)' = \frac{pz^p}{z} \text{ при } z \neq 0$$

$$3. (zw)^p = z^p w^p \text{ как полные аналитичные функции, но это неверно для ветвей.}$$

4.4. Ряды Лорана

Определение 4.13. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ – ряд Лорана.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ – правильная часть.

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ – главная часть.

Ряд Лорана сходится \Leftrightarrow правильная и главная части сходятся.

Ниже будем считать, что $z_0 = 0$ для простоты записи.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – сх-ся в круге сх-ти $|z| < R$ – радиус сх-ти $[0, +\infty]$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$, где $w = \frac{1}{z}$ – сх-ся в круге сх-ти $|w| < \tilde{R} \implies |z| > \frac{1}{\tilde{R}} =: r$.

То есть ряд Лорана сх-ся в кольце $r < |z| < R$ – кольцо сх-ти ряда Лорана.

Свойства. 1. Ряд Лорана абс. сх-ся в кольце $r < |z| < R$, где $r, R \in [0, +\infty]$

2. В кольце, лежащем строго внутри кольца сх-ти, ряда Лорана сх-ся равномерно.

3. В кольце сх-ти ряд Лорана можно почленно дифференцировать.

4. Ряд Лорана в кольце сх-ти – голоморфная функция.

Теорема 4.24. О единственности ряда Лорана.

Пусть $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ в кольце $r < |z| < R$.

Тогда $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, где $r < \rho < R$.

Доказательство. $\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{|z|=\rho} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k}{z^{n+1}} dz =$

$= \int_{|z|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z|=\rho} z^{k-n-1} dz = 2\pi i a_n$ – т.к. при $|z| = \rho$ ряд равномерно сходится, то можно интегрировать по-членно.

$$\int_{|z|=\rho} z^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it} dt = \rho^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{при } m = -1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
□

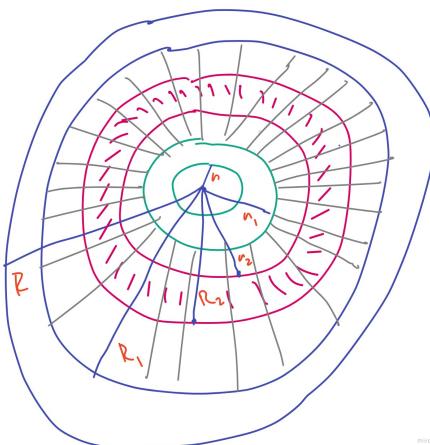
Замечание. Нер-во Коши тут тоже выполняется:

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}, \text{ где } M_\rho = \max_{|z|=\rho} \{|f(z)|\}.$$

Теорема 4.25. О существовании ряда Лорана.

Пусть $f \in H(r < |z| < R)$. Тогда $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, для некоторых $a_n \in \mathbb{C}$.

Доказательство. $r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$.



Берем $r_2 < |z| < R_2$: пишем для него и компакта $K = \{r_1 \leq |\zeta| \leq R_1\}$ интегральную теорему Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

1. Пускай $|\zeta| = R_1$, $|z| < R_2$, $|\frac{z}{\zeta}| < \frac{R_2}{R_1} < 1$.

Распишем: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$

Считаем первое слагаемое:

$$\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=R_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=:a_n} - \text{можем менять интеграл и}$$

сумму местами, из-за того, что ряд равномерно сходящийся.

2. Теперь пускай $|\zeta| = r_1$, $|z| > r_2$, $|\frac{\zeta}{z}| < \frac{r_1}{r_2} < 1$.

Распишем: $\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$.

Считаем второе слагаемое (переходы по аналогии):

$$-\int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=r_1} \frac{1}{z^{n+1}} f(\zeta) \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \underbrace{\int_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \zeta^n d\zeta}_{=:a_{n-1}}$$

Складывая воедино как раз и получим ряд Лорана для $f(z)$. □

Теорема 4.26. Пусть $f \in H(r < |z| < R)$. Тогда существует $g \in H(|z| < R)$ и $h \in H(|z| > r)$, т.ч. $f(z) = g(z) + h(z)$. А если добавить условие: $h \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$, то такое представление единственное.

Доказательство. Существование:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – главная часть (сх-ся в $\{|z| < R\}$), $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ – правильная часть (сх-ся в $\{|z| > r\}$).

Единственность:

Пусть $f(z) = g(z) + h(z)$, $f(z) = g_1(z) + h_1(z) \implies g(z) - g_1(z) = h_1(z) - h(z)$ при $r < |z| < R$.

$$F(z) := \begin{cases} g(z) - g_1(z), & \text{при } |z| < R \\ h_1(z) - h(z), & \text{при } |z| > r \end{cases} \in H(\mathbb{C})$$

Поймем, что F ограничена: $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 \implies$

$$|F(z)| \leq 1 \text{ при } |z| \geq \rho$$

$|F(z)|$ – ограничено при $|z| \leq \rho$, так как $F(z)$ непрерывная на компакте.

Получили, что $F(z)$ голоморфна на \mathbb{C} и ограничена \implies теорема Луивилля $F(z) \equiv const$.

А так как $F(z) \rightarrow_{z \rightarrow +\infty} 0$, то $F(z) = 0 \implies g_1 = g_2$ и $h_1 = h_2$. □

Определение 4.14. $a \in \mathbb{C}$. Если f голоморфна в проколотой окрестности точки a , но не голоморфна в a , то a – изолированная особая точка.

$$f \in H(0 < |z - a| < r)$$

Определение 4.15. Если существует $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, то a – устранимая особая точка.

Если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, то a – полюс.

Если $\lim_{z \rightarrow a}$ не существует, то a существенно особая точка.

Пример. 1. $\frac{\sin z}{z}, \frac{e^z - 1}{z}$. $z = 0$ - устранимая особая точка. Из Тейлора.

2. $\frac{1}{z}, \frac{1}{\sin z}$. $z = 0$ - полюс.

3. $e^{\frac{1}{z}}$. $z = 0$ - существенно особая точка. Предела нет, т.к. $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n$, $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n + \pi$. Разные последовательности точек.

Теорема 4.27. Характеристика устранимой особой точки

$f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1. a - устранимая особая точка
2. f ограничена в некоторой проколотой окрестности a
3. $\exists g \in H(|z - a| < r)$, такая, что $f(z) = g(z) \forall z \neq a$
4. В главной части ряда Лорана в точке a все коэффициенты 0

Доказательство. 1. $4 \Rightarrow 3$ - очевидно

2. $3 \Rightarrow 1$ - очевидно. g непрерывна, предел $g(a)$

3. $1 \Rightarrow 2$ - очевидно

4. Докажем $2 \Rightarrow 4$.

Пусть ограничена $\forall 0 < |z - a| < r: f(z) \leq M$

Запишем ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n$.

Теперь воспользуемся нер-вом Коши для ряда Лорана: $|c_n| \leq \frac{\max |f(z)|}{\rho^n}$ при $|z - a| = \rho$.

$c_{-n} \leq \rho^n \max f(z) \leq M\rho^n$ и устремим ρ к 0.

Получаем, что $M\rho^n \rightarrow 0$, а тогда и $c_{-n} \rightarrow 0$.

□

Теорема 4.28. Характеристика полюса

Пусть $f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1. a – полюс
2. Существует $g \in H(|z - a| < r)$, $g(a) \neq 0$, такая, что $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, $m \in \mathbb{N}$
3. В главной части ряда Лорана в точке a лишь конечное число ненулевых коэффициентов. Но они есть.

Доказательство. 1. $2 \Rightarrow 3$:

$g(z)$ – голоморфна, тогда раскладывается по Тейлору:

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$, $g(a) = c_0 \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^{n-m}$ – разложение в ряд Лорана, где $c^{-m} \neq 0$.

2. $3 \Rightarrow 1$:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

Все слагаемые $o((z-a)^{-m})$, тогда перепишем $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n \frac{(z-a)^{n+m}}{(z-a)^m}$ и становится видно, что при $z \rightarrow a$ каждая дробь стремится к ∞ .

3. $1 \Rightarrow 2$:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

Значит, в некоторой проколотой окрестности $0 < |z-a| < \varepsilon$: $|f(z)| > 1$.

Рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in H(0 < |z-a| < \varepsilon)$:

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0.$$

Доопределим $g(a) = 0$ и получим $g \in H(|z-a| < \varepsilon)$.

a – ноль функции g , тогда по теореме о нулях голоморфной функции $g(z) = (z-a)^m h(z)$, где $h(a) \neq 0$ и $h \in H(|z-a| < \varepsilon)$

$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z-a)^m h(z)$, тогда $f(z) = (z-a)^{-m} \frac{1}{h(z)}$ и $\frac{1}{h(z)} \in H(|z-a| < \varepsilon)$, потому что h не обращается в 0.

□

Определение 4.16. Это m называется порядком полюса.

Замечание. Это аналог кратности нуля

Замечание. f имеет в a полюс порядка $m \iff \frac{1}{f}$ имеет в точке a ноль кратности m (доопределяем $\frac{1}{f}$ в a пл непрерывности)

А также $\iff f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_m \neq 0$

Теорема 4.29. Характеристика существенной особой точки

$$f \in H(0 < |z-a| < r)$$

Следующие условия равносильны

1. a - существенно особая точка

2. В главной части ряда Лорана в точке a бесконечное число ненулевых коэффиц.

Доказательство. Доказательство очевидно следует из предыдущего.

□

Определение 4.17. f - мероморфная в Ω , если $f \in H(\Omega \setminus E)$ и в точках из E у неё полюсы

Пример. $f = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}$ - мероморфная в $\mathbb{C} \setminus 0$

Полюсы в точках $z = \frac{1}{\pi k}$.

Но при этом $\operatorname{ctg} \frac{1}{z}$ не будет мероморфной в \mathbb{C} . В точке $z=0$ проблема. В любой окрестности 0, найдётся плохая точка, а значит она не изолированная особая.

Замечание. 1. E не имеет предельных точек в Ω .

2. E не более чем счётно.

Свойства. Пусть f и g мероморфные в Ω . Тогда:

1. $f \pm g, \frac{f}{g}, fg, f'$ - мероморфны в Ω .

Доказательство. Если подставляем точки, которые не полюсы и не нули, то голоморфность сохранится.

Тогда пускай:

$$f(z) = \varphi(z)(z - a)^n, \text{ } a \text{ -- полюс или } 0.$$

$$g(z) = \psi(z)(z - a)^m, \text{ } a \text{ -- полюс или } 0.$$

(a) $f g$ и $\frac{f}{g}$:

$$\text{Тогда } f(z)g(z) = (z - a)^{n+m} \underbrace{\varphi(z)\psi(z)}_{=(*)}.$$

$(*)$ – в окр-ти точки a голоморфна и в самой точке в ноль не обращается.

Для отношения по аналогии.

(b) $f \pm g$:

Складываем ряды Лорана в точке a , в главной части $f \pm g$ конечное число ненулевых коэффициентов.

(c) f' :

$$f'(z) = (z - a)^n \varphi'(z) + n(z - a)^{n-1} \varphi(z) = (z - a)^{n-1} \cdot \underbrace{((z - a)\varphi'(z) + n\varphi(z))}_{=(*)}$$

$(*)$ – в окр-ти точки a голоморфна и в самой точке в ноль не обращается.

□

2. Порядки полюсов у f' на 1 больше, чем у f

Утверждение 4.30. Если f мероморфна в \mathbb{C} , то существует $g, h \in H(\mathbb{C})$, т.ч. $f = \frac{g}{h}$

Теорема 4.31. Сохоцкого

Пусть a – существенно особая точка функции f . Тогда $Cl(f(0 < |z - a| < \varepsilon)) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Более того, $\forall b \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ найдётся такая последовательность $z_n \rightarrow a$, т.ч. $f(z_n) \rightarrow b$

Доказательство. 1. Случай $b = \infty$. f не ограничена в $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$. Иначе a была бы устранимой особой точкой. Значит найдётся z_n , такое что $0 < |z_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(z_n)| \geq n$. $z_n \rightarrow a$ и $f(z_n) \rightarrow \infty$

2. $b \in \mathbb{C}$. Если найдётся последовательность $z_n \rightarrow a$, т.ч. $f(z_n) = b$, то всё ясно. Если не найдётся, то в некоторой проколотой окретности $0 < |z - a| < \varepsilon$ $f(z) \neq b$. Тогда рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z) - b} \in H(0 < |z - a| < \varepsilon)$. a – изолированная особая точка для g .

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$$

Если a – полюс у g , то a – устранимая особая точка f – не подходит

Если a – устранимая особая точка g , то a – устранимая особая точка f или полюс – не подходит

Значит a – существенно особая точка g . Воспользуемся уже доказанным случаем для g . Найдётся $z_n \rightarrow a$, такая, что $g(z_n) \rightarrow \infty$. А тогда $\lim f(z_n) = b$.

□

Теорема 4.32. Пикара

Пусть a – существенно особая точка f и $\varepsilon > 0$. Тогда $f(0 < |z - a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$ или \mathbb{C} без одной точки.

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ не обращается в ноль, хотя $z = 0$ - существенно особая точка.

Определение 4.18. Бесконечные пределы. $\lim z_n = \infty \iff \lim |z_n| = +\infty$

Свойства.

Если $\lim z_n = \infty$, w_n ограничена. Тогда $\lim(z_n \pm w_n) = \infty$

$$\lim z_n = 0 \iff \lim \frac{1}{z_n} = \infty$$

Если $\lim z_n = \infty$ и $|w_n| \geq c > 0$, то $\lim z_n w_n = \infty$

Доказательства очевидны + с первого курса

Определение 4.19. $f \in H(|z| > R)$. f голоморфна в ∞ , если там устранимая особая точка. То есть $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$

Замечание. $g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$ - перешли от бесконечности к нулю.

Замечание. $f \in H(|z| > R), g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$

1. ∞ - устранимая особая точка $f \iff 0$ - устранимая особая точка g
 2. ∞ - полюс $f \iff 0$ - полюс g
 3. ∞ - существенно особая точка $f \iff 0$ - существенно особая точка g
- $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{z^n}$$
4. ∞ - устранимая особая точка $f \iff$ коэфф. при положительных степенях 0
 5. ∞ - полюс $f \iff$ при положительных степенях лишь конечное число ненулевых коэффициентов.
 6. ∞ - существенно особая точка $f \iff$ при положительных степенях беск. число ненулевых коэффиц.

Теорема 4.33. Лиувилля

Если $f \in H(\bar{\mathbb{C}})$, то $f \equiv \text{const}$

Доказательство. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$, значит при больших ограничена. $|f(z)| \leq M$ для $|z| > R$. С другой стороны $f \in C(|z| \leq R)$. Значит $|f(z)| \leq \bar{M}$. По теореме Лиувилля(старой), $f \equiv \text{const}$ \square

Определение 4.20. Стереографическая проекция



$z = x + iy$ - плоскость. $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

$$u^2 + v^2 + (w - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$$

Или же $u^2 + v^2 + w^2 = w$ - уравнение сферы Римана.

Теорема 4.34. Связь между точкой на плоскости и точной на сфере

Точке z соответствует точка с координатами $(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2})$

Замечание. Точке (u, v, w) соответствует точка $z = x + iy = \frac{u}{1-w} + i \frac{v}{1-w}$

Доказательство. Прямая через точки $(0, 0, 1)$ и $(x, y, 0)$. Параметризация луча: $(xt, yt, 1-t)$. Нас интересует точка, в которой луч пересекает сферу, то есть:

$$(xt)^2 + (yt)^2 + (1-t)^2 = 1 - t.$$

$$(x^2 + y^2 + 1)t^2 + 1 - 2t = 1 - t \Leftrightarrow t = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{|z|^2 + 1} \quad \square$$

Следствие. 1. Расстояние между образами z и \tilde{z} равно $\rho = \frac{|z - \tilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2} \cdot \sqrt{1+|\tilde{z}|^2}}$, а расстояние между z и ∞ равно $\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$

Доказательство: предложено посчитать самому, у кого есть силы добавьте, плиз.

2. Сходимость на плоскости и сходимость на сфере Римана совпадают

Доказательство: $z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow \frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$

$$z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$$

$$\text{Пусть } \frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$$

Тогда $\frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$. Если z_n ограничена, то $|z_n - z_0| \rightarrow 0$

Если не ограничена, то возьмём $|z_{n_k}| \rightarrow \infty$, тогда $\frac{|z_{n_k} - z_0|}{\sqrt{1+|z_{n_k}|^2}} \rightarrow 1$

3. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - компакт.

4.5. Вычеты

Определение 4.21. a - изолированная особая точка. $f \in H(0 < |z-a| < R)$. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ - сходится при $0 < |z-a| < R$.

$$\operatorname{res}_{z=a} f = c_{-1}$$

Определение 4.22. $f \in H(|z| > R)$ раскладывается в $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$$

Свойства. 1. $f \in H(0 < |z-a| < R)$ и $0 < r < R$.

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$ - положительный обход точки a .

Доказательство: смотреть формулу для коэффициентов ряда Лорана.

2. $f \in H(|z| > R), r > R$.

Тогда $\operatorname{res}_{z=\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz$ - положительный обход для ∞

3. Если $a \in \mathbb{C}$ - полюс n -го порядка.

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z))$

Доказательство: Считаем, что $a = 0$.

$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k z^k \Rightarrow g(z) = z^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n} z^k$ - формула Тейлора.

Тогда $c_{-1} = \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$.

4. Если $a \in \mathbb{C}$ - полюс первого порядка.

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$

5. Если $a \in \mathbb{C}$, g и h голоморфны в окрестности точки a . $h(a) = 0, h'(a) \neq 0, g(a) \neq 0$. $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

Доказательство: $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{h(z)-h(a)} g(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

6. Если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$.

Тогда $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(A - f(z))$

Доказательство: $f(z) = A + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_n z^n$, правильная часть - константа, иначе всё бы попало на бесконечность.

7. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}$

Доказательство: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n-2}$$

Теорема 4.35. Коши о вычетах

f голоморфна в Ω , за исключением точек a_1, \dots, a_n . $K \subset \Omega$ - компакт и $a_1, \dots, a_n \in \operatorname{Int} K$

Тогда $\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$

Доказательство. У каждой точки можем взять окрестность, чтобы они лежали внутри компакта и попарно не пересекаются. $\tilde{K} = K \setminus \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(a_k)$ - компакт.

А ещё $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$

Из интегральной формулы Коши: $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = 0$

Но $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-a_k|=\varepsilon} f(z) dz$, а под знаком суммы - вычеты.



□

Следствие. Если f голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{a_1 \dots a_n\}$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = 0$

Доказательство: возьмём круг $B_R(0)$, внутри которого содержатся все эти точки.

$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f(z).$$

Но также $\int_{|z|=R} f(z) dz = \int_{|z|=R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$. Перекидываем и доказываем.

Пример. 1. $\int_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=\pi i} + \operatorname{res}_{z=-\pi i}) = -4\pi^5 i$.

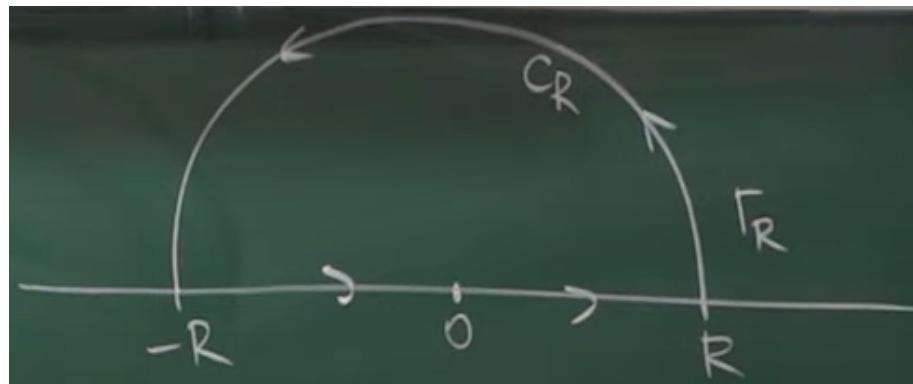
Особые точки: $e^z = -1$ при $z = \pi i + 2\pi i k$.

$$\text{Пусть } g(z) = z^4, h(z) = e^z + 1 \implies f = \frac{g}{h}.$$

$$\pi i - \text{полюс первого порядка: } \operatorname{res}_{z=\pi i} f = \frac{g(\pi i)}{h'(\pi i)} = -\pi^4$$

$$-\pi i - \text{полюс первого порядка: } \operatorname{res}_{z=-\pi i} f = \frac{g(-\pi i)}{h'(-\pi i)} = -\pi^4$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$



Контур - полукруг. $I := \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i \sum \operatorname{res}$

$$\text{Но с другой стороны } \int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^R + \int_{c_R}$$

$$\left| \int_{c_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} \right| \leq \underbrace{\pi R}_{\text{длина кривой}} \cdot \underbrace{\max \left| \frac{1}{1+z^{2n}} \right|}_{\text{макс. подынтегрального выражения}} = \pi R \frac{1}{\min |1+z^{2n}|} \leq \underbrace{\frac{\pi R}{R^{2n}-1}}_{|a+b| \geq |a|-|b|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$$

Значит то, что мы хотим найти - просто сумма вычетов.

Какие особые точки?

$z^{2n} = -1 \implies z = e^{\frac{\pi i k}{2n}}$ и k нечётно.

Нас интересует $k = 1, 3, \dots, 2n-1$

Тогда $I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{2k-1}$

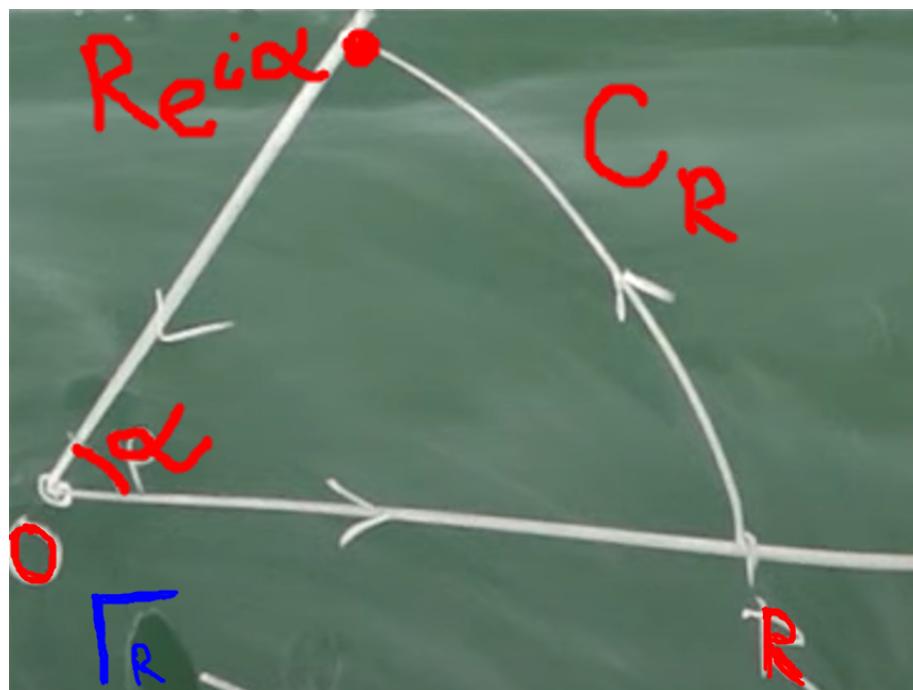
Все a_k – полюсы первого порядка:

(*): так как все a_k – корни уравнения $z^{2n} = -1$, то $a_k^{2n} = -1$.

$$\operatorname{res}_{a_k} f = \frac{1}{(z^{2n}+1)'} \Big|_{z=a_k} = \frac{1}{2n \cdot a_k^{2n-1}} = \frac{a_k}{2n \cdot a_k^{2n}} \underset{(*)}{=} -\frac{a_k}{2n}.$$

3. Оптимизация решения из предыдущего пункта: мы хотим считать не по всей дуге, а по какой-то ее части (до такого угла α , что интеграл $\int_{R \cdot e^{i\alpha}}$ был бы равен исходному интегралу, домноженному на какую-то константу).

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = I$ - т.к. функция $f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$ четная.



$$f(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}.$$

$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{C_R} + \int_0^R + \int_{R \cdot e^{i\alpha}}$ - интеграл по контуру разбили на кусочки.

$$\int_{R \cdot e^{i\alpha}}^0 f(z) dz = - \int_0^{R \cdot e^{i\alpha}} \underset{z=e^{i\alpha} \cdot t, t \in [0, R]}{=} - \int_0^R f(e^{i\alpha} t) e^{i\alpha} dt - \text{взяли параметризацию } z \rightarrow e^{i\alpha} t.$$

$$f(e^{i\alpha} t) = \frac{1}{1+e^{2n \cdot i \cdot \alpha} \cdot t^{2n}} \underset{\text{Хотим: } e^{2n \cdot i \cdot \alpha} = 1}{=} \frac{1}{1+t^{2n}}, \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Единственная особая точка $e^{\frac{i\pi}{2n}}$ (т.к. особые точки имеют вид $e^{\frac{\pi i k}{2n}}$, и мы хотим, чтобы точка лежала **строго внутри контура**: $0 < \frac{\pi k}{2n} < \alpha \Rightarrow 0 < \frac{\pi k}{2n} < \frac{\pi}{n} \Rightarrow k = 1$).

Тогда, так как особая точка для контура Γ_R всего одна, то интеграл \int_{Γ_R} равен: $2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} \dots$

Получаем равенство (при этом $\int_{C_R} \rightarrow 0$, т.к. он еще меньше того, что мы считали выше, поэтому про \int_{C_R} можно забыть): $2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} = \int_{\Gamma_R} = I - e^{i\frac{\pi}{n}} \cdot I + \int_{C_R} \Rightarrow$

$\Rightarrow I - e^{i\frac{\pi}{n}}I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} f = 2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}}}{2n}\right)$ - вычет именно такой, так как наша точка является полюсом 1-ого порядка, следовательно применимо свойство вычета $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \Rightarrow \operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

$$\text{Тогда } I = -\frac{2ie^{\frac{i\pi}{2n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{2n}}} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2i \cdot e^{\frac{2\pi}{2n}}}{e^{\frac{i\pi}{2n}} \cdot (e^{\frac{i\pi}{2n}} - e^{-\frac{i\pi}{2n}})} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}} \text{ - т.к. } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Лемма. Жордана

$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n, \operatorname{Im} z \geq 0\}, R_n \rightarrow +\infty$$

$$g : \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$M_n = \sup_{z \in C_n} |g(z)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Тогда } \forall \lambda > 0 : \int_{C_n} g(z) e^{i\lambda z} dz \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство. Пусть $f(z) = g(z)e^{i\lambda z}$.



Введем параметризацию: $z = R_n e^{it}$, $dz = R_n e^{it} dt$, где $t \in [0, \pi]$, тогда получим

$$\int_{C_n} f(z) dz = i \int_0^\pi R_n e^{it} \cdot f(R_n e^{it}) dt$$

Оценим этот интеграл по модулю:

$$\left| i \int_0^\pi R_n e^{it} f(R_n e^{it}) dt \right| \leq R_n \int_0^\pi \underbrace{|g(R_n e^{it})|}_{\leq M_n} \cdot \left| e^{i\lambda R_n e^{it}} \right| dt \leq M_n R_n \int_0^\pi \left| e^{i\lambda R_n e^{it}} \right| dt = (*)$$

Поймем, что такое $|e^{i\lambda R_n e^{it}}|$:

$$\operatorname{Re}(i\lambda R_n e^{it}) = \lambda R_n \operatorname{Re}(ie^{it}) = \lambda R_n (-\sin t)$$

Тогда можем продолжить оценивать исходный интеграл, но предварительно заметим, что под интегралом записана выражение симметричное относительно $\frac{\pi}{2}$, тогда переписываем так:

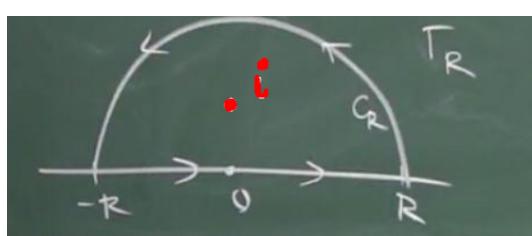
$$(*) = 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \sin t} dt \underset{(**)}{\leq} 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \frac{2}{\pi} t} dt = 2M_n R_n \frac{1 - e^{-\lambda R_n}}{\lambda R_n \frac{2}{\pi}} \leq \frac{\pi M_n}{\lambda} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

(**): верно, так как при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$: $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$. □

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = I$.

Можем считать на всей прямой и не исходный интеграл, а $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = I^*$.

Тогда $\operatorname{Re} I^* = 2I$.



Пусть $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.

Контур - полуокружность от $-R$ до R .

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R + \int_{C_R}.$$

Здесь $\int_{C_R} \rightarrow 0$ по лемме Жордана, где $\lambda = 1$ и $M_R = \sup_{|z|=R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \rightarrow 0$

(написанное выше верно, так как $|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$)

Тогда $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=i} f = (*)$.

i - полюс 1-ого порядка, тогда $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(i) \neq 0, h(i) = 0, h'(i) \neq 0$:

$$\operatorname{res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Тогда $(*) = \frac{\pi}{e} \implies I = \frac{\pi}{2e}$

Лемма. О полувычете

$f \in H(0 < |z - a| < R)$ и a - полюс первого порядка. $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \varepsilon, \alpha \leq \arg(z) \leq b\}$



Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = (\beta - \alpha)i \cdot \operatorname{res}_{z=a} f$

Доказательство. Считаем, что $a = 0$.

У нас полюс 1-го порядка, тогда $f(z) = \frac{c}{z} + g(z)$, где $g \in H(|z| < R)$.

Параметризация $z = \varepsilon e^{it}$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда $dz = \varepsilon e^{it} i dt$.

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{c}{z} dz + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{c}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon e^{it} i dt + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = (\beta - \alpha) \cdot i \cdot c + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz$$

Оценим второй интеграл:

g - голоморфна, тогда ограничена в окр. точки $\implies |g| \leq M$.

$$\left| \int_{C_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq M \underbrace{\varepsilon(\beta - \alpha)}_{\text{длина дуги}}, \text{ где } M = \max_{|z| \leq \frac{R}{2}} |g(z)|. \text{ и тогда } \int_{C_\varepsilon} g(z) dz \rightarrow 0. \quad \square$$

Определение 4.23. Главное значение интеграла (v.p. \int).

$\int_a^b f(x) dx$, где c - единственная особая (в этой точке нет непрерывности функции) точка, $c \in (a, b)$.

$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$ и устремляем ε к нулю. Предел - главное значение интеграла.

Пример. $v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$.

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 = 0$, потому что функция нечетная.

$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$

Свойства. 1. Если \int сходится, то $\int = v.p. \int$

2. Линейность

3. Аддитивность, если резать не по особым точкам

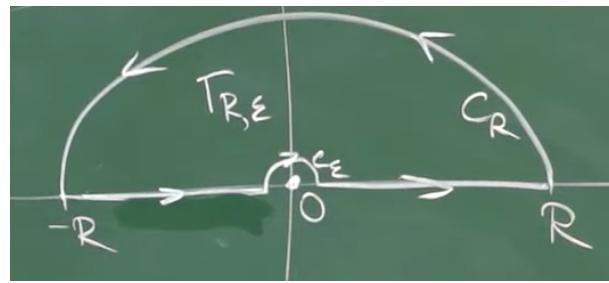
Пример. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Функция четная, поэтому $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$(\frac{e^{ix}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{ix}{x} + \dots)$.

Тогда $2I = \operatorname{Im} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R$.



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0$, так как особая точка только 0, а она не в контуре.

Но с другой стороны: $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon}$

$$1. \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \rightarrow v.p. \int_{-R}^R$$

$$2. \int_{C_R} \rightarrow 0 - \text{по лемме Жордана.}$$

$$3. \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \rightarrow -\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} f = (-\pi i) - \text{лемма о полувычете, где } \alpha = \pi, \beta = 0, 0 - \text{полюс 1-го порядка.}$$

А значит $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$.

$$\text{Тогда } I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \frac{\pi}{2}$$

Пример. $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$, где $0 < p < 1$.



$f(z) = \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z}$, и пусть $Ln(1) = 0$.

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-\varepsilon}^R + \int_{R e^{2\pi i}} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R}.$$

Но с другой стороны $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f = e^{(p-1)Ln(-1)} = e^{(p-1)\pi i} = -e^{p\pi i}$$

$$1. \int_{-\varepsilon}^R \rightarrow I$$

$$2. \int_{R e^{2\pi i}} = \int_R^\varepsilon \frac{e^{(p-1)\cdot(ln(x)+2\pi i)}}{1+x} dx = e^{2\pi i \cdot (p-1)} \cdot (-1) \cdot \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \rightarrow -e^{(p-1)2\pi i} \cdot I = -e^{2\pi pi} \cdot I$$

$$3. \left| \int_{C_R} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leq 2\pi R \cdot \max_{|z|=R} \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = 2\pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{\min |1+z|} = 2\pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{R-1} \rightarrow 0$$

$$4. \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leq 2\pi \varepsilon \cdot \max_{|z|=\varepsilon} \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = 2\pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{\min |1+z|} = 2\pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{1-\varepsilon} \rightarrow 0$$

Тогда получаем, что $I - e^{2\pi pi} \cdot I = -2\pi i e^{\pi pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi i e^{\pi pi}}{e^{2\pi pi} - 1} = \pi \cdot \frac{2i}{e^{\pi pi} - e^{-\pi pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Теорема 4.36. Пусть f - мероморфная функция в \mathbb{C} . z_1, \dots, z_n - полюсы. G_1, \dots, G_n - главные части рядов Лорана в точках z_1, \dots, z_n . ∞ - полюс или устранимая особая точка. G - правильная часть ряда Лорана в ∞

Тогда $f(z) = G(z) + \sum_{k=1}^n G_k(z) + C$, в частности, f - рациональная функция.

Доказательство. $g(z) = f(z) - G(z) - \sum_{k=1}^n G_k(z)$. У этой функции z_1, \dots, z_n, ∞ - устранимые особые точки, а во всех остальных точках есть голоморфность.

Тогда по теореме Луивилля $g \equiv const$. □

Теорема 4.37. Пусть f мероморфная функция в \mathbb{C} , z_1, z_2, \dots - полюсы, R_1, R_2, \dots - последовательность радиусов, т.ч. R_n возрастают и $R_n \rightarrow +\infty$, $M_{R_n} = \max_{|z|=R_n} |f(z)| \rightarrow 0$.

Тогда $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |z_k| < R_n} G_k(z)$.

Доказательство. $I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_n} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=:g(\zeta)} d\zeta = \sum \operatorname{res} g = \operatorname{res}_{\zeta=z} g(\zeta) + \sum_{k: |z_k| < R_n} \operatorname{res}_{\zeta=z_k} g$

1. $\text{res}_{\zeta=z} g = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)'}|_{\zeta=z} = f(z)$ – формула для полюса 1-ого порядка.

2. $\text{res}_{\zeta=z_k} g = \underbrace{\text{res}_{\zeta=z_k} \frac{f(\zeta) - G_k(\zeta)}{\zeta - z}} + \text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$
голоморфна в окр. z_k , т.е. равна 0

Рассмотрим окр. радиуса R и запишем интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{res}_{\zeta=z} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} + \text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$ – так как все особые точки для подынтегрального выражения это z и z_k .

$\text{res}_{\zeta=z} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = G_k(z)$ (по формуле для полюса 1-ого порядка), а второе слагаемое равно тому, что мы хотим найти.

$\left| \int_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{O(\frac{1}{R})}{R - |z|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$, где $G_k = \frac{c_{-1}}{\zeta - z_k} + \frac{c_{-2}}{(\zeta - z_k)^2} + \dots = O(\frac{1}{R})$ (кол-ва слагаемых конечно, т.к. a_k – полюс).

Из стремления к нулю, мы поняли, что $\text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = -G_k(z)$.

Теперь мы имеем, что $I_n(z) = f(z) - \sum_{k: |z_k| < R_n} G_k(z)$, осталось доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(z) = 0$.

Вспоминаем, что $I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ и тогда:

$$|I_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_n \cdot \max_{|\zeta|=R_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \leq R_n \cdot \frac{M_{R_n}}{R_n - |z|} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Пример. $\text{ctg}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$

Лемма. Существует M , такая что, $|\text{ctg } z| \leq M$ на окружностях $|z| = \pi(n + \frac{1}{2})$, где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Леммы.

Наблюдения про $\text{ctg } z$:

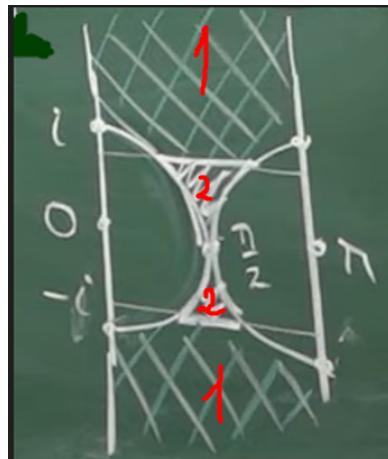
1. π -периодическая функция \implies все значения содержатся в полосе $0 \leq \text{Re}(z) \leq \pi$, можно все окружности сдвинуть по периоду.
2. нечетная функция \implies можем интересоваться только половиной картинки (давайте смотреть на $\text{Re}(z) \geq 0$).



Мы получаем полосу, за некоторым исключением (так как есть определенные точки, которые точно не получаются):

$$\{0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi\} \setminus \{|z| < \frac{\pi}{2}\} \cup \{|z - \pi| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Получаем следующее мн-во:



Хотим понять, что ctg ограничен на запятыхованом мн-ве.

$$z = x + iy$$

1. Зона 1 ($y \geq 1$ или $y \leq -1$, в силу нечетности ctg):

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos z}{\sin z} \right| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{1+e^{2iz}}{1-e^{2iz}} \right| \leq \frac{1+|e^{2iz}|}{|1-e^{2iz}|} = (*)$$

Пусть $z = x + iy$ и пока что $y \geq 1$:

$$|e^{2iz}| = |e^{2ix} \cdot e^{-2y}| = e^{-2y}, \text{ тогда } (*) = \frac{1+e^{-2y}}{|1-e^{2iz}|} \leq \frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \leq \frac{2}{1-e^{-2}}$$

2. Зона 2:

Очевидно, что эта зона это компакт, а ctg на ней непрерывен $\implies \operatorname{ctg}$ – ограничен на этом компакте.

□

Доказательство. Примера.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}, \text{ из леммы: } \operatorname{ctg} z \leq M \text{ при } |z| = \pi(n + \frac{1}{2}).$$

$$\text{Берем радиусы } R_n = \pi(n + \frac{1}{2}) \implies M_{R_n} \leq \frac{M}{\pi(n + \frac{1}{2})} \rightarrow 0.$$

Особые точки $f(z)$: $z = 0$ – полюс 2-ого порядка, $z = \pi k$ – полюсы 1-ого порядка при $k \neq 0$.

$$G_k \text{ – главная часть ряда Лорана в } \pi k, k \neq 0 \implies G_k(z) = \frac{\operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z}}{z-\pi k} = \frac{1}{\pi k(z-\pi k)}, \text{ где } \operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = \frac{\cos(z)}{\sin'(z)}|_{z=\pi k} = \frac{1}{\pi k}.$$

$G_0(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{\operatorname{res}_{z=0} f(z)}{z} = \frac{A}{z^2}$, вычет занулился, так как $f(z)$ – четная функция и все коэффициенты перед нечетными степенями в ряде Лорана равны 0.

$$G_0(z) = \frac{A}{z^2} = \frac{1}{z^2}, \text{ так как } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = \frac{\cos(z)}{z \sin(z)} \sim \frac{1}{z^2} \text{ при } z \text{ близких к нулю.}$$

$$\text{То есть } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = G_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k(z) + G_{-k}(z)) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi k(z-\pi k)} + \frac{1}{\pi(-k)(z+\pi k)} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - \pi^2 k^2}.$$

□

Пример. $(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z$

$$(\ln \frac{\sin z}{z})' = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \int_0^z (\operatorname{ctg} w - \frac{1}{w}) dw = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw \quad (\text{можем переставлять, потому что есть равномерная сходимость}).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \left(\frac{1}{w - \pi k} + \frac{1}{w + \pi k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(w - \pi k) + \ln(w + \pi k) \Big|_0^z = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(\frac{z^2 - \pi^2 k^2}{-\pi^2 k^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Тогда } \frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Либо } \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$. Посмотрим на $f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z)$. Тогда $\operatorname{res}_{z=k} f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z) \underset{\substack{f(z) \cdot \cos \pi z \\ f(k) \neq 0}}{=} \frac{f(z) \cdot \cos \pi z}{(\sin \pi z)'}|_{z=k} = \frac{f(k)}{\pi}$ - т.е.

если $f(k) \neq 0$, то $z = 0$ - полюс кратности 1, значит $\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}$ при условии, что $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$.

$$g(z) = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} \text{ и проинтегрируем.}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz = \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{1}{\pi k^2} + \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

$$\text{При этом есть такая оценка: } \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz \right| \leq (n + \frac{1}{2}) \cdot \frac{M}{(n + \frac{1}{2})^2} \rightarrow 0$$

$$\text{Значит, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

Такой вычет не очень приятно считать – раскладываем в ряд (хотим найти коэффициент c_{-1} перед $\frac{1}{z}$, т.к. это и есть вычет по определению). Тогда нужно найти коэффициент перед z^1 в разложении $\operatorname{ctg} z$, т.к. потом мы поделим на $\frac{1}{z^2}$ и получим то, что надо.

$$(*): \frac{1}{1-t} = 1 + t + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{Найдем коэффициент перед } z^1: \text{ в разложении } \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4)}{\pi z (1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))} \underset{(*)}{=}$$

$$= \frac{(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4))(1 + \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))}{\pi z} = \frac{1}{\pi z} - \frac{1}{3}\pi z + \mathcal{O}(z^3).$$

$$\text{То есть этот коэффициент равен: } -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Теорема 4.38. (О числе нулей и полюсов).

Пусть f мероморфна в Ω , γ – простая замкнутая кривая в Ω , не проходящая через нули и полюсы f .

$$\text{Тогда } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_f - \mathcal{P}_f$$

\mathcal{N}_f – количество нулей f с учетом кратности в контуре γ .

\mathcal{P}_f – количество полюсов f с учетом кратности (порядка) в контуре γ .

Доказательство. Если a – ноль или полюс f , то $f(z) = (z-a)^m g(z)$, где $g(a) \neq 0$ и g голоморфна в окрестности a .

1. Если a – ноль, то m – кратность нуля
2. Если a – полюс, то $-m$ – порядок полюса (т.к. m будет отрицательным числом).

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^mg'(z)$$

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$, второе слагаемое голоморфно в окрестности a . Значит, a - полюс первого порядка $\frac{f'}{f}$, а m - вычет.

Так как m - вычет, то со знаком плюс он пойдет в сумму как кратность нуля, а со знаком минус - как порядок полюса. \square

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$, γ - простая замкнутая кривая, не проходящая через нули f , тогда $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_f$

Доказательство. Потребовали голоморфность f , а значит, полюсов просто нет. \square

2. Принцип аргумента

Пусть $f \in H(\Omega)$, γ - простая замкнутая кривая в Ω , не проходящая через нули f .

Тогда $\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z)$, где Δ_{γ} - изменение аргумента при движении по кривой.

Доказательство. $\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Но $\frac{f'}{f} = (Ln f)'$. Если рассмотрим Ln на кривой γ , то это будет первообразная вдоль пути γ для $\frac{f'}{f}$.

$$\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} (Ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i} (\Delta_{\gamma} (\ln |f(z)| + i \arg f(z))) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z)$$

\square

Теорема 4.39. Руше

$f, g \in H(\Omega)$, γ - простой замкнутая кривая в Ω и $|f| > |g|$ на γ .

Тогда $f + g$ и f внутри γ имеют одинаковое число нулей с учетом кратности.

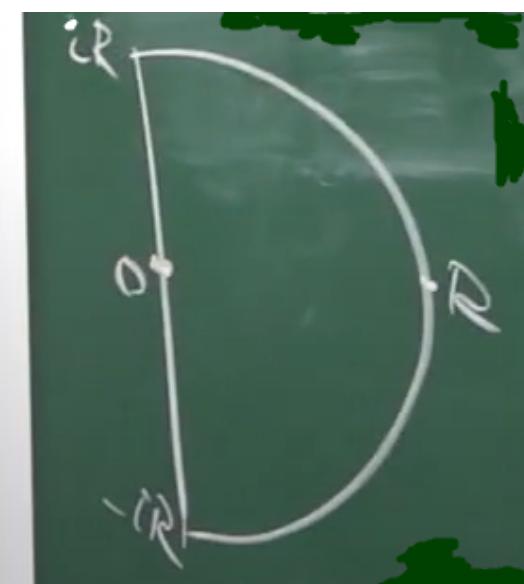
Доказательство. $\mathcal{N}_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(f+g)$. $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$ на γ , поэтому в ноль обращения нет и можно использовать принцип аргумента.

$$\mathcal{N}_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(f \cdot (1 + \frac{g}{f})) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(1 + \frac{g}{f}).$$

Значит надо доказать, что $\Delta_{\gamma} \arg(1 + \frac{g}{f}) = 0$.

Значения $1 + \frac{g}{f}$ на γ лежат в круге $|z-1| < 1$, потому что $\frac{|g|}{|f|} < 1$. А значит вокруг нуля обойти не можем и изменения аргумента нет. \square

Пример. $z - e^{-z} = \lambda > 1$. Хотим понять, что в правой полуплоскости есть ровно 1 корень.



Возьмём окружность большого радиуса и по ней обход по контуру γ .

Возьмём $f(z) = z - \lambda$ и $g(z) = -e^{-z}$. Хотим подставить в т. Руше, тогда необходимо чтобы $|f| > |g|$, проверим это:

1. На вертикальном отрезке: $|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{y^2 + \lambda^2} \geq \lambda > 1$, а $|g(z)| = |-e^{-iy}| = 1$, значит всё выполняется.
2. На полуокружности: $|f(z)| = |z - \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda$, а $|g(z)| = |-e^{-x-iy}| = e^{-x} \leq 1$. То есть если $R > \lambda + 1$, то $|f| > |g|$ на γ .

Тогда $\mathcal{N}_{f+g} = \mathcal{N}_f = 1$

4.6. Конформные отображения

Определение 4.24. Ω и $\tilde{\Omega}$ - области, $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ - конформное отображение, если f биекция и $f \in H(\Omega)$

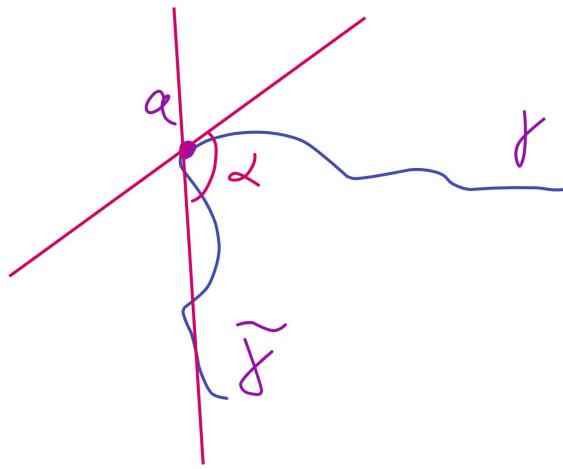
Теорема 4.40. Пусть $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, такая, что $f'(a) \neq 0$.

Тогда f сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку a .

Доказательство. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ и $\gamma(0) = a$ (можно так считать).

$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}$ и $\tilde{\gamma}(0) = a$.

Угол между кривыми в точке a определяется, как угол между касательными к данным кривым в данной точке.



miro

$\arg \gamma'(0) - \arg \tilde{\gamma}'(0)$ - угол между кривым в Ω .

$$\arg(f \circ \gamma)'(0) - \arg(f \circ \tilde{\gamma})'(0) = \arg f'(a)\gamma'(0) - \arg f'(a)\tilde{\gamma}'(0) = \arg \tilde{\gamma}'(0) - \arg \tilde{\gamma}'(0)$$

□

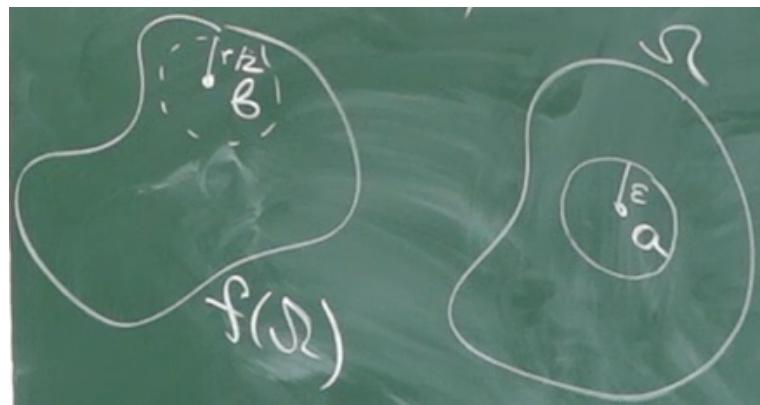
Определение 4.25. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ - однолистная, если $f \in H(\Omega)$ и инъекция.

Теорема 4.41. Если $f \in H(\Omega)$ и $f \neq \text{const}$, то $f(\Omega)$ - область.

Доказательство. 1. Линейная связность остаётся (т.к. при непрерывном отображении путь, соединяющий некоторые точки, под действием непрерывного отображения будет переходить в путь, соединяющий образы этих точек).

2. Нужно проверить, что $f(\Omega)$ - открытое множество. Возьмём точку в образе и докажем, что она там лежит с некоторым шариком.

$$b \in f(\Omega) \Rightarrow \exists a \in \Omega : f(a) = b.$$



Найдётся окружность $|z - a| = \varepsilon$, что $|f(z) - b| \neq 0$. Иначе бы на окружности радиуса $\frac{r}{n}$ нашлась точка z_n , такая, что $f(z_n) = b$, то $f \equiv b$ по теореме единственности, но $f \neq \text{const}$ по условию.

$r = \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - b| > 0$. Мы хотим показать, что некоторый шарик $B_{\frac{r}{2}}(b) \subset f(\Omega)$, для этого посмотрим на уравнение $f(z) - w = 0$. Хотим понять, что такое уравнение имеет решение при w близких к b (а именно: $|w - b| < \frac{r}{2}$). Это и будет значить, что близкие к b точки попадают в образ.

Подставим всё в теорему Руше: $f(z) - w = (f(z) - b) + (b - w)$. Нужно, чтобы $|f(z) - b| > |b - w|$: $|f(z) - b| \geq r$ - т.к. r - это минимум данного выражения.

$|b - w| \leq \frac{r}{2}$ - т.к. мы берем w из шарика $B_{\frac{r}{2}}(b)$.

Итого получаем: $|f(z) - b| \geq r > \frac{r}{2} \geq |b - w| \rightarrow |f(z) - b| > |b - w|$ - условия теоремы Руше выполнены, тогда $N_{f(z)-w} = N_{f(z)-b} \geq 1 \implies$ существует корень.

Возьмём $|b - w| < \frac{r}{2}$ и всё выполнится.

Получили, что $\{|w - b| < \frac{r}{2}\} \subset f(\Omega) \Rightarrow f(\Omega)$ открытое.

□

Следствие. Если f однолистна, то f конформное отображение Ω на $f(\Omega)$.

Теорема 4.42. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ однолистна. Тогда $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $f'(a) = 0$, $b = f(a)$. Возьмём ε так, что $f(z) - b \neq 0$ при $|z - a| = \varepsilon$ и $r = \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - b| > 0$.



Смотрим на уравнение $f(z) - w = f(z) - b + b - w$. Мы выяснили, что $\mathcal{N}_{f-w} = \mathcal{N}_{f-b} \geq 2$, потому что a - корень кратности ≥ 2 . Тогда $f(z) = w$ имеет хотя бы 2 решения. Но у нас инъекция, поэтому все решения с кратностью 2. Хотим показать, что тогда найдётся последовательность нулей производных, стремящаяся к точке a и получить противоречие.

Берём радиус $\frac{r}{2}$. $\{|w - b| \leq \frac{r}{2}\} \subset f(\Omega)$. Берём w_1, w_2, \dots из этого круга. Значит $\exists z_1, \dots$ из $|z - a| < \varepsilon$, $f(z_k) = w_k$ и $f'(z_k) = 0 \Rightarrow$ в $|z - a| \leq \varepsilon$ бесконечно много нулей f' . Значит у них есть предельная точка и тогда $f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv \text{const}$. \square

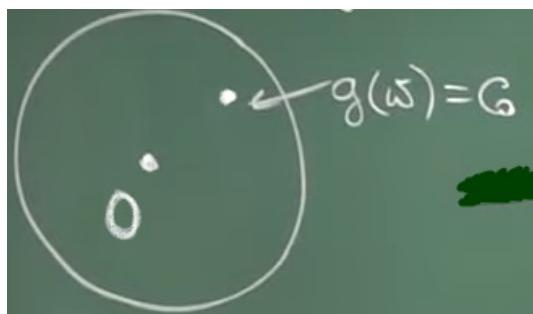
Замечание. Обратное неверно. $f(z) = e^z$, $f'(z) = e^z \neq 0$, но нет однолистности.

Следствие. 1. Конформное отображение сохраняет углы между кривыми

Доказательство: оно инъективно, а значит производная в ноль не обращается.

2. Если $f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$ однолистна в окрестности ∞ , то $c_1 \neq 0$.

Доказательство: $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ однолистна в проколотой окрестности нуля, в нуле можем доопределить, чтобы была голоморфность.



Теперь, когда g определена в нуле, то могло так случиться, что $\exists w : g(w) = g(0) = c_0$, то есть мы потеряли инъективность. Чтобы решить эту проблему уменьшим окрестность так, чтобы точка w в нее не попадала.

Тогда g однолистна в меньшей и уже непроколотой окрестности, тогда по теореме:

$$c_1 = g'(0) \neq 0.$$

3. f имеет полюс в точке a и однолистна в проколотой окрестности точки a , тогда это полюс первого порядка.

Доказательство: пусть $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ - однолистна в проколотой окрестности точки a . Можем доопределить нулём в точке a и тогда будет голоморфность, $g(a) = 0$.

Тогда g однолистна в окрестности точки a , а значит $g'(a) \neq 0$, тогда a - ноль первого порядка у g , а значит и ноль первого порядка у f .

Определение 4.26. Ω и $\tilde{\Omega}$ конформно эквивалентны, если $\exists f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ - конформное отображение.

Замечание. Это отношение эквивалентности.

Теорема 4.43. \mathbb{C} и \mathbb{D} не конформно эквивалентны.

Доказательство. От противного. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ - конформное отображение.

Тогда $f \in H(\mathbb{C})$, $|f| \leq 1$. Тогда f константа по теореме Луивилля. А это не биекция \square

Лемма. Шварца

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ голоморфная, $f(0) = 0$. Тогда:

1. $|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$
2. Если для какого-то $a \neq 0$, $|f(a)| = |a|$, то $f(z) = e^{i\phi}z$, где $\phi \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Пусть $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, в нуле устранимая особая точка (т.к. для $f(\cdot)$ 0 - ноль первого порядка, то $f(z)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности этой точки, при этом коэффициент $c_0 = f(0) = 0$, значит если далее поделить ряд на z , то новый ряд для $\frac{f(z)}{z}$ все равно будет сходиться, т.к. слагаемое $\frac{c_0}{z} = \frac{0}{z} = 0$), устраним - получим голоморфную в круге функцию. Согласно принципу максимума (т.е. Ω - компакт, максимум функции $f \in H(\Omega)$ достигается на границе компакта), в круге $|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r} \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} 1$. И тогда $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$

2. Знаем, что $|g(z)| \leq 1$ в \mathbb{D} . Если $|g(a)| = 1$, для $a \in \mathbb{D}$ (значит у нас есть какая-то внутренняя точка, в которой достигается максимум), то a является точкой максимума, тогда по принципу максимума, $g \equiv \text{const} \Rightarrow g(z) = e^{i\phi} \Rightarrow f(z) = e^{i\phi} \cdot z$

□

Теорема 4.44. Римана о конформных отображениях

Ω и $\tilde{\Omega}$ - односвязные области в $\bar{\mathbb{C}}$, причём их граница состоит больше, чем из одной точки (есть хотя бы какая-то кривая). Есть точка $z_0 \in \Omega$, $\tilde{z}_0 \in \tilde{\Omega}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Тогда существует единственное конформное отображение $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$, такое, что $f(z_0) = \tilde{z}_0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha$.

Доказательство. Единственность

1. $\Omega = \tilde{\Omega} = \mathbb{D}, z_0 = \tilde{z}_0 = \alpha = 0$.

Пусть $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $f(0) = 0$ и $\arg f'(0) = \alpha = 0$. По лемме Шварца для f получаем, что $|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$.

С другой стороны, $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ тоже конформное, $f^{-1}(0) = 0$, значит для неё тоже можно применить лемму Шварца. $|f^{-1}(z)| \leq |z| \Rightarrow |z| \leq |f(z)|$.

Значит $|f(z)| = |z| \forall z \in \mathbb{D}$, тогда по лемме Шварца это поворот, то есть $f(z) = e^{i\phi}z$.

Также мы знаем, что $f'(z) = e^{i\phi}$ и $\arg f'(0) = \alpha = 0 \Rightarrow e^{i\phi} = 1$.

Итого, получили, что $f(z) = z \Rightarrow$ есть единственность, т.к. мы явно предъявили функцию.

2. Ω и $\tilde{\Omega}$ произвольные. Пусть $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ - конформное. $f_i(z_0) = \tilde{z}_0$ и $\arg f'_i(z_0) = \alpha$, где $i \in \{1, 2\}$.

Воспользуемся существованием:

- $\exists \phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ - конформное, $\phi(0) = z_0$ и $\phi'(0) > 0$ (то есть, что $\arg \phi'(0) = 0$).
- $\exists \psi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$ - конформное, $\psi(\tilde{z}_0) = 0$ и $\arg \psi'(\tilde{z}_0) = -\alpha$.

Посмотрим на $g_i = \psi \circ f_i \circ \phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$:

- $g_i(0) = 0$
- $g'_i(0) = \psi'(f_i(\phi(0))) \cdot f'_i(\phi(0)) \cdot \phi'(0) = \psi'(\tilde{z}_0) \cdot f'_i(z_0) \cdot \phi'(0)$ - мы интересуемся аргументом g'_i , но аргумент произведения равен сумме аргументов, тогда:
 $\arg g'_i(0) = -\alpha + \alpha + 0 = 0$ - сумма аргументов множителей.

То есть мы получили, что g_1 и g_2 – два комформных отображения из круга в круг, переводящие ноль в ноль, и производную в нуле имеют с нулевым аргументом $\xrightarrow[\text{по пункту (1)}]{} g_1(z) = g_2(z) = z$.

Тогда восстановим f_i и поймем, что они равны:

$f_i(\phi(z)) = \psi^{-1}(g_i(z)) \implies f_i(z) = \psi^{-1}(g_i(\phi^{-1}(z))) \implies$ т.к. $g_1 = g_2$, то по полученной формуле $f_1 = f_2$.

□

Следствие. Обобщенная теорема Лиувилля

$f \in H(\mathbb{C})$ и f не принимает значения на некоторой кривой γ . Тогда $f \equiv const$

Доказательство. $\bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ - односвязная область, с границей, состоящей из более чем одной точки.

Тогда по теореме Римана о конформных отображениях существует $g : \bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{D} \Rightarrow g \circ f \in H(\mathbb{C})$ и $g \circ f \subset \mathbb{D}$, то есть это ограниченная функция.

Тогда по теореме Лиувилля (стандартной), $g \circ f$ - константа, значит $f(z) = g^{-1}(const) = const$.

□

Замечание. Малая теорема Пикара

Если $f \in H(\mathbb{C})$ не принимает 2 каких-то значения, то $f \equiv const$.

Пример. $f(z) = e^z \neq 0$ - одно значение целая функция может не принимать.

Следствие. Если f мероморфна в \mathbb{C} и не принимает 3 значения, то $f \equiv const$

Доказательство. Пусть нет значений a, b, c . Сделаем из мероморфной - голоморфную, которая не принимает 2 значения. Пусть $c \neq \infty$, тогда $g(z) = \frac{1}{f(z)-c} \in H(\mathbb{C})$, но она не принимает значения $\frac{1}{a-c}$ и $\frac{1}{b-c}$, а тогда по малой теореме Пикара получаем, что $f \equiv const$.

□

Пример. $f(z) = \operatorname{tg} z \neq \pm i$ - пример мероморфной функции, не принимающей 2 значения.

Определение 4.27. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ - дробно-линейное отображение, $ad - bc \neq 0$.

Теорема 4.45. Если $f \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\})$ и однолистна, то f дробно-линейное отображение.

Доказательство. 1. z_0 – существенная особая точка. Тогда по теореме Сохоцкого $\operatorname{Cl} f \{0 < |z - z_0| < r\} = \mathbb{C}$ при некотором r .

Возьмём $b = f(a)$. Тогда $f(|z - a| < \varepsilon)$ – открытое множество (т.к. $\{|z - a| < \varepsilon\}$ – открытое и f – однолистная).

Возьмем r и ε такими, чтобы шарики не пересекались, т.е.: $\{|z - a| < \varepsilon\} \cap \{|z - z_0| < r\} = \emptyset$.

Так как функция f однолистная (есть инъективность), то и образы данных шариков тоже не будут пересекаться: $f(|z - a| < \varepsilon) \cap f(0 < |z - z_0| < r) = \emptyset$.



Так как образ открытого множества при непрерывном отображении переходит в открытое множество, то $f(|z - a| < \varepsilon)$ и $f(0 < |z - z_0| < r)$ - открыты. Тогда к одному из них можно приписать замыкание, и они все еще не будут пересекаться \Rightarrow к $f(0 < |z - z_0| < r)$ припишем замыкание:

$f(|z - a| < r) \cap Cl\ f(0 < |z - z_0| < \varepsilon) = \emptyset$ – однако мы только что показали, что замыкание это все $\mathbb{C} \Rightarrow$ противоречие. Следовательно, z_0 - точно не существенная особая точка.

2. $z_0 \neq \infty$ – полюс. Тогда из однолистности это полюс первого порядка. Тогда в главной части Лорана лишь конечное число ненулевых слагаемых, а именно ровно одно (т.к. полюс кратности 1): $\frac{c}{z-z_0}$ – вычтем его из функции f (останется только ряд Тейлора) и получим функцию голоморфную на всей плоскости:

$$g(z) = f(z) - \frac{c}{z-z_0} \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow g(z) = const \Rightarrow f(z) = \frac{c}{z-z_0} + const$$

3. $z_0 = \infty$ – полюс. Тогда в правильной части ряда Лорана для f есть только 1 ненулевой коэффициент при z^1 : $c \cdot z^1$ – вычтем его и получим голоморфную на всей плоскости функцию: $g(z) = f(z) - cz \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow g(z) = const \Rightarrow f(z) = cz + const$ – т.е. f является линейной функцией.

4. z_0 – устранимая особая точка. Устраним особенность в данной точке $\Rightarrow f \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f \equiv const \Rightarrow$ нет однолистности f – противоречие. Следовательно, z_0 не является устранимой особой точкой.

□

Следствие. Если функция $f \in H(\mathbb{C})$ и однолистная, то f линейная.

Доказательство. $z_0 = \infty$ в теореме.

□

4.7. Производящие функции

Определение 4.28. Есть последовательность a_0, a_1, \dots . Производящая функция последовательности $\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Мы хотим, чтобы ряд сходился при $|z| < R$ для какого-то $R > 0$

Пример. Задача о размене

Есть монетки 1, 2, 5, 10 рублей. Интересуемся, каким количеством способов мы можем разменять n рублей, если запас монет не ограничен, пусть это число равно a_n .

Вместо формулы для этих коэффициентов будет искать формулу для ряда:

$$\mathcal{A}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Это будет равно:

$$\mathcal{A}(z) = (1 + z + z^2 + \dots)(1 + z^2 + \dots)(1 + z^5 + z^{10} + \dots)(1 + z^{10} + z^{20} + \dots) \text{ и раскроем все скобки.}$$

Коэффициент при $z^n = z^a \cdot z^{2b} \cdot z^{5c} \cdot z^{10d}$, где $a + 2b + 5c + 10d = n$. Тогда коэффициент a_n – число решений уравнения $a + 2b + 5c + 10d = n$ в неотрицательных целых числах.

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z^{10}}.$$

Определение 4.29. $H \subset \mathbb{N}$, $p(n, H)$ - количество способов представить n в виде суммы слагаемых из H .

$$\mathcal{F}_H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, H) z^n = \prod_{k \in H} \frac{1}{1-z^k}$$

Если каждое слагаемое можно брать $\leq m$, то $\prod_{k \in H} \frac{1 - z^{(m+1)k}}{1 - z^k} = (1 + z^k + z^{2k} + \dots + z^{mk})$

Определение 4.30. Число разбиений n на натуральные слагаемые $p(n) = p(n, \mathbb{N})$.

Теорема 4.46. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}$ – сходится при $|z| < 1$ и $p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ при $0 < r < 1$.

Доказательство. $\ln \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-z^k} \right| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} -\ln |1-z^k| = (*)$ – покажем, что этот ряд сходится.

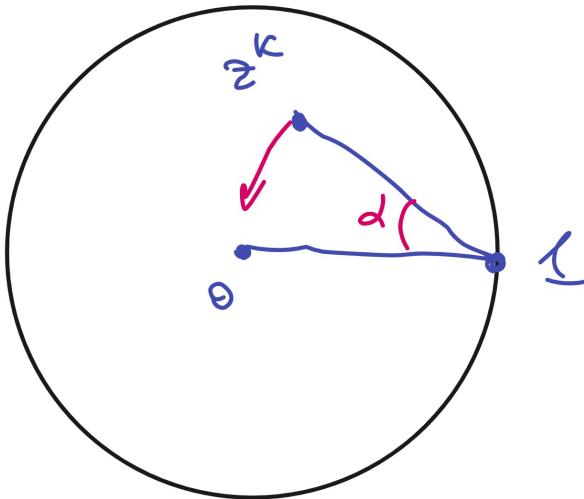
1. $\ln(1-t) \geq -t - t^2 \implies -\ln(1-t) \leq t + t^2$
2. $\ln |1-z^k| \geq \ln(1-|z|^k) \implies -\ln |1-z^k| \leq -\ln(1-|z|^k) \leq |z|^k + |z|^{2k}$

Из пункта (2) выше получаем, что $(*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z|^k + \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{2k} < +\infty$ – справа от нер-ва сумма рядов сх-ся, тогда и $(*)$ тоже.

Проверим, что аргумент ничего не испортит:

$$\arg \left(\frac{1}{1-z^k} \right) = -\arg(1-z^k)$$

$$|\arg(1-z^k)| \leq \arcsin |z|^k \leq 2|z|^k$$



mira

Т.к. z ($|z| < 1$) возводится в степень k , и $k \rightarrow +\infty$, то $z^k \rightarrow 0$, значит угол α стремится к нулю (см. картинку).

Действительно, аргумент ничего не портит. □

Замечание. Теорема Харди-Рамануджана

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{n}}$$

Теорема 4.47. Эйлера

Количество разбиений n на нечётные слагаемые равно количеству разбиений n на различные слагаемые

Доказательство. Для различных слагаемых – $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k)$.

Для нечётных слагаемых – $\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{2k-1}}\right)$.

Хотим понять, что это одно и то же:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{2k-1}}\right) = \frac{\text{Произведение всех } k}{\text{Произведение четных } k} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}}{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^{2k}}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-z^{2k}}{1-z^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k) \quad \square$$

Пример. $b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \dots b_{2k}$ счастливый билет, если сумма первых k равна сумме последних k .

Пусть a_n – количество k -значных чисел с суммой цифр n . То есть количество счастливых билетов $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{9k}^2$.

Пусть $\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1 + z + z^2 + \dots + z^9)^k$

$\mathcal{A}(z) \cdot \mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right)$ – здесь коэффициент перед z^0 – это $a_0^2 + a_1^2 + \dots$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\mathcal{A}(z)\mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right)}{z} dz$ – количество счастливых билетов.

Пример. Диагонализация степенных рядов

Пусть дана $f(w, z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} w^n z^k$, а мы хотим найти $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nn} w^n$.

Запишем $f\left(\frac{w}{z}, z\right) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} \frac{w^n}{z^n} z^k$, видно, что нас интересует коэффициент перед z^0 (если мы его найдем, то получим ответ).

$$\begin{aligned} \text{То есть } g(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f\left(\frac{w}{z}, z\right)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} w^n z^{k-n-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n,k=0}^{\infty} w^n a_{nk} \underbrace{\int_{|z|=r} z^{k-n-1} dz}_{=0, \text{ при } k \neq n, \text{ } 2\pi i \text{ иначе}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} w^n a_{nn} 2\pi i = g(w) \end{aligned}$$

Чтобы можно было переставить интеграл и сумму, нужна равномерная сходимость. То есть нужно попасть строго внутрь круга сходимости ряда $\sum |a_{nk}| r^{k-1} \left|\frac{w}{z}\right|^n$.

Пусть радиус сх-ти для z и для w равен R , тогда нужно, чтобы $r < R, \left|\frac{w}{r}\right| < R$.

Давайте теперь воспользуемся полученной схемой на конкретном примере:

пусть $f(w, z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} w^n z^k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} w^{m-k} z^k = \sum_{m=0}^{\infty} (w+z)^m = \frac{1}{1-w-z}$.

Найдем $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f\left(\frac{w}{z}, z\right)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z(1-\frac{w}{z}-z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2-z+w} = (*)$.

Ищем нули знаменателя, получаем особые точки: $\frac{1 \pm \sqrt{1-4w}}{2}$.

В контур попадает только $\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}$, так как второй корень близок к 1, а этот как раз к нулю.

$$(*) = -\text{res} = -\frac{1}{2z-1} \Big|_{z=\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4w}}.$$

Мы получили, что $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} w^n = \frac{1}{\sqrt{1-4w}}$.

Определение 4.31. Произведение Адамара

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\mathcal{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Пример. Как находить произведение Адамара.

$$f(w, z) = \mathcal{A}(z)\mathcal{B}(w) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n b_k z^n w^k.$$

Нас интересует диагональ этой штуки.

Теорема 4.48. Произведение Адамара рациональных функций – рациональная функция

Определение 4.32. Последовательность $\{a_n\}$ – **квазимногочлен**, если

$$a_n = p_1(n)q_1^n + p_2(n)q_2^n + \dots + p_k(n)q_k^n,$$

где $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}$, а p_1, \dots, p_k – многочлены с комплексными коэффициентами.

Лемма. $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – рациональная функция \Leftrightarrow при больших n : a_n – квазимногочлен.

Доказательство. 1. \Rightarrow . Разложим рациональную функцию на простейшие, $\frac{1}{(1-qz)^m}$ – то есть на линейную комбинацию таких.

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} z^n$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{(1-qz)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)\dots(n+1)}{(m-1)!} q^n z^n$$

2. \Leftarrow . Достаточно понять, что $a_n = p(n) \cdot q^n$ имеет рациональную производящую функцию, а потом просто сложить в сумму.

Индукция по степени многочлена:

(а) База: $\deg = 0$, $a_n = q^n$ производящая функция $\frac{1}{1-qz}$.

(б) Переход: $d - 1 \rightarrow d$.

Возьмём конкретный многочлен степени d : $\tilde{p}(n) = \frac{(n+d)(n+d-1)\dots(n+1)}{d!}$.

Для $b_n = \tilde{p}(n)q^n$ производящая функция $\frac{1}{(1-qz)^{d+1}}$.

Из $p(n)$ вычтем $c \cdot \tilde{p}(n)$ так, чтобы степень уменьшилась, тогда по предположению индукции – все работает.

□

Пример. Метод Дарбу

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < R$.

Тогда при любом r , таком что $r < R$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ – сходится и $a_n r^n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n = o(r^{-n})$.

Пусть R – радиус сходимости $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, тогда мы знаем, что на границе круга сходимости есть особая точка.

Если особых точек конечное число и это полюсы (для простоты будем считать, что одна), то тогда возьмём эту точку и напишем главную часть ряда Лорана:

$h(z)$ = главная часть ряда Лорана для функции f в точке a .

Тогда $g(z) = f(z) - h(z)$ имеет устранимую особую точку a . Давайте устраним ее, тогда $g(z)$ голоморфна в точке a . Тогда скорее всего её радиус сходимости $\tilde{R} > R$.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \Rightarrow b_n = o((\tilde{R} - \varepsilon)^{-n})$$

$h(z) = \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_r}{(z-a)^r}$, где r – порядок полюса, у $h(z)$ можно явно выписать коэффициенты (самый быстрорастущий это последний).

$$\frac{1}{(z-a)^r} = \frac{1}{a^r (\frac{z-a}{a})^r} = \frac{(-1)^r}{a^r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} \left(\frac{z-a}{a}\right)^n$$

Оценим биномиальный коэффициент: $\binom{n+r-1}{r-1} = \frac{(n+r-1)\dots(n+1)}{(r-1)!} \sim \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.

$$\text{Тогда } a_n \sim c_r \cdot \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{(-1)^r}{a^{n+r}}$$

Теорема 4.49. Пусть $f \in H(|z| < R)$, где $R > 1$ и $f(1) \neq 0$.

Пусть $\frac{f(z)}{(1-z)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, -1, -2 \dots$

$$\text{Тогда } b_n \sim f(1) \cdot \binom{n+\alpha-1}{n} \sim f(1) \cdot \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Доказательство. Возьмём $1 < r < R$ и разложим $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Ряд сходится в точке $z = r \Rightarrow a_n = o(r^{-n})$.

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+\alpha-1}{n}}_{=\frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots\alpha}{n!}} z^n.$$

Получаем:

$$\frac{f(z)}{(1-z)^\alpha} = \sum a_n z^n \cdot \sum \binom{n+\alpha-1}{n} z^n$$

$$b_n = a_n \binom{\alpha-1}{0} + a_{n-1} \binom{\alpha}{1} + \dots + a_0 \binom{n+\alpha-1}{n} = \binom{n+\alpha-1}{n} (a_0 + \frac{n}{n+\alpha-1} a_1 + \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} a_2 + \dots + (\dots) \cdot a_n),$$

где все коэффициенты при a_i стремятся к 1.

$$\begin{aligned} \text{Хотим сказать, что } b_n &\sim \binom{n+\alpha-1}{n} \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \sim \binom{n+\alpha-1}{n} \cdot f(1) = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} f(1) \rightarrow \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot f(1) - \text{последний переход из формулы Эйлера-Гаусса.} \end{aligned}$$

$$\text{Осталось понять, что } \Delta_n = (a_0 + \frac{n}{n+\alpha-1} a_1 + \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} a_2 + \dots + (\dots) \cdot a_n) - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \rightarrow 0.$$

Мы знаем, что $a_n = \mathcal{O}(r^{-n}) \Rightarrow |a_n| \leq \frac{C}{r^n}$.

$$\text{Тогда } |\Delta_n| \leq |a_1| \underbrace{\left| \frac{n}{n+\alpha-1} - 1 \right| + |a_2| \left| \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} - 1 \right| + \dots + |a_m| |(\dots) - 1| +}_{\text{конечное число слагаемых} \rightarrow 0} + \left(\frac{C}{r^{m+1}} + \frac{C}{r^{m+2}} + \dots \right)$$

Подберём так m чтобы $\sum \frac{C}{r^{m+i}} \leq \varepsilon$. И тогда всё выполнилось при больших n . \square

Пример. 1. $f(z) = \frac{\sqrt{2-z}}{(1-z)^2}$

Здесь круг сходимости $|z| < 1$, особая точка $z = 1$ – полюс второго порядка.

Главная часть ряда Лорана: $\frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2}$.

$$\text{Здесь } b = \sqrt{2-1} = 1, a = \text{res}_{z=1} = ((1-z)^2 f(z))' \Big|_{z=1} = (\sqrt{2-z})' \Big|_{z=1} = \frac{-1}{2\sqrt{2-z}} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

$g(z) = f(z) - \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z}$ – голоморфна в $z = 1$, тогда $g \in H(|z| < 2)$.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $b_n = o\left(\frac{1}{(2-\varepsilon)^n}\right)$

$$a_n = b_n - \frac{1}{2} + n + 1 = n + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{(2-\varepsilon)^n}\right)$$

2. $f(z) = \frac{e^z}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, круг сходимости $|z| < 1$, но $z = 1$ не полюс, а точка ветвления.

$$g(z) = \frac{e^z}{\sqrt{1-z}} - \frac{e}{\sqrt{1-z}} = \frac{e}{\sqrt{1-z}} (e^{z-1} - 1) = \frac{e}{\sqrt{1-z}} (1-z) \underbrace{\frac{e^{z-1}-1}{1-z}}_{=h(z), \text{ голоморфна в } 1} = e\sqrt{1-z} h(z), \text{ где на}$$

самом деле $h(z) = \frac{1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2}+\dots}{1-z} \in H(\mathbb{C})$.

$$g(z) = \sum b_n z^n, \text{ из теоремы имеем } b_n \sim h(1) \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\frac{1}{\sqrt{\pi n} \sqrt{n}}$$

$$e\sqrt{1-z} = e \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

$$\text{Тогда } a_n = e \cdot c_n + b_n = \underbrace{\frac{e \cdot \binom{2n}{n}}{4^n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} + b_n = e \cdot \underbrace{\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n - \text{с одной из прошлой лекции. Тогда } \sqrt{1-z} = \sum \binom{2n}{n} \frac{z^n}{4^n}.$$

$$\text{И тогда } a_n = e \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} + b_n = e \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Пример. Метод Лапласа

Есть $2k$ -значный номер, интересуемся количеством таких номеров, что сумма первых k знаков равна сумме последних k (счастливые билеты).

Пусть a_k = количество $2k$ значных счастливых билетов.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \mathcal{A}(z) \mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}$$

$$\mathcal{A}(z) = (1 + z + z^2 + \dots + z^9)^k = \left(\frac{1-z^{10}}{1-z}\right)^k$$

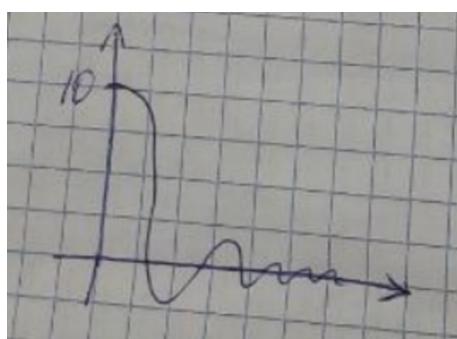
$$\text{Тогда } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{(1-z^{10})(1-z^{-10})}{(1-z)(1-\frac{1}{z})}\right)^k \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{2-z^{10}-z^{-10}}{2-z-\frac{1}{z}}\right)^k \frac{dz}{z} = (*)$$

Делаем замену: $z = e^{it}$, $dz = i \cdot e^{it} dt$.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-e^{10it}-e^{-10it}}{2-e^{it}-e^{-it}}\right)^k \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-2\cos(10t)}{2-2\cos t}\right)^k dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sin^2(5t)}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\right)^k dt = \\ &\text{Делаем доп. замену: } s = \frac{t}{2}, \quad 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2 \left(\frac{\sin(10s)}{\sin s}\right)^{2k} ds \quad \underbrace{=} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x}\right)^{2k} dx. \end{aligned}$$

т.е. симметрия отн. $\frac{\pi}{2}$

Можно выловить скорость роста интеграла: поведение определено точкой максимума у $\frac{\sin(10x)}{\sin x}$.



1. В нуле максимум равен 10
2. В окрестности нуля разложим по Тейлору
3. Остальное просто оценим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x}\right)^k dx = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$$

1. Посмотрим на окрестность нуля.

Раскладываем по Тейлору:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(10x)}{\sin x} &= \frac{10x - \frac{(10x)^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)} = 10 \cdot \frac{1 - \frac{100x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \\ &= 10(1 - \frac{100}{6}x^2 + \mathcal{O}(x^4))(1 + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)) = 10(1 - \frac{33}{2}x^2 + O(x^4)) \end{aligned}$$

Под интегралами у нас это степенная функция, поэтому распишем логарифм от нашего выражения:

$$\ln \frac{\sin(10x)}{\sin x} = \ln \left(10 \left(1 - \frac{33}{2} x^2 + O(x^4) \right) \right)$$

$$\left(\frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} = e^{2k \ln(10(1 - \frac{33}{2} x^2 + O(x^4)))} = 10^{2k} \cdot e^{-33kx^2} \cdot e^{\mathcal{O}(2kx^4)}$$

Подставим это в интеграл с ε :

$$k\varepsilon^4 \rightarrow 0,$$

$$\int_0^\varepsilon 10^{2k} e^{-33kx^2} \underbrace{e^{\mathcal{O}(kx^4)}}_{=e^{\mathcal{O}(k\varepsilon^4)}, \text{ выберем } \varepsilon \text{ так, что } =1+\mathcal{O}(k\varepsilon^4)} dx = 10^{2k} (1 + \mathcal{O}(k\varepsilon^4)) \int_0^\varepsilon e^{-33kx^2} dx = (')$$

Делаем замену: $y = \sqrt{33k}x$.

$$(') = 10^{2k} (1 + \mathcal{O}(k\varepsilon^4)) \int_0^{\varepsilon\sqrt{33k}} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{33k}} dy \sim 10^{2k} \frac{1}{\sqrt{33k}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = (")$$

Хотим, чтобы $\varepsilon\sqrt{33} \rightarrow +\infty$, тогда $(") \rightarrow \int_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Для этого подойдет $\varepsilon = \sqrt{1}k^{\frac{1}{3}}$.

2. Посмотрим на остальное.

$$\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} dx \leq \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{длина отрезка} \leq \text{этого}} \left(\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{10})} \right)^{2k}$$

если $\frac{\pi}{10}$ не подойдет, то немного подвинуть.

Смотрим на вторую часть:

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} \underbrace{\leq}_{\text{т.к. функция убывает}} \frac{\pi}{10} \left(\frac{\sin(10\varepsilon)}{\sin \varepsilon} \right)^{2k} \underbrace{=}_{\text{считали в предыдущем пункте}} \frac{\pi}{10} 10^{2k} \underbrace{e^{-33k\varepsilon^2}}_{\text{быстро убывает}} \underbrace{e^{\mathcal{O}(k\varepsilon^4)}}_{\sim 1}$$

Метод работает в случае $\int_a^b (f(x))^n$ и $n \rightarrow \infty$.

5. Ряды Фурье

5.1. Пространства Лебега

Определение 5.1. μ – мера, $p \geq 1$.

$L^p(E, \mu) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ - измеримые, т.ч. } \int_E |f|^p d\mu < \infty\}$ – векторное пр-во.

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Нер-во треугольника – нер-во Минковского: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
2. Неотрицательность: $\|f\|_p \geq 0$.
3. Константа выносится: $\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$.
4. Но в нуле не всегда значение равно нулю: $\|f\|_p = 0 \Rightarrow$ интеграл от неотрицательной функции $|f|^p$ равен нулю $\Rightarrow f = 0$ **почти везде**.

Рассматриваем не функции, а классы эквивалентности с точностью до совпадения почти везде.

Проблема: нет значения функции в точке.

Определение 5.2. Существенный супремум (esssup или rraisup)

a – существенный супремум функции $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

если $a = \inf\{c \in \mathbb{R} : f(x) \leq c \text{ при почти всех } x \in E\}$.

Свойства. 1. $\text{esssup } f \leq \sup f$

2. $f(x) \leq \text{esssup } f$ при почти всех x

Доказательство. $a := \text{esssup } f \implies \exists e_n : \mu e_n = 0$ (т.е. существует мн-во e_n нулевой меры), т.ч. $f(x) \leq a + \frac{1}{n}, \forall x \in E \setminus e_n$

$$e = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n, \mu e = 0 \text{ и } f(x) = a + \frac{1}{n}, \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq a \quad \forall x \in E \setminus e. \quad \square$$

Определение 5.3. $L^\infty(E, \mu) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ - измеримые, т.ч. } \text{esssup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$ – векторное пр-во.

Заведем норму для данного векторного пр-ва: $\|f\|_\infty := \text{esssup}_{x \in E} |f(x)|$.

1. Константа выносится
2. Нер-во треугольника есть
3. Функция 0 почти везде, но все же не везде

Рассмотрим классы эквивалентности...

Важный частный случай ($X = \mathbb{N}$)

$X = \mathbb{N}$, μ -считающая мера, тогда:

1. $l^p = \{(x_1, x_2, \dots) \text{ - последовательность} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\}$

Норма в данном случае: $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

2. $l^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) : \sup |x_k| < +\infty\}$

Норма в данном случае: $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$

Теорема 5.1. Вложение пространств Лебега

Пусть $\mu E < +\infty$ и $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

Тогда $L^q(E, \mu) \subset L^p(E, \mu)$ и $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot (\mu E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$

Доказательство. Пусть $q < +\infty$.

Напишем неравенство Гёльдера:

$$\int_E |f|^p \cdot 1 \, d\mu \leq \left(\int_E (|f|^p)^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_E 1^{r'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{r'}} = (*)$$

$$\text{Здесь } \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad r = \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{1}{r'} = \frac{q-p}{q}.$$

Тогда $(*) = (\|f\|_q)^p \cdot (\mu E)^{\frac{q-p}{q}}$ \Rightarrow извлекаем корень p -ой степени слева и справа $\|f\|_p \leq \|f\|_q (\mu E)^{\frac{q-p}{pq}}$

Пусть $q = +\infty$, тогда $\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\mu \leq \int_E \|f\|_\infty^p \, d\mu = \mu E \|f\|_\infty^p$

Замечание. Для $\mu E = +\infty$ вложений нет

□

Теорема 5.2. $L^p(E, \mu)$ - полное, где $1 \leq p \leq +\infty$

Доказательство. Только для $p < +\infty$

Идейно, что хотим доказать: пространство является полным, если \forall фундаментальная последовательность сходится, и её предел принадлежит данному пространству.

Пусть f_n - фундаментальная последовательность функций. Мы знаем по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Выберем некоторую подпоследовательность f_{n_k} :

1. Берём $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, по нему возьмем N_1 из определения, далее определим $n_1 := N_1$.

2. Далее возьмем $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, по нему возьмем N_2 из определения, далее определим $n_2 := \max(N_2, n_1 + 1)$.

И так далее.

Получилось, что $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, а также $\|f_{n_k} - f_n\| < \frac{1}{2^k}$ при $n \geq n_k$, в частности $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$ - так строили подпоследовательность.

Рассматрим $\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < 1$.

Пусть $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)|$. $S : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Пусть $S_m(t) := \sum_{k=1}^m |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)|$ - частичная сумма.

$\|S_n\|_p \leq \|f_{n_1} - f_{n_2}\|_p + \|f_{n_2} - f_{n_3}\|_p + \dots + \|f_{n_m} - f_{n_{m+1}}\|_p < 1$ - норма суммы меньше суммы норм.

Следовательно: $\|S_n\|_p < 1$ (*).

Теперь рассмотрим $\|S\|_p^p$:

Напоминание (Лемма Фату): Если $f_n \geq 0$, то $\int_E \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu$.

$$\|S\|_p^p = \int_E |S(t)|^p dt = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_m(t)|^p dt \underset{\text{л. Фату}}{\leqslant} \lim \int_E |S_m(t)|^p dt = \lim \|S_m\|_p^p \underset{\text{т.к. верно (*)}}{\leqslant} 1.$$

Так как по определению $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ (т.е. предел S_n существует и равен S), то $\underline{\lim} = \lim = \bar{\lim}$.

$$\Rightarrow \int_E |S(t)|^p dt < +\infty \Rightarrow S(t) < +\infty \text{ при почти всех } t \in E.$$

Тогда $S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty$ – ряд из суммы неотрицательных слагаемых ограничен, значит он сходится. Если мы рассматриваем данный ряд без модулей, то такой ряд уже имеет абсолютную сходимость почти везде, а значит и обычную почти везде тоже.

Заметим, что: $f_{n_1} + \sum_{k=1}^m (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = \sum_{k=2}^{m+1} f_{n_k} - \sum_{k=2}^m f_{n_k} = f_{n_{m+1}}$ – так как сумма ряда сходится почти везде, то f_{n_m} сходятся при почти всех $t \in E \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} f_{n_m} = f$.

Сейчас мы показали обычную сходимость, нужно показать сходимость по норме пр-ва, т.е. $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$:

Возьмём $n \geq n_k$, тогда:

$$\|f_n - f\| \leq \underbrace{\|f_n - f_{n_k}\|}_{\cdot < \frac{1}{2^k}} + \underbrace{\|f_{n_k} - f\|}_{\cdot < \frac{1}{2^k} (**)} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

Нужно показать, что $(**)$ верно:

Мы уже знаем, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k} = f$ – почти везде, тогда рассмотрим $\|f_{n_k} - f\|_p^p$:

$$\|f_{n_k} - f\|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_{n_k} - f|^p d\mu \underset{(***)}{=} \int_E \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f|^p}_{\text{Почти везде} = 0} d\mu$$

Выше мы использовали теорему Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости), для того, чтобы ее использовать в $(***)$ нужно показать, что $|f_{n_k} - f|^p \leq F$, где F – некоторая суммируемая функция (т.е. искомая суммир. мажорантна):

Ранее мы уже показали, что $f_{n_{m+1}} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^m (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ – заметим, что если написать $f_{n_k} + \sum_{i=k}^m (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_{m+1}}$, то сумма не изменится. Тогда рассмотрим произвольное k и устремим $m \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_{n_k} + \sum_{i=k}^{+\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(t) - f_{n_k}(t)| &= \left| \sum_{i=k}^{+\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \right| \leq \sum_{i=k}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \leq S(t) \underset{\text{т.к. ранее показали}}{\leq} +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall k : |f - f_{n_k}| &\leq S^p(t) < +\infty \end{aligned}$$

Получаем суммируемую мажорантну $S^p(t) \Rightarrow$ переход $(***)$ корректен. А значит и утверждение $(**)$ тоже корректно, следовательно у нашей фундаментальной последовательности f_n есть сходимость по норме.

Осталось показать, что предел $f = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_n$ принадлежит пространству \Leftrightarrow его норма конечна (см. опр. $L^p(E, \mu)$):

Применим нер-во Минковского для $f = f_{n_k} + \sum_{i=k}^{+\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$:

$$\begin{aligned} \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \underbrace{\left(\int_E |f_{n_k}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_{\cdot < +\infty \text{ т.к. } f_{n_k} \in L^p(E, \mu)} + \underbrace{\left(\int_E |\Sigma|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_{\cdot \leq (\int_E |S(t)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < +\infty} < +\infty \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{т.к. } p < +\infty: \int_E |f|^p d\mu < +\infty \end{aligned}$$

Следовательно, $f \in L^p(E, \mu)$, чтд. \square

Определение 5.4. (X, ρ) - метрическое пространство и $A \subset X$. A **всюду плотно** в X (или **плотно** в X), если $ClA = X$.

Пример. $X = \mathbb{R}$ и $A = \mathbb{Q}$.

Определение 5.5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если она измерима и у неё конечное число значений.

Лемма. $1 \leq p < +\infty$, φ ступенчатая $\in L^p(E, \mu)$

Тогда $\mu E\{\varphi \neq 0\} < +\infty$

Доказательство. $|\varphi|$ - рассмотрим положительные значения, их конечное число, значит среди них есть наименьшее. Тогда на множестве $E\{\varphi \neq 0\}$, $|\varphi| \geq m$

Тогда $\int_E |\varphi|^p d\mu = \int_{E\{\varphi \neq 0\}} |\varphi|^p d\mu \geq \int_{E\{\varphi \neq 0\}} m^p d\mu = m^p \mu E\{\varphi \neq 0\}$ \square

Теорема 5.3. $1 \leq p \leq +\infty$

Тогда множество ступенчатых функций из $L^p(E, \mu)$ плотно в $L^p(E, \mu)$.

Доказательство. Идейно данная теорема утверждает, что любая функция из $L^p(E, \mu)$ сколь угодно хорошо может быть приближена ступенчатыми функциями.

1. $p = +\infty$. Идейно: хотим д-ть, что замыкание мн-ва ступенчатых ф-й является всем мн-вом $L^p(E, \mu)$ (**def:** замыкание – это мн-во предельных точек), т.е. нужно показать, что любая точка мн-ва $L^p(E, \mu)$ является предельной для мн-ва ступенчатых функций \Rightarrow любая функция $f \in L^p(E, \mu)$ сколь угодно хорошо приближается ступенчатыми функциями.

Возьмём $f \in L^\infty(E, \mu)$, $f \geq 0$. Выберем такую f , что она ограничена (всегда можем так сделать, так как мы рассматриваем класс эквивалентности, значит нужно выбрать ограниченного представителя данного класса). Тогда существует возрастающая последовательность простых $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$, таких, что $\varphi_n \rightrightarrows f$ - теорема из теории меры (простые подходят под определение ступенчатых ф-й).

Тогда $\|\varphi_n - f\|_\infty = \sup_{t \in E} |f(t) - \varphi_n(t)| \rightarrow 0$ из равномерной сходимости.

Если f произвольная, то расписываем ее как $f = f_+ - f_-$ (для них существуют φ_n и ψ_n , равномерно сходящиеся к f_+ и f_- соответственно):

Здесь $\|\varphi_n - f_+\|_\infty \rightarrow 0$ и $\|\psi_n - f_-\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|(\varphi_n - \psi_n) - (f_+ - f_-)\|_\infty \rightarrow 0$

Таким образом, мы показали, что $\forall f \in L^\infty(E, \mu)$: f – предельная точка мн-ва ступенчатых функций, значит замыкание мн-ва ступенчатых ф-й действительно совпадает с $L^\infty(E, \mu)$.

2. $p < +\infty$. Возьмём $f \in L^p(E, \mu)$, $f \geq 0 \Rightarrow$ существуют ступенчатые $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$, такие, что $\lim \varphi_n = f$ (равномерной сходимости может не быть, так как нет условия, что f ограниченная).

$\|f - \varphi_n\|_p^p = \int_E |f(t) - \varphi_n(t)|^p d\mu \rightarrow \int_E \lim |f(t) - \varphi_n(t)|^p d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$. Опять же нужна суммируемая мажорантна (чтобы под интегралом можно было сделать предельный переход), но она есть, потому что $0 \leq \varphi_n \leq f$ ($|f(t) - \varphi_n(t)|^p$ – неотрицательная ф-я, стремящаяся к 0, f^p – её мажоранта). Тогда $|f - \varphi_n|^p \leq f^p$

Для произвольной опять f_+ и f_- (берем для них последовательности ф-й φ_n и ψ_n):

$$\|(\varphi_n - \psi_n) - f\|_p \leq \|\varphi_n - f_+\|_p + \|\psi_n - f_-\|_p$$

□

Определение 5.6. $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – финитная функция, если она тождественно равна нулю вне некоторого компакта (т.е. мн-во $\{f \neq 0\}$ ограничено).

Пример. Индикаторная функция отрезка

Теорема 5.4. $1 \leq p < +\infty$ и $E \in \mathbb{R}^d$ измеримо.

Тогда множество финитных бесконечно дифференцируемых функций плотно в $L^p(E, \lambda)$ (λ – мера Лебега).

Доказательство. Для приближения непрерывными финитными функциями.

f приближается ступенчатыми функциями, поэтому достаточно научиться приближать только их, то есть достаточно научится приближать функции $\mathbb{1}_A$, где A – измеримое и конечной меры.

Рассмотрим $\mathbb{1}_A$, найдётся K – компакт и G – открытое, такие, что $K \subset A \subset G$ и $\lambda(G \setminus K) < \varepsilon$.
 $\varphi(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^d \setminus G)}{d(x, K) + d(x, \mathbb{R}^d \setminus G)}$.

По определению $d(x, B) = \inf_{y \in B} \rho(x, y)$.

$\varphi(x) = 0$, если $x \notin G$ и $\varphi(x) = 1$, если $x \in K$ и в целом $\varphi \in [0, 1]$

Тогда $\|\varphi - \mathbb{1}_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) - \mathbb{1}_A(x)|^p dx = \int_{G \setminus K} \underbrace{|\varphi(x) - \mathbb{1}_A(x)|^p}_{\leq 1} dx \leq \lambda(G \setminus K) < \varepsilon$ □

Определение 5.7. $h \in \mathbb{R}^d, f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Тогда f_h – сдвиг f , если $f_h(x) = f(x + h)$

Теорема 5.5. О непрерывности сдвига

1. Если f равномерно непрерывна на \mathbb{R}^d , то $\|f_h - f\|_\infty \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$
2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $1 \leq p < +\infty$, то $\|f_h - f\|_p \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$
3. Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и 2π периодична, то $\|f_h - f\|_\infty \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$

Доказательство. 1. 1 и 3 пункт – определение равномерной непрерывности:

Для 1: $\|f_h - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_h(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x + h) - f(x)| \rightarrow 0$ – по опр. равномерной непрерывности.

Для 3: Непрерывна + 2π -периодична \Rightarrow равномерно непрерывна, так как мы можем сузить рассматриваемую функцию на 2 периода \Rightarrow получим компактное мн-во. Так как непрерывная ф-я на компакте равномерно непрерывна, то получаем утв. данного пункта.

2. Возьмём $\varepsilon > 0$ и $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ финитную функцию, что $\|f - g\|_p < \varepsilon$, $\{g \neq 0\} \subset B_R(0)$ (по предыдущей теореме мн-во финитных беск. дифф. функций плотно, значит существует g сколь угодно близкая к f).

$$\|f_h - f\|_p \leq \underbrace{\|f_h - g_h\|_p}_{\cdot \leq \varepsilon (*)} + \|g_h - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\cdot \leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon + \|g_h - g\|_p.$$

(*): Так как $f_h(x) = f(x+h)$, $g_h(x) = g(x+h)$ (аргументы сдвинули одинаково у обеих функций) и $\|f - g\|_p < \varepsilon$, то для сдвигов нер-во $\leq \varepsilon$ тоже верно.

Теперь хотим доказать, что $\|g_h - g\|_p \leq \varepsilon$:

$$\|g_h - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |g_h(x) - g(x)|^p d\lambda = (*).$$

g нулится вне $B_R(0)$, $g_h(x) = g(x+h)$ при малых h нулится вне круга $B_{R+1}(0)$, значит можно интегрировать по кругу $B_{R+1}(0)$:

$$(*) = \int_{B_{R+1}(0)} |g(x+h) - g(x)|^p dx \leq \lambda B_{R+1}(0) \cdot \underbrace{\sup_{\|g_h - g\|_\infty \rightarrow 0} |g(x+h) - g(x)|}_{(**)}$$

(**): Функция g непрерывна и задана в круге $B_R(0)$, при этом данный круг является компактом $\Rightarrow g$ равномерно непрерывна в данном круге. При этом вне этого круга g нулится $\Rightarrow g$ равномерно непрерывна в \mathbb{R}^d . Следовательно, можно воспользоваться 1-ым пунктом данной теоремы.

□

5.2. Гильбертовы пространства

Замечание. Скалярное произведение. H - векторное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C}

Тогда $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \forall x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ (заметим, что $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$)

Определение 5.8. H гильбертово, если в нём есть скалярное произведение и оно полное.

Пример. 1. l^2 , в нём $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

2. $L^2(E, \mu)$, в нём $\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu$

3. $\mathbb{R}^d(\mathbb{C}^d)$, в нём $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k \bar{y}_k$

Лемма. Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то $\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle$

Доказательство. $S_n = \sum_{k=1}^n x_n \rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} x_n \Rightarrow \underbrace{\langle S_n, y \rangle}_{=\langle \sum_{k=1}^n x_k, y \rangle} = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle \rightarrow \langle S, y \rangle$ □

Определение 5.9. $x \perp y$ ортогональны, если $\langle x, y \rangle = 0$

Определение 5.10. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ ортогональный, если $x_n \perp x_k \forall k \neq n$

Замечание. Если $x_n \neq 0$ и попарно ортогональны, то они линейно независимы

Доказательство. Пусть $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$. Тогда $\langle c_1x_1 + \dots + c_nx_n, x_k \rangle = 0$. Раскроем по линейности $\sum_{j=1}^n c_j \langle x_k, x_k \rangle = 0 = c_k \langle x_k, x_k \rangle \implies c_k = 0$ \square

Теорема 5.6. Пусть H - гильбертово пространство, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - ортогональный ряд, где $x_n \in H$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - сходится $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$

Доказательство. $S_n = \sum_{k=1}^n x_k, C_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$

Пространство полно, есть критерий Коши.

S_n - сх-ся $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : \|S_n - S_m\| < \varepsilon$.

C_n - сх-ся $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : C_m - C_n < \varepsilon$ (будем считать, что $m > n$).

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n+1}^m x_k, \sum_{k=n+1}^m x_k \right\rangle = \\ &= \sum_{k=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m \underbrace{\langle x_k, x_j \rangle}_{\text{пользуемся ортогональностью ряда}} = \sum_{k=m+1}^n \langle x_k, x_k \rangle = \\ &= \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|^2 = C_m - C_n \iff C_n \text{ - фундаментальная последовательность} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty \end{aligned} \quad \square$$

Следствие. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходящийся ортогональный ряд в гильбертовом пространстве H , а $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ - перестановка.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ сходится к той же сумме

Доказательство. 1. Сходимость:

$S = \sum x_n$ - сходится $\iff \sum \|x_n\|^2$ - сходится $\iff \sum \|x_{\varphi(n)}\|^2$ - сходится $\iff \sum x_{\varphi(n)} = \tilde{S}$ - сходится.

2. Сумма сохраняется:

$$\begin{aligned} \text{Посмотрим на } \|S - \tilde{S}\|^2 &= \langle S - \tilde{S}, S - \tilde{S} \rangle = \langle S, S \rangle + \langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle - \langle S, \tilde{S} \rangle - \langle \tilde{S}, S \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, x_k \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(k)} \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, x_{\varphi(k)} \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_k \rangle = (*) \end{aligned}$$

Воспользуемся ортогональностью:

- (a) $\langle x_n, x_k \rangle \neq 0 \iff n = k$
- (b) $\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(k)} \rangle \neq 0 \iff n = k$
- (c) $\langle x_n, x_{\varphi(k)} \rangle \neq 0 \iff n = \varphi(k)$
- (d) $\langle x_{\varphi(n)}, x_k \rangle \neq 0 \iff \varphi(n) = k$

Тогда можем переписать как:

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \rangle = 0$$

\square

Определение 5.11. x_1, x_2, \dots ортогональная система, если они попарно ортогональны и $x_n \neq 0 \forall n$

Определение 5.12. x_1, x_2, \dots ортонормированная система, если они попарно ортогональны и $\|x_n\| = 1 \forall n$

Замечание. Эти системы линейно независимы

Пример. 1. $l^2, e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ое место}}, 0, \dots, 0)$ - ортонормированная система.

2. $L^2[0, 2\pi]$, ортогональная система $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$
3. $L^2[0, 2\pi]$, ортогональная система $e^{int}, n \in \mathbb{Z}$
А $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$ - ортонормированная система
4. $L^2[0, \pi]$, ортогональная система $1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots$
5. $L^2[0, \pi]$, ортогональная система $\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$

Теорема 5.7. Пусть e_1, e_2, \dots ортогональная система в H и $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$.

$$\text{Тогда } c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} \left(= \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} \right)$$

Доказательство. $\langle x, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \langle e_j, e_k \rangle = c_k \langle e_k, e_k \rangle = c_k \|e_k\|^2$ □

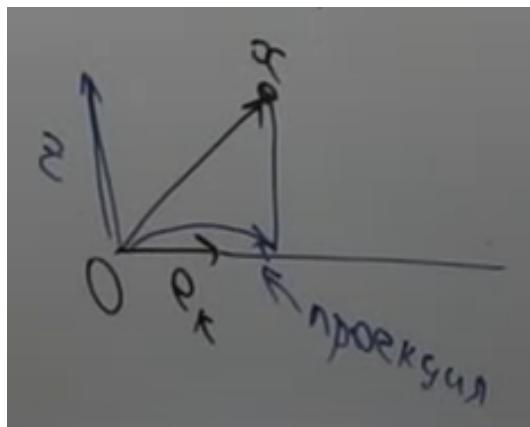
Определение 5.13. Пусть e_1, e_2, \dots - ортогональная система в H и $x \in H$. Назовём $c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ коэффициентом Фурье для вектора x по ортогональной системе $\{e_n\}$

А $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ - ряд Фурье

Замечание. 1. Если $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, то этот ряд - ряд Фурье.

2. k -ое слагаемое ряда Фурье - это проекция вектора x на прямую, идущую в направлении e_k

То есть $x = c_k(x) e_k + z$, где $z \perp e_k$



Теорема 5.8. о частичных суммах ряда Фурье

$x \in H$, $\{e_n\}$ ортогональная система и $S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k$ - частичная сумма ряда Фурье для x . L_n - линейная оболочка $\{e_1, \dots, e_n\}$

Тогда:

1. S_n - ортогональная проекция x на L_n , то есть $x = S_n + z$, где $z \perp L_n$
2. S_n - наилучшее приближение к x в L_n , т.е. $\|x - S_n\| = \min_{y \in L_n} \|x - y\|$
3. $\|S_n\| \leq \|x\|$

Доказательство. 1. $z = x - S_n$, надо доказать, что $z \perp L_n$, то есть $z \perp e_j$ при $j = 1, \dots, n$

$$\langle z, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle S_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - c_j(x) \langle e_j, e_j \rangle = 0$$

$$2. x - \underbrace{y}_{\in L_n} = \underbrace{S_n + z - y}_{z \perp L_n} = z + (S_n - y)$$

Тогда $\|x - y\|^2 = \|\underbrace{S_n - y}_{\in L_n} + \underbrace{z}_{\perp L_n}\|^2 = \|z\|^2 + \|S_n - y\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$ и равенство
 $\iff y = S_n$

$$3. x = S_n + z \text{ и } z \perp S_n = (*)$$

Тогда $\|x\|^2 = \|S_n + z\|^2 \underset{\text{т.к. } (*)}{=} \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \geq \|S_n\|^2$

□

Следствие. Неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство. $\|x\|^2 \geq \|S_n\|^2 = \langle \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k \rangle = \sum_{k=1}^n |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ и $n \rightarrow \infty$

□

Теорема 5.9. Рисса-Фишера

H - гильбертово пространство, $\{e_n\}$ - ортогональная система в H и $x \in H$. Тогда:

1. Ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$ сходится

2. $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n + z$, где $z \perp e_n \forall n$

3. $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n \iff \|x\|^2 \stackrel{\text{Тождество Парсеваля}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2$

Доказательство. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$ - сходится $\iff \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n(x) e_n\|^2}_{=\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2} < +\infty$

2. $z = x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \langle e_n, e_n \rangle = 0$$

3. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k + z$, где $z \perp e_n \forall n$

Тогда $\|x\|^2 = \|z\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$, то есть $z = 0 \iff \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$

□

Замечание. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$ - это ортогональная проекция на $Cl(Lin\{e_n\})$, где $Lin\{\dots\}$ – линейная оболочка векторов.

Замечание. Если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 < +\infty$, то найдётся $x \in H$, для которого $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ - ряд Фурье

Определение 5.14. $\{e_n\}$ - ортогональная система в H

1. $\{e_n\}$ - базис, если $\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$

2. $\{e_n\}$ - полная, если из того, что $z \perp e_n \forall n \implies z = 0$

3. $\{e_n\}$ - замкнутая, если $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$

Теорема 5.10. $\{e_n\}$ ортогональная система в H . Следующие условия равносильны:

1. $\{e_n\}$ - базис
2. $\{e_n\}$ - полная
3. $\{e_n\}$ - замкнутая
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \overline{c_n(y)} \|e_n\|^2$
5. $Cl Lin \{e_n\} = H$

Доказательство. 1. 4 \implies 3

Берём $x = y$

2. 1 \implies 4

$$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k, \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \overline{c_n(y)} \|e_n\|^2$$

3. 3 \implies 2

Возьмём $z \perp e_n \forall n$. Тогда $\|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|c_n(z)|^2}_{=0} \|e_n\|^2 = 0 \implies z = 0$

4. 2 \implies 1

Рисс-Фишер $\implies x = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$ и $z \perp e_n \forall n$, то есть по пункту $z = 0$.

5. 1 \implies 5

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n c_k(x) e_k}_{\in Lin \{e_n\}} \implies$$

$\implies \lim \in Cl Lin \{e_n\} \implies x \in Cl Lin \{e_n\} \implies H \subset Cl Lin \{e_n\}$ – так как x произвольный вектор из H .

6. 5 \implies 2

Пусть $z \perp e_n \forall n$. Тогда $z \perp Lin \{e_n\} \implies z \perp Cl Lin \{e_n\} = H \implies z \perp z \implies z = 0$

□

Пример. Ортогональные системы

1. Функция Радемахера $L^2[0, 1]$

$$r_k(t) = (-1)^{\lceil 2^k t \rceil}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Это ортонормированная система, покажем это:

$$\mathbb{1}_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}(t) r_n(t) = 0 \text{ и } \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = 0$$

Она не полная: $r_1 r_2 \perp r_n \forall n$

2. Функция Уолша. Пространство $L^2[0, 1]$

$$A \subset \mathbb{N} \text{ и } \#A < +\infty. \text{ Пусть } w_A(t) = \prod_{k \in A} r_k(t)$$

Это ортонормированная система:

$$\langle w_A, w_B \rangle = \langle w_{A \setminus B}, w_{B \setminus A} \rangle = \int_0^1 \prod_{i \in A \setminus B} r_i(t) dt = 0$$

Это полная система $Cl Lin w_A = L^2[0, 1]$

$$Lin_{A \subset \{0, 1, \dots, n\}} w_A = Lin_{j=0, 1, \dots, 2^n - 1} \mathbb{1}_{[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]} \text{. Тогда } Lin w_A = Lin \mathbb{1}_{(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})}$$

3. Функции Хаара. Пространство $L^2[0, 1]$

(a) $h_0(t) \equiv 1$

(b) $h_1(t) = \begin{cases} +1, & \text{на } [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{на } [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$

(c) $h_2(t) = \begin{cases} +1, & \text{на } [0, \frac{1}{4}) \\ -1, & \text{на } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}$

(d) $h_3(t) = \begin{cases} +1, & \text{на } [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -1, & \text{на } [\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$

(e) ...

Это ортогональная система и полная система

$$\text{Lin}\{h_0, h_1, \dots, h_{2n}\} = \text{Lin} \mathbf{1}_{[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})}$$

Замечание. Ортогонализация Грамма-Шмидта

$\{x_1, x_2, \dots\}$ линейно независимые вектора.

Тогда существуют $\{e_1, e_2, \dots\}$ - ортонормированная система, т.ч.: $\text{Lin}\{e_1, \dots\} = \text{Lin}\{x_1, x_2, \dots\}$

Если f_1, f_2, \dots тоже ортонормированная система с тем же свойством, то $f_k = \lambda_k e_k$, где $|\lambda_k| = 1$

Замечание. Пусть $w : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ измеримая, т.ч. $t^n w(t)$ - суммируемая на $\mathbb{R} \forall n$. Определим меру $\mu_A = \int_A w d\lambda$ и пространство будет $L^2(\mathbb{R}, \mu)$

Если $f \perp g$ в таком пространстве, то они ортогональны с весом w

Рассмотрим последовательность мономов $1, t, t^2, \dots \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$, они линейно независимы.

Тогда мы можем прокрутить ортогонализацию Грамма-Шмидта на этой последовательности мономов. Получим последовательность многочленов p_0, p_1, \dots . Мы понимаем, что $\langle p_i, p_j \rangle = 0 \forall i \neq j$. А ещё $\deg p_n = n$ - по индукции.

Получившиеся многочлены называют ортогональными многочленами с весом w .

Пример. Ортогональные многочлены.

1. Многочлены Лежандра. Пространство $L^2(-1, 1)$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} ((t^2 - 1)^n)^{(n)}, \text{ считаем, что } n > k:$$

$$\begin{aligned} \langle P_k, P_n \rangle &= \underbrace{\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!}}_{=C} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} ((t^2 - 1)^n)^{(n)} dt = \\ &= C \left(((t^2 - 1)^k)^{(k)} \cdot ((t^2 - 1)^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k+1)} ((t^2 - 1)^n)^{(n-1)} dt \right) = \dots \\ &= \pm C \int_{-1}^1 \underbrace{((t^2 - 1)^k)^{(2k+1)}}_{=0} ((t^2 - 1)^n)^{(n-k-1)} dt = 0 \end{aligned}$$

2. Многочлены Чебышёва первого рода. Пространство $L^2((-1, 1), w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}})$

$T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ - оказывается, что это многочлен. Проверить можно по индукции.

$$\langle T_k, T_n \rangle = \int_{-1}^1 \cos(k \arccos t) \cdot \cos(n \arccos t) \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = (*)$$

Пусть $x = \arccos t$. Тогда $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$(*) = \int_0^\pi \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$$

3. Многочлены Чебышёва второго рода. Пространство $L^2((-1, 1), w(t) = \sqrt{1 - t^2})$

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\langle U_k, U_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\sin((k+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^\pi \sin((n+1)x) \sin((k+1)x) dx = 0$$

такая же замена.

4. Многочлены Лагерра. Пространство $L^2((0, +\infty), w(t) = e^{-t})$

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t (t^n e^{-t})^{(n)}$$

Ортогональность проверяется также, как в Лежандре - интегрированием по частям.

5. Многочлены Эрмита. Пространство $L^2(\mathbb{R}, w(t) = e^{-t^2})$

$$H_n(t) = e^{t^2} (e^{-t^2})^{(n)}$$

Ортогональность проверяется опять интегрированием по частям.

Определение 5.15. (X, ρ) - метрическое пространство, $A \subset X$, и есть точка $x \in X$. Назовём расстоянием от x до A (или наилучшим приближением к x в множестве A):

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

Определение 5.16. Элемент $y^* \in A$ элемент наилучшего приближения, если $\rho(x, y^*) = d(x, A)$

Теорема 5.11. о существовании наилучшего приближения в гильбертовом пространстве

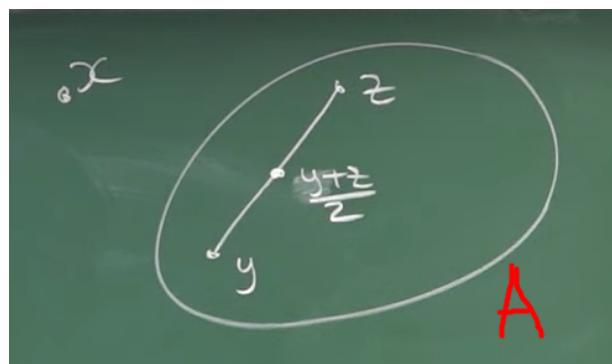
H - гильбертово пространство, $A \subset H$ - выпуклое и замкнутое и $x \in H$.

Тогда в A существует единственный элемент наилучшего приближения.

Лемма. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Доказательство. Теоремы.

Пусть $d = d(x, A)$ – оно конечно. Возьмём $y, z \in A$, тогда $\frac{y+z}{2} \in A$ из выпуклости.



$$\underbrace{\|2 \left(x - \frac{y+z}{2} \right)\|^2}_{=4\|x - \frac{y+z}{2}\|^2} + \|y - z\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 \geqslant 4d^2 \text{ – подставили в лемму } x - y \text{ и } x - z.$$

$$\text{Отсюда } \|y - z\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\|x - \frac{y+z}{2}\|^2 \leqslant 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4d^2$$

1. Единственность:

Если $\|x - y\|^2 = d$ и $\|x - z\|^2 = d$, то $\|y - z\|^2 \leqslant 0 \implies y = z$

2. Существование:

Возьмём y_n , т.ч. $\|x - y_n\| \rightarrow d$, то есть $\|x - y_n\|^2 < d^2 + \varepsilon$.

Тогда $\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2 < 4\varepsilon$, значит это фундаментальная последовательность и у нее есть предел $y^* \in A$, поскольку A – замкнуто.

$$\|x - y^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d.$$

□

Теорема 5.12. теорема о проекции

H - гильбертово пространство, L - замкнутое подпространство H

Тогда $\forall x \in H : \exists y \in L : \underbrace{x - y}_{=z} \perp L$ и такой y единственный.

Доказательство. Единственность:

$$x = y + z = y_1 + z_1, y, y_1 \in L \text{ и } z, z_1 \perp L \implies \underbrace{y - y_1}_{\in L} = \underbrace{z_1 - z}_{\perp L} \implies z_1 - z \perp y - y_1 = z_1 - z \implies z = z_1 \implies y = y_1$$

Существование:

Пусть y - элемент наилучшего приближения к x в L

$$z = x - y, l \in L, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\text{Мы знаем, что } \underbrace{\|x - y\|^2}_{=||z||^2} \leq \underbrace{\|x - (y - \lambda l)\|^2}_{||z + \lambda l||^2} = \langle z, z \rangle \leq \langle z, z \rangle + \langle z, \lambda l \rangle + \langle \lambda l, z \rangle + \langle \lambda l, \lambda l \rangle$$

$$|\lambda|^2 \langle l, l \rangle + \lambda \langle l, z \rangle + \bar{\lambda} \langle z, l \rangle \geq 0$$

$$|\lambda|^2 \langle l, l \rangle + 2 \operatorname{Re}(\lambda \langle l, z \rangle) \geq 0 \text{ при всех } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\text{Возьмём } \lambda = -\frac{\langle z, l \rangle}{\|l\|^2}$$

$$\text{Подставляем: } \frac{|\langle z, l \rangle|^2}{\|l\|^2} - 2 \operatorname{Re}\left(\frac{|\langle z, l \rangle|^2}{\|l\|^2}\right) = -\frac{|\langle z, l \rangle|^2}{\|l\|^2} \implies z \perp l$$

□

Определение 5.17. Этот y называется ортогональной проекцией x на L

То есть получилось отображение $P_L : H \rightarrow L$ - оператор ортогонального проецирования

Определение 5.18. Ортогональное дополнение. Пусть L замкнутое подпространство H . Тогда $L^\perp = \{x \in H : x \perp L\}$ - замкнутое подпространство H

Свойства. 1. P_L - линейный оператор

Доказательство. $y_1 = P_L x_1$ и $y_2 = P_L x_2 \implies x_1 - y_1 \perp L$ и $x_2 - y_2 \perp L$

Тогда $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \perp L \implies \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = P_L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$

□

2. Если $L \neq \{0\}$, то $\|P_L\| = 1$

Доказательство. $y = P_L x \implies x = y + z$, где $y \in L, z \in L^\perp \implies y \perp z$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|y\|^2 \implies \|x\| \geq \|P_L x\| \implies \|P_L\| \leq 1$$

Если $L \neq \{0\}$, то возьмём в L единичный вектор и он переходит в себя

□

3. $P_{L^\perp} = Id - P_L$

Доказательство. $x = y + z$, где $y \in L, z \in L^\perp \implies Z \in L^\perp$ и $y \perp L^\perp$

Тогда $y = P_L x$ и $z = P_{L^\perp} x \implies x = P_L x + P_{L^\perp} x$

□

4. $(L^\perp)^\perp = L$

Доказательство. $P_{(L^\perp)^\perp} = Id - P_{L^\perp} = Id - (Id - P_L) = P_L$

$(L^\perp)^\perp = P_{(L^\perp)^\perp}(H) = P_L(H) = L$

□

Определение 5.19. (X, ρ) - метрическое пространство.

X - сепарабельное, если существует счётное множество $A \subset X$, т.ч. $Cl A = X$

Пример. 1. \mathbb{R}^d и $A = \mathbb{Q}^d$

2. $p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$

$A = \{\text{линейные комбинации с } \mathbb{Q} \text{ коэффициентами } \mathbb{1}_B\}$, где B - ячейка с \mathbb{Q} координатами вершин

Для $p = +\infty$, здесь $L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ не сепарабельно

Теорема 5.13. В сепарабельном гильбертовом пространстве обязательно существует базис

Доказательство. $\{x_n\}$ - счётное множество, т.ч. $Cl \{x_n\} = H$

$x_1, x_2, \dots, x_k, x_k$ оставляем, только если он линейно независим от x_1, \dots, x_{k-1} , иначе выкидываем

Пусть y_1, y_2, \dots - уже прореженные x_1, x_2, \dots

Тогда $Lin \{y_n\} = Lin \{x_n\} \implies Cl Lin \{y_n\} = Cl Lin \{x_n\} = H$

y_1, y_2, \dots - линейно независимая система, запустим ортогонализацию Грамма-Шмидта, получим e_1, e_2, \dots . Мы знаем, что $Lin \{e_i\}_{i=1}^n = Lin \{y_i\}_{i=1}^n \implies Lin \{e_n\} = Lin \{y_n\} = Lin \{x_n\} \implies Cl Lin \{e_n\} = H$, значит это базис

□

Теорема 5.14. Бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство H изометрично l^2

То есть существует линейный оператор $T : H \rightarrow l^2$, т.ч. T - биекция и $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle_H = \langle T_x, T_y \rangle_{l^2}$

Доказательство. Возьмём базис e_1, e_2, \dots , он счётный и отнормируем. Тогда $x \rightarrow (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots)$. Хотим показать, что это то, что надо.

1. Попадание в l^2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \stackrel{\text{неравенство Бесселя}}{\leqslant} \|x\|^2 < +\infty$$

2. Сохранение скалярного произведения

$$\langle x, y \rangle_H = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle} - \text{была такая теорема}$$

□

5.3. Тригонометрические ряды Фурье

Определение 5.20. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ - тригонометрический многочлен

А если $|a_n| + |b_n| \neq 0$, то тригонометрический многочлен степени n

Определение 5.21. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ - тригонометрический ряд

Комплексная форма тригонометрического многочлена

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \text{ и } \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(e^{ikx} \cdot \underbrace{\frac{a_k - ib_k}{2}}_{=c_k} + e^{-ikx} \cdot \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2}}_{=c_{-k}} \right) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

Комплексная форма тригонометрического ряда

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

Теорема 5.15. Если тригонометрический ряд сходится в пространстве $L^1[-\pi, \pi]$ к функции f , то $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$ и $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = a_k \pi$

Доказательство. $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

$$\|T_n - f\|_{L^1[-\pi, \pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \cos(kx) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + \sum_{j=1}^n a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx + \sum_{j=1}^n b_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \cos(kx) dx = a_k \pi$$

□

Определение 5.22. Пусть $f \in L^1[-\pi, \pi]$, тогда $a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$, $b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$ и $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ - коэффициенты Фурье для функции f , а соответствующий ряд называется рядом Фурье

Замечание. Если f - сумма сх-ся в $L^1[-\pi, \pi]$ тригонометрического ряда, то это её ряд Фурье

Вопрос, когда $f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx))$

1. Диобуа-Реймон показал, что $\exists f$ непрерывная 2π периодическая, т.ч. её ряд Фурье расходится в некоторой точке
2. Лебег показал, что $\exists f$ непрерывная 2π периодическая, т.ч. ряд Фурье сходится во всех точках, но нет равномерной сходимости
3. Колмогоров показал, что $\exists f \in L^1[-\pi, \pi]$, т.ч. её ряд Фурье расходится во всех точках
4. Карлесон показал, что $\forall f \in L^2[-\pi, \pi]$ ряд Фурье сходится почти везде
5. Рисс показал, что $1 < p < +\infty \forall f \in L^p[-\pi, \pi]$ ряд сходится к f в L^p

$C_{2\pi}$ - непрерывные 2π периодичные функции

$A_k(f, x) = \frac{a_0(f)}{2}$, если $k = 0$ и $a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx)$ иначе