

# Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

24 апреля 2023 г.

## Содержание

<b>1. Теория меры</b>	<b>1</b>
1.1 Система множеств . . . . .	2
1.2 Объем и мера . . . . .	6
1.3 Продолжение мер . . . . .	9
1.4 Мера Лебега . . . . .	13
<b>2. Интеграл Лебега</b>	<b>19</b>
2.1 Измеримые функции . . . . .	20
2.2 Последовательности измеримых функций . . . . .	23
2.3 Определение интеграла . . . . .	26
2.4 Суммируемые функции . . . . .	29
2.5 Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	34
2.6 Произведение мер . . . . .	36
2.7 Замена переменной . . . . .	42
<b>3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы</b>	<b>46</b>
3.1 Собственные интегралы с параметрами . . . . .	47
3.2 Несобственные интегралы с параметрами . . . . .	49
3.3 В- и Г-функции Эйлера . . . . .	54
3.4 Криволинейные интегралы . . . . .	57
3.5 Точные и замкнутые формы . . . . .	64
<b>4. ТФКП</b>	<b>70</b>
4.1 Голоморфные функции . . . . .	71
4.2 Теоремы единственности . . . . .	78
4.3 Аналитическое продолжение . . . . .	81
4.4 Ряды Лорана . . . . .	84
4.5 Вычеты . . . . .	91
4.6 Конформные отображения . . . . .	102

4.7	Производящие функции . . . . .	107
<b>5.</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>114</b>
5.1	Пространства Лебега . . . . .	115
5.2	Гильбертовы пространства . . . . .	120

# 1. Теория меры

## 1.1. Система множеств

Полезные обозначения:  $A \sqcup B$  - объединение  $A$  и  $B$ , такие что  $A \cap B = \emptyset$

**Определение 1.1.** Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются:  $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

**Определение 1.2.**  $E$  – мн-во; если  $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$  – разбиение мн-ва  $E$ .

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

**Определение 1.3.**  $\mathcal{A}$  – система подмн-в  $X$ :  $A \subset 2^X$

1.  $(\delta_0)$ : если  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2.  $(\sigma_0)$ : если  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3.  $(\delta)$ : если  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4.  $(\sigma)$ : если  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

**Определение 1.4.**  $\mathcal{A}$  – симметрическая система мн-в, если  $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$ .

**Утверждение 1.1.** Если  $\mathcal{A}$  – симм., то  $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$  и  $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$ .

**Доказательство.**  $A_{\alpha \in I} \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$  □

**Определение 1.5.**  $\mathcal{A}$  – алгебра мн-в, если  $\mathcal{A}$  – симметр.,  $\emptyset \in \mathcal{A}$  и  $\forall A, B \in \mathcal{A}: A \cup B \in \mathcal{A}$  (по утв. 1.1  $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ ; смотри [опр. алгебры](#)).

**Свойства.** алгебры мн-в:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , то  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то  $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

**Определение 1.6.**  $\mathcal{A}$  -  $\sigma$ -алгебра мн-в, если  $\mathcal{A}$  – симм.,  $\emptyset \in \mathcal{A}$  и свойство  $(\sigma)$  выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множеств; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем  $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$ ).

**Замечание.**  $\sigma$ -алгебра  $\implies$  алгебра.

**Пример.** 1.  $2^X$  -  $\sigma$ -алгебра.

2.  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{A}$  - всевозможные [огр. подмн-ва](#)  $\mathbb{R}^2$  и их дополнения. ( $\mathcal{A}$  – алгебра, но не  $\sigma$ -алгебра).

**Рем:** ограничение – в метрич. пр-ве это множество ограниченного диаметра ( $d(x, y) := \|x - y\|$ ), т.е.  $\sup\{d(x, y) | x, y \in X\}$  – ограничен.

3.  $\mathcal{A}$  - алгебра ( $\sigma$ -алгебра) подмн-в  $X$  и  $Y \subset X$ .  $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$  – индуцированная алгебра ( $\sigma$ -алгебра).

4. Пусть  $\mathcal{A}_\alpha$  – алгебры ( $\sigma$ -алгебры), тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра).
5.  $A, B \subset X$  ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей  $A, B$ :
- $$\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A).$$

**Теорема 1.2.** Пусть  $\epsilon$  – семейство подмн-в в  $X$ , тогда существует наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра (алгебра)  $\mathcal{A}$ , такая что  $\epsilon \subset \mathcal{A}$ .

**Доказательство.**  $\mathcal{A}_\alpha$  – всевозможные  $\sigma$ -алгебры  $\supset \epsilon$ . Такие есть, так как  $2^X$  подходит.

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon. \text{ Теперь проверим, что } \mathcal{A} \text{ – наим. по вкл. } \mathcal{A} \subset A_\alpha \forall \alpha \in I.$$

**Определение 1.7.** 1. Такая  $\sigma$ -алгебра – борелевская оболочка  $\epsilon$  –  $(\mathcal{B}(\epsilon))$ .

2.  $X = \mathbb{R}^n$ ; такая  $\sigma$ -алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская  $\sigma$ -алгебра  $(\mathcal{B}^n)$ .

**Замечание.**  $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

□

**Определение 1.8.**  $R$  – кольцо, если  $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$ .

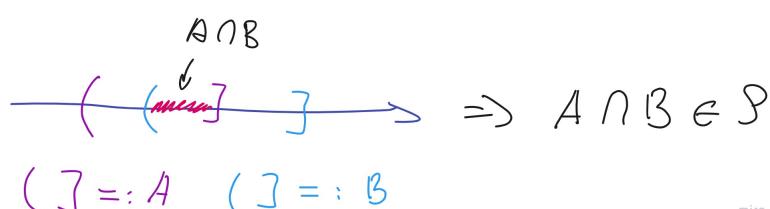
**Замечание.** Кольцо  $+ (X \in R) \implies$  алгебра.

**Определение 1.9.**  $P$  – полукольцо, если

1.  $\emptyset \in P$
2.  $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$
3.  $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in P$ , такие что  $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$ .

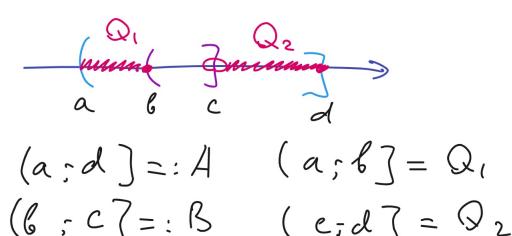
**Пример.**  $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$  – полукольцо.

Свойство 2:



miro

Свойство 3:



miro

**Лемма.**  $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left( \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}.$

**Доказательство.**  $\supset:$  Дизъюнктивность  $B_n \subset A_n$  и при  $m > n$   $B_m \cap A_n = \emptyset \implies B_n \cap B_m = \emptyset.$

$\subset:$  Пусть  $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$ . Возьмем наим.  $m$ , такой что  $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$ .  $\square$

**Теорема 1.3.**  $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ . Тогда

1.  $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P}$  – полукольцо.
2.  $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ , где  $Q_{kj} \in \mathcal{P}$  и  $Q_{kj} \subset P_k$ .

**Доказательство.** 1. индукция по  $n$ . База – опр. полукольца. Переход ( $n \rightarrow n+1$ ):

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left( \underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left( \underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$$

$\square$

**Замечание.** В (2) можно писать  $n = \infty$ .

**Определение 1.10.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмн-ва  $X$ .

$\mathcal{Q}$  – полукольцо подмн-ва  $Y$ .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$  – декартово произведение полуколоц.

**Теорема 1.4.** Декартово произведение полуколоц – полукольцо.

**Доказательство.**

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

$\square$

**Замечание.** Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении:  $2^X \times 2^Y$  – полукольцо.

**Определение 1.11.** Замкнутый параллелепипед  $a, b \in \mathbb{R}^m$ .

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

Открытый параллелепипед:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_m, b_m)$$

Ячейка:

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_m, b_m]$$

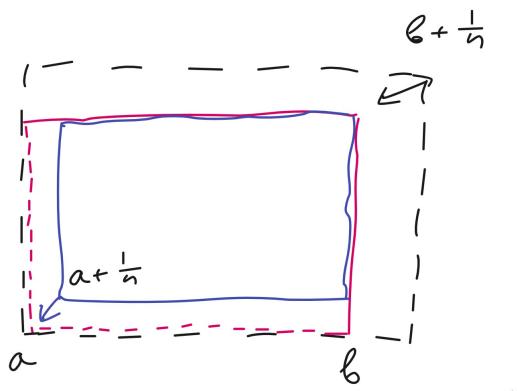
**Теорема 1.5.** Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

**Доказательство.**  $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$$P_n \supset P_{n+1} \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$$

$$Q_n \subset Q_{n+1} \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$$



□

**Обозначения:**  $\mathcal{P}^m$  – сем-во ячеек из  $\mathbb{R}^m$ .

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$  – сем-во ячеек из  $\mathbb{R}^m$  с рациональными координатами вершин.

**Теорема 1.6.**  $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$  – полукольца.

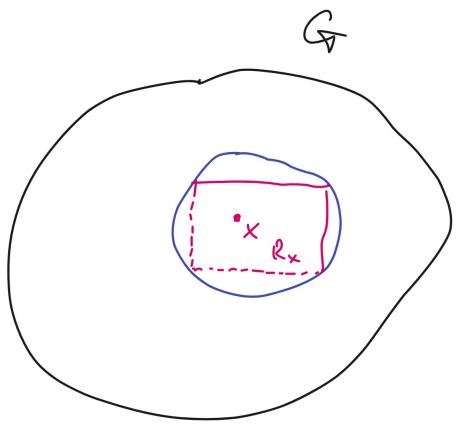
**Доказательство.**  $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m = \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^{m-1} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^1$$

□

**Теорема 1.7.**  $G \neq \emptyset$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объединение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в  $G$  (можно считать, что ячейки с рациональными координатами вершинами).

**Доказательство.**  $R_x$  – ячейка,  $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$ ,  $x \in R_x$ , получаем, что  $G = \bigcup_{x \in G} R_x$ .



□

Выкинем повторы:  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$

**Следствие.**  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) = \mathcal{B}^m$ .

**Доказательство.** 1.  $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

$G$  – открытое  $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \supset \mathcal{B}^m$

□

## 1.2. Объем и мера

**Определение 1.12.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо.  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ .  $\mu$  – объем, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если  $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$  и  $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$ , то  $\mu(\bigsqcup_{k=1}^n P_k) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

**Определение 1.13.**  $\mu$  – мера, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если  $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$  и  $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}$ , то  $\mu \underbrace{\left( \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \right)}_{\text{счетная аддитивность}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

**Упражнение.**  $\mu$  – мера. Если  $\mu \not\equiv +\infty$ , то условия  $\mu\emptyset = 0$  выполнено автоматически.

**Пример.** 1.  $\mathcal{P}^1$ ,  $\mu(a, b] := b - a$  – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – нестрого монотонная

(а)  $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$  (упр. доказать, что объем).

3.  $\mathcal{P}^m$  (m-мерные ячейки),  $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ ,  $a := (a_1, \dots, a_m)$ ,  $b := (b_1, \dots, b_m)$  – классический объем.

4.  $\mathcal{P} = 2^X$ ,  $x_0 \in X$ ,  $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} a, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$\mu$  – мера.

5.  $\mathcal{P}$  – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$\mu$  – объем, но не мера.

**Теорема 1.8.**  $\mu$  – объем на полукольце  $\mathcal{P}$

1. Монотонность:  $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$

2. (а) Усиленная монотонность:  $P_1, P_2, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}$ .  $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$   
 (б) Пункт (а), но  $n = \infty$

3. Полуаддитивность:  $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$  и  $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ , тогда  $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

**Доказательство.** 1. Очев типо.

$$2. \text{ (a)} \quad P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$\text{(b)} \quad \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$$

$$3. P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P} \quad (\mathcal{P} - \text{полукольцо}), \quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\leq \mu P'_k \leq \mu P_k \text{ (свойство 2(a))}} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

**Замечание.** 1. Если  $\mathcal{P}$  – кольцо и  $A, B$  ( $B \subset A$ )  $\in \mathcal{P}$ , то  $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$$

$$\text{Если } \mu B \neq +\infty, \text{ то } \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$$

**Теорема 1.9.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмн-в  $X$ ,  $\mu$  – объем на  $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$  – полукольцо подмн-в  $Y$ ,  $\nu$  – объем на  $\mathcal{Q}$

$$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q, \text{ где } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$$

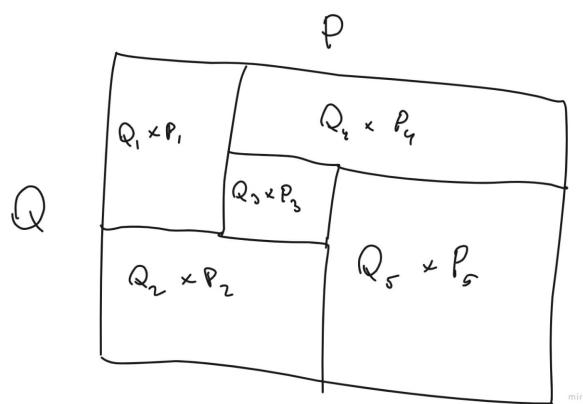
Тогда  $\lambda$  – объем на  $P \times Q$ .

**Следствие.** Классический объем на ячейках – действительно объем.

**Доказательство.** Простой случай.  $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , тогда:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j, \text{ докажем, что } \underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$$

Общий случай.



$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$$

□

**Пример.** 1. Классический объем на ячейках  $\lambda_m$  – мера

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда  $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$  – мера.  
(Rem:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  – непрерывность слева).
3. Считающаяся мера:  $\mu A := \#A$  – кол-во элементов.
4.  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  – не более чем счетное множество,  $w_1, w_2, \dots \geq 0$ ,  $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \rightarrow \mu$  – мера.

**Доказательство.** 4.  $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

1.  $\sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (*)$ .
  2.  $\sum_{k: t_k \in A} w_k (**)$ .
  3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (***)$ .
1.  $\mu A = \sum_{k: t_k \in A} w_k (**) \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (*)$  – т.к.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $\forall i, j : i \neq j$ ), то каждое слагаемое  $w_k$  не более 1 раза попадет в  $(*)$  и  $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .
  2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (***) \geq \sum_{k: t_k \in A}$  – нер-во верно, так как мы можем к каждому  $w_k$  из  $(**)$  найти этот же  $w_k$  в  $(***)$ .

Итого имеем равенство:

$$(**) = (***) : \sum_{k: t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n, \text{ чтд.}$$

(От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

□

**Теорема 1.10.** (О счетной аддитивности меры).

$\mu$  – объем на полукольце  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu$ -мера  $\Leftrightarrow$  если  $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P, P_n \in \mathcal{P}$ , то  $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$  (счетная полуаддитивность).

**Доказательство.** " $\Leftarrow$ ": Пусть  $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$ , тогда надо д-ть, что  $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$ : для " $\leq$ " – счетная полуаддитивность, для " $\geq$ " – усиленная монот. объема.

" $\Rightarrow$ ":  $P'_n := P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}$ , где  $Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n}$  – усиленная монот. объема.  $\bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$ . □

**Следствие.** Если  $\mu$  – мера на  $\sigma$ -алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

**Доказательство.**  $\mu A_n = 0 \implies \mu (\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$ . □

**Теорема 1.11.** (О непрерывности меры снизу).

$\mu$  – объем на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mu$  – мера  $\Leftrightarrow$  если  $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$ , то  $\mu (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$  – непр. меры снизу.

**Доказательство.** " $\Rightarrow$ ":  $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ ,  $A_0 = \emptyset$ .

$B_n$  – дизъюнктыны:  $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

$$\mu(\bigcup A_n) = \mu \bigsqcup B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \lim \mu A_n.$$

" $\Leftarrow$ ": Пусть  $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$ , надо д-ть, что  $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$ .

$$A_n := \bigsqcup_{k=1}^n C_k, \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{=\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n)} = \lim \mu A_n = \lim \mu(\bigsqcup_{k=1}^n C_k) = \lim \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$$

□

**Теорема 1.12.** (О непрерывности меры сверху).

$\mu$  – объем на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$  и  $\mu X < +\infty$ .

Тогда равносильны:

1.  $\mu$  – мера
2. если  $A_n \supset A_{n+1}$ , то  $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu A_n$
3. если  $A_n \supset A_{n+1}$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , то  $\lim \mu A_n = 0$ .

**Доказательство.** (1)  $\Rightarrow$  (2):  $A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$ .  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

$$\Rightarrow \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)}_{\mu(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3)  $\Rightarrow$  (1):  $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$ , надо д-ть, что  $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$ .

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$ ,  $A_n \supset A_{n+1}$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , тогда  $\lim \mu A_n = 0$ .

$$C = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu C = \sum_{k=1}^n \mu C_k + \mu A_n.$$

□

**Следствие.** Если  $\mu$  – мера,  $A_n \supset A_{n+1}$  и существует  $m$ , такое что  $\mu A_m < +\infty$ , тогда  $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ .

**Доказательство.** Просто берем  $X := A_m$  и пользуемся теоремой о непрерывности меры сверху.

□

**Упражнение.** Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

### 1.3. Продолжение мер

**Определение 1.14.**  $\nu : 2^X \rightarrow [0; +\infty]$  – субмера, если

1.  $\nu \emptyset = 0$
2. монотонность: если  $A \subset B$ ,  $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то  $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

**Замечание.** 1. счетная полуаддитивность  $\Rightarrow$  конечная.

2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности)  $A \subset B$ ,  $n = 1$ .

**Определение 1.15.**  $\mu$  – полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , если  $A \subset B \in \mathcal{A}$  и  $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$ .

**Замечание.** это означает, что  $\mu A = 0$ .

**Определение 1.16.**  $\nu$  – субмера, назовем  $E \subset X$   $\nu$ -измеримым, если  $\forall A \subset X \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

**Замечание.** Достаточен знак " $\geq$ " (следует из счетной полуаддитивности).

### Теорема 1.13. Каратаедори.

Пусть  $\nu$  – субмера. Тогда все  $\nu$ -измеримые мн-ва образуют  $\sigma$ -алгебру и сужение  $\nu$  на эту  $\sigma$ -алгебру – это полная мера.

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathcal{A}$   $\nu$ -измеримые мн-ва.

1. Если  $E = 0$ , то  $E \in \mathcal{A}$ .

$$\forall A \subset X, \nu A \underset{?}{\geq} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$$

$A \cap E \subset E, \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$ , тогда доказали вопросик сверху.

2.  $\mathcal{A}$  – симметричное семейство мн-в.

$$E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$A \cap E = A \setminus (X \setminus E)$$

$$A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$$

3. Если  $E$  и  $F \in \mathcal{A}$ , то  $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\nu(A \cap E)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \cap F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} + \nu((A \setminus E) \setminus F) \geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$$

4.  $\mathcal{A}$  – алгебра.

5.  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , где  $E_n \in \mathcal{A} \underset{?}{\implies} E \in \mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} \nu A &= \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^n E_k) \geq \underbrace{\nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies \\ &\implies \nu A \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E). \end{aligned}$$

6. Если  $E_n \in \mathcal{A}$  и  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $E \in \mathcal{A}$ .

7.  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра.

8.  $\nu$  – мера на  $\mathcal{A}$ .

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \underset{?}{\implies} \nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n.$$

Докажем, что  $\nu E \geq \sum_{k=1}^n \nu E_k$  (т. к.  $\leq$  уже есть из определения субмеры). Знаем, что  $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu E_k$

□

**Определение 1.17.**  $\mu$  – мера на полукольце  $\mathcal{P}$ ,  $A \subset X$ .

$$\mu^*A := \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \wedge A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\}$$

если покрытия нет, то  $+\infty$ .

– внешняя мера, порожд.  $\mu$ .

**Замечание.** 1. Можно считать, что  $P_k$  – дизъюнктны

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_n} Q_{nk}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

2. Если  $\mu$  задана на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , то  $\mu^*A = \inf \{\mu B : B \in \mathcal{A} \wedge A \subset B\}$

**Теорема 1.14.** Пусть  $\mu$  – мера на полукольце  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu^*$  – субмера, совпадающая с мерой  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}$ .

**Доказательство.** 1.  $A \in \mathcal{P}$ , хотим доказать, что  $\mu A = \mu^*A$ .

” $\geq$ ”: очевидно, так как множество покрывает само себя.  $\mu^*A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\}$

$$\text{”}\leq\text{”: } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \xrightarrow[\text{счетная полуаддитивность}]{} \mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \leq \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\} = \mu^*A$$

2.  $\mu^*$  – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \xrightarrow[?]{} \mu^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*A + \epsilon$$

$\mu^*A_n = \inf \dots$ , берем покрытие  $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$  т.ч.  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^*A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*A_n + \epsilon$  и  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$  – устремляем  $\epsilon$  к нулю.

□

**Определение 1.18.** Стандартное продолжение меры – конструкция, полученная следующими действиями:

1. Берем меру  $\mu_0$  на полукольце  $\mathcal{P}$ .
2. Берем  $\mu_0^*$  – внешняя мера.
3. Сужаем полученную внешнюю меру на множество всех  $\mu_0^*$ -измеримых множеств.

Получилась полная мера  $\mu$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$  и  $\mu P = \mu_0 P$  для  $P \in \mathcal{P}$ .

Множества, содержащиеся в  $\mathcal{A}$ , назовем  $\mu$ -измеримыми.

**Теорема 1.15.** Это действительно продолжение, то есть  $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ .

**Доказательство.** Надо доказать, что  $E \in \mathcal{P} \wedge A \subset X$ ,  $\mu_0^*A \geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$ .

Рассмотрим случаи:

1.  $A \in \mathcal{P}$ .

$$\mu_0^*A = \mu_0 A, \quad \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$$

$$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k, \quad Q_k \in \mathcal{P}$$

$$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k \implies \mu_0^*A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2.  $A \notin \mathcal{P}$ .

Если  $\mu_0^* A = +\infty$ , то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

Считаем, что  $\mu_0^* A < +\infty$ . Возьмем  $P_k \in \mathcal{P}$ , такое что  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$ .

Знаем, что  $\mu_0^* P_k \geq \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

$$\begin{aligned} \mu_0^* A + \epsilon &> \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)} \\ &\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E) \end{aligned}$$

□

**Замечание.** 1. Дальше меру и ее продолжение обозначаем как  $\mu$ .

Если  $A$  –  $\mu$ -измеримое множество, то  $\mu A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P}\}$

2. Стандартное продолжение, примененное к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

**Упражнение.** Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же врешнюю меру, что и  $\mu$ .

3. Можно ли распространить меру на более широкую  $\sigma$ -алгебру.

4.

**Определение 1.19.**  $\nu$  –  $\sigma$ -конечная мера на полукольце  $\mathcal{P}$ , если  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P_n \in \mathcal{P} \wedge \mu P_n < +\infty$ .

Можно ли по-другому продолжить на  $\sigma$ -алгебру  $\mu$ -измерим. мн-в?

Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на  $\mu$ -измеримых множествах.

Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера, то обязательно.

**Теорема 1.16.**  $\mu$  – стандартное продолжение меры с полукольца  $\mathcal{P}$ ,  $\mu^*$  – соответствующая внешняя мера,  $A \subset X$ ,  $\mu^* A < +\infty$ . Тогда  $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$ , такие что  $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ ,  $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ ,  $C \supset A \wedge \mu^* A = \mu C$ .

**Доказательство.**  $\mu^* A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P}\}$ , берем покрытие с суммой  $< \mu^* A + \frac{1}{n}$ .

$$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A.$$

$$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$$

□

**Следствие.**  $\mu$  – стандартное продолжение с полукольца  $\mathcal{P}$ .  $A$  –  $\mu$ -измеримое мн-во и  $\mu A < +\infty$ . Тогда  $A = B \sqcup e$ , где  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$  и  $\mu e = 0$ .

**Доказательство.** Берем  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$  из теоремы.  $A \subset C$ , и  $\mu A = \mu C$ .  
получаем автоматически

$e_1 := C \setminus A$ ,  $\mu e_1 = 0$ , теперь подставляем  $e_1$  в теорему:

найдется  $e_2 : e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \wedge e_2 \supset e_1 \wedge \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A$ .

$C \setminus e_2 \subset B \subset C$ ,  $\mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \mu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A$ .  $e = A \setminus B \implies \mu e = 0$

□

**Теорема 1.17.** (Единственность продолжения).

$\mu$  – стандартное продолжение с полукольца  $\mathcal{P}$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A}$ .

$\nu$  – другая мера на  $\mathcal{A}$ , совпадающая с  $\mu$  на  $\mathcal{P}$ . Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная, то  $\mu = \nu$ .

**Доказательство.** Если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P_n \in \mathcal{P}$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$  (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$$\mu A = \inf \{\sum \mu P_n\} \geq \nu A.$$

Возьмем  $P \in \mathcal{P}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ :  $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если  $\mu P < +\infty$ , то равенство вместо неравенства.

$$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \text{ т.ч. } \mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A$$

□

## 1.4. Мера Лебега

**Теорема 1.18.** Классический объем  $\lambda_m$  на полукольце ячеек  $\mathcal{P}^m$  – мера.

**Доказательство.** Так как  $\lambda_m$  – объем, то нам необходимо проверить счетную полуаддитивность, то есть следующую стрелочку:

$$(a; b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a^{(n)}; b^{(n)}) \xrightarrow{?} \lambda(a; b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a^{(n)}; b^{(n)}).$$

Берем  $\epsilon > 0$ .

Затем возьмем:

1.  $[a, b'] \subset [a, b)$  и  $\lambda_m[a, b) < \lambda_m[a, b'] + \epsilon$ .
2.  $(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \supset (a^{(n)}, b^{(n)})$  и  $\lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] < \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \frac{\epsilon}{2^n}$ .

Тогда получаем, что  $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{открытое мн-во}}$   $\implies$  существует конечное подпокрытие, то есть  $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$ .

Далее можно написать ячейки и вложенность сохранится:

$$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^N [\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}].$$

Теперь давайте запишем конечную полуаддитивность для объема:

$$\begin{aligned} \lambda_m[a, b') &\stackrel{\text{кон. полуаддитивность}}{\leq} \sum_{n=1}^N \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] < \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \frac{\epsilon}{2^n}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \epsilon. \end{aligned}$$

Теперь поймем, что у нас есть нер-во в другую сторону и мы можем зажать  $\lambda_m[a, b')$  с двух сторон:

$$\lambda_m[a, b) - \epsilon < \lambda_m[a, b') < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \epsilon.$$

Переносим  $\epsilon$  в другую сторону и устремляем к 0:

$$\lambda_m[a, b) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + 2\epsilon$$

$\lambda_m[a, b) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}]$  – получили, что хотели. □

**Определение 1.20.** Мера Лебега в  $\mathbb{R}^m$  (обозначение  $\lambda_m$ ) – стандартное продолжение классического объема с  $\mathcal{P}^m$ .

$\sigma$ -алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская  $\sigma$ -алгебра ( $\mathcal{L}^m$ ).

**Замечание.**  $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : P_k – ячейки и \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\}$ .

Можно вместо  $P_k \in \mathcal{P}^m$  писать  $P_k \in \mathcal{P}_Q^m$ .

**Свойства.** Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого  $> 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  – открытое,  $x \in G$ ,  $B$  – шар, накрывающий  $x$  и  $B \subset G$ , вписываем ячейку в шар.  $\square$

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва  $= 0$ .

**Доказательство.** Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по  $\epsilon$ ), тогда  $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$ .  $\square$

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

**Доказательство.** Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик.  $\square$

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

**Доказательство.** Берем все  $\mathbb{R}^m$  и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда  $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$ , тогда  $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$ .  $\square$

5. Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$ , такое что  $\forall \epsilon > 0 : \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$ .

$A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$  и  $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$ , тогда  $E \in \mathcal{L}^m$

**Доказательство.**  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$  и  $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ .

$A \subset E \subset B$ ,  $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$ .

$\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$ .

$E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathcal{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathcal{L}^m$ .  $\square$

6. Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$ , такое что  $\forall \epsilon > 0 : \exists B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$ , такое что  $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$  и  $E \subset B_\epsilon$ .

Тогда  $E \in \mathcal{L}^m$  и  $\lambda_m E = 0$ .

**Доказательство.**  $A_\epsilon := \emptyset \xrightarrow[\text{свойство (5)}]{} E$  – измеримое.

$\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$ .  $\square$

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

**Доказательство.** Пусть  $x \in \text{Int}E \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E$ .  $\square$

10. Если  $\lambda e = 0$ , то существуют кубические ячейки  $Q_j$ , такие что  $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset e$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \wedge \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$ , нарезаем  $P_j$  на кубические ячейки.  $\square$

11. Если  $m \geq 2$ , то гиперплоскость  $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$  имеет нулевую меру.

**Доказательство.**  $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$ ,  $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Достаточно доказать, что  $\lambda E_n = 0$ .  $E_n \subset Y := (-n, n] \times \dots \times (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$ .

$\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$ , так как  $n$  фиксированное, а  $\epsilon$  – произвольное  $\implies \lambda E_n = 0$ .  $\square$

Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединение таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12.  $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$  – по предыдущему свойству.

**Замечание.** Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

**Замечание.** 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если  $m \geq 2$ , то пример это гиперплоскость  $H_1(c)$  подходит.

Если  $m = 1$ , то подходит [Канторого множество](#).

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0}$$

$K$  – несчетно,  $K = \{x \in [0, 1] : \text{в троичной записи нет цифры } 1\}$ , а у таких чисел есть биекция между  $[0, 1]$ , просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

**Теорема 1.19.** (Регулярность меры Лебега).

Если  $E$  – измеримое, то найдется  $G$  – открытое, такое что оно накрывает  $E$  и мера зазора  $< \epsilon$ , то есть  $E \subset G \wedge \lambda(G \setminus E) < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \text{ – ячейка и } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$ .

(1): Пусть  $\lambda E < +\infty$ . Возьмем покрытие, для которого  $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$ .

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$ , хотим  $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$ .

Тогда  $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b'_j)$  – открытое и  $E \subset G$ .

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть  $\lambda E = +\infty$ .  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , такие что  $\lambda E_n < +\infty$ .

Возьмем  $G_n$  – открытое  $\supset E_n$ , такое что  $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$ .

$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  – открытое  $G \supset E$ .

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}.$$

□

**Следствие.** 1. Если  $E$  – измеримо, то найдется  $F \subset E$  – замкнутое, такое что  $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$ , такое что  $\underbrace{\lambda(G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E))}_{=E \setminus (\mathbb{R}^m \setminus G) = E \setminus F} < \epsilon$ , где  $F := \mathbb{R}^m \setminus G$  – замкнутое и  $F \subset E$ . □

2. Если  $E$  – измеримо, то

$$\lambda E = \inf\{\lambda G : G \text{ – открытое и } G \supset E\}.$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda F : F \text{ – замкнуто и } F \subset E\}$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda K : K \text{ – компакт и } K \subset E\}$$

**Доказательство.**  $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$$

Возьмем  $F$  – замкнутое из второго вывода и  $K_n := [-n, n]^m \cap F$  – компакт.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$  и  $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если  $\lambda F = +\infty$ , то есть  $K_n$  со сколь угодно большой мерой.

Если  $\lambda F < +\infty$ , то есть  $K_n$ , такие что  $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$  □

3. Если  $E$  – измеримо, то существует последовательность компактов  $K_n$ , такая что компакты  $K_n \subset K_{n+1}$  и  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$ , где  $\lambda e = 0$ .

**Доказательство.** (1) Пусть  $\lambda E < +\infty$ . Возьмем  $\tilde{K}_n \subset E \wedge \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n}$

$$K_n := \bigcup_{j=1}^n \tilde{K}_j \subset E, \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n} \leq \lambda K_n + \frac{1}{n}.$$

$$e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \lambda e = \lambda E - \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0.$$

(2) Пусть  $\lambda E = +\infty$ . Берем  $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \lambda E_j < +\infty$ .

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e, \text{ где } e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \wedge \lambda e = 0.$$

Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет). □

**Упражнение.**  $E$  – измеримое. Д-ть, что  $\exists G_n$  – открытое  $\supset E$ ,  $G_n \supset G_{n+1}$ , т.ч.  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$ , где  $\lambda e = 0$ .

**Теорема 1.20.** При сдвиге мн-ва на вектор  $\vec{v}$  измеримость сохраняется и мера не изменяется.

**Доказательство.**  $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$ ,  $\mu, \lambda$  заданы на ячейках и на них совпадают  $\implies \mu = \lambda$  по единственности продолжения. □

**Теорема 1.21.**  $\mu$ -мера на  $\mathcal{L}^m$ , т.ч.

1.  $\mu$  – инвариантна относительно сдвигов.

2.  $\mu$  конечна на ячейках =  $\mu$  конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда  $\exists k \in [0; +\infty)$ , т.ч.  $\mu = k \cdot \lambda$  (т.е.  $\mu E = k\lambda E \forall E \in \mathcal{L}^m$ )

**Доказательство.**  $Q := (0, 1]^m$ ,  $k := \mu Q$ ,  $k \in [0, +\infty)$

Рассмотрим случаи:

1.  $k = 1$ . Надо доказать, что  $\mu = \lambda$ , достаточно доказать, что  $\mu = \lambda$  на  $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies$  достаточно доказать на  $(0, \frac{1}{n}]^m$ .

$Q$  можно сложить из  $n^m$  сдвигов  $(0, \frac{1}{n}]^m$ .

$$\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m} \mu Q = \frac{1}{n^m} \lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m.$$

2.  $k > 0$ .  $\nu E := \frac{1}{k} \mu E$ . Тогда  $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$ .

3.  $k = 0$ . Покажем, что  $\mu \equiv 0$ .

$$\mu Q = 0, \mathbb{R}^m - \text{счетное объединение сдвигов } Q \implies \mu \mathbb{R}^m = 0.$$

□

**Теорема 1.22.**  $G \subset \mathbb{R}^m$  – открытое,  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно дифференцируема. Тогда

1. Если  $e \subset G$ , т.ч.  $\lambda e = 0$ , то  $\Phi(e)$  – мн-во нулевой меры.
2. Если  $E$  – измеримое, то  $\Phi(E)$  – измеримое.

**Замечание.** Для  $\Phi$  – непрер. или даже дифф. это неверно.

**Доказательство.** Пункт (1):

Случай:

1.  $e \subset P \subset CLP \subset G$ ,  $P$  – ячейка  $\implies \|\Phi'\|$  непрерывно на  $G \supset Cl P$  – компакт  $\implies \|\Phi'\| \leq M$  на  $Cl P$  (норма ограничена на замыкании  $P$ ).

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \|\Phi'(c)\| \cdot \|x - y\|, \text{ где } x, y \in P; c \in P \implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M \|x - y\|$$

Существуют кубические ячейки, такие что  $Q_j$ , т.ч.  $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$

Рассмотрим  $\Phi(Q_j)$

Пусть  $a_j$  – стороная кубика  $Q_j$ .  $x, y \in Q_j \implies \|x - y\| < \sqrt{m} \cdot a_j$  (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка)  $\implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M \sqrt{m} a_j$ .

Зафиксируем  $x$  и меняем  $y \implies \Phi(Q_j)$  содержится в шаре с центром в  $\Phi(x)$  и радиусом  $M \sqrt{m} a_j \implies \Phi(Q_j)$  содержится в ячейке  $R_j$  со стороной  $2M \sqrt{m} a_j$ .

$$\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty} (2M \sqrt{m})^m a_j^m = (2M \sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M \sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e) \text{ измеримо и } \lambda(\Phi(e)) = 0.$$

2.  $e$  – произвольное  $\subset G$ ,  $\lambda e = 0$ . Представим  $G$  как  $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ , где  $P_j$  – ячейка  $Cl P_j \subset G$ .

$$e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j) – \text{мн-ва нулевой меры} \implies \lambda(\Phi(e)) = 0.$$

Пункт (2):

$E$  – измеримое  $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$ ,  $\lambda e = 0$ ,  $K_n$  – компакт  $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$ .

$\lambda(\Phi(e)) = 0$  и  $\Phi(K_n)$  – компакт  $\implies$  измеримое. □

**Теорема 1.23.**  $\lambda$  – инвариантна относительно движения.

**Доказательство.** Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что  $\lambda$  не меняется. Проверим поворот:

пусть  $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U \text{ – линейное отображение}}, \mu, \lambda \text{ – заданы на } \mathcal{L}^m.$$

$\mu$  – инварианта относительно сдвига.  $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$ .  $\mu$  конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда  $\mu = k\lambda$ .

Хотим показать, что  $k = 1$ . Но на единичном шаре  $B$ ,  $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$ .  $\square$

**Теорема 1.24.** (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – линейное,  $E$  – измеримое. Тогда  $\lambda(TE) = |\det T| \cdot \lambda E$

**Доказательство.**  $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как } T \text{ – лин. отображ.}}, \mu$  инвариантно относительно сдвига и

конечно на огр. мн-вах.  $\implies \mu k \cdot \lambda$ , где  $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |\det T|$

 $\square$ 

**Пример.** неизмеримое мн-во в  $\mathbb{R}$ .

$x \sim y$  если  $(x - y) \in \mathbb{Q}$  – отношение эквивалентности.

Разобьем  $\mathbb{R}$  на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку  $(0, 1]$ .

$A$  – получившееся мн-во. Докажем, что  $A$  не может быть измеримым.

От противного. Если  $\lambda A = 0$ , то  $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) = \mathbb{R}$ . Но тогда  $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda \mathbb{R} = 0$  – противоречие.

Если  $\lambda A > 0$ .  $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \lambda(A + r) \leq 2 \implies$  противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

## 2. Интеграл Лебега

## 2.1. Измеримые функции

**Определение 2.1.**  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , лебеговы мн-ва функции f:

$$E\{f \leq a\} := \{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

$$E\{f < a\} := \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$$

$$E\{f \geq a\} := \{x \in E : f(x) \geq a\}$$

$$E\{f > a\} := \{x \in E : f(x) > a\}$$

**Теорема 2.1.**  $E$  – измеримое,  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , тогда равносильны:

1.  $E\{f \leq a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
2.  $E\{f < a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
3.  $E\{f \geq a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
4.  $E\{f > a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$

**Доказательство.** 1.  $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leq a\}$

$$2. (2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \geq a\}$$

$$3. (1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \leq a - \frac{1}{n}\}$$

$$4. (3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$$

□

**Определение 2.2.**  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая  $\forall a \in \mathbb{R}$  все ее лебеговы мн-ва измер.

**Замечание.**  $E$  – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

**Пример.** 1.  $f = \text{const}$ , лебеговы множества:  $\emptyset, X$ .

2.  $E \subset X$  – измеримое,  $f = \mathbf{1}_E(x) = 1$ , если  $x \in E$ , иначе 0.

Лебеговы множества:  $\emptyset, X, E, X \setminus E$ .

3.  $\mathcal{L}^m$  – лебеговская  $\sigma$ -алгебра на  $\mathbb{R}^m$

$f \in C(\mathbb{R}^m)$  – измеримая.

$f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{измеримое}})$  – открытое  $\implies$  измеримое.

**Свойства.** 1.  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая  $\implies E$  – измеримое.

2. Если  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  измеримая и  $E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0}$  – измеримое.

**Доказательство.**  $E_0\{g \leq c\} = E\{ \underbrace{f \leq c}_{\text{измеримое}} \} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}$ . □

3. Если  $f$  – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.

**Доказательство.**  $E\{a \leq f \leq b\} = E\{ \underbrace{a \leq f}_{\text{измеримое}} \} \cap E\{ \underbrace{f \leq b}_{\text{измеримое}} \}$ . □

4. Если  $f$  – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

**Доказательство.**  $U \subset \mathbb{R}$  – открытое мн-во  $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \implies f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}}.$   $\square$

5. Если  $f$  – измеримая, то  $|f|$  и  $-f$  – измеримы.

**Доказательство.**  $E\{-f \leq c\} = E\{f \geq -c\}, E\{|f| \leq c\} = E\{-c \leq f \leq c\}.$   $\square$

6. Если  $f, g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  измеримы, то  $\max\{f, g\}$  и  $\min\{f, g\}$  – измеримы.

В частности,  $f_+ = \max\{f, 0\}$  и  $f_- = \max\{-f, 0\}$  – измеримы.

**Доказательство.**  $E\{\max\{f, g\} \leq c\} = E\{f \leq c\} \cap E\{g \leq c\}$   $\square$

7. Если  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, f|_{E_n}$  – измерима  $\forall n \implies f$  – измеримая.

$f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}.$

**Доказательство.**  $E\{f \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \{f \leq c\}.$   $\square$

8. Если  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  измерима, то найдется  $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая, такая что  $f = g|_E$

**Доказательство.**  $g(x) := 0$ , если  $x \notin E, g(x)$ , иначе.  $\square$

**Теорема 2.2.** Пусть  $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – последовательность измеримых функций. Тогда:

1.  $\sup f_n, \inf f_n$  – измеримые.
2.  $\underline{\lim} f_n$  и  $\overline{\lim} f_n$  – измеримые.
3. Если существуют  $\lim f_n$ , то он измеримый.

**Доказательство.** 1.  $E\{\sup f_n \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leq c\}$

2.  $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$  и  $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$

3. Если существует  $\lim f_n$ , то  $\lim f_n = \underline{\lim} f_n.$

$\square$

**Теорема 2.3.** Пусть  $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow H \subset \mathbb{R}$  – измеримые,  $\phi \in C(H)$ , тогда  $g : E \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$  – измеримая.

**Доказательство.**  $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$  – открытое в  $H \implies \exists G$  – открытое в  $\mathbb{R}^m$ , т.ч.  $U = H \cap G$

$\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки  $(\alpha, \beta]$ , что  $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$  – измерима,  $\bigcup_{k=1}^n E\{\alpha_k < f_k \leq \beta_k\}$

$\square$

**Следствие.** Если в теореме  $\phi$  – поточечный предел непрерывных, то  $g$  – измерима.

**Доказательство.**  $\phi = \lim \phi_n$ ,  $\phi_n \vec{f}$  – измер. и поточечно стремится к  $\phi_0 \vec{f}$  □

Арифметические операции в  $\mathbb{R}$ :

1. Если  $x \in \mathbb{R}$ , то  $x + (+\infty) = +\infty$ ,  $x + (-\infty) = -\infty$  и т.д.
2.  $(+\infty) + (-\infty) = 0$ ,  $(+\infty) - (+\infty) = 0$ ,  $(-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если  $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$ , то  $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ , где знак  $\pm : \pm = +$ ,  $\pm : \mp = -$
4.  $0 \cdot \pm\infty = 0$  и  $\frac{x}{\pm\infty} = 0$ ,  $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}$ , т.е.  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$ .
5. Делить на 0 не умеем.

**Теорема 2.4.** 1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримая.

2. Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримая и  $\phi \in C(\mathbb{R})$ , то  $\phi \circ f$  – измеримая.
3. Если  $f \geq 0$  – измеримая, то  $f^p$  ( $p > 0$ ) – измеримая,  $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая,  $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$ , то  $\frac{1}{f}$  – измерима на  $\tilde{E}$ .

**Доказательство.** 1.  $f + g$ . Для каждой функции рассмотрим три множества:

$$E\{f \neq \pm\infty\}, E\{f = +\infty\}, E\{f = -\infty\}$$

$$E\{g \neq \pm\infty\}, \underbrace{E\{g = +\infty\}}_{= \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}}, E\{g = -\infty\}$$

Для конечного случая ( $E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\}$ ) можем сослаться на предыдущую теорему, взяв в качестве непрерывной  $\phi(f, g) = f + g$ .

На остальных случаях тоже рассматриваем  $f + g$ : измеримость будет, т.к.  $f + g = const$ .

2. Частный случай предыдущей теоремы.

3.  $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4.  $f|_{\tilde{E}}$  – измерима и  $\neq 0$

$$\tilde{E} \left\{ \frac{1}{f} \leq c \right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad (3)$$

□

**Следствие.** 1. Произведение конечного числа измер. – измер.

2. Натуральная степень измер. функции – измер.
3. Линейная комбинация измер. функций – измер.

**Теорема 2.5.**  $E \subset \mathbb{R}^m$  – измеримое,  $f \in C(E)$ . Тогда  $f$  – измер. относительно меры Лебега.

**Доказательство.**  $U := f^{-1}(-\infty, c)$  – открытое мн-во в  $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$  – открытое, т.ч.  $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$  ( $E$  измеримо по условию, а  $G$  измеримо в  $\sigma$ -алгебре) □

**Определение 2.3.** Измеримая функция – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение  $X$  – разбиение  $X$  на конечное число измеримых множеств, таких что на каждом множестве простая функция константна.

**Следствие.** 1. Если  $X$  разбито на конечное число измер. мн-в и  $f$  постоянна (то есть сужение на каждом кусочке  $X$  это какая-та константа) на каждом из них, то  $f$  – простая.  
 2. Если  $f$  и  $g$  – простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

**Доказательство.**  $X = \bigsqcup_{k=1}^m A_k = \bigsqcup_{j=1}^n B_j \implies X = \bigsqcup_{k=1}^m \bigsqcup_{j=1}^n (A_k \cap B_j)$  – допустимое для  $f$  и  $g$ . □

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.
4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.
5.  $\max$  и  $\min$  конечного числа простых функций – простая функция.

**Теорема 2.6.** (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – неотрицательная измеримая функция, тогда  $\exists$  последовательность простых функций  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , такие что  $\phi_i \leq \phi_{i+1} : \forall i$  в каждой точке и  $\lim \phi_n = f$ . Более того, если  $f$  – ограничена сверху, то можно выбрать  $\phi_n$  так, что  $\phi_n \rightrightarrows f$  на  $X$ .

**Доказательство.**  $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$  при  $k = 0, \dots, (n^2 - 1)$  и  $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$ .

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k$ ,  $A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$  – измер. мн-во.

$\phi_n$  на  $A_k$  равно  $\frac{k}{n} \implies 0 \leq \phi_n(x) \leq f(x) \quad \forall x$  и  $f(x) \leq \phi_n(x) + \frac{1}{n}$  при  $x \notin A_{n^2}$ .

$\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ :

1. если  $f(x) = +\infty$ , то  $x \in A_{n^2}^{(n)}$   $\forall n \implies \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$
2. если  $f(x) \neq +\infty$ , то  $x \notin A_{n^2}^{(n)}$  при больших  $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \leq \phi_n(x) \leq f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое  $n$ , а только степени двойки, тогда нам нужно взять  $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  (тут должна быть картинка)

Равномерность: если  $f$  ограничена, начиная с некоторого момента  $A_{n^2}$  пусто  $\implies$  все  $x \notin A_{n^2} \implies \forall x \in E : f(x) - \frac{1}{n} < \phi_n(x) \leq f(x) \implies |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \implies$  есть равномерная сходимость. □

## 2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание.  $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

Поточечная сходимость:  $f_n \rightarrow f$ ,  $\forall x \in E : f_n(x) \rightarrow f(x)$

Равномерная сходимость:  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ ,  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

**Определение 2.4.**  $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримые.

$f_n$  сходится к  $f$  **почти везде**, если  $\exists e \subset E$ ,  $\mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$

**Замечание.** Обозначение:  $\mathcal{L}(E, \mu) = \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} - \text{измеримые}, \mu E\{f = \pm\infty\} = 0\}$

Пусть  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ ,  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

$\exists e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$

**Определение 2.5.**  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ ,  $f_n$  сходится по мере  $\mu$  к  $f$ , если  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $f_n \Rightarrow_\mu f$

**Замечание.** Зависимость: равномерная  $\implies$  (поточечная  $\implies$  почти везде) | (сходимость по мере).

Равномерная  $\implies$  поточечная – знаем.

Поточечная  $\implies$  почти везде – у нас уже есть сходимость во всех точках, поэтому для “почти везде” ничего не надо выкидывать.

Равномерная  $\implies$  сходимость по мере – начиная с некоторого момента  $E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$  будет пустым множеством по определению равномерной сходимости.

**Утверждение 2.7.** 1. Если  $f_n$  сходится к  $f$  п.в. (почти везде) и  $f_n$  сходится к  $g$  п.в., то  $f = g$  (за исключением мн-ва нулевой меры)

2. Если  $f_n \Rightarrow_\mu f$  и  $f_n \Rightarrow_\mu g$ , то  $f = g$  за исключением мн-ва нулевой меры.

**Доказательство.** 1. Берем  $e \subset E, \mu e = 0$  и  $\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in E \setminus e$

$\tilde{e} \subset E, \mu \tilde{e} = 0$  и  $\lim f_n(x) = g(x), \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

Тогда на  $E \setminus (e \cup \tilde{e})$   $\lim f_n(x) = g(x)$  и  $\lim f_n(x) = f(x) \implies f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$

2.  $\mu E\{f \neq g\} \underset{?}{=} 0, E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}.$

Достаточно доказать, что  $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$ .

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0 ?} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

Знаем, что  $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \rightarrow 0$

$\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$  вложены по убыванию

$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \dots = \lim_N \left( \mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \right) \leq \lim_N (\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) = 0$

□

**Теорема 2.8. Лебега.**

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Пусть  $\mu E < +\infty$  и  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

Тогда  $f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$ .

**Доказательство.** Найдется  $e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

Выкинем  $e$  и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что  $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\}, \mu A_n \rightarrow 0$ .

1. Частный случай ( $f_n \searrow 0$ ):  $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$ .

$$\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mu \emptyset = 0.$$

Пусть  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies 0 < f_n(x) > \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \implies$  таких  $x$  не существует.

2. Общий случай:  $g_n(x) := \sup_{k \geq n} \{|f_k(x) - f(x)|\}$ .  $g_n(x) \searrow$ , т.к. множество уменьшается.

$$\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k \geq n} \{ \dots \} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$$

$$\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\rightarrow 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

$$E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

□

**Замечание.** 1. Условие  $\mu E < +\infty$  существенно.

$$E = \mathbb{R}, \mu = \lambda, f_n = \mathbf{1}_{[n, +\infty)} \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \equiv 0$$

$$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\rightarrow 0.$$

2. Обратное неверно. Более того, может быть сходимость по мере и расходимость во всех точках вообще:  $E = [0, 1], \mu = \lambda$

$$\mathbf{1}_{[0,1]} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2})} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{3})} \mathbf{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} \mathbf{1}_{[\frac{2}{3}, 1)} - \text{ни для какого аргумента нет предела: } [0, \frac{1}{n}) [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \dots [\frac{n-1}{n}, 1)$$

### Теорема 2.9. Рисса.

$f, f_n \in \mathcal{L}(E, \mu)$ . Если  $f_n \Rightarrow_{\mu} f$ , то существует подпоследовательность  $f_{n_k}$ , т.ч.  $f_{n_k}$  сходится к  $f$  почти везде.

**Доказательство.**  $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Выберем  $n_k$  так, что  $n_k > n_{k-1}$ , и  $\underbrace{\mu E\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}}_{=:A_k} < \frac{1}{2^k}$

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

$B_1 \supset B_2 \supset \dots \implies \underbrace{\mu B_n}_{\mu B_n \rightarrow 0} = 0$ , проверим, что если  $x \notin B$ , то  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ , где  $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

$x \notin B \implies \exists m, \text{ т.ч. } x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$

$$\implies x \notin A_k \forall k \geq m \implies \forall k \geq m \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\rightarrow k \rightarrow 0 0} \leq \frac{1}{k}$$

□

**Следствие.** Если  $f_n \leq g$  и  $f_n \Rightarrow_{\mu} f$ , то  $f \leq g$  за исключением мн-ва нулевой меры.

**Доказательство.** Выберем  $f_{n_k}$  сходится к  $f$  почти везде. Пусть  $e$  – искл. мн-во  $\mu e = 0$ .

$$\lim \underbrace{f_{n_k}}_{\leq g(x)} = f(x) : \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in E \setminus e$$

□

### Теорема 2.10. Фреше.

Если  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  измерима относительно  $\lambda_m$  (мера Лебега), то  $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$ , т.ч.  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

**Теорема 2.11. Егорова.**

Пусть  $\mu E < +\infty$ ,  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ . Если  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде, то найдется  $e \subset E$ ,  $\mu e < \epsilon$ , т.ч.  $f_n \rightharpoonup f$  на  $E \setminus e$ .

**Теорема 2.12. Лузина.**

$E \subset \mathbb{R}^m$  – измеримо,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измерима (относительно  $\lambda_m$  – мера Лебега). Тогда найдется  $e \subset E$ ,  $\mu e < \epsilon$ , т.ч.  $f|_{E \setminus e}$  – непрерывна.

Фреше + Егоров  $\implies$  Лузин:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ – измеримое } \xrightarrow{\text{Фреше}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m), f_n \text{ сходится к } f \text{ почти везде} \xrightarrow{\text{Егоров}} \exists e : \lambda_m e < \epsilon,$$

т.ч.  $f_n \underset{\mathbb{R}^m \setminus e}{\rightharpoonup} f$ , равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

## 2.3. Определение интеграла

**Лемма.** Пусть  $f \geq 0$  простая функция  $A_1, \dots, A_n$  и  $B_1, \dots, B_m$  – допустимые разбиения.

$a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_m$  значения  $f$  на соответственных мн-вах.

Тогда  $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j)$ .

**Доказательство.**  $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

(1)  $\underset{?}{=} (2)$ .

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если  $A_k \cap B_j \neq \emptyset$ , то  $a_k = b_j$ , если  $A_k \cap B_j = \emptyset$ , то  $\mu(\dots) = 0$ .

Условие  $f \geq 0$  важно, т.к. в ином случае могли бы получиться  $\infty$  разных знаков и равенство зависело бы от порядка сложения.  $\square$

**Определение 2.6.**  $f \geq 0$  простая,  $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k)$ , где  $A_1, \dots, A_n$  – допустимые разбиения ( $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$ ),  $a_1, \dots, a_n$  – соответст. значения.

**Свойства.** 1.  $\int_E c d\mu = c \mu E$ ,  $c \geq 0$

2. Если  $f, g$  – простые и  $0 \leq f \leq g$ , то  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

3. Если  $f, g \geq 0$  – простые, то  $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

4. Если  $c \geq 0$  и  $f \geq 0$  – простая, то  $\int_E c f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$  – общее допустимое разбиение,  $a_k, b_k$  – значения на  $A_k$ .

3.  $\int_E (f + g) d\mu = \sum (a_k + b_k) \mu(E \cap A_k) = \sum a_k \mu(A_k \cap E) + \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

2.  $\int_E f d\mu = \sum a_k \mu(A_k \cap E) \leq \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E g d\mu$   $\square$

**Определение 2.7.** Интеграл от неотриц. измеримой ф-ции  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ .

$\int_E f d\mu := \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая и } 0 \leq \phi \leq f \}$

**Определение 2.8.** Интеграл от измеримой функции

$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$  (если тут  $+\infty - (+\infty)$ , то интеграл не определен)

**Замечание.** Новое определение на простых функциях совпадает со старым.

**Доказательство.**  $f \geq 0$  – простая  $\Rightarrow$

- (1):  $\phi = f$  подходит (новое  $\geq$  старое, т.к. берем супремум).
- (2):  $\phi \leq f \Rightarrow \int_E \phi d\mu \leq \int_E f d\mu$  (sup  $\leq$  старое, т.к. задали  $\phi : 0 \leq \phi \leq f$ ).
- (3): В определении для произвольных измеримых:  $\int_E (f)_- d\mu = 0$

□

**Свойства.** 1. Если  $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

2. Если  $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$

3.  $f$  – измеримая  $\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_X \mathbf{1}_E f d\mu$

**Доказательство.** Проверим для  $f_{\pm}$ :

$\int_E f_+ d\mu = \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq f_+ \} = \sup \{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq \mathbf{1}_E f_+ \} = \int_X \mathbf{1}_E f_+ d\mu$  (в одном случае сужаем  $\phi$  на множество  $E$ , в другом – дополняем нулями на  $X \setminus E$ ) □

4. Если  $f \geq 0$  – измеримая,  $A \subset B$ , то  $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ .

**Доказательство.**  $\int_A f d\mu = \int_X \mathbf{1}_A f d\mu \underset{\substack{\leq \\ \text{т.к. } \mathbf{1}_A f \leq \mathbf{1}_B f}}{\leq} \int_X \mathbf{1}_B f d\mu = \int_B f d\mu$ . □

**Упражнение.** Доказать, что  $\int_{[1;+\infty)} \frac{\sin x}{x} d\lambda_1$  не определен.

**Теорема 2.13. Беппо Леви.**

Пусть  $f_n \geq 0$  – измеримые функции,  $f_n : E \rightarrow \bar{R}$ , последовательность поточечно возрастающая  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ .  $f(x) := \lim f_n(x)$  – поточечный предел.

Тогда  $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.** (1):  $f_n \leq f \Rightarrow \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(2):  $f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$

(1) и (2)  $\Rightarrow \exists L := \lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

Осталось проверить, что  $L \geq \int_E f d\mu$  (можно считать, что  $L < +\infty$  т.е. конечна, иначе утверждение очевидно).

$\int_E f d\mu = \sup \{ \int_E \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ – простая} \}$

Достаточно доказать, что  $L \geq \int_E \phi d\mu$  для  $\phi$  – простая и  $0 \leq \phi \leq f$ .

Возьмем  $0 < \theta < 1$  и докажем, что  $L \geq \int_E \theta \phi d\mu$ :

$E_n := E\{f_n \geq \theta \phi\}, f_n \nearrow \Rightarrow E_n \subset E_{n+1}$ . Покажем, что  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Пусть  $x \in E$ :

1. если  $\phi(x) = 0$ , то  $\forall n : x \in E_n$

2. если  $\phi(x) > 0$ , то  $\lim f_n(x) = f(x) \geq \phi(x) > \theta \phi(x) \underset{\substack{\Rightarrow \\ \text{при больших } n}}{\Rightarrow} f_n(x) > \theta \phi(x) \underset{\substack{\Rightarrow \\ \text{при больших } n}}{\Rightarrow} x \in E_n$

Посмотрим на  $\underbrace{\int_E f_n d\mu}_{(*)} \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \underbrace{\int_{E_n} \theta \phi d\mu}_{(**)}$ .

Переходим к пределу  $n \rightarrow \infty$ :  $\underbrace{L}_{\text{получили из } (*)} \geq \underbrace{\int_E \theta \phi d\mu}_{\text{это нужно понять для } (**)}$

Осталось понять, что  $\underbrace{\int_{E_n} \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m a_k \mu(E_n \cap A_k)} \rightarrow \underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \mu(E \cap A_k)}.$

Поймем, что  $\mu(E_n \cap A_k) \rightarrow \mu(E \cap A_k)$  – непрерывность меры снизу,  $E_n \cap A_k \subset E_{n+1} \cap A_k$  и  $\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_n \cap A_k) = E \cap A_k$ .  $\square$

**Свойства.** Продолжаем писать свойства:

5.  $f, g \geq 0$  – измеримые  $\Rightarrow \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$  – аддитивность.
6.  $f \geq 0, \alpha \geq 0 \Rightarrow \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$  – однородность.
7.  $\alpha, \beta \geq 0, f, g \geq 0$  – измеримые, тогда  $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

**Доказательство.** 5.  $f \geq 0$  измеримая  $\Rightarrow \exists 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$  – простые, причем  $\phi_n \rightarrow f$  поточечно.

$g \geq 0$  измеримая  $\Rightarrow \exists 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots$  – причем  $\psi_n \rightarrow g$  поточечно.

$\Rightarrow 0 \leq \phi_1 + \psi_1 \leq \dots$  простые и  $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g$ .

$$\underbrace{\int_E (\phi_n + \psi_n) d\mu}_{\rightarrow \int_E (f+g) d\mu} = \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E f d\mu} + \underbrace{\int_E \psi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E g d\mu}$$

по Леви

$\square$

**Свойства.** Продолжаем свойства.

8. Аддитивность по мн-ву. Если  $A \cap B = \emptyset$ ,  $f \geq 0$  измеримая, то  $\underbrace{\int_{A \cup B} f d\mu}_{(*)} = \underbrace{\int_A f d\mu}_{(**)} + \underbrace{\int_B f d\mu}_{(***)}$

**Доказательство.**  $(*) = \int_X \mathbb{1}_{A \cup B} f d\mu$

$$(**) = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu$$

$$(***) = \int_X \mathbb{1}_B f d\mu$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f$$

$\square$

9. Если  $\mu E > 0$  и  $f > 0$  измери., то  $\int_E f d\mu > 0$ .

**Доказательство.**  $E_n := E\{f \geq \frac{1}{n}\}, E_n \subset E_{n+1}, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$\Rightarrow \lim \mu E_n = \mu E > 0 \Rightarrow \mu E_n > 0$  для больших  $n$

$\Rightarrow \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu E_n > 0$ .  $\square$

**Пример.**  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  – не более чем счетное,  $w_1, w_2, \dots \geq 0$ .

$\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$  – мера.

$\int_E f d\mu = \sum_{k: t_k \in E} w_k = (*)$ .

Пусть  $f = \mathbb{1}_A$ , тогда  $\int_E f d\mu = \int_E \mathbb{1}_A d\mu = \mu(E \cap A) = \sum_{k: t_k \in E \cap A} w_k = \sum_{k: t_k \in E} \mathbb{1}(t_k) w_k = (*)$ .

$\Rightarrow$  равенство есть и на простых функциях

Пусть  $f \geq 0$  измерим.  $\phi_n = f \cdot \mathbb{1}_{\{t_1, t_2, \dots, t_n\}}$ ,  $0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq f$ .

$$\lim \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{= \lim \sum_{k < n: t_k \in E} f(t_k) w_k = \sum_{k: t_k \in E} f(t_k) w_k} = \int_E \underbrace{\lim \phi_n}_{\leq f} d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Проверим, что  $\underbrace{\int_E f d\mu}_{\sup\{\dots\}} \leq \sum_{f(t_k)w_k}$ . Берем  $0 \leq \underbrace{\phi}_{\text{простая}} \leq f$  и проверяем, что  $\underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k: t_k \in E} \phi(t_k) w_k} \leq \sum_{k: t_k \in E} f(t_k) w_k$

**Замечание.**  $T = \mathbb{N}$ ,  $w_n \equiv 1$ .

$$\mu A = \#\{A \cap \mathbb{N}\}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

**Определение 2.9.**  $P(x)$  – св-во, зависящее от точки.  $P(x)$  выполняется **почти везде**, если на  $E$  (для **почти всех** точек из  $E$ ), если  $\exists e \subset E$ ,  $\mu e = 0$  и  $P(x)$  выполнено  $\forall x \in E \setminus e$ .

**Замечание.**  $P_1, P_2, \dots$  последовательность св-в, каждое из которых верно почти везде на  $E$ , то они все вместе верны почти везде на  $E$ .

**Теорема 2.14.** (Неравенство Чебышева).

$$f \geq 0 \text{ измер., } t, p > 0. \text{ Тогда } \mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \cdot \int_E f^p d\mu.$$

**Доказательство.**  $\int_E f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} t^p d\mu = t^p \cdot \mu E\{f \geq t\}$ . □

**Свойства.** Свойства интеграла, связанные с понятием "почти везде".

1. Если  $\int_E |f| d\mu < +\infty$ , то  $f$  почти везде конечна.
2. Если  $\int_E |f| d\mu = 0$ , то  $f = 0$  почти везде.
3. Если  $A \subset B$  и  $\mu(B \setminus A) = 0$ , то  $\int_A f d\mu$  и  $\int_B f d\mu$  либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.
4. Если  $f = g$  почти везде на  $E$ , тогда  $\int_E f$  и  $\int_E g$  либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.

**Доказательство.** 1.  $E\{|f| = +\infty\} \subset E\{|f| \geq t\}$

$$\mu E\{|f| = +\infty\} \leq \mu E\{|f| \geq t\} \leq \underbrace{\frac{\int_E |f| d\mu}{t}}_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$$

2. Если  $\mu E\{f > 0\} > 0$ , то  $\int_E f d\mu = \int_{E\{f > 0\}} f d\mu > 0$  (св-во. 9 из уже доказанных выше).

$$3. \int_B f_{\pm} d\mu = \int_{B \setminus A} f_{\pm} d\mu + \int_A f_{\pm} d\mu = \int_A f_{\pm} d\mu$$

$$4. A := E\{f = g\}, \mu(E \setminus A) = 0 \quad \int_E f d\mu = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_E g d\mu$$

□

## 2.4. Суммируемые функции

**Определение 2.10.**  $f$  – суммируема на мн-ве  $E$ , если  $f$  измерима и  $\int_E f_{\pm} d\mu < +\infty$ .

**Замечание.** В этом случае  $\int_E f d\mu$  конечен.

**Свойства.** 1.  $f$  – суммируема на  $E \Leftrightarrow \int_E |f|d\mu < +\infty$  и  $f$  – измерима.

В этом случае  $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f|d\mu$

**Доказательство.**  $0 \leq f_{\pm} \leq |f| = f_+ + f_-$

” $\Rightarrow$ ”:  $\int_E |f|d\mu = \int_E f_+d\mu + \int_E f_-d\mu < +\infty$

” $\Leftarrow$ ”:  $\int_E f_{\pm}d\mu \leq \int_E |f|d\mu < +\infty$

$$\text{Нер-во: } -\int_E |f|d\mu = -\int_E f_+d\mu - \int_E f_-d\mu \leq \underbrace{\int_E f_+d\mu}_{\int_E f d\mu} - \underbrace{\int_E f_-d\mu}_{\int_E f d\mu} \leq \int_E f_+d\mu + \int_E f_-d\mu = \int_E |f|d\mu$$

□

2.  $f$  суммируема на  $E \implies f$  почти везде конечна на  $E$ .

3. Если  $A \subset B$  и  $f$  суммируема на  $B$ , то  $f$  суммируема на  $A$ .

**Доказательство.**  $\int_A |f|d\mu \leq \int_B |f|d\mu < +\infty$

□

4. Ограниченнная функция суммируема на мн-ве конечной меры.

**Доказательство.**  $|f| \leq M \implies \int_E |f|d\mu \leq \int_E M d\mu = M \cdot \mu E < +\infty$

□

5. Если  $f$  и  $g$  суммируемы и  $f \leq g$ , то  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

**Доказательство.**  $f_+ - f_- = f \leq g = g_+ - g_- \implies 0 \leq f_+ + g_- \leq f_- + g_+ \implies \int_E f_+d\mu + \int_E g_-d\mu \leq \int_E f_-d\mu + \int_E g_+d\mu$  – переносим слагаемые в нужные стороны и чтд. □

6.  $f$  и  $g$  – суммируемы  $\implies f + g$  суммируема и  $\int_E (f + g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

**Доказательство.**  $|f + g| \leq |f| + |g| \implies f + g$  суммируема.

$h := f + g$ ,  $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$

$\implies h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \geq 0$

$\implies \int_E h_+d\mu + \int_E f_-d\mu + \int_E g_-d\mu = \int_E f_+d\mu + \int_E g_+d\mu + \int_E h_-d\mu$  – далее просто переносим нужные слагаемые через равно. □

7.  $f$  – суммируема,  $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f$  суммируема и  $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \implies |\alpha f|$  – суммируема.

Если  $\alpha > 0$ , то  $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$  и  $(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$  и  $\int_E (\alpha f)_{\pm}d\mu = \alpha \cdot \int_E f_{\pm}d\mu$

Если  $\alpha = -1$ , то  $(-f)_+ = f_-$  и  $(-f)_- = f_+$   $\implies \int_E (-f)d\mu = \int_E f_- - \int_E f_+ = -\int_E f d\mu$  □

8. Линейность.

Если  $f, g$  – суммируемы,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f + \beta g$  – суммируема и  $\int_E (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

9. Пусть  $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ . Тогда  $f$  – суммируема на  $E \Leftrightarrow f$  – суммируема на  $E_k : \forall k = 1, \dots, n$ . А если  $f$  суммируема на  $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ , то  $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$

**Доказательство.**  $\mathbb{1}_{E_k}|f| \leq \mathbb{1}_E|f| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}|f| \implies \int_{E_k} |f| d\mu \leq \sum_{k=1}^n \int_{E_k} |f| d\mu$ .

Если  $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ , то  $\mathbb{1}_E = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} \implies \mathbb{1}_E f_\pm = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} f_\pm \implies \int_E f_\pm d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_\pm d\mu$   $\square$

10. Интегрирование по сумме мер. Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – меры, заданные на одной  $\sigma$ -алгебре,  $\mu := \mu_1 + \mu_2$ .

Если  $f \geq 0$  измерима, то  $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2 (*)$ .

$f$  – суммируема относительно  $\mu \Leftrightarrow f$  – суммируема относительно  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и в этом случае есть равенство (\*).

**Доказательство.** (\*) для  $f \geq 0$ :

$$(*) \text{ есть для простых } \phi \geq 0, \int_E \phi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\mu(E \cap A_k)}_{\mu_1(E \cap A_k) + \mu_2(E \cap A_k)} = \int_E \phi d\mu_1 + \int_E \phi d\mu_2.$$

$f \geq 0$  – измеримая  $\implies$  возьмем  $0 \leq \phi \leq \dots \leq \phi_n$  – простые,  $\phi_n \rightarrow f$ .

$\int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n d\mu_1 + \int_E \phi_n d\mu_2$  по т. Леви получаем (предельный переход)  $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$   $\square$

**Определение 2.11.** Интеграл от комплекснозначной функции  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ .

$Re(f)$  и  $Im(f)$  – измеримые функции.

$$\int_E f d\mu := \int_E Re(f) d\mu + i \cdot \int_E Im(f) d\mu$$

**Замечание.** Все св-ва, связанные с равенствами, сохраняются:

**Доказательство.**  $Re(if) = -Im(f), Im(if) = Re(f)$

$$\int_E if d\mu = i \int_E f d\mu$$

**Замечание.**  $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

**Доказательство.**  $|\int_E f d\mu| = e^{i\alpha} \cdot \int_E f d\mu = \int_E e^{i\alpha} f d\mu =$   
 $= \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \underbrace{\int_E Im(e^{i\alpha} f) d\mu}_{=0, \text{ т.к. слева от равенства вещ. число}} = \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu \leq \int_E |Re(e^{i\alpha} f)| d\mu \leq \int_E |e^{i\alpha}| d\mu =$   
 $\int_E |f| d\mu.$

$$|Re(f)|, |Im(f)| \leq |f|$$

$$|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

**Теорема 2.15.** (О счетной аддитивности интеграла).

Пусть  $f \geq 0$  – измеримая и  $E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n$ .

$$\text{Тогда } \int_E f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu$$

**Доказательство.**  $\sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f d\mu = \lim \int_E \left( \underbrace{\mathbb{1}_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f}_{:= g_n} d\mu \right) =$   
 $\lim \int_E g_n d\mu \underset{\text{т. Леви}}{=} \int_E f d\mu$

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots, \lim g_n = f, g_n(x) = f(x) \text{ если } x \in \bigsqcup_{k=1}^n E_k.$$

- Следствие.**
1. Если  $f \geq 0$  – измеримая, то  $\nu E := \int_E f d\mu$  – мера, заданная на той же  $\sigma$ -алгебре, что и  $\mu$ .
  2. Если  $f \geq 0$  и  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
  3. Если  $f$  – суммируема и  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ ,  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
  4. Если  $f$  – суммируема на  $E$ ,  $\epsilon > 0$ , то  $\exists A \subset E : \mu A < +\infty \wedge \int_{E \setminus A} |f| d\mu < \epsilon$

**Доказательство.** 1.  $\nu \emptyset = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$  + счетная аддитивность из теоремы:  $\int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$  все конечно, поэтому можно вычесть.

2.  $\nu A := \int_A f d\mu$  – мера  $\implies \nu A$  непрерывна снизу.

$$\underbrace{\nu E}_{\int_E f d\mu} = \underbrace{\lim}_{\lim \int_{E_n} f d\mu} \nu E_n$$

3.  $\nu_{\pm} A := \int_A f_{\pm} d\mu$ ,  $\nu_{\pm} A$  – конечные меры  $\implies \nu_{\pm}$  – непрерывна сверху.

$$\implies \int_E f_{\pm} d\mu = \nu_{\pm} E = \lim \nu_{\pm} E_n = \lim \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$$

4.  $E_n := E\{|f| \leq \frac{1}{n}\} \implies E_n \supset E_{n+1}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\} \implies \lim \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0 \implies \exists n : \epsilon > \int_{E_n} |f| d\mu \geq \left| \int_{E_n} f d\mu \right|$$

$$A := E \setminus E_n = E\{|f| > \frac{1}{n}\}$$

$$\mu A \leq \underbrace{\frac{\int_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}}}_{\text{Чебышев}} < +\infty$$

□

**Теорема 2.16.** (Абсолютная непрерывность интеграла).

$f$  – суммируема на  $E$ , тогда  $\forall \epsilon : \exists \delta > 0$ , т.ч.  $\forall e$  – измер.  $\mu e < \delta \implies |\int_e f d\mu| < \epsilon$

**Доказательство.**  $\int_E |f| d\mu < +\infty \implies \exists \underbrace{\phi}_{\leq f}$  – неотрицательная простая, т.ч.

$$\int_E |f| d\mu < \int_E \phi d\mu + \epsilon.$$

Пусть  $C$  – наибольшее значение  $\phi$ . Возьмем  $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ .

Если  $\mu e < \delta$ , то  $\int_e |f| d\mu < \underbrace{\int_e \phi d\mu + \epsilon}_{\leq \int_e C d\mu + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon}$  – это следует из того, что  $|f| - \phi \geq 0$ ,

$$\int_e (|f| - \phi) d\mu \leq \int_e (|f| - \phi) d\mu < \epsilon.$$

□

**Следствие.** Если  $f$  суммируема на  $E$  и  $\mu A_n \rightarrow 0$ ,  $A_n \subset E$ , то  $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Берем  $\epsilon > 0$  и  $\delta > 0$  для него из теоремы, тогда если  $\mu A_n < \delta$ , то  $|\int_{A_n} f d\mu| < \epsilon$

□

**Определение 2.12.** Пусть  $\mu$  и  $\nu$  меры на одной  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ . Если существует измеримая функция  $w \geq 0$ , т.ч.  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,  $\nu A = \int_A w d\mu$ .

Тогда  $w$  плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ .

**Замечание.** Если  $w$  существует, то  $\nu$  обладает свойством: если  $\mu e = 0$ , то  $\nu e = 0$ .

**Теорема 2.17.** Пусть  $f, g$  – суммируемые функции. Если  $\forall A$  – измерим.  $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ , то  $f = g$  почти везде.

**Доказательство.**  $h := f - g$ ,  $E_+ := E\{f \geq g\}$ ,  $E_- := E\{f < g\}$

$$\int_E |h| d\mu = \underbrace{\int_{E_+} h d\mu}_{=0} - \underbrace{\int_{E_-} h d\mu}_{=0} = 0 \implies h = 0 \text{ почти везде.}$$

□

**Теорема 2.18.** (Единственность плотности).

Если  $\nu$  –  $\sigma$ -конечная мера (на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ ) и  $w$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$ , то  $w$  – единственна с точностью до **почти везде**.

**Доказательство.** Так как наша мера –  $\sigma$ -конечна, то все пространство представляется как  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ , т.ч.  $\nu X_n < +\infty \implies$  т.к.  $w$  – плотность  $\nu|_{X_n}$  относительно  $\mu|_{X_n} \implies w$  – суммируема на  $X_n$ .

Пусть  $w_1, w_2$  – плотности  $\nu$  относительно  $\mu$  на сужении одного кусочка, тогда по определению плотности верно, что  $\forall A \in \mathcal{A} : \nu A = \int_A w_1 d\mu = \int_A w_2 d\mu \implies w_1 = w_2$  почти везде.  
по пред. теореме

Ну если две плотности на каждом из кусочков отличаются на множество нулевой меры, тогда и на объединении кусочков тоже будут отличаться на множество нулевой меры, тогда плотность единственна почти везде и на всей  $\sigma$ -алгебре. □

**Определение 2.13.**  $\nu, \mu$  – меры, заданные на одной  $\sigma$ -алгебре.  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно  $\mu$ , если  $\forall e$  – измер., т.ч.  $\mu e = 0 \implies \nu e = 0$ .

Обозначение  $\nu \prec \mu$  или  $\nu \ll \mu$ .

**Теорема 2.19. (Радона-Никодима).**

Пусть меры  $\mu$  и  $\nu$  заданы на одной  $\sigma$ -алгебре. Тогда  $\nu \prec \mu \Leftrightarrow$  существует плотность меры  $\nu$  относительно  $\mu$ .

**Теорема 2.20.**  $w$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$ . Тогда

1. Если  $f \geq 0$ , то  $\int_E f d\nu = \int_E f w d\mu : (*)$
2.  $fw$  – суммируема, относительно  $\mu \Leftrightarrow f$  – суммируема относительно  $\nu$ , и в этом случае есть формула  $(*)$

**Доказательство.** 1. Пусть  $f = \mathbb{1}_A$ , тогда  $\int_E f d\nu = \nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} w d\mu = \int_E \mathbb{1}_A w d\mu$ . По линейности  $(*)$  верна для неотрицательных простых.

Пусть  $f \geq 0$  – измер. Тогда найдутся простые  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$  ( $0 \leq w\phi_1 \leq w\phi_2 \leq \dots$ ) и

$$\phi_n \rightarrow f \text{ поточечно. } \underbrace{\int_E \phi_n d\nu}_{\rightarrow \int_E f d\nu} = \underbrace{\int_E \phi_n w d\mu}_{\rightarrow \int_E f w d\mu} - \text{ по т. Леви.}$$

2.  $\int_E |f| d\nu = \int_E |f| w d\mu \implies f$  – суммируема относительно  $\nu \Leftrightarrow fw$  суммируема относительно  $\mu$   
 $\int_E f_{\pm} d\nu = \int_E f_{\pm} w d\mu$  и вычитаем.

□

**Свойства.** Неравенство Гельдера.

Пусть  $p, q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда  $\int_E |fg| d\mu \leq (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_E |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} = A \cdot B$

**Доказательство.** Пусть  $f, g \geq 0$  (просто чтобы не писать модули),  $A^p := \int_E f^p d\mu$ ,  $B^q := \int_E g^q d\mu$ .

Случай  $A = 0 \implies f^p = 0$  почти везде  $\implies f = 0$  почти везде  $\implies fg = 0$  почти везде  $\implies \int_E fgd\mu = 0$ .

Можно считать, что  $A, B > 0$ .

Случай  $A = +\infty$ . Очевидно.

Можно считать  $0 < A, B < +\infty$ .

$$u := \frac{f}{A}, \quad v := \frac{g}{B}$$

$\int_E u^p d\mu = 1 = \int_E v^q d\mu$ ,  $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$  верно (Упражнение, ну конечно. Фиксируем одну из переменных как параметр и исследуем нер-во по второй переменной).

Интегрируем полученное нер-во:  $\frac{1}{AB} \int_E fgd\mu = \int_E uv d\mu \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int_E u^p d\mu}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int_E v^q d\mu}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \square$

**Свойства.** Неравенство Минковского.

$$p \geq 1, \text{ тогда } (\int_E |f+g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_E |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

**Доказательство.** Можно считать, что  $f, g \geq 0$ , также можно считать, что  $\int_E f^p d\mu$  и  $\int_E g^p d\mu < +\infty$ .

Проверим, что  $\int_E (f+g)^p d\mu < +\infty$ :

$$f+g \leq 2 \max\{f, g\} \implies (f+g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p (f^p + g^p)$$

$$\underbrace{\int_E (f+g)^p d\mu}_{=:C^p} \leq 2^p (\int_E f^p d\mu + \int_E g^p d\mu) < +\infty \text{ -- показали, что левая часть конечна.}$$

Можем считать, что  $0 < C < +\infty$ :

$$C^p = \int_E (f+g)^p d\mu = \int_E (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu = \int_E f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f+g)^{p-1} d\mu$$

Пусть  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $(p-1)q = p$ , тогда:

$$\int_E f \cdot (f+g)^{p-1} d\mu \underset{\substack{\leq \\ \text{нер-во Гельдера}}}{\underbrace{}} (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_E ((f+g)^{p-1})^q d\mu)^{\frac{1}{q}} = (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{(C^p)^{\frac{1}{q}}}_{=:C^{p-1}} \leq (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} C^{p-1} +$$

$$(\int_E g^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{p-1} \text{ -- сокращаем на } C^{p-1}. \quad \square$$

## 2.5. Предельный переход под знаком интеграла

**Теорема 2.21. Леви.**

$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  и  $f = \lim f_n$ , тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ .

**Следствие.** Пусть  $u_n \geq 0$ . Тогда  $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n d\mu$

**Доказательство.**  $s_n := \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$  и  $s_n \rightarrow s := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

$$\int_E sd\mu = \lim \int_E s_n d\mu = \lim \int_E \sum_{k=1}^n u_k d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k d\mu \quad \square$$

**Следствие.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится при почти всех  $x \in E$ .

**Доказательство.**  $+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \text{ -- суммир.}$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \text{ почти везде конечна} \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ абс. сходится при почти всех } x \in E \implies \text{сходится при почти всех } x \in E. \quad \square$

**Лемма. Фату.**

Если  $f_n \geq 0$ , то  $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.**  $\underline{\lim} f_n = \liminf_{=:g_n} \underbrace{\{f_n, f_{n+1}, \dots\}}_{=:g_n}$

$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$  и  $g_n \rightarrow \underline{\lim} f_n$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{\text{теорема Леви}} \quad \overbrace{\lim_{\int_E g_n d\mu}}^{=:\underline{\lim} \int_E g_n d\mu} = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \\ = \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \end{array}$$

$$g_n \leq f_n \implies \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \implies \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

□

**Замечание.** Равенства может и не быть:

$$\mu = \lambda, E = \mathbb{R}, f_n = \mathbf{1}_{[n, +\infty)}$$

$$\int_E f_n d\mu = +\infty, \text{ но } f_n \rightarrow 0$$

Из этих двух условие следует, что  $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$

**Следствие.** (Усиленный вариант теоремы Леви).

Пусть  $0 \leq f_n \leq f$  и  $f = \lim f_n$ . Тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \implies \int_E f d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

□

**Теорема 2.22.** Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть  $f = \lim f_n$  и  $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$  — суммируема на  $E$ .

Тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ , более того  $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

**Доказательство.**  $g_n := 2F - |f_n - f| \leq 2F$  и  $g_n \rightarrow 2F$ .

$$g_n \geq 2F - |f_n| - |f| \geq 0.$$

Тогда предел  $\lim \int_E g_n d\mu = 2 \int_E F d\mu$

$$\int_E g_n d\mu = \int_E 2F d\mu - \int_E |f_n - f| d\mu$$

Из двух строчек выше делаем вывод, что

$$\begin{aligned} & \int_E |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \\ & \geq |\int_E (f_n - f) d\mu| = |\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu| \end{aligned}$$

□

**Замечание.** 1. Без суммир. мажоранты неверно:

$$f_n = n \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow f = \begin{cases} +\infty, & \text{в точке } 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0, \quad \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1, \quad F := \sup f_n, \quad F(x) = n \text{ при } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

2. Поточечную сходимость можно заменить на сходимость почти везде, можно заменить и на сходимость по мере.

**Теорема 2.23.** Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$ .

**Доказательство.**  $a = x_0$

$$b = x_n$$

$$S_* := \sum_{k=1}^n \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$S^* := \sum_{k=1}^n \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Если мелкость дробления  $\rightarrow 0$ , то  $S_*, S^* \rightarrow \int_a^b f$ .

$$g_*(x) := \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$g^*(x) := \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\int_{[a,b]} g_* d\lambda = S_*, \quad \int_{[a,b]} g^* d\lambda = S^*$$

$g_* \leq f \leq g^*$  почти везде.

$$\underbrace{S_*}_{\rightarrow \int_a^b f} = \int_{[a,b]} g_* d\lambda \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_{[a,b]} g^* d\lambda = \underbrace{S^*}_{\rightarrow \int_a^b f} \implies \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f$$

□

**Замечание.** На самом деле это верно для любой функции, интегрируемой по Риману на  $[a, b]$ .

**Теорема 2.24.** (Критерий Лебега интегрированности по Риману).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда  $f$  – интегрируема по Риману  $\Leftrightarrow$  множество точек разрыва  $f$  имеет нулевую меру Лебега.

**Пример.** Возьмем  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = \mathbf{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ .

$f = 0$  почти везде  $\implies \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$ , но точки разрыва – весь отрезок  $[0, 1]$ .

## 2.6. Произведение мер

**Определение 2.14.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с  $\sigma$ -конечными мерами.

$$\mathcal{P} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu A < +\infty \wedge \nu B < +\infty\}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B < +\infty, \quad A \times B \text{ – измеримый прямоугольник.}$$

**Теорема 2.25.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо, а  $m_0$  –  $\sigma$ -конечная мера на нем.

**Доказательство.**  $\{A \in \mathcal{A} : \mu A < +\infty\}$  и  $\{B \in \mathcal{B} : \nu B < +\infty\}$  – полукольца (проверяем определение полукольца для обоих множеств).

$\mathcal{P}$  – декартово произведение полуколец, то есть тоже полукольцо (это по теореме, которая была выше).

Проверяем, что  $m_0$  – мера. Пусть  $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$ .

$$\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) = \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \times \mathbf{1}_{B_k}(y)$$

$$\int_Y \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(Y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \mathbf{1}_{B_k}(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

$$\int_X \mathbf{1}_A(x) \nu B d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \cdot \nu B_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_0(A_k \times B_k)$$

$$\sigma\text{-конечность } m_0: X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_j, \quad Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j, \quad \mu X_j < +\infty, \quad \nu Y_j < +\infty$$

$$X \times Y = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} X_j \times Y_k$$

$$m_0(X_j \times Y_k) < +\infty.$$

□

**Определение 2.15.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с  $\sigma$ -конечными мерами. Произведения меры  $\mu$  и  $\nu$  – стандартное продолжение меры  $m_0$ .

Обозначение:  $\mu \times \nu$ ,  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  –  $\sigma$ -алгебра, на которую продолжили.  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

**Свойства.** 1. Декартово произведение измеримых – измеримо.

2. Если  $\mu e = 0$ , то  $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$ .

**Доказательство.** 1.  $A \in \mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $\mu A_n < +\infty$

$$B \in \mathcal{B} \implies B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \nu B_n < +\infty$$

$$A \times B = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \underbrace{A_k \times B_k}_{\in \mathcal{P}} - \text{измер.}$$

2.  $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \nu Y_k < +\infty$

$$e \times Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} e \times Y_k, (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu e \cdot \nu Y_k = 0$$

□

**Замечание.** Обозначения:  $C \subset X \times Y$ ,  $x \in X$ .

$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$  – сечения мн-ва  $C$ .

$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$

**Следствие.** 1.  $(\bigcup_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcup_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

2.  $(\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcap_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

**Определение 2.16.** Пусть функция  $f$  задана на мн-ве  $E$ , за исключением некоторого мн-ва  $e$ ,  $\mu e = 0$ . Если  $f$  измерима на  $E \setminus e$ , то  $f$  измерима на  $E$  в **широком смысле**.

**Определение 2.17.** Система множеств – **монотонный класс**, если

1.  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

2.  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

**Теорема 2.26.** Если монотонный класс содержит алгебру  $\mathcal{A}$ , то он содержит и  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ .

**Доказательство.** Докажем, что минимальный монотонный класс  $\mathcal{M}$ , содержащий  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра.

Рассмотрим  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}\}$  – монотонный класс, содержащий  $\mathcal{A}$ .

Если  $B \in \mathcal{A}$ , то  $B \cap A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  и  $A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \implies \mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$

$E_1 \subset E_2 \subset \dots, E_n \in \mathcal{M}_A \implies E_n \cap A \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{E_n} \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \in \mathcal{M}$

Следовательно  $\mathcal{M}_A = \mathcal{M} \implies \forall B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \setminus B \in \mathcal{M}$

$\implies \mathcal{M}$  – симметричная структура.

Рассмотрим  $B \in \mathcal{M}$ :  $\mathcal{N}_B := \{C \in \mathcal{M} : B \cap C \in \mathcal{M}\}$  – монотонный класс, содержащий  $\mathcal{A}$  (проверка по аналогии с предыдущим случаем).

$\implies \mathcal{N}_B = \mathcal{M} \implies \forall C \in \mathcal{M}, B \cap C \in \mathcal{M} \implies \mathcal{M}$  – алгебра.

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$

$\implies \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{=A} \in \mathcal{M}$ , так как  $\mathcal{M}$  – монотонный класс.

□

**Теорема 2.27. Принцип Кавальieri.**

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $m = \mu \times \nu$ . Тогда

1.  $C_x \in \mathcal{B}$  при почти всех  $x \in X$ .
2.  $\phi(x) := \nu C_x$  измеримая в широком смысле.
3.  $mC = \int_X \nu C_x d\mu(x)$

**Доказательство.** Меры конечны и  $C \in$

$$\underbrace{\mathcal{B}}_{\text{борелевская оболочка (см. определение 1.7)}} (\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

$\mathcal{E}$  – система мн-в, в  $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , такая что, если  $E \in \mathcal{E}$ , то  $E_x \in \mathcal{B} \forall x \in X$  и  $\phi(x) = \nu E_x$  – измеримая функция.

**Шаг 1.**  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

**а.**  $\mathcal{E}$  – измеримая система.

$$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}, \quad \nu(Y \setminus E_x) = \nu Y - \phi(x) – \text{измеримая.}$$

**б.**  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$  из  $\mathcal{E} \implies \bigcup E_n \in \mathcal{E}$ .

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(E_n)_x}_{\in \mathcal{B}}$$

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) = \lim \nu(E_n)_x – \text{измеримая функция.}$$

**в.**  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$  из  $\mathcal{E} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$  (можно переходить к дополнениям).

**г. (б) + (в)**  $\implies \mathcal{E}$  – монотонный класс.

**д.**  $\mathcal{E} \supset$  измеримый прямоугольник  $E = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \implies E_x = \begin{cases} \mathcal{B}, & \text{если } x \in \mathcal{A} \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$ ,

$$\nu E_x = \begin{cases} 0 \\ \nu \mathcal{B} \end{cases} – \text{измеримая функция.}$$

**е.** Если  $E$  и  $\tilde{E} \in \mathcal{E}$ , то  $E \sqcup \tilde{E} \in \mathcal{E}$ .

$$(E \sqcup \tilde{E})_x = \underbrace{E_x}_{\in \mathcal{B}} \sqcup \underbrace{\tilde{E}_x}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$$\nu((E \sqcup \tilde{E})_x) = \nu E_x + \nu \tilde{E}_x – \text{сумма измеримых функций.}$$

**ж.**  $\mathcal{E}$  содержит дизъюнктивное объединение всевозможных изм. прямоугольников  $\implies \mathcal{E}$  содержит кольцо  $\implies \mathcal{E}$  содержит алгебру  $\implies \mathcal{E} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

по т. о монотонном классе

Мы сейчас проверили, что если  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , то первые два пункта теоремы выполнены. Давайте для этой эе упрощенной ситуации проверять 3-ий пункт.

**Шаг 2.** Формула (3) для  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

Рассмотрим  $\int_X \nu E_x d\mu(x) =: \tilde{m}E$  – хотим сказать, что это мера на  $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

Пусть  $E_n$  – дизъюнктны  $\implies \tilde{m}(\bigsqcup E_n) = \int_X \nu(\bigsqcup (E_n)_x) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}E_n$ .

$m = \tilde{m}$  на измеримых прямоугольниках  $\implies$  они совпадают. Получили, что хотели.

**Шаг 3.**  $mC = 0, C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies$  найдется  $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , т.ч.  $C \subset \tilde{C}$  и  $m\tilde{C} = 0$ .

$$0 = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) \implies \nu \tilde{C}_x = 0 \text{ при почти всех } x \in X.$$

$C_x \subset \tilde{C}_x \implies C_x \in \mathcal{B}$  при почти всех  $x \in X$  и  $\nu C_x = 0$  при почти всех  $x \in X$ .

$$mC = 0 = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

**Шаг 4.**  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e, \tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}), me = 0$ .

$$C_x = \underbrace{\tilde{C}_x}_{\text{изм. } \forall x \in X} \sqcup \underbrace{e_x}_{\text{изм. при почти всех } x}, \nu C_x = \nu \tilde{C}_x + \nu e_x = \nu \tilde{C}_x.$$

$$mC = m\tilde{C} + me = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

**Шаг 5.**  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n, Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \mu X_n < +\infty$ .

$$X \times Y = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} X_n \times Y_k$$

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, C_{nk} = C \cap X_n \times Y_k \implies C_{nk}$  удовлетворяет теореме.

$$C_x = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} (C_{nk})_x$$

$$mC = \sum_{n,k=1}^{\infty} mC_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \int_X \nu(C_{nk})_x d\mu(x) = \int \sum \cdots = \int_X \nu C_x d\mu. \quad \square$$

**Замечание.** 1. Нужна лишь полнота  $\nu$ .

2. Измеримость всех  $C_x$  не гарантирует измеримость  $C$ .

**Доказательство.**  $\mathbb{R}^2, E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримое,  $E \times [0, 1]$   $\square$

3. Среди  $C_x$  могут попадаться неизмеримые.

**Доказательство.**  $\mathbb{R}^2, E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримые,  $\{0\} \times E$   $\square$

4. Хочется интегрировать не по  $X$ , а по проекции, то есть  $P := \{x \in X : C_x \neq \emptyset\}$ . Но  $P$  может быть неизмеримо.

**Доказательство.**  $E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримое, решение проблемы, это взять  $\tilde{P} := \{x \in X : \nu C_x > 0\}$  – измеримое.  $\square$

**Определение 2.18.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пр-во с  $\sigma$ -конечной мерой.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0, E \in \mathcal{A}, m = \mu \times \underbrace{\lambda_1}_{\text{одномерная мера Лебега}}.$$

График функции над мн-вом  $E$ :

$$\Gamma_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Подграфик функции над мн-вом  $E$ :

$$\mathcal{P}_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

**Лемма.** (Лемма 1).

Если  $f$  – измеримая, то  $m\Gamma_f = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mu X < +\infty$ . Возьмем  $\epsilon > 0$  и  $A_n := X\{\epsilon \cdot n \leq f < \epsilon \cdot (n+1)\}$

$$\Gamma_f \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) =: A.$$

$$mA = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) = \epsilon \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu A_n = \epsilon \cdot \mu X – сколь угодно маленькое.$$

Пусть  $\mu$  –  $\sigma$ -конечна.  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n, \mu X_n < +\infty$ ,

$$\Gamma_f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_f(X_n) – нулевой меры. \quad \square$$

**Лемма.** (Лемма 2).

$f \geq 0$  – измерима в широком смысле  $\implies \mathcal{P}_f$  – измеримое мн-во.

**Доказательство.** 1. Пусть  $f$  – простая  $\implies f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k} \implies \mathcal{P}_f = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \times [0, a_k]$  – измеримое.

2. Пусть  $f$  – измеримая  $\implies 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \rightarrow f$  – простые  $\phi_i$ ,  $\mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$ .

$$\mathcal{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f.$$

Берем  $x \in X$ .

Если

(a)  $f(x) = +\infty$ , то  $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$ , над точкой  $x$ ,  $[0, \phi_n(x)]$  их объединение будет луч.

(b)  $f(x) < +\infty$ , то  $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\bigcup [0, \phi_n(x)] \supset [0, f(x)]$

□

**Теорема 2.28.** (О мере подграфика).

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $f \geq 0$ ,  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $m = \mu \times \lambda_1$ .

Тогда  $f$  – измеримая в широком смысле  $\Leftrightarrow \mathcal{P}_f$  – измер. и в этом случае  $\int_X f d\mu = m \mathcal{P}_f$ .

**Доказательство.** " $\Rightarrow$ ": Лемма 2.

" $\Leftarrow$ ": принцип Кавальieri для  $\mathcal{P}_f$ :

$$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{при } f(x) = +\infty \\ [0, f(x)), & \text{при } f(x) < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(x) := \lambda_1((\mathcal{P}_f)_x) = \underbrace{f(x)}_{\text{измеримая в широком смысле}}$$

$$m \mathcal{P}_f = \int_X \underbrace{\lambda((\mathcal{P}_f)_x)}_{=f(x)} d\mu(x) - \text{получили, что хотели.}$$

□

**Теорема 2.29. Тонелли.**

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , измеримая,  $m = \mu \times \nu$ .

Тогда:

1.  $f_x(y) := f(x, y)$  – измерима, относительно  $\nu$  в широком смысле при почти всех  $x \in X$ .
2.  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  – измерима относительно  $\nu$ .
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$

**Доказательство.** 1. Пусть  $f = \mathbf{1}_C$  (характеристическая функция мн-ва  $C$ ), тогда  $f_x(y) = \mathbf{1}_{C_x}(y)$ .

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y \mathbf{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu C_x$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_{X \times Y} \mathbf{1}_C dm = mC = \int_X \nu C_x d\mu(x) = \int_X \phi d\mu.$$

2. Пусть  $f \geq 0$  – простая, тогда  $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$

3. Пусть  $f \geq 0$  – измеримая, тогда берем последовательность простых функций  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ ,  $\lim f_n = f$ .

$(f_n)_x(y)$  – измерим. при почти всех  $x$ .

$(f_n)_x \nearrow f_x$  – измерим. при почти всех  $x$ .

$\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$  – измерим. и  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$

$\lim \phi_n(x) = \int_Y \lim f_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \phi(x)$  – измерим.

$$\int_{X \times Y} f dm \underset{\substack{\leftarrow \\ \text{т. Леви}}}{=} \int_{X \times Y} f_n dm = \int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu.$$

□

### Теорема 2.30. Фубини.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , суммируема,  $m = \mu \times \nu$ .

Тогда:

1.  $f_x(y) := f(x, y)$  – суммируема, относительно  $\nu$  в широком смысле при почти всех  $x \in X$ .
2.  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  – суммируема относительно  $\nu$ .
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$

**Доказательство.**  $(*) : \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty$  – следует из суммируемости  $f$ .

$$\begin{aligned} (*) \underset{\substack{= \\ \text{т. Тонелли}}}{=} & \int_X \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{:=\alpha(x)} d\mu(x) \\ \implies \alpha(x) = & \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{\implies f_x \text{ – суммируема при почти всех } x \in X} \quad \text{– конечна при почти всех } x \in X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_X |\phi| d\mu &= \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty \\ \implies \phi &\text{ – суммируема.} \end{aligned}$$

$$\int_{X \times Y} f_\pm dm = \int_X \left( \int_Y f_\pm(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ и вычтем } f = f_+ - f_-.$$

□

**Следствие.** Если  $f \geq 0$  и измеримая или  $f$  – суммируемая, то

$$(**): \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

**Следствие.**  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируема по  $\mu$ ,  $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируема по  $\nu$ .

Тогда  $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$  суммируема по  $m = \mu \times \nu$  и  $\int_{X \times Y} h dm = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$ .

**Доказательство.**  $\int_{X \times Y} |h| dm \underset{\substack{= \\ \text{т. Тонелли}}}{=} \int_X \left( \int_Y |f(x)| |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) =$

$$= \int_X |f(x)| \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y |g| d\nu \cdot \int_X |f| d\mu < +\infty \implies h \text{ – суммируема.}$$

По Фубини пишем все без модулей.

□

**Замечание.** 1. Суммируемости  $f_x(y) = f(x, y)$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$ ,  $\phi(x) = \int_X f_x d\nu$ ,  $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$  не хватает для суммируемости  $f$  по мере  $m$ .

2. Без суммируемости  $f$  по  $m$  равенства  $(**)$  может не быть.

**Пример.**  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $g(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

Первообразные:

$$1. \int f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$2. \int g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Подставляем:

$$1. \int_{[-1,1]} f(x,y)dx = -\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{y^2+1}$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)dxdy = -2 \int_{[-1,1]} \frac{dy}{y^2+1} = -2 \cdot \arctan(y) \Big|_{-1}^1 = -\pi$$

$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)dydx = \pi$  – не совпали из-за отсутствия суммируемости.

$$2. \int_{[-1,1]} g(x,y)dx = -\frac{y}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

**Теорема 2.31.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измерим.

$$\int_X |f|d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t\}dt \quad (\text{в скобках записана функция распределения}).$$

**Доказательство.**  $m = \mu \times \lambda_1$ .

$$\int_X |f|d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} = \int_{[0,+\infty]} \left( \int_X \underbrace{\mathbf{1}_{\mathcal{P}_{|f|}}(x,t)}_{=1 \Leftrightarrow |f(x)| \geq t} d\mu(x) \right) d\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty]} \mu X\{|f| \geq t\}d\lambda_1(t).$$

□

**Следствие.** 1. В условии теоремы  $\int_X |f|d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\}dt$

**Доказательство.**  $g(t) := \mu X\{|f| \geq t\}$  – монотонно возраст., не более чем счетное число точек разрыва.

$$\mu X\{|f| > t\} = \lim \mu X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \frac{1}{n}) = \lim_{s \rightarrow t+} g(s) = g(t) \text{ при почти всех } t.$$

$$X\{|f| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\}$$

□

$$2. \int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \mu X\{|f| \geq t\} dt \text{ при } p > 0.$$

**Доказательство.**  $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t^{\frac{1}{p}}\} dt = \int_0^{+\infty} g(t^{\frac{1}{p}}) dt = \int_0^{+\infty} ps^{p-1} g(s) ds$

$$\text{Где } t = s^p, s = t^{\frac{1}{p}}, dt = ps^{p-1}ds.$$

□

## 2.7. Замена переменной

**Определение 2.19.**  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые.

$$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

$\Phi$  – диффеоморфизм, если

1.  $\Phi$  – биекция.
2.  $\Phi$  – непр. дифф.
3.  $\Phi^{-1}$  – непр. дифф.

**Замечание.**  $Id = \Phi^{-1} \circ \Phi \implies x = (\Phi(x)^{-1})' \cdot (\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \implies 1 = \det(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \det(\Phi'(x)).$

**Замечание.** Обозначение.

$$J_\Phi := \det \Phi'$$

якобиан = определитель матрицы Якоби.

**Теорема 2.32.** (о замене переменной).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  диффеоморфизм.  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  открыты,  $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$  измеримая. Тогда  $\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| d\lambda_m$ .

Такая же формула есть и для суммир. функций  $f$ .

Частные случаи:

1. Сдвиг:  $\Phi(x) = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$ .

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x+a) d\lambda_m(x)$$

2.  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  обратимое линейное отображение.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(Lx) |det L| d\lambda_m(x)$$

3. Гомотетия:  $Lx = c \cdot x$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ .

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = c^m \cdot \int_{\mathbb{R}^m} f(c \cdot x) d\lambda_m(x).$$

**Лемма.** (о расщеплении).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  – диффеоморфизм,  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые,  $a \in \Omega$ ,  $1 \leq k \leq m - 1$ .

Тогда существует  $U_a$  и  $\Phi_2 : U_a \rightarrow \mathbb{R}_m$ ,  $\Phi_1 : \Phi_2(U_a) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , т.ч.  $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ .

$\Phi_1$  – остался на месте  $k$  координат, а  $\Phi_2$  – оставляет на месте  $m - k$  координат.

**Доказательство.**  $x, u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y, v \in \mathbb{R}^{m-k}$ ,  $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \underbrace{\phi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, \underbrace{\psi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}} \end{pmatrix}$ .

$$\Phi_1(x, y) = (x, \underbrace{f(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}})$$

$$\Phi_2(x, y) = (\underbrace{g(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, y)$$

$$\Phi_1(\Phi_2(x, y)) = (*)$$

$$(*) = \Phi_1(g(x, y), y) = (g(x, y), f(g(x, y), y))$$

$$(*) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \implies g(x, y) := \phi(x, y)$$

$$\implies f(u, v) = \psi(\Phi_2^{-1}(u, v))$$

$$f(\phi_2(x, y)) = f(\phi(x, y), y) = \psi(x, y)$$

Нужна локальная обратимость  $\Phi_2$ , а для этого нужна обратимость  $\Phi'_2(a)$ , то есть  $det(\Phi'_2(a)) \neq 0$ .

$$\Phi_2(x, y) = (\phi(x, y), y), \quad \Phi'_2(x, y) = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad det(\Phi'_2) = det(\Phi_x).$$

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{pmatrix}$$

блок  $k \times k$ , ненулевой минор найдется. □

**Следствие.**  $\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  – диффеоморфизм,  $a \in \Omega$ ,  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые.

Тогда существует  $U_a$ , т.ч.  $\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_m$ , где  $\Phi_j$  – диффеоморфизм, оставляющие на месте все координаты, кроме одной (но их перенумерующие).

**Доказательство.** Индукция + предыдущая лемма. □

**Теорема 2.33. Линделефа.**

$A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $A$  – покрыто открытыми мн-вами.

Тогда из него можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

**Доказательство.**  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} \left( \underbrace{G_\alpha}_{\text{открытое}} \right)$ .

Берем  $a \in A$ , рисуем картинку, которую кто-нибудь *обязательно* добавит.

Пусть  $U_a$  – шарик с рациональным центром и рациональным радиусом.  $a \in U_a$  и  $U_a$  содержатся в каком-то элементе покрытия. Очевидно, что  $a \in U_a \subset G_{\alpha_i}$ , тогда выкинем все лишние  $G_\alpha$ , а остальных останется не более чем счетное кол-во (так как  $U_a$  с рациональным центром и радиусом, а таких счетное кол-во), при этом они покрывают  $A$ .  $\square$

**Теорема 2.34.** (об изменении меры множества при диффеоморфизме).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  – диффеоморфизм,  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые,  $A \subset \Omega$  – измеримое.

Тогда  $\lambda_m \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m$ .

**Замечание.** Если теорема верна для конкретного  $\Phi$  и произвольного  $A$ , то для того же  $\Phi$  верна формула замена переменной.

Формула замены переменной:

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda_m.$$

**Доказательство.** Замечания.

$$f = \mathbf{1}_{\Phi(A)}, \quad A \subset \Omega.$$

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{1}_{\Phi(A)} d\lambda_m = \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A |J_\Phi| d\lambda_m.$$

$$\mathbf{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x)) = \mathbf{1}_A.$$

Нужно проверить для простых, а дальше для измеримых, в общем, все раскручивается (так говорил Храбров...).  $\square$

**Доказательство.** Теоремы.

Шаг 1. Пусть  $\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ . Если т. верна для каждого  $G_\alpha$ , то она верна и для  $\Omega$ .

Выбираем нбчс подпокрытие  $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ .

$$\lambda_m \Phi(A \cap G_k) = \int_{A \cap G_k} |J_\Phi| d\lambda_m \text{ и просуммируем } A \cap \left( G_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j \right).$$

Шаг 2. Если т. верна для диффеоморфизмов  $\Phi$  и  $\Psi$ , то она верна и для  $\Psi \circ \Phi$ .

$$\lambda_m \Psi(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} |J_\Psi| d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \underbrace{\mathbf{1}_{\Phi(A)} \cdot |J_\Psi|}_{=: f} d\lambda_m =$$

$$= \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{1}_{\Phi(A)} \circ \Phi}_{= \mathbf{1}_A} \cdot |J_\Psi \circ \Phi| \cdot |J_\Phi| d\lambda_m =$$

$$= \int_A |J_\Psi(\Phi(x))| |J_\Phi(x)| d\lambda_m(x).$$

$$\det(\Psi'(\Phi(x))) \cdot \det(\Phi'(x)) = \det(\Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)) = \det(\Psi \circ \Phi)' = J_{\Psi \circ \Phi}.$$

Шаг 3.  $m = 1$ .  $\Phi(x)$  – строго монот. и непр. дифф.

$$\nu A := \lambda_1(\phi(A)) – мера.$$

$$\mu A := \int_A |\phi'| d\lambda_1 - \text{мера.}$$

Хотим проверить, что  $\nu = \mu$ , тогда проверим, что они совпадают на ячейках  $(a, b]$  (а по единственности продолжения получим, что нужно).

$$\lambda(\phi(a, b]) = \int_{(a,b]} |\phi'| d\lambda.$$

Эти значения стремятся к тем, что выше, соответственно.  $\lambda(\phi[a + \frac{1}{n}, b]) = \int_{[a+\frac{1}{n}, b]} |\phi'| d\lambda$

Эти равны тем, что выше, соответственно.  $\phi(b) - \phi(a + \frac{1}{n}) = \int_{a+\frac{1}{n}}^b \phi' d\lambda$ , если  $\phi$  – возрастает,  $\phi[a + \frac{1}{n}, b] = [\phi(a + \frac{1}{n}), \phi(b)]$

Шаг 4.  $\Phi$  оставляет на месте  $m - 1$  коорд.  $x = (\underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{m-1}}, \underbrace{t}_{\in \mathbb{R}})$ .

$$\Phi(y, t) = (y, \phi(y, t)).$$

$$\lambda_m \Phi(A) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\lambda_1 \Phi(A))_y d\lambda_{m-1}(y) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \lambda_1(\phi(y, A_y)) d\lambda_{m-1}(y) \underset{(*)}{=}.$$

$t \in (\Phi(A))_y \Leftrightarrow (y, t) \in \Phi(A) \Leftrightarrow \exists (y', t') \in A, \text{ т.ч. } (y, t) = \Phi(y', t') = (y', \phi(y', t')) \Leftrightarrow \exists t' :$   
 $\underbrace{(y, t') \in A}_{t' \in A_y} \text{ и } \underbrace{(y, t) = (y, \phi(y, t'))}_{t = \phi(y, t')}$

$$\underset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left( \int_{A_y} |\phi'(y, t)| d\lambda_1(t) d\lambda_{m-1}(y) \right) = \int_A |J_\Phi| \lambda_m.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \phi'_y & \phi'_t \end{pmatrix}$$

Дальше были какие-то умные слова. Я не успел записать...

□

**Пример.** Полярная замена.  $\mathbb{R}^2$ .

$$(r, \phi) \rightarrow (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

$$r \in (0, +\infty)$$

$$\phi \in (0, 2\pi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2 = \int_{[0, 2\pi] \times [0, +\infty)} (f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot r) dr d\phi.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\det = r$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx, \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Полярная замена:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\phi dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi \cdot (-e^{-t})|_0^{+\infty} = \pi.$$

$$t = r^2, \quad df = 2r dr$$

### 3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы

### 3.1. Собственные интегралы с параметрами

**Утверждение 3.1.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пр-во с мерой,  $T$  – метрическое пр-во,  $f : X \times T \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ ,  $\forall t \in T$ ,  $E_t \in \mathcal{A}$ ,  $f(\cdot, t)$  – измеримая.

$$F(t) := \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x).$$

1.  $t_0$  – предельная точка.

$$\forall x \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{f(x, t)}} \dots \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}}$$

2.  $f(x, t)$  непрер. в точке  $t_0$ ,  $\forall x \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F$  непрер. в  $t_0$ .

3.  $f(x, t)$  дифф. по  $t$ ,  $\forall x \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F$  дифф., какая формула для производной?

4. Если  $\nu$  – мера на  $T$ .  $\int_T F(t) d\nu(t) = \int_T \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x) d\nu(t) = \int_T \int_X \mathbf{1}_{E_t}(x) \cdot f(x, t) d\mu(x) d\nu(t)$

**Теорема 3.2.**  $t_0$  – предельная точка  $T$ .  $f(\cdot, t)$  – суммируема  $\forall t \in T$ ,  $g(x) := \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$ .

**Локальное условие Лебега:**

Пусть найдется окр-ть  $U_{t_0}$  и суммир. ф-я  $\Phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , т.ч.  $|f(x, t)| \leq \Phi(x) \forall t \in U_{t_0}$ .

Тогда  $\lim_{t \rightarrow t_0} (\int_X f(x, t) d\mu(x)) = \int_X g(x) d\mu(x)$ .

**Доказательство.** Проверяем по Гейне. Берем  $t_n \rightarrow t_0$ ,  $f_n(x) := f(x, t_n)$ ,  $\Phi(x) \geq |f(x, t_n)| = |f_n(x)|$  при больших  $n$ .

$$\underset{\text{т. Лебега}}{\overbrace{\Rightarrow}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=g(x)} d\mu(x)$$

□

**Определение 3.1.**  $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0$  – предельная точка  $T$ ,  $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x)$ , если  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ ,  $\forall t \in T : \rho_T(t, t_0) < \delta$ ,  $\forall x \in X : |f(x, t) - g(x)| < \epsilon$ .

**Замечание.**  $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x, t) - g(x)| \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}} 0$

**Следствие.** Если  $\mu X < +\infty$ ,  $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x)$ , то  $\int_X f(x, t) d\mu(x) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}} \int_X g d\mu$  и  $g$  – суммируемая ф-я.

**Доказательство.** При  $t$  близких к  $t_0$ :  $|f(x, t) - g(x)| \leq 1 \implies$  берем  $t_1$ , для которого верно  $|f(x, t_1) - g(x)| \leq 1 \implies |g(x)| \leq 1 + |f(x, t_1)|$  – суммируема  $\implies$  при  $t$  близких к  $t_0$ :  $|f(x, t)| \leq 1 + |g(x)|$  – суммир. □

**Замечание.** Условие  $\mu X < +\infty$  существенно.

$$X = [0, +\infty), \mu = \lambda_1, f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]}(x) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} 0,$$

$$\int_{[0, +\infty)} f_n d\lambda_1 = 1.$$

**Следствие.**  $f(x, t)$  непрер. в точке  $t_0$ ,  $\forall x \in X$  и существует суммир.  $\Phi(x)$ , т.ч.  $|f(x, t)| \leq \Phi(x)$  при  $t$  близких к  $t_0$ ,  $\forall x \in X$ .

Тогда  $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$  непрер. в точке  $t_0$ .

**Доказательство.**  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$  и подставляем в теорему.  $\square$

**Лемма.** Декартово произведение компактов – компакт.

$(X, \rho), (Y, d)$  – метрические про-ва.  $A \subset X, B \subset Y$  – компакты.

Тогда  $A \times B$  – компакт в  $(X \times Y, r)$ ,  $r((x, y), (x', y')) = \rho(x, x') + d(y, y')$

**Доказательство.** Проверяем секвенциальную компактность.

$x_n \in A, y_n \in B, (x_n, y_n)$

хотим выбрать сх-ся подпосл. Выбираем  $x_{n_k}$ , т.ч. она сходится, а затем из  $y_{n_k}$  подпосл  $y_{n_{k_j}}$ , которая сх-ся.

Тогда  $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$  сх-ся покоординатно  $\Rightarrow$  сх-ся по метрике  $r$ .  $\square$

**Теорема 3.3.**  $\mu X < +\infty, X$  и  $T$  – компакты,  $f \in C(X \times T)$ . Тогда  $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(T)$ .

**Доказательство.**  $f$  – непр-на на компакте  $\Rightarrow$  ограничена  $\Rightarrow |f(x, t)| \leq M$  – суммир. мажоранта.  $\square$

**Следствие.** Если  $\mu X < +\infty, X$  – компакт,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  открытое,  $f \in C(X \times \Omega)$ .

Тогда  $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(\Omega)$ .

**Доказательство.** Берем  $a \in \Omega$ . Хотим проверить непрер. в точке  $a$ .

Возьмем  $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$  – компакт  $\Rightarrow f \in C(X \times \overline{B}_r(a))$   
 $\Rightarrow F \in C(\overline{B}_r(a)) \Rightarrow F$  непрер. в точке  $a$ .  $\square$

**Теорема 3.4.**  $T \subset \mathbb{R}$  промежуток,  $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}, f'_t(x, t)$  существ.  $\forall x \in X, \forall t \in T$  и  $f'_t(x, t)$  удовлетворяет **локальным условиям Лебега** в точке  $t_0$ .

Тогда  $F$  – дифф. в точке  $t_0$  и  $F'(t_0) = \int_X f'_t(x, t_0) d\mu(x)$ .

**Доказательство.**  $\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \int_X \underbrace{\frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h}}_{=:g(x, h)} d\mu(x)$ .

Нужно локальное условие Лебега для  $g(x, h)$ .

$$f(x, t_0 + h) - f(x, t_0) = h \cdot f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$$

$$g(x, h) = f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$$

Знаем, что  $\exists U_{t_0}$ , т.ч.  $|f'_t(x, t)| \leq \Phi(x)$  – суммир.  $\forall x, \forall t \in U_{t_0}$ .

Рассмотрим  $\|h\| < \epsilon$ , т.ч.  $t_0 + h \in U_{t_0}$

$\Rightarrow t_0 + \theta_h \cdot h \in U_{t_0} \Rightarrow |f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)| = |g(x, h)| \leq \Phi(x) \Rightarrow$  можно переходить к пределу под знаком интеграла, а предел  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x, h) = f'_t(x, t_0)$ .  $\square$

**Следствие.**  $T \subset \mathbb{R}$  – отрезок,  $X$  – компакт,  $\mu X < +\infty, f, f'_t \in C(X \times T)$ .

Тогда  $F \in C^1(T)$  и  $F'(t) = \int_X f'_t(x, t) d\mu(x)$ .

**Доказательство.**  $f'_t$  – непр. на компакте  $\Rightarrow$  ограничена  $\Rightarrow |f'_t(x, t)| \leq M$  – сумм. мажоранта.  $\square$

**Теорема 3.5. Формула Лейбница.**

$f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_t \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, f'_t \in C([a, b] \times [c, d])$ ,  $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  непр. дифф.

$$F(t) := \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx.$$

Тогда  $F$  – дифф. и  $F'(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x, t) dx + f(\psi(t), t) \cdot \psi'(t) - f(\phi(t), t) \cdot \phi'(t)$ .

**Доказательство.**  $\Phi(\alpha, \beta, t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx$ .

$$\frac{d\Phi}{d\beta} = f(\beta, t) \text{ – непр. по условию}$$

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = -f(\alpha, t) \text{ – непр.}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} f'_t(x, t) dx \text{ – непр.}$$

Так как все частные производные непр., то  $\Phi$  – дифф.

$$F(t) = \Phi(\phi(t), \psi(t), t) \implies F'(t) = \frac{d\Phi}{d\alpha}\phi'(t) + \frac{d\Phi}{d\beta}\psi'(t) + \frac{d\Phi}{dt}.$$

**Пример.**  $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(tx) dx$

Так как есть локальное условие Лебега (на самом деле  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx < +\infty$ ):

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx) \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \sin(tx) \cdot d(e^{-x^2}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \sin(tx) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t \cos tx e^{-x^2} dx. \\ F'(t) &= -\frac{1}{2}tF(t). \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{F'}{F}}_{= (\ln F)'} = -\frac{t}{2} \implies \ln F = -\frac{t^2}{4} + C_0 \implies F(t) = C \cdot e^{\frac{-t^2}{4}}.$$

Более строго:

$$\left( F(t) e^{\frac{t^2}{4}} \right)' = F' e^{\frac{t^2}{4}} + F \cdot \underbrace{\frac{t}{2} e^{\frac{t^2}{4}}}_{=0} = e^{\frac{t^2}{4}} \cdot (F' + \frac{t}{2} \cdot F) = 0.$$

Хотим узнать константу:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\frac{-t^2}{4}}.$$

**3.2. Несобственные интегралы с параметрами**

$$F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx : \forall t \in T \text{ интеграл сх-ся.}$$

**Определение 3.2.**  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  – равномерно сх-ся, если  $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : |\int_b^{+\infty} f(x, t) dx| < \epsilon$

**Замечание.**  $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx$ .

$$\int_a^{+\infty} \dots \text{ – равном сх-ся} \Leftrightarrow F_b \underset{b \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} F \text{ равном. по } t \in T.$$

**Доказательство.**  $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F(t)|}_{= - \int_b^{+\infty} f(x, t) dx} < \epsilon$

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx, t > 0$

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx} dx = -\frac{e^{-tx}}{t} \Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-bt}}{t}.$$

1.  $t \geq t_0 > 0$ :

$$\frac{e^{-bt}}{t} \leq \frac{e^{-bt_0}}{t_0} < \epsilon$$

2.  $t > 0$ :

$$\frac{e^{-bt}}{t} \underset{t \rightarrow 0+}{\curvearrowright} +\infty \implies \text{нет равномерной сх-ти.}$$

**Теорема 3.6. Критерий Коши.**

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ равн. сх-ся} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

**Доказательство.**  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  равн. сх-ся  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow F_b \rightrightarrows F \text{ (где } F_b(t) = \int_a^b f(x, t) dx, F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx)$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F_c(t)|}_{\int_b^c f(x, t) dx} < \epsilon. \quad \square$$

**Следствие.**  $f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная.

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ сх-ся } \forall t \in (c, d) \text{ и расх-ся при } t = c \text{ или } t = d.$$

Тогда сходимость неравномерная.

**Доказательство.** Пусть  $\int_a^{+\infty}$  сх-ся равномерно  $\implies$ :

по Критерию Коши и тому, что  $f$  непр. на  $[b, b'] \times [c, d]$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \forall t \in (c, d) : \underbrace{\left| \int_b^{b'} f(x, t) dx \right|}_{\rightarrow \int_b^{b'} f(x, c) dx, \text{ при } t \rightarrow c} < \epsilon \implies$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \left| \int_b^{b'} f(x, c) dx \right| \leq \epsilon \underset{\substack{\text{критерий Коши}}}{\curvearrowright} \int_a^{+\infty} f(x, c) dx \text{ сх-ся} \implies \text{противо-} \\ \text{речие.} \quad \square$$

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx, t > 0$  сх-ся неравномерно, так как при  $t = 0$  расходится.

**Теорема 3.7. Признак Вейерштрасса.**

$$f, g : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } |f(x, t)| \leq g(x, t) : \forall x \geq a, \forall t \in T.$$

Если  $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$  равном. сх-ся, то  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  равн. сх-ся.

**Доказательство.** Пишем критерий Коши для  $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B : \underbrace{\int_b^c g(x, t) dx}_{< \epsilon} \geq \int_b^c |f(x, t)| dx \geq \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| \quad \square$$

**Следствие.** Если  $|f(x, t)| \leq g(x) \forall x \geq a, \forall t \in T$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сх-ся, то  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  сх-ся равномерно.

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1} dx$  равн. сх-ся при  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\left| \frac{\cos(xt)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ и } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} < +\infty.$$

**Теорема 3.8. Признак Дирихле.**

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx.$$

Пусть

$$1. \exists M : \forall b > a, \forall t \in T : \left| \int_a^b f(x, t)dx \right| \leq M$$

$$2. g \text{ монотонна по } x : \forall t \in T.$$

$$3. g \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

Тогда  $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$  равномерно сх-ся.

**Доказательство.** Для дифф. ф-й  $g$ :

$$F(y, t) = \int_a^y f(x, t)dx.$$

$$(1) \Rightarrow |F(y, t)| \leq M : \forall y, \forall t.$$

$$\int_a^y f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F(x, t)g(x, t)|_{x=a}^{x=y}}_{=F(y, t)g(y, t)} - \int_a^y F(x, t)g'_x(x, t)dx$$

$$|F(y, t)g(y, t)| \leq M|g(y, t)| \underset{y \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$$\int_a^{+\infty} F(x, t)g'_x(x, t)dx - \text{равном. сх-ся.}$$

$$|F(x, t)g'_x(x, t)| \leq M|g'_x(x, t)|.$$

Надо доказать, что  $\int_a^{+\infty} |g'_x(x, t)|dx$  равн. сх-ся.

$$\int_a^y |g'_x(x, t)|dx = \left| \int_a^y g'_x(x, t)dx \right| = |g(x, t)|_{x=a}^{x=y} = \left| \underbrace{g(y, t)}_{\rightrightarrows 0 \text{ по усл.}} - g(a, t) \right| \rightrightarrows |g(a, t)|.$$

□

**Теорема 3.9. Признак Абеля.**

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx. \text{ Пусть}$$

$$1. \int_a^{+\infty} f(x, t)dx \text{ равн. сх-ся.}$$

$$2. g \text{ монотонна по } x : \forall t \in T.$$

$$3. |g(x, t)| \leq M, \forall x \geq a, \forall t \in T$$

Тогда  $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$  равн. сх-ся.

**Доказательство.** Для дифф. ф-й  $g$ :

$$F_b(y, t) = \int_b^y f(x, t)dx$$

$$\int_b^c f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F_b(x, t)g(x, t)|_{x=b}^{x=c}}_{=F_b(c, t)g(c, t)} - \int_b^c F_b(x, t)g'_x(x, t)dx$$

Применим крит. Коши для  $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ :

$$\exists B : \forall y, b > B \forall t \in T : |F_b(y, t)| < \epsilon, \text{ смотрим на } b > B \implies |F_b(x, t)| < \epsilon.$$

$$|F_b(c, t)g(c, t)| < \epsilon \cdot M.$$

$$\left| \int_b^c F_b(x, t) g'_x(x, t) dx \right| \leq \int_b^c \underbrace{|F_b(x, t)|}_{<\epsilon} |g'_x(x, t)| dx < \epsilon \cdot \int_b^c g'_x(x, t) dx = \epsilon \left| \int_b^c g'_x(x, t) dx \right| = \epsilon |g(x, t)|_{x=b}^{x=c} \leq \epsilon \cdot 2M.$$

Получается, что оценили  $\int_b^c f(x, t) g(x, t) dx < 3\epsilon M$ , то есть проверили критерий Коши для исходного интеграла.  $\square$

**Пример.**  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^t} dx, t > 0$ .

1.  $t \geq t_0 > 0$ . Дирихле:  $f(x, t) = \sin(x)$ ,  $g(x, t) = \frac{1}{x^t}$  – вторая монотонно убывает.

$$\left| \int_1^b \sin(x) dx \right| \leq 2.$$

$$g(x, t) \rightrightarrows 0: |g(x, t)| = \frac{1}{x^t} \leq \frac{1}{x^{t_0}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightharpoonup} 0.$$

Есть равн. сх-ть.

2.  $t > 0$ . Нет равн. сх-ти, так как расх-ся при  $t = 0$ .

**Теорема 3.10.**  $f : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0$  – предельная точка  $T$ .

Если

1.  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  равномерно сх-ся (по  $t \in T$ ).

2.  $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\rightrightarrows} \phi(x)$  равномер. по  $x$  на любом конечном отрезке.

Тогда  $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^{+\infty} f(x, t) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx$  и второй интеграл сх-ся.

**Доказательство.** (1)  $\underset{\text{кр. Коши для } f}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| < \epsilon$ .

$\rightarrow \left| \int_b^c \phi(x) dx \right| \text{ при } t \rightarrow t_0$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^{+\infty} \phi(x) dx \right| \leq \left| \underbrace{\int_b^{+\infty} f(x, t) dx}_{<\epsilon} \right| + \left| \underbrace{\int_b^{+\infty} \phi(x) dx}_{<\epsilon} \right| + \left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right|.$$

$$(1) \Rightarrow \exists B_1 \forall b > B_1 \text{ и } \forall t \in T : \left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

$$\int_a^{+\infty} \phi(x) dx - \text{сх-ся} \Rightarrow \exists B_2 \forall b > B_2 : \left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right| < \epsilon.$$

Фиксируем  $b \geq \max\{B_1, B_2\}$ .

$$\left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right| \leq (b-a) \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} \{ |f(x, t) - \phi(x)| \}}_{\rightarrow 0} < \epsilon \text{ при } t \text{ близких к } t_0. \quad \square$$

**Замечание.** Равн. сх-ть интеграла существенна:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{при } 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^t \frac{1}{t} dx = 1 \neq 0.$$

**Теорема 3.11.**  $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ ,  $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  равном. сх-ся.

Тогда  $F \in C[c, d]$ .

**Доказательство.**  $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} F(t)$ .

Достаточно понять, что  $F_b \in C[c, d]$ , а это знаем.  $\square$

**Замечание.** Без равном. сх-ти неверно.

$$f(x, t) = te^{-t^2 x}, t \in \mathbb{R}.$$

$$F(t) := \int_0^{+\infty} te^{-t^2 x} dx - \text{сх-ся}.$$

$$F(0) = 0$$

$$F(t) = \frac{1}{t}$$
 при  $t \neq 0$  нет непрер.

**Теорема 3.12.** (Интегральный аналог теоремы Абеля для степенных рядов).

Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится и  $f \in C[a, +\infty)$ . Тогда  $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x) e^{-tx} dx \in C[0, +\infty)$

**Доказательство.** Признак Абеля.

$g(x, t) = e^{-tx}$ : монотонно убывает при фиксированном  $t$ .

$|g(x, t)| \leq 1$ : равномерно ограничена.  $\square$

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \text{сх-ся} \implies F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$  непрер. при  $t \geq 0$ .

**Теорема 3.13.**  $f'_t, f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$

1.  $\Phi(t) := \int_a^{+\infty} f'_t(x, t) dx$  равномерно сх-ся.

2.  $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  сх-ся при  $t = t_0$ .

Тогда  $F$  равномерно сх-ся,  $F \in C^1[c, d]$  и  $F' = \Phi$ .

**Доказательство.**  $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \implies F'_b(t) = \int_a^b f'_t(x, t) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} \Phi(t)$ .

$$F_b(t) = \left( \underbrace{\int_{t_0}^t F'_b(u) du}_{\Rightarrow \int_{t_0}^t \Phi(u) du} \right) + \underbrace{F_b(t_0)}_{\rightarrow F(t_0)} \implies \underbrace{F_b(t)}_{\rightarrow F(t)} \Rightarrow \int_{t_0}^t \Phi(u) du + F(t_0)$$

$\implies$  равномерная сх-ть и  $F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{\Phi(u)}_{\text{непр. ф-я}} du \implies F \in C^1[c, d]$  и  $F'(t) = \Phi(t)$ .  $\square$

**Пример.**  $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx$ . Знаем, что  $F \in C[0, +\infty)$

$$\Phi(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{-tx} \cdot (-x) dx = \underbrace{- \int_0^{+\infty} \sin(x) \cdot e^{-tx} dx}_{=-\frac{1}{1+t^2} \text{ два раза инт. по частям}} - \text{равномерно сх-ся при } t \geq t_0 > 0.$$

$$\implies F'(t) = \Phi(t) \implies F(t) = C - \arctan(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx \underset{\text{по предыдущим теоремам...}}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx = 0.$$

$\left| e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq e^{-x} \cdot \frac{|\sin(x)|}{x} \leq e^{-x}$  – суммируемая мажоранта.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} C - \arctan(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \implies C[0, +\infty) \ni F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \in C[0, +\infty)$  при  $t > 0$

$\implies F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$  при  $t \geq 0 \implies F(0) = \frac{\pi}{2}$ , то есть  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

### 3.3. В- и Г-функции Эйлера

**Определение 3.3.**  $\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ ,  $p > 0$  – гамма-функция.

$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ ,  $p, q > 0$  – бета-функция.

**Свойства.** Г-функции.

- Интеграл сходится в нуле эквивалентно тому, что  $\frac{1}{x^{1-p}}$  сх-ся в  $+\infty$

**Доказательство.**  $x^{p-1} \leq e^{\frac{x}{2}}$  при больших  $x$ ,  $x^{p-1} \cdot e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}} \implies$  сх-ся.  $\square$

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ .

**Доказательство.**  $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) = -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$ .  $\square$

- $\Gamma(n+1) = n!$

**Доказательство.**  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

Далее индукция.  $\square$

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

**Доказательство.**  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ , где  $y^2 = x$ ,  $dx = 2ydy$ .  $\square$

- $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$ .

**Доказательство.**  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) = \dots = (n - \frac{1}{2}) \cdot (n - \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$  – получилось ровно то, что хотели.  $\square$

- $\Gamma$  бесконечно дифф. ф-я и  $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^n e^{-x} dx$

**Доказательство.** Надо обосновать дифф. под знаком интеграла. Для этого надо потребовать равномерную сх-ть полученного интеграла.

$0 < a \leq p \leq b < +\infty$

(a)  $0 \leq x \leq 1$ :

$$x^{a-1} |\ln(x)|^n e^{-x}$$

(b)  $1 \leq x$ :

$$x^{b-1} |\ln(x)|^n e^{-x} \leq x^{n+b} e^{-x}$$

$\square$

7.  $\Gamma$  – строго выпуклая.

**Доказательство.**  $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx > 0$

□

**Свойства.**  $B$ -функции.

1. Интеграл сх-ся

- (a) В нуле  $\Leftrightarrow \frac{1}{x^{1-p}}$  – сх-ся.
- (b) В единице  $\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^{1-q}}$  – сх-ся.

2.  $B(p, q) = B(q, p)$ .

**Доказательство.**  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = -\int_1^0 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = B(q, p)$ , где  $y = 1-x$ ,  $dy = -dx$ . □

3.  $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$ .

**Доказательство.**  $B(p, q) = \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx$ , где  $y = \frac{x}{1+x}$ ,  $y = 1 - \frac{1}{1+x}$ ,  $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$ . □

**Теорема 3.14.**  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

**Доказательство.**  $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy =$   
 $= \int_0^{+\infty} \int_0^u x^{p-1} (u-x)^{q-1} e^{-u} dx du \quad \underbrace{=}_{\text{замена } x=uv, dx=u \cdot dv} \int_0^{+\infty} \int_0^1 (uv)^{p-1} (u-uv)^{q-1} e^{-u} u dv du =$   
 $= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} \cdot \underbrace{\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv}_{=B(p,q)} du = B(p, q) \Gamma(p+q)$ . □

**Следствие. (формула дополнения)**

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad p \in (0, 1).$$

**Доказательство.**  $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \Gamma(1)B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad \underbrace{=}_{\text{просто верим в это}} \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ . □

**Следствие. (формула удвоения)**

$$\Gamma(p)\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$$

**Доказательство.**  $\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx =$   
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx \quad \underbrace{=}_{x=\frac{1}{2}-t} 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} d(-t) =$   
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} dt \quad \underbrace{=}_{t=\frac{\sqrt{u}}{2}} 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{u}{4}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du =$   
 $= \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{B(p, \frac{1}{2})}{2^{2p-1}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2^{2p-1}} =$   
 $= \frac{\Gamma(p)\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2}) \cdot 2^{2p-1}}$

□

**Теорема 3.15.**  $\Gamma(t+a) \sim t^a \Gamma(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$

**Доказательство.**  $\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+a)}$  при больших  $t$

$$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} = B(t+1, a) = \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx$$

$$t^a \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx \underset{y=xt}{=} t^a \int_0^t \left(\frac{y}{t}\right)^{a-1} \underbrace{\left(1 - \frac{y}{t}\right)^t}_{\rightarrow e^{-y}} \frac{1}{t} dy \rightarrow \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)$$

На самом деле интегрируем  $\mathbb{1}_{[0,t]} y^{a-1} (1 - \frac{y}{t})^t \leq y^{a-1} e^{-y}$  – это суммируемая мажоранта, поэтому можем перейти к пределу по т. Лебега.  $\square$

**Следствие.** При  $a = \frac{1}{2}$  это формула Валлиса.

**Доказательство.**  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \sim n^{\frac{1}{2}} \Gamma(n)$   $\square$

**Теорема 3.16. формула Эйлера-Гаусса**

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

**Доказательство.**  $\Gamma(n+p) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdots (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p)$

$$n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)} = \frac{n^p}{p+n} \cdot \frac{n! \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \underbrace{\frac{n}{p+n}}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left( n^p \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+p)} \right)}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \Gamma(p)$$

**Пример.**  $1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdots (5n+1) = 5^n \cdot \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5}+1) \cdot (\frac{1}{5}+2) \cdots (\frac{1}{5}+n) \sim 5^{n+1} \frac{n^{\frac{1}{5}} n!}{\Gamma(\frac{1}{5})}$

**Пример.** 1.  $\int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)$  при  $p > 0$ .

$$\text{Док-во: } \int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt \underset{x=t^p}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} dx = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right).$$

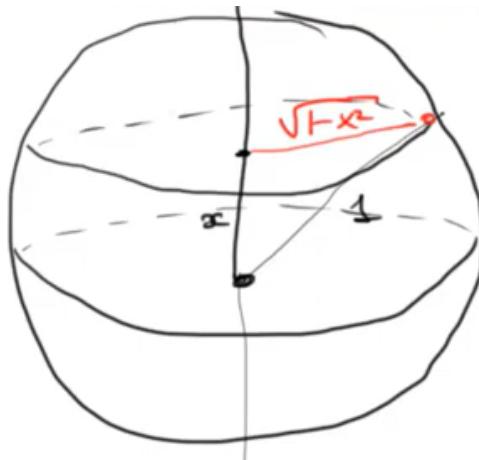
$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

$$\text{В частности, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}.$$

$$\text{Док-во: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\phi))^{\frac{p-2}{2}} \cdot (\cos^2(\phi))^{\frac{q-2}{2}} \cdot 2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \underset{t=\sin^2(\phi)}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{\frac{p}{2}-1} (1-t)^{\frac{q}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

3. Объем  $n$ -мерного шара  $V_n(r) = C_n \cdot r^n$ , где  $C_n = V_n(1)$  – объем  $n$ -мерного шара, радиуса 1.



$$\begin{aligned} V_n(1) &= \int_{-1}^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{n-1} dx \\ &= 2 \cdot C_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\phi))^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Получили, что  $C_n = C_{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}$ .

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi} \cdot C_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdots \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} C_1 = \\ &= 2 \cdot \frac{(\sqrt{\pi})^{n-1} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \end{aligned}$$

### 3.4. Криволинейные интегралы

*Определение 3.4.*  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – гладкая кривая

$f$  – функция, заданная на  $\gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

Криволинейный интеграл ( $I$  рода (интеграл по длине дуги)):

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt, \text{ где } \|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2}$$

**Теорема 3.17.** 1. Не зависит от параметризации кривой

2. Не зависит от направления

3.  $\int_{\gamma} ds = l(\gamma)$  – длина кривой

4. Линейность по функции

5. Аддитивность по кривой: если  $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$ , то  $\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$

6. Если  $f \leq g$ , то  $\int_{\gamma} f \leq \int_{\gamma} g$

7.  $|\int_{\gamma} f ds| \leq \int_{\gamma} |f| ds$

8.  $\int_{\gamma} f ds \leq \max f \cdot l(\gamma)$

**Доказательство.** 1-2  $\tilde{\gamma}$  – другая параметризация.  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ , где  $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  – гладкая строго монотонная биекция

$$\int_{\tilde{\gamma}} f ds = \int_c^d f(\gamma(\tau(u))) \|\tilde{\gamma}'(u)\| du$$

$$\tilde{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'_1(u) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \circ \tau, \tilde{\gamma}_1'(u) = \gamma_1'(\tau(u))\tau'(u)$$

$\|\tilde{\gamma}'(u)\| = |\tau'(u)| \cdot \|\gamma'(\tau(u))\|$  – если бы не было модуля, могли бы просто сделать замену переменной, но надо что-то умнее

Если  $\tau \uparrow$ , тогда  $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds$ , где  $t = \tau(u)$

А если  $\tau \downarrow$ , то лишний минус появится, когда поменяем местами концы

В итоге не зависим от убывания/возрастания

### 3 Формула для длины кривой

$$4 \int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \int_a^b (\alpha f(\gamma(t)) + \beta g(\gamma(t))) \|\gamma'(t)\| dt = \alpha \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt + \dots = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds$$

$$5 \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b), \gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$$

и по аналогии

$$6 \int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

и если заменим на  $g$ , станем только больше

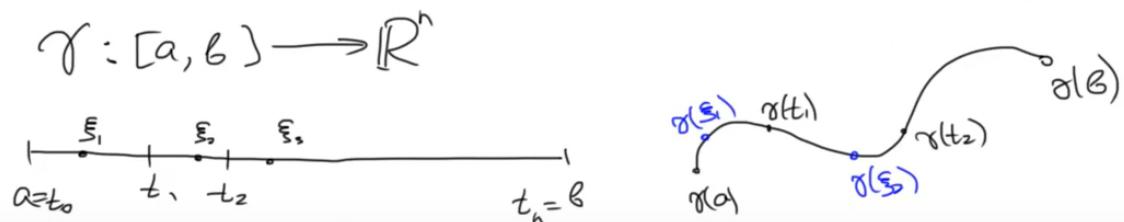
$$7 \left| \int_{\gamma} f ds \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \right| = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} |f| ds$$

$$8 f \leq \max f \implies \int_{\gamma} f ds \leq \int_{\gamma} \max f ds = l(\gamma) \cdot \max f$$

□

**Замечание.** Можно определить  $\int_{\gamma} f ds$  для кусочно-гладких  $\gamma$ . Содержательная тут только проверка на корректность, но она проверяется с помощью аддитивности по кривой

**Упражнение.**  $\int_{\gamma} f ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(\gamma(\xi_k)) \cdot l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]})$ , где  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , при мелкости дробления  $\rightarrow 0$ .



**Определение 3.5.** Дифференциальная форма (1-го порядка) в  $\mathbb{R}^n$ .

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n, \text{ где}$$

$$f_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\omega(x)$  – линейное отображение:  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$dx_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – проекция на  $k$ -ую координату, то есть  $dx_k(\underbrace{h}_{\text{вектор } =(h_1, \dots, h_n)}) = h_k$ .

Пример записи:  $\omega(x, h) = f_1(x)h_1 + \dots + f_n(x)h_n$ .

**Определение 3.6.** Криволинейный интеграл *II* рода (интеграл от дифференциальной формы)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – гладкая кривая

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \cdots + f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'_n(t)) dt$$

Если коротко:  $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ ,  $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

**Свойства.** 1. Не зависит от параметризации

2. Смена направления меняет знак интеграла

3. (**Связь с интегралом по длине дуги**).  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds$ , где  $\bar{\sigma}$  – единичный касательный вектор к кривой

4. Линейность по  $\bar{f}$

5. Аддитивность по кривой

$$6. |\int_{\gamma} \omega| \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| ds \leq \max \|\bar{f}\| \cdot l(\gamma)$$

**Доказательство.** 1.  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau, \tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  – строго возрастает, гладкая,  $\tau(c) = a, \tau(d) = b$ .

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\tilde{\gamma}'(u)) du = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\tau(u))) \gamma'_k(\tau(u)) \tau'(u) du = (*)$$

$$\text{Делаем замену } t = \tau(u) : (*) = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_{\gamma} \omega$$

2. Доказали вместе с первым: если меняется направление, то  $\tau(c) = b, \tau(d) = a, \int_b^a = - \int_{\gamma} \omega$

3.  $\bar{\sigma}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ . Тогда  $\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \bar{\sigma}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt =$

$$= \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

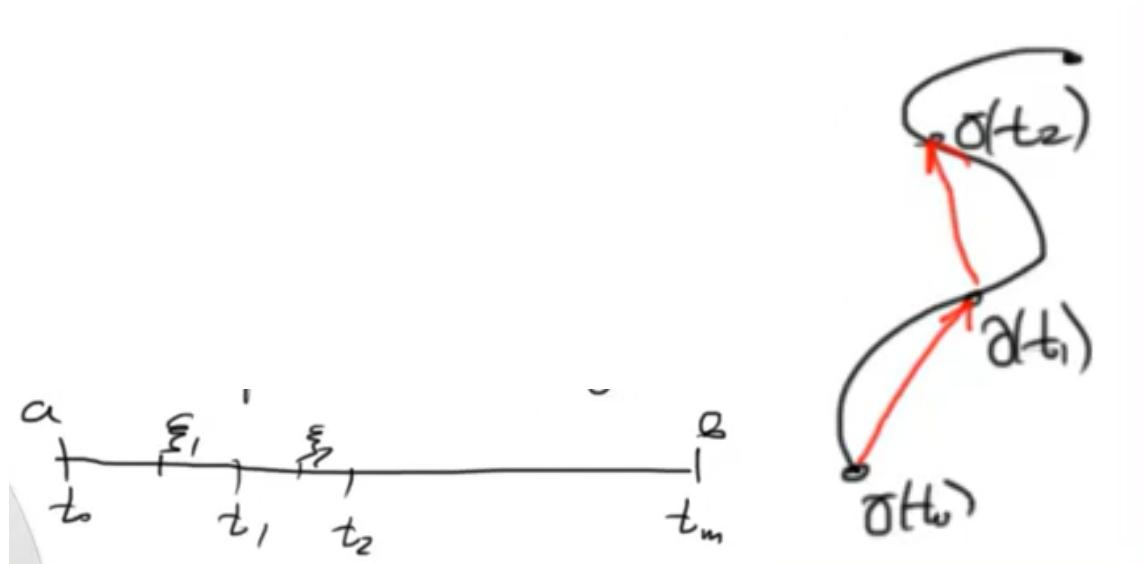
4, 5. следуют из 3 (по линейности интеграла *I* рода и линейности скалярного произведения).

$$6. |\int_{\gamma} \omega| = |\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds| \leq \int_{\gamma} |\langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle| ds \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| \cdot \|\bar{\sigma}\| ds$$

□

**Упражнение.** Доказать формулу:  $\int_{\gamma} \omega = \lim \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\xi_j))(\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))$ , если мелкость дробления  $\rightarrow 0$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$



**Определение 3.7.**  $\omega$  – дифференциальная форма, заданная в  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – открытом множестве

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – первообразная для  $\omega$ , если  $dF = \omega$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n, \text{ т.е нужно, чтобы } \frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k \text{ при } k = 1, 2, \dots, n$$

**Теорема 3.18.** Пусть  $F$  – первообразная,  $\omega, \gamma$  – кривая, соединяющая точки  $A, B$

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A)$$

**Доказательство.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_k(t)}_{(F \circ \gamma)'(t)} dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F \circ \gamma(b) - F \circ \gamma(a) =$$

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A).$$

□

**Определение 3.8.**  $\Omega$  – область, если  $\Omega$  – открытое линейно связное множество

Линейная связность – любая пара точек может быть соединена какой-либо кривой  $\in \Omega$

**Следствие.** 1. Если у  $\omega$  есть первообразная, то  $\int_{\gamma} \omega$  зависит только от концов кривой, но не зависит от самой кривой

2. Если  $\Omega$  – область, то все первообразные отличаются друг от друга на **const**

**Доказательство.**

2.  $F$  и  $G$  – первообразные  $\omega$ , возьмем точки  $A, B$  из  $\Omega$  и соединим кривой  $\gamma \implies G(B) - G(A) = \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A) \implies G(B) = F(B) + \underbrace{G(A) - F(A)}_{=const, \text{ при фикс. } A}$  (фиксируем  $A$  и меняем  $B$ ). □

**Лемма.**  $\Omega$  – область  $\implies$  между любыми двумя её точками можно провести ломанную, все звенья которой параллельны осям координат

**Доказательство.**  $A, B \in \Omega \implies \exists \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  такая что  $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$ . Для  $t \in [a, b]$  рассмотрим шар  $B_{r(t)}(\gamma(t)) \in \Omega$

$\gamma([a, b])$  – компакт  $\implies$  выберем конечное подпокрытие. Тогда можем перемещаться между центрами шариков по звеньям, параллельным осям координат

□

**Теорема 3.19.** Пусть  $\Omega$  – область,  $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  – дифференциальная форма в  $\Omega$  и  $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывные функции. Тогда следующие условия равносильны

1.  $\omega$  имеет первообразную  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $\int_{\gamma} \omega = 0$  для любой замкнутой кривой  $\gamma$
3.  $\int_{\gamma} \omega = 0$  для любой замкнутой ломаной  $\gamma$  со звеньями, параллельными осям координат

**Доказательство.** 1)  $\implies$  2)  $\implies$  3) очевидны

3)  $\implies$  1):

Соединим  $c$  и  $x \in \Omega$  ломаной со звеньями, параллельными осям координат.

$F(x) := \int_{\gamma} \omega$ . Поймем, что результат не зависит от выбора ломаной  $\gamma$

$0 = \int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega$ , где  $\tilde{\gamma}^{-1}$  – инвертированная по направлению вторая ломаная

Осталось проверить, что  $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma \cup [x, x+h]} \omega}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \omega =$$

$$\underset{[0, h] = [x, x+h] \text{ (сдвиг на } x\text{)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{f_1(\gamma(t))}_{x+e_1 t} \underbrace{\gamma'(t)}_1 dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_1(x + e_1 t) dt =$$

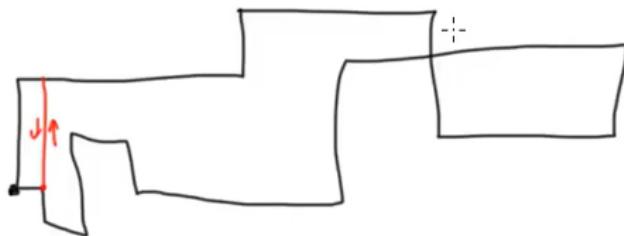
$$\underset{= h \cdot f_1(x + e_1 h \cdot \theta), \theta \in (0, 1)}{=} f_1(x)$$

$= f_1(x)$ , т.к.  $\gamma(t) = x + e_1 \cdot t$ ,  $\gamma'_1(t) = 1$ ,  $\gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0$

□

**Замечание.** Для  $\mathbb{R}^2$  3) можно заменить на 3'):  $\int_{\gamma} \omega = 0$  для любого прямоугольного  $\gamma$  со сторонами, параллельными осям координат

**Доказательство.** Индукция по числу звеньев. Когда отсекаем новый прямоугольник, то по его ребру мы считаем интеграл в разные стороны, то есть с остатком фигуры значение сократится, поэтому такой индукционный переход сделать можно:



□

**Замечание.**  $\omega$  в  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . В каждой точке  $\Omega$  своё линейное отображение  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

$dx_1$  - функция  $g_1(x) = x_1$

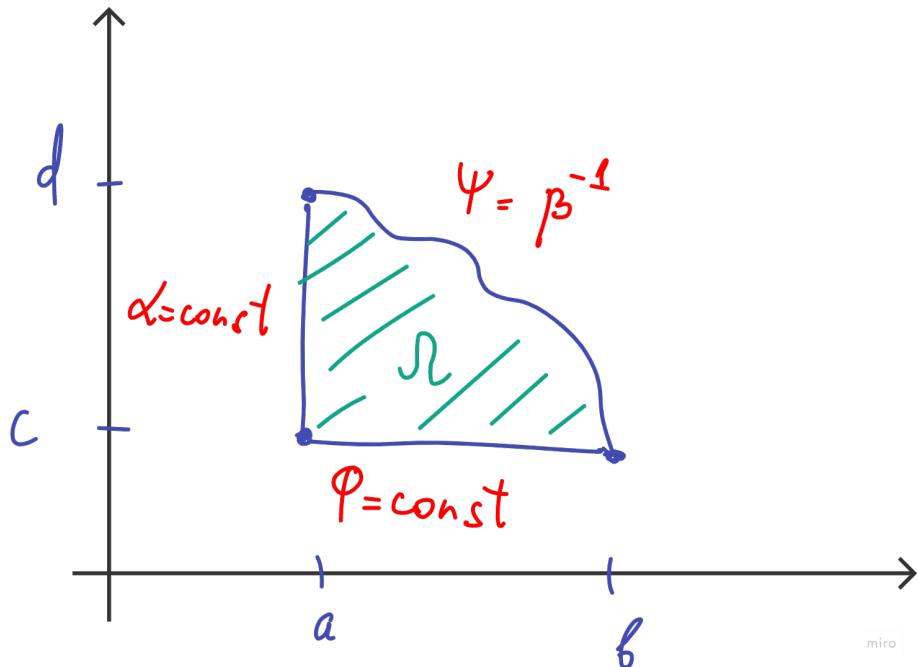
$$dg_1$$

$g_1(x+h) = g_1(x) + dg_1(g) = o(h)$ , поэтому  $dx_i$  в определении  $\omega$  - проекции на соотв. координаты

**Определение 3.9.** Живём в  $\mathbb{R}^2$ . Назовём элементарной областью в  $\mathbb{R}^2$ , если

$\Omega = \{(x, y) : a < x < b \wedge \phi(x) < y < \psi(x)\} = \{(x, y) : c < y < d \wedge \alpha(y) < x < \beta(y)\}$ , причем ограничивающие функции непрерывны.

Может показаться, что такого не бывает, но вот пример:



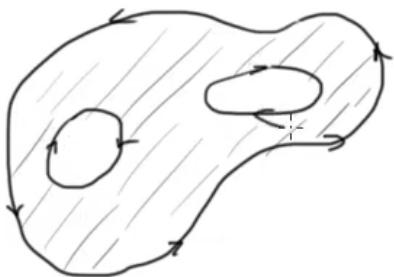
**Теорема 3.20. Формула Грина**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  область, граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких простых замкнутых кривых, ориентированных положительно.

$P, Q : Cl(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны.

Тогда  $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2$ , где  $\gamma$  – граница  $\Omega$ .

Заметим, что направление на кусочках границ такое, что область слева. То есть ориентация устроена так:



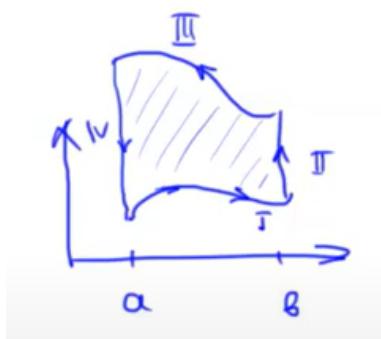
Область всегда по левую руку  
при обходе

**Доказательство.** Хотим доказывать это:  $\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Qdy$  и  $-\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Pdx$ , при этом формулы никак не связаны, то есть можно и по-отдельности доказывать. Проверим вторую формулу:

1.  $\Omega = \{(x, y) : x \in (a, b), \phi(x) < y < \psi(x)\}$  – элементарная область.

Левая часть:  $\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$

Правая часть:  $\int_{\gamma} Pdx = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$



$$x \rightarrow (x, \phi(x)) : (I) = \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$$

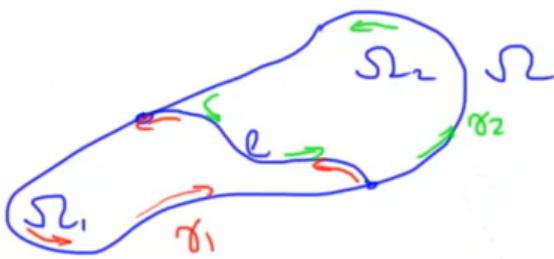
$$y \rightarrow (b, y) : (II) = \int_{\phi(b)}^{\psi(b)} P(b, y) b' dy = 0$$

$$x \rightarrow (x, \psi(x)) : (III) = - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx$$

$$y \rightarrow (a, y) : (IV) = - \int_{\phi(a)}^{\psi(x)} P(a, y) a' dy = 0$$

Записывая сумму  $(I) + (II) + (III) + (IV)$ , получим ровно то, что записано в левой части со знаком минус.

2.  $\Omega = \Omega_1 \cup l \cup \Omega_2$ . Пусть формула верна для  $\Omega_1, \Omega_2$ , выведем ее для  $\Omega$ .



$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2 = \int_{\Omega_1} + \underbrace{\int_l}_{=0, \text{ т.к. мера } l \text{ это } 0} + \int_{\Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} =$$

$= \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy$  (обходя  $l$  с разных сторон, слагаемое сократится).

3. Формула верна для конечного объединения элементарных областей.

4. Формула верна для области из условия, так как та нарезается на конечное число элементарных областей (без доказ-ва).

□

**Следствие. Формулы площади.**

$$\lambda_2 \Omega = \int_{\gamma} xdy = - \int_{\gamma} ydx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} xdy - ydx$$

**Доказательство.** Просто подставляем в формулу Грина подходящие  $P$  и  $Q$  (кто-то из них 0, а кто-то  $x$ , либо  $y$ ). □

### 3.5. Точные и замкнутые формы

**Определение 3.10.**  $\Omega$  – область,  $\omega$  – дифф. форма в  $\Omega$ .  $\omega$  – точная форма, если у нее существует первообразная.

**Определение 3.11.**  $\omega$  – локально точная форма, если  $\forall a \in \Omega$  найдется  $U_a$ , такая что в  $U_a$  есть первообразная  $\omega$ .

**Определение 3.12.**  $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$  – замкнутая, если  $\forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ .

**Замечание.** Точность  $\Rightarrow$  локальная точность (но не наоборот).

Возьмем  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$  на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  и покажем, что она замкнутая, локально точная, но не точная.

Проверим на замкнутость, то есть на равенство частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\frac{y}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{-\frac{x}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Проверим на локальную точность: везде, кроме оси  $Ox$ , есть первообразная  $F(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  (можно честно продифференцировать и проверить)

А теперь покажем, что точности нет: для этого нужно, чтобы интеграл любой замкнутой кривой был равен нулю. Возьмем тогда интеграл по единичной окружности с параметризацией  $(x, y) \rightarrow (\cos t, \sin t)$ :

$$\int_{\text{един. окр.}} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)(\sin(t))' - \sin(t)(\cos(t))'}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

**Теорема 3.21.** Если коэффиц. формы  $f_i$  из  $C^1$ , тогда локальная точность  $\Rightarrow$  замкнутость.

**Доказательство.** Берем  $a \in \Omega$  и  $U_a$ , где есть первообразная  $F \Rightarrow f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ .

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \quad \underset{\substack{= \\ \text{т.к. непрер. слева и справа от равенства}}}{=} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Rightarrow \text{замкнутость}$$

w.  $\square$

**Лемма. Пуанкаре.**

Если  $\Omega$  – выпуклая область и коэффиц. формы из  $C^1$ , то замкнутость  $\Rightarrow$  точность.

**Доказательство.** Только для  $\mathbb{R}^2$ .

Для существования первообр. достаточно чтобы интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат был равен 0.

$$\omega = Pdx + Qdy : \int_{\text{обход контура}} \omega = \int_{\text{заполненные прямоуг.}} \underbrace{\left( \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)}_{\text{этот интеграл} = 0 \text{ из-за замкнутости}} d\lambda_2 = 0.$$

Выпуклость  $\Omega$  важна, чтобы внутри заполненного прямоугольника не было дырок.  $\square$

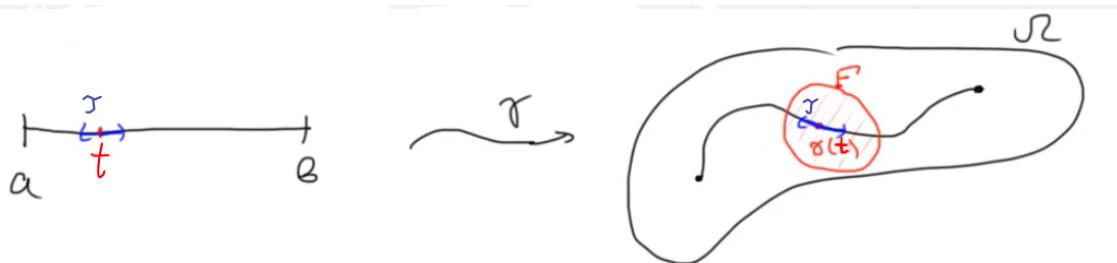
**Следствие.** 1. Замкнутая форма с коэффиц. из  $C^1$  в любом открытом шаре из  $\Omega$  имеет первообразную.

2. Замкнутая форма с коэффиц. из  $C^1$  лок. точная.

**Определение 3.13.**  $\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ .

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  путь.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  первообразная  $\omega$  вдоль пути  $\gamma$ , если  $\forall t \in [a, b]$  у  $\gamma(t)$  найдется окр.  $U_{\gamma(t)}$ , а в ней первообразная  $F$  формы  $\omega$ , т.ч.  $f(\tau) = F(\gamma(\tau))$  при  $\tau$  близких к  $t$ .



**Теорема 3.22.** Первообразная вдоль пути существует и единственная с точностью до константы.

**Лемма.** Локально постоянная функция (в каждой точке есть окрестность, что функция на ней постоянная) – константа.

**Доказательство.** Док-во теоремы.

**Единственность:**  $f_1, f_2$  – первообр. вдоль пути  $\gamma$ .

$f_1 - f_2$  – лок. постоянная, покажем это:

Берем  $t \in [a, b]$ , есть  $U_{\gamma(t)}$  и в ней первообр.  $F_1$  и  $F_2$ , т.ч.  $f_1(\tau) = F_1(\gamma(\tau))$  и  $f_2(\tau) = F_2(\gamma(\tau))$  при  $\tau$  близких к  $t$ , но  $F_1 - F_2 = \text{const} \Rightarrow f_1 - f_2 = \text{const}$  при  $\tau$  близких к  $t$ .

**Существование:** берем  $t \in [a, b]$ , у  $\gamma(t)$  есть окр-ть  $U_{\gamma(t)}$ , в которой существует первообр.

$\bigcup_{t \in [a,b]} U_{\gamma(t)}$  – покрытие  $\gamma[a,b]$  – компакт.

Выберем конечные подпокрытия  $U_1, \dots, U_m$  и  $F_1, \dots, F_m$  – первообр. в соответствующем  $U_j$ .

Из леммы Лебега  $\exists r > 0 : \forall t \in [a,b] : B_r(\gamma(t))$  целиком содержится в каком-то эл-те покрытия.

Нарежем  $[a,b]$  на кусочки длины  $< \delta$ , где  $\delta > 0$  выбрано по  $\epsilon = r$  из равномерной непрерывности  $\gamma$ .

$a := t_0, t_1, \dots, t_n := b$  – нарезка.

Тогда образы маленьких отрезков целиком содержатся в своих элементах покрытия.

$\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ , так занумеруем  $F_i$  — первообр. в  $U_i$ .

$f|_{[t_0, t_1]} = F_1 \circ \gamma, f|_{[t_1, t_2]} = F_2 \circ \gamma$ .

В  $\underbrace{U_1}_{\exists \gamma(t_1)} \cap U_2 \neq \emptyset \implies F_1, F_2$  – первообр.  $\implies$  они отличаются на  $const \implies F_2 = F_1 + c$ ,

подменяем  $c$  так, что в  $U_1 \cap U_2$  они совпадали. И так далее для всех остальных кусочков.  $\square$

**Следствие.**  $f$  – первообраз.  $\omega$  вдоль пути  $\gamma : [a,b] \rightarrow \Omega$ . Тогда  $\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$

**Доказательство.** Смотрим на нарезку из предыдущей теоремы. Тогда  $\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}} \omega = \sum_{i=1}^n (F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))) = F_n(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$ .

$F_i(\gamma(t_i)) = F_{i+1}(\gamma(t_i))$  так согласованы  $F_j$ .  $\square$

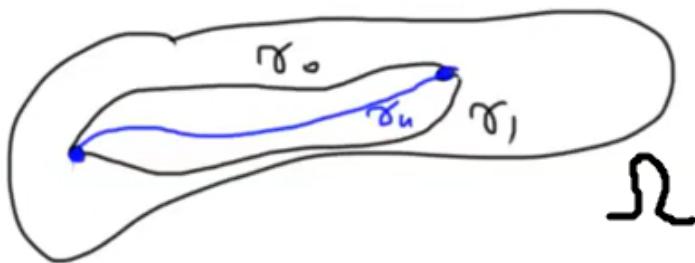
**Определение 3.14.**  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^2$ .

$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \rightarrow \Omega$  пути в  $\Omega$ .

1.  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  и  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ .

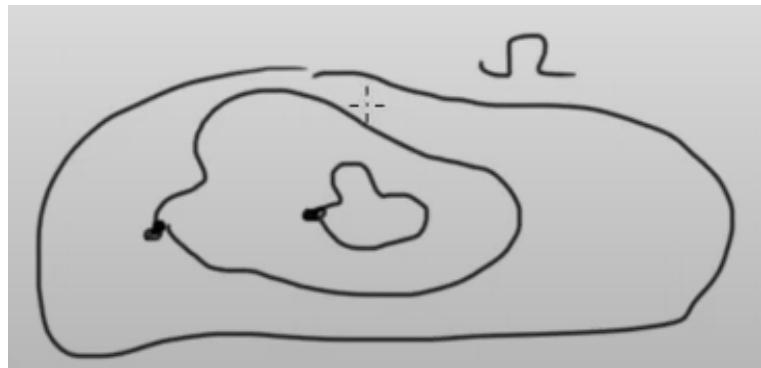
$\gamma_0, \gamma_1$  – гомотопные пути с неподвижными концами, если  $\exists \gamma : [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$  непрерывное, т.ч.  $\forall t : \gamma(t,0) = \gamma_0(t), \gamma(t,1) = \gamma_1(t)$  и  $\forall u : \gamma(a,u) = \gamma_0(a), \gamma(b,u) = \gamma_0(b)$ .

$\gamma_u(t) := \gamma(t,u)$  путь, соединяющий точки  $\gamma_0(a)$  и  $\gamma_0(b)$ .



2.  $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ .

$\gamma_0, \gamma_1$  – гомотопно замкнутые пути, если  $\exists \gamma : [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$  непрерывное, т.ч.  $\forall t : \gamma(t,0) = \gamma_0(t), \gamma(t,1) = \gamma_1(t)$  и  $\forall u : \gamma(a,u) = \gamma(b,u)$ .



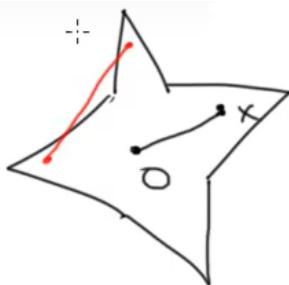
**Определение 3.15.**  $\gamma$  – стягиваемы замкнутый путь в  $\Omega$ , если он гомотопен точке.

**Определение 3.16.**  $\Omega$  – односвязная область, если любой замкнутый путь в ней – стягиваемый.

**Пример.** 1. Выпуклая область односвязна (для любых двух точек верно, что отрезок, соединяющий их лежит в области).

2. Звездная область односвязна (одна точка фиксирована и верно, что отрезок, соединяющий ее и любую другую, лежит в области)

PS. Напомним, что для обычной выпуклости нужно было, чтобы отрезок для двух произвольных точек из области целиком содержался в ней.



**Доказательство.**  $\Omega$  – звездная,  $O$  – фикс. точка.

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  – замк. путь.

$\gamma_u(t) := u \cdot \gamma_1(t) \in \Omega$ .

$\gamma_0(t) = 0$ .

Хз, что это доказывает, но вот оно есть :/ □

3.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  не явл. односвязной.

**Упражнение.**  $\Omega$  – односвязна,  $f : \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{окр. единичного радиуса}} \rightarrow \Omega$  непрер. отображ.

Доказать, что существует  $g$  : замк. круг. един. радиуса  $\rightarrow \Omega$  – непрер.

**Определение 3.17.**  $\gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega$  непрер. отображ.

$\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ .

$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  – первообразная  $w$  относительно отображения  $\gamma$ , если  $\forall (t, u) \in [a, b] \times [c, d]$  существует окр-ть  $U_{\gamma(t, u)}$  и первообр  $F$  в этой окр-ти, т.ч.  $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$  для  $(\tau, \nu)$  близких к  $(t, u)$ .

**Теорема 3.23.** Первообразная отн-но отображения существует и единственна с точностью до константы.

**Доказательство. Единственность:**  $f, g$  – первообразные отн-но отображения  $\gamma$ , то  $(f - g)$  – локально постоянная функция двух переменных  $\Rightarrow (f - g) = const$ .

То что  $(f - g)$  – локально постоянная следует отсюда:

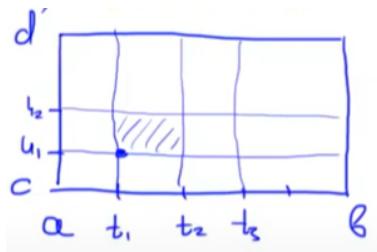
Берем  $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$ , в окр-ти  $U_{\gamma(t,u)} : \exists F_1, F_2$  – первообразные, т.ч.  $f(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu))$  и  $g(\tau, \nu) = F_2(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(t, u)$ .

Знаем, что  $F_1 = F_2 + const \Rightarrow f(\tau, \nu) - g(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu)) - F_2(\gamma(\tau, \nu)) = const$ .

**Существование:** берем  $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$ , у  $\gamma(t, u)$  есть окр-ть  $U_{\gamma(t,u)}$  в которой существует первообразная  $\Rightarrow [a, b] \times [c, d] \subset \bigcup_{(t,u) \in [a,b] \times [c,d]} U_{\gamma(t,u)}$ .

Выбираем конечное подпокрытие, по нему  $r > 0$  из леммы Лебега  $\Rightarrow B_r(\gamma(t, u))$  целиком содержится в эл-те подпокрытия.

$\gamma \in C([a, b] \times [c, d]) \Rightarrow$  равном. непрер. Берем по  $\epsilon = r$  такое  $\delta > 0$  из равн. непрерывности  $\Rightarrow$  если  $(t, u)$  и  $(t', u')$  на расстоянии  $< \delta$ , то  $\gamma(t, u)$  и  $\gamma(t', u')$  на расстоянии  $< r$ .



$\gamma([t_{i-1}, t_i] \times [u_{j-1}, u_j]) \subset U_{ij}$  и  $F_{ij}$  первообразная в  $U_{ij}$ .

$$f|_{[t_0, t_1] \times [u_0, u_1]} = F_{11} \circ \gamma$$

$$f|_{[t_1, t_2] \times [u_0, u_1]} = F_{21} \circ \gamma$$

$\gamma(\{t_1\} \times [u_0, u_1]) \subset U_{11} \cap U_{21} \leftarrow$  тут  $F_{11}, F_{21}$  – первообраз.  $\Rightarrow$  они отличаются на  $const$ .

Подправим  $F_{21}$  так, что в  $U_{11} \cap U_{21}$  они совпадают.

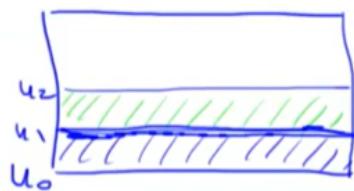
В итоге построим  $f_1 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  – первообр. отн-но  $\gamma|_{[a,b] \times [u_0, u_1]}$ .

Аналогично  $f_j : [a, b] \times [u_{j-1}, u_j] \rightarrow \mathbb{R}$  – первообр. отн-но  $\gamma|_{[a,b] \times [u_{j-1}, u_j]}$ .

осталось склеить их в  $f$ .

Рассмотрим  $f_1, f_2$ .  $f_1(\cdot, u_1), f_2(\cdot, u_1)$  – первообр. вдоль пути  $\gamma_{u_1} \Rightarrow$  они отличаются на константу.

Подправим  $f_2$  так, что  $f_1(\cdot, u_1) = f_2(\cdot, u_1)$ .



□

**Теорема 3.24.**  $\gamma_0, \gamma_1$  – гомотопные пути с неподвижными концами в  $\Omega$ .  $\omega$  – локально точная форма в  $\Omega$ . Тогда  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ .

**Доказательство.**  $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  гомотопия между  $\gamma_0, \gamma_1$ .

$f$  – первообразная  $\omega$  относительно отображения  $\gamma$ ,  $f(\cdot, 0), f(\cdot, 1)$  – первообразные вдоль путей  $\gamma_0, \gamma_1$ , соответственно.

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0).$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1).$$

Докажем, что  $f(a, \cdot)$  – лок. постоянная. Рассмотрим  $(a, u)$ : у  $\gamma(a, u)$  есть окр-ть  $U$  и в ней первообразная  $F$ , т.ч.  $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(a, u)$ .

$f(a, \nu) = F(\gamma(a, \nu)) = F(\gamma_0(a))$  не зависит от  $\nu$  (по аналогии делаем с другим концом, то есть доказываем, что  $f(b, \cdot)$  – локальная постоянная, тогда получили, что  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ ).  $\square$

**Теорема 3.25.**  $\gamma_0, \gamma_1$  – замкнутые гомотопные пути в  $\Omega$ .  $\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ . Тогда  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ .

**Доказательство.**  $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  – гомотопия,  $f$  – первообразная  $\omega$  относительно  $\gamma$ .

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0)$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1)$$

Докажем, что  $(f(b, \cdot) - f(a, \cdot))$  лок. постоянна.

Рассмотрим  $(a, u)$ , у  $\gamma(a, u)$  есть окр-ть  $U$  и в ней первообраз.  $F$ , т.ч.  $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(a, u)$ .

Рассмотрим  $(b, u)$ , у  $\gamma(b, u)$  есть окр-ть  $\tilde{U}$  и в ней первообраз.  $\tilde{F}$ , т.ч.  $f(\tau, \nu) = \tilde{F}(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(b, u)$ .

$$\gamma(a, u) = \gamma(b, u) \in U \cap \tilde{U}$$

$$F \text{ и } \tilde{F} \text{ – первообразные в } U \cap \tilde{U} \implies \tilde{F} = F + C \text{ в } U \cap \tilde{U}.$$

$$f(b, \nu) - f(a, \nu) = \tilde{F}(\gamma(b, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = \tilde{F}(\gamma(a, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = C.$$

$\square$

**Следствие.** Если  $\gamma_1$  – стягиваемый путь в  $\Omega$ ,  $\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ . Тогда  $\int_{\gamma_1} \omega = 0$ .

**Теорема 3.26.** Если  $\Omega$  – односвязна, а  $\omega$  – лок. точная, то  $\omega$  – точная.

**Доказательство.**  $\gamma_1$  – замкнутая кривая  $\implies \gamma_1$  – стягиваемая  $\implies \int_{\gamma_1} \omega = 0 \implies$  существует первообр.  $\square$

**Замечание.**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  не односвязна, т.к. там есть лок. точная форма, не являющаяся точной.

## 4. ТФКП

## 4.1. Голоморфные функции

Если доказательство не указано, то оно повторяет то, что было в  $\mathbb{R}$  (смотреть 1 семестр).

**Определение 4.1.**  $\Omega$  – область в  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$ .

$f$  – голоморфна в точке  $z_0$ , если существует  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ .

**Определение 4.2.**  $f$  комплексно дифф. в точке  $z_0$ , если  $\exists k \in \mathbb{C}$ :

$$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ при } z \rightarrow z_0.$$

**Утверждение 4.1.**  $f$  – голоморфна в точке  $z_0 \Leftrightarrow f$  комплексно дифф. в точке  $z_0$  и  $k = f'(z_0)$ .

**Следствие.**  $f$  и  $g$  голоморфны в точке  $z_0$ . Тогда

1.  $f \pm g$  голом. в точке  $z_0$
2.  $f \cdot g$  голом. в точке  $z_0$
3. Если  $g(z_0 \neq 0)$ , то  $\frac{f}{g}$  голом. в точке  $z_0$ .
4. Если  $h$  голом. в точке  $f(z_0)$ , то  $h \circ f$  голом. в точке  $z_0$ .

**Замечание.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$z = x + iy, \quad f(z) = f(x + iy) = g(x + iy) + ih(x + iy) : g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} = \frac{f'(z_0)}{i} = i \cdot f'(z_0).$$

**Замечание.**  $\binom{g(x+iy)}{h(x+iy)} = \binom{g(x_0+iy_0)}{h(x_0+iy_0)} + \binom{a}{c} \binom{x-x_0}{y-y_0} + o(||(x - x_0, y - y_0)||)$ .

$$k = \alpha + i\beta$$

$$k \cdot (z - z_0) = (\alpha + i\beta)((x - x_0) + i(y - y_0)) = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + i(\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0))$$

Вещественная линейность  $+ \binom{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow$  комплексная линейность.

**Замечание.** Комплексная дифференцируемость  $\Leftrightarrow$  вещественная дифференцируемость + матрица Якоби  $\binom{\alpha}{-\beta} \binom{\beta}{\alpha}$

Комплексная дифференцируемость  $\Leftrightarrow$  вещественная дифференцируемость + условия Коши-

$$\text{Римана} \begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \end{cases}$$

**Замечание.**  $f(z) = f(z_0) + \underbrace{k}_{\in \mathbb{C}}(z - z_0) + o(z - z_0)$

$$k(z - z_0) = kw = |k| \cdot e^{i\phi} \cdot w, \quad \phi = \arg(k)$$

**Замечание.** Обозначения.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$dz = dx + idy$$

$$d\bar{z} = dx - idy$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

**Теорема 4.2. Условия Коши-Римана.**

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, a \in \Omega$$

$f$  – дифф. в точке  $a$  как функция из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Следующие условия равносильны:

1.  $f$  – голоморфна в точке  $a$ .
2.  $d_a f$  – комплексно линеен
3. условия Коши-Римана
4.  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$

**Доказательство.** Мы выяснили все, кроме  $(3) \Leftrightarrow (4)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{– а это}$$

и есть условия Коши-Римана.  $\square$

**Замечание.** Обозначения.

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ и голоморфна во всех точках из } \Omega.$$

**Следствие.**  $\Omega$  – область,  $f \in H(\Omega)$  и  $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{const} \implies f = \operatorname{const}$

**Доказательство.**  $\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0$$

$$\implies \operatorname{Re}(f) = \operatorname{const}$$

$\square$

**Теорема 4.3. Коши** (ah, shit, here we go again...)

$$f \in H(\Omega) \implies \text{форма } f(z)dz \text{ локально точная.}$$

**Доказательство.** Будет два разных док-ва.

1. Для случая непрерывно-дифф.  $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}, \dots$  (имеются в виду все частные производные).

Тогда замкнутость  $\implies$  локальная точность.

$$f(z)dz = f(z)(dx + idy) = (\operatorname{Re}(f) + i \cdot \operatorname{Im}(f)) \cdot (dx + idy) = \operatorname{Re}(f)dx - \operatorname{Im}(f)dy + i(\operatorname{Im}(f)dx + \operatorname{Re}(f)dy).$$

$$Pdx + Qdy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

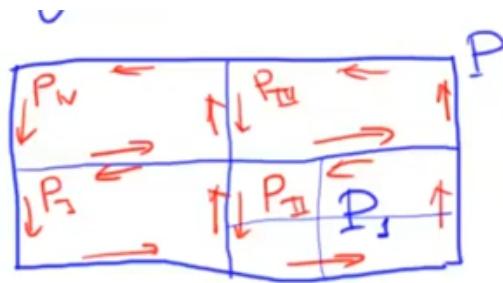
$$\operatorname{Re}(f)dx - \operatorname{Im}(f)dy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}$$

$$\operatorname{Im}(f)dx + \operatorname{Re}(f)dy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}$$

2. Общий случай.

Надо доказать, что интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат из шарика  $U \subset \Omega$ , содержащего произвольную точку, равен 0.

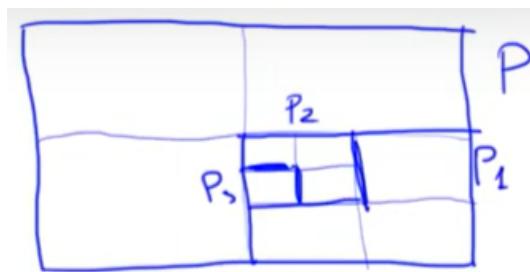
От противного: пусть нашелся прямоугольник  $P$ , т.ч.  $\alpha(P) := \int_P f(z)dz \neq 0$ .



Режем прямоугольник на 4 части, индексируем как  $P^1, P^2, P^3, P^4$ , строим обходы каждого (против часовой стрелки). Тогда  $\alpha(P) = \alpha(P^1) + \alpha(P^2) + \alpha(P^3) + \alpha(P^4)$ ,  $|\alpha(P)| \leq |\alpha(P^1)| + |\alpha(P^2)| + |\alpha(P^3)| + |\alpha(P^4)|$ .

Хотя бы одно из слагаемых  $\geq \frac{1}{4}|\alpha(P)|$ , назовем такое  $P_1$  (индекс уже снизу!). Разрежем его на 4 равные части. Пусть  $P_2$  такой, что  $|\alpha(P_2)| \geq \frac{1}{4}|\alpha(P_1)|$  и т.д.

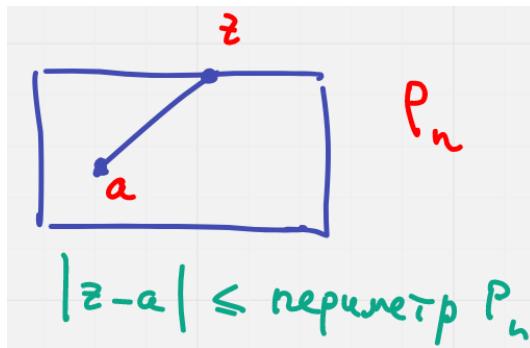
$$|\alpha(P_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\alpha(P)|.$$



Берем  $a$  из  $P_n$ :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + o(z - a)$$

$$\alpha(P_n) = \int_{P_n} f(z) dz = \underbrace{\int_{P_n} f(a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \underbrace{\int_{P_n} f'(a)(z - a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \int_{P_n} o(z - a) dz$$



$$o(z - a) = (z - a) \cdot \beta(z - a), \text{ где } \beta(z - a) \xrightarrow[z \rightarrow a]{} 0$$

$$\left| \int_{P_n} (z - a) \beta(z - a) dz \right| \leq \max_{z \in P_n} |z - a| \cdot |\beta(z - a)| \cdot \underbrace{l(P_n)}_{\text{периметр}} \leq \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \cdot \frac{l(P)}{2^n} \cdot \frac{l(P)}{2^n} \implies$$

$$\implies \frac{|\alpha(P)|}{4^n} \leq |\alpha(P_n)| \leq \frac{l(P) \cdot l(P)}{4^n} \cdot \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \implies \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \geq \frac{|\alpha(P)|}{l(P) \cdot l(P)} > 0 - \text{противоречие, т.к. } \beta(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow a.$$

□

**Следствие.** 1. Если  $f \in H(\Omega)$ , то у каждой точки  $a \in \Omega$  есть окрестность, в которой существует ф-я  $F$ , т.ч.  $F' = f$  в этой окрестности.

**Доказательство.** Пусть  $F$  первообразная формы  $f(z)dz$ . Поймем, что  $F' = f$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \cdot f(z) \implies \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

□

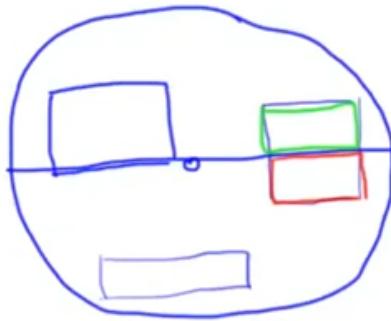
$$2. f \in H(\Omega), \gamma \text{ стягиваемый в } \Omega \text{ путь} \implies \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

**Теорема 4.4.**  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Delta$  – прямая параллельная осям координат.

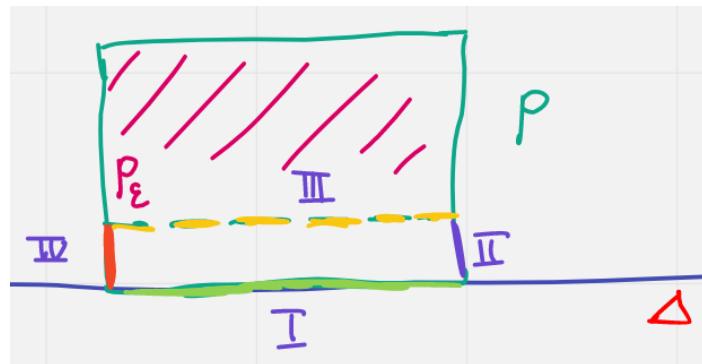
$$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$$

Тогда  $f(z)dz$  локально точная.

**Доказательство.** Надо проверять, что интеграл по довольно маленькому прямоугольнику (со сторонами паралл. осям) это 0.



Очевидно, что если прямоугольник не пересекает  $\Delta$ , то там все очевидно. Хотим рассматривать только те, что задевают. Те, что пересекают  $\Delta$ , можно разбить на две части (верхнюю и нижнюю). По каждой из частей будет 0, тогда и в сумме тоже будет 0. То есть нас вообще интересуют только те прямоугольники, у которых  $\Delta$  это одна из сторон. Рассмотрим их:



$$\int_{P_\epsilon} f(z)dz = 0 \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} \int_P f(z)dz$$

$$\left| \int_P f(z)dz - \int_{P_\epsilon} f(z)dz \right| \leq |J_1 + J_3| + |J_2| + |J_4|$$

$$|J_2 f(z)dz| \leq M \cdot (\text{длина 2}) = M\epsilon$$

$$|J_1 + J_3| = \left| \int_a^b (f(x + iy_0) - f(x + i(y_0 + \epsilon))) dx \right| \leq \int_a^b | \dots | dx = (*)$$

$f$  непрер. на компакте  $\implies$  равномерно непрер.

$\forall \gamma > 0 : \exists \epsilon > 0$  если  $\rho(\text{аргумент}) < \epsilon \implies |f(\dots) - f(\dots)| < \gamma$ , тогда

$$(*) \leq (b-a) \cdot \gamma$$

□

**Следствие.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$f \in C(\Omega)$  и  $f$  голоморфна в  $\Omega$  за исключением мн-ва изолированных точек, тогда форма  $f(z)dz$  все равно лок. точная.

**Доказательство.** Рассмотрим окр-ть, в которой ровно одна плохая точка.

Давайте проведем прямую через это точку, тогда работает теорема.

□

**Определение 4.3.** Индекс кривой отн-но точки  $Ind(\gamma, z_0)$ .

$\gamma$  – замкнутая кривая, не проходящая через точку  $z_0$ .

$Ind(\gamma, 0) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$  – кол-во оборотов  $\gamma$  вокруг 0.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$ ,  $\phi$  – непрерывна (полярная замена).

**Теорема 4.5.** Пусть  $\gamma$  – замкнутая кривая, не проходящая через 0. Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i Ind(\gamma, 0).$$

**Доказательство.** Берем параметризацию  $r, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$z(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, dz = (r'e^{i\phi} + ri\phi'e^{i\phi}) dt$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{r'}{r} + i\phi'$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_a^b \left( \frac{r'(t)}{r(t)} + i\phi'(t) \right) dt = (\ln(r(t)) + i\phi(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = i(\phi(b) - \phi(a)) = 2\pi i Ind(\gamma, 0)$$

□

**Следствие.** Пусть  $\gamma$  – замкнутая кривая, не проходящая через точку  $a$ . Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i Ind(\gamma, a).$$

**Теорема 4.6.** (интегральная формула Коши).

$$f \in H(\Omega)$$

$\gamma$  – стягиваемая в  $\Omega$  кривая, не проходящая через  $a \in \Omega$ .

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a) Ind(\gamma, a)$$

**Доказательство.**  $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{при } z \neq a, \\ f'(a), & \text{иначе} \end{cases}$

$$g \in C(\Omega)$$

$$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$$

$\Rightarrow g(z)dz$  – локально точная форма  $\Rightarrow \int_{\gamma} g(z)dz = 0$ , так как  $\gamma$  – стягиваемая

$$\Rightarrow 0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{f(a)dz}{z-a} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = f(a) \cdot 2\pi i \cdot Ind(\gamma, a)$$

□

**Пример.** Берем круг.  $f$  – голоморфна в окр-ти этого круга.

$$\int_{\text{окр.}} \frac{f(z)dz}{z-a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ вне круга} \\ f(a) \cdot 2\pi i, & \text{если } a \text{ внутри круга} \end{cases}$$

**Замечание.** Обозначение.

$$\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\} – \text{единичный круг.}$$

$$\mathbb{T} = \{|z| = 1\} – \text{единичная окружность, обход против часовой стрелки.}$$

$$r\mathbb{T} + a = \{|z - a| = r\}$$

**Теорема 4.7.**  $f \in H(r\mathbb{D}) \implies f$  аналитична (= функция раскладывается в ряд) в этом круге.

**Доказательство.** В нашем круге радиуса  $r$  берем еще два круга с тем же центром, но меньшими радиусами ( $r > r_1 > r_2 > 0$ ). Берем  $z : |z| < r_2$  – точка внутри наименьшего круга. Хотим интегрировать по средней окружности.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} = (*) \text{ равномерно сх-ся, так как } \left| \frac{z}{\zeta} \right| \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=:a_n \cdot 2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
□

**Следствие.** 1. Если  $f \in H(r\mathbb{D})$  и  $0 < r_1 < r$ , то

$$\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = f^{(n)}(0)$$

$$2. f \in H(r\mathbb{D} + a), 0 < r_1 < r \implies \frac{n!}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a)$$

$$z = w + a$$

$$g(w) = f(w + a)$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw$$

$$3. f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

Тогда  $f$  – голоморфна в  $\Omega \Leftrightarrow f$  – аналитична в  $\Omega$ .

$$4. f \in H(\Omega) \implies f \text{ – бесконечно дифференцируема.}$$

$$5. f \in H(\Omega) \implies f' \in H(\Omega)$$

$$6.$$

**Определение 4.4.**  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – гармоническая, если  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = 0$ .

Продолжаем свойство:

$f \in H(\Omega) \implies \operatorname{Re}(f)$  и  $\operatorname{Im}(f)$  – гармонические функции.

**Доказательство.**  $\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial y^2}$

про  $\operatorname{Im}(f)$  аналогично доказывается. □

**Замечание.** Если  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  гармоническая ф-я, то существует единств. (с точностью до прибавления  $\operatorname{const} \in \mathbb{R}$ ) гармоническая ф-я  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , т.ч.  $g + ih \in H(\Omega)$

**Теорема 4.8. Мореры.**

$f \in C(\Omega)$ . Если  $f(z)dz$  локально точная, то  $f \in H(\Omega)$ .

**Доказательство.** Возьмем  $a \in \Omega$ . Существует окр-ть  $a$ , что для  $f$  в ней есть первообразная  $F$  (т.е.  $F' = f$  в  $U$ ).

Тогда  $F \in H(U) \implies F' = f \in H(U)$  – это локальное свойство, поэтому на всей  $\Omega$  тоже будет гомоморфность. □

**Следствие.**  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Delta$  – прямая, параллельная оси координат.

$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$ . Тогда  $f \in H(\Omega)$ .

**Доказательство.**  $f \in C(\Omega)$  и  $f \in H(\Omega \setminus \Delta) \implies f(z)dz$  локально точная в  $\Omega \underset{\substack{\text{т. Мореры} \\ \Rightarrow}}{\underset{\curvearrowright}{\sim}} f \in H(\Omega)$ .  $\square$

**Теорема 4.9.** (интегральная формула Коши).

$f \in H(\Omega)$

$K \subset \Omega$  – компакт, граница которого – конечное число кусочно-гладких замкнутых кривых. Тогда

1.  $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$
2. Если  $a \in \text{Int}(K)$ , то  $\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$ .

**Доказательство.** 1. Пишем формулу Грина.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z)dz &= \int_{\partial K} f(z)dx + i \cdot f(z)dy \underset{\substack{\text{Грин} \\ \Rightarrow}}{\sim} \int_K \left( i \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= i \cdot \int_K \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Берем круг, содержащий  $a$ , не вылезающий за границу формы  $B_r(a)$ .

$\tilde{K} = K \setminus B_r(a)$  – компакт.

$\frac{f(z)}{z-a} \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ,  $\tilde{K} \subset \Omega \setminus \{a\}$ .

$$0 = \int_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz - \underbrace{\int_{r\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{z-a} dz}_{=2\pi i f(a)}$$

$\square$

**Упражнение.**  $f \in H(r\mathbb{D})$  и  $f \in C(Cl(r\mathbb{D}))$

$a \in \mathbb{D}$ .

Доказать, что  $\int_{r\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$

**Теорема 4.10.**  $f \in C(\Omega)$ . Следующие условия равносильны (равносильность всех утверждений, так или иначе, уже доказывалась ранее):

1.  $f \in H(\Omega)$
2.  $f(z)dz$  – локально точная в  $\Omega$
3. В окр-ти каждой точки  $z \in \Omega$  есть первообразная
4.  $f$  аналитична в  $\Omega$
5.  $\int f(z)dz = 0$  по любому достаточно малому прямоугольнику со сторонами параллельными осям
6.  $f(z)dz$  – замкнутая и частн. производные по  $x$  и  $y$  непрерывны.

**Теорема 4.11. Неравенство Коши.**

$f \in H(R\mathbb{D})$ ,  $0 < r < R$ .

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Тогда  $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ , где  $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

**Теорема 4.12.**  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot r = \frac{M(r)}{r^n}$$

**Теорема 4.13. Луивилля.**

Если  $f \in H(\mathbb{C})$  и  $f$  – ограничена, то  $f = const$ .

**Доказательство.**  $f$  – ограничена  $\Rightarrow |f| \leq M$ .

$$f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ и ряд сходится } \forall z \in \mathbb{C} \xrightarrow[\text{неп-во Коши}]{} |a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow a_n = 0 : \forall n \geq 1 \quad \square$$

**Замечание.**  $\sin$  и  $\cos$  неограничены в  $\mathbb{C}$ .

**Определение 4.5.** Целая функция – функция, голоморфная в  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 4.14. Основная теорема алгебры.**

$P$  – многочлен степени  $\geq 1$ . Тогда у  $P$  есть хотя бы один корень.

**Следствие.** Если  $\deg P = n$ , то  $P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$  для некоторых  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ .

**Доказательство.** Если  $z_1$  – корень  $P$ , то  $P(z) = (z - z_1) \cdot Q(z)$ , где  $\deg Q = n - 1$ .  $\square$

**Доказательство.** Основной теоремы алгебры.

От противного:

пусть  $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ . Тогда  $f(z) = \frac{1}{P(z)} \in H(\mathbb{C})$ .

Докажем, что  $f$  – ограниченная функция.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

$$R := 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|. \text{ Пусть } |z| \geq R, |P(z)| \geq |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_1||z| - |a_0| \geq |z|^n - |z|^{n-1}(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|) = \underbrace{|z|^{n-1}}_{\geq 1} \underbrace{(|z| - |a_0| - |a_1| - \dots - |a_{n-1}|)}_{\geq 1} \Rightarrow |P(z)| \geq 1$$

при  $|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \leq 1$  при  $|z| \geq R$ .

Докажем, что при  $|z| \leq R$ ,  $|f(z)|$  – ограничена.

$f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f$  непрер. в  $\mathbb{C} \Rightarrow f$  непрер. в  $\{|z| \leq R\}$  – компакт  $\Rightarrow |f|$  ограничена в  $\{|z| \leq R\}$ .

Тогда по т. Луивилля  $f(z) = const \Rightarrow P(z) = \frac{1}{const}$ , что противоречит условию, что  $P(z)$  – многочлен степени  $\geq 1$ .  $\square$

**4.2. Теоремы единственности**

**Теорема 4.15.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $\Omega$  – область,  $z_0 \in \Omega$ . След. условия равносильны:

1.  $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n = 0, 1, 2, \dots$
2.  $f = 0$  в некоторой окр-ти точки  $z_0$ .

3.  $f \equiv 0$  в  $\Omega$

**Лемма.**  $\Omega$  – область в метрическом пространстве,  $E \subset \Omega$ , т.ч.  $E \neq \emptyset$ ,  $E$  – открыто в  $\Omega$ ,  $E$  – замкнуто в  $\Omega$ . Тогда  $E = \Omega$ .

**Доказательство.** Леммы.

Пусть  $\Omega \setminus E \neq \emptyset$ , берем  $a \in E$  и  $b \in \Omega \setminus E$ . Возьмем путь  $\gamma$ , соединяющий эти точки.

$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ , т.ч.  $\gamma(\alpha) = a$ ,  $\gamma(\beta) = b$ .  $\gamma$  – непрер.  $\Rightarrow \gamma^{-1}(E)$  – открыто,  $\gamma^{-1}(\Omega \setminus E)$  – открыто  $\Rightarrow \gamma^{-1}(E)$  – открыто. и замкнут. подмн-во  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha \in \gamma^{-1}(E)$ ,  $\beta \notin \gamma^{-1}(E)$ .

$s := \sup \gamma^{-1}(E)$  из замкн.  $s \in \gamma^{-1}(E) \Rightarrow s < \beta$ .

Возьмем окр-ть  $s$ , т.ч.  $(s - \delta, s + \delta) \subset \gamma^{-1}(E) \cap (\alpha, \beta) \Rightarrow$  в  $\gamma^{-1}(E)$  есть точки  $> s \Rightarrow s$  не sup. Противоречие.  $\square$

**Доказательство.** Теоремы.

(3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) – очевидно.

(1)  $\Rightarrow$  (2) – почти очевидно:

Берем  $z_0 \in \Omega$  и  $B_r(z_0) \subset \Omega$ , тогда в круге  $|z - z_0| < r$ :  $f$  раскл. в свой ряд Тейлора  $\Rightarrow$  в нем  $f \equiv 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3):

$E := \{z \in \Omega : \text{в некоторой окр-ти точки } z, f = 0\}$

$z_0 \in E$  по условию  $\Rightarrow E \neq \emptyset$ .

$E$  – открыто. Если  $w \in E$ , то в круге  $|z - w| < r$ ,  $f = 0$ .

$\forall z$  из этого круга есть круг меньшего радиуса, содержит.  $\{|z - w| < r\}$ , в нем  $f = 0$ .

$E$  – замкнуто. Пусть  $z_*$  – предельная точка  $E$ , то есть  $z_n \in E$  и  $\lim z_n = z_*$ .  $f^{(m)}(z_n) = 0 \forall m, \forall n$  (так как есть (2)  $\Rightarrow$  (1)). По непрерывности  $f^{(m)} f^{(m)}(z_*) = \lim f^{(m)}(z_n) = 0 \xrightarrow{(1) \Rightarrow (2)} z_* \in E$ .

Тогда по лемме  $E = \Omega$ .  $\square$

**Следствие.**  $f, g \in H(\mathbb{C})$ , т.ч.  $f(z) = g(z)$  в окр-ти точки  $z_0 \in \Omega \Rightarrow f \equiv g$ .

**Теорема 4.16. О среднем.**

$f \in H(\Omega)$  и  $a \in \Omega$ , причем  $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$ , тогда  $f(a) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi$  (т.е. среднее значение на окружности радиуса  $r$  с центром в  $a$  равно  $f(a)$ ).

**Доказательство.**  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\phi})}{re^{i\phi}} re^{i\phi} id\phi$ , где  $z = a + re^{i\phi}$ ,  $dz = re^{i\phi} id\phi$ .  $\square$

**Следствие.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ ,  $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$ . Тогда  $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|\leq r} f(z) d\lambda_2$ .

**Доказательство.**  $\int_{|z-a|\leq r} f(z) d\lambda_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) \rho d\phi d\rho = \int_0^r 2\pi f(a) \rho d\rho = 2\pi f(a) \frac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a)$ .  $\square$

**Теорема 4.17. Принцип максимума.**

$f \in H(\mathbb{C})$ ,  $a \in \Omega$ . Если  $|f(a)| \geq |f(z)| \forall z$  из окр-ти точки  $a$ , то  $f \equiv const$ .

**Доказательство.** Пусть  $|f(a)| =: M$ . Домножим  $f$  на  $e^{i\alpha}$  так, что  $f(a) = M > 0$ .

$$|f(a)| = M = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = M.$$

Все нер-ва обращаются в равенства  $\implies |f(a + re^{i\phi})| = M \forall \phi \forall$  маленьких  $r$ .

$Re(f(a)) = M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f(a + re^{i\phi})) d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq M$ . Это все равенства  $\implies Re(f(a + re^{i\phi})) = |f(a + re^{i\phi})| = M \implies f(z) = M$  в окр-ти точки  $a \implies f(z) \equiv const.$   $\square$

т. о единственности

**Следствие.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $\Omega$  – огранич. область,  $f \in C(Cl(\Omega))$ . Тогда  $|f|$  достигает своего max на границе  $\Omega$ .

**Доказательство.**  $Cl(\Omega)$  – компакт,  $|f|$  непрер. на компакте  $\implies$  в какой-то точке  $a \in Cl(\Omega)$  достигает max.

Если  $a \in \Omega$ , то по принципу максимума  $f \equiv const$ , значит на границе то же самое значение.

Если  $a \notin \Omega$ , то это точка на границе.  $\square$

**Определение 4.6.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ ,  $a$  – ноль функции  $f$ , если  $f(a) = 0$ .

**Теорема 4.18.**  $f \not\equiv 0$ ,  $f \in H(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ ,  $f(a) = 0$ . Тогда существует  $m \in \mathbb{N}$  и  $g \in H(\Omega)$ , т.ч.  $g(a) \neq 0$  и  $f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$ .

**Доказательство.** Разложим  $f$  в ряд Тейлора в окр-ти точки  $a$ .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n, m := \min\{n : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m}, & z \neq a \\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!}, & z = a \end{cases}$$

$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ,  $g$  – непрерывная в точке  $a$ ,  $\implies g \in H(\Omega)$ .

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-m} \xrightarrow[z \rightarrow a]{} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

$\square$

**Следствие.** 1. Если  $f \in H(\Omega)$  и  $a \in \Omega$  – ноль функции  $f$ , то  $\exists U_a$  – кор-ть точки  $a$ , т.ч.  $f(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$  (проколотая окр-ть).

**Доказательство.**  $f(z) = (z - a)^m g(z)$ ,  $g(a) \neq 0$  из теоремы.

$g$  – непрер. в точке  $a \implies g(z) \neq 0$  в окр-ти точки  $a \implies f(z) = (z - a)^m g(z) \neq 0$  в прокол. окр-ти точки  $a$ .  $\square$

2. Если  $f, g \in H(\Omega)$  и  $fg \equiv 0$ , то либо  $f \equiv 0$ , либо  $g \equiv 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \not\equiv 0$ . Если  $f(z) \neq 0 \forall z$ , то  $g \equiv 0$ . Иначе найдется  $a \in \Omega$ , т.ч.  $f(a) = 0 \implies f(z) \neq 0, \forall z \in U_a^\circ \implies g(z) = 0 \forall z \in U_a^\circ \implies g \equiv 0$ .  $\square$

**Теорема 4.19. Единственности.**

$f, g \in H(\Omega)$  и  $z_n \in \Omega$ ,  $z_n$  – различные, т.ч.  $f(z_n) = g(z_n)$ . Если  $\lim z_n \in \Omega$ , то  $f \equiv g$ .

**Следствие.**  $f, g \in H(\Omega)$ ,  $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ . Если какая-то предельная точка мн-ва  $A$  лежит в  $\Omega$ , то  $f \equiv g$ .

**Доказательство.** Теоремы.

$h(z) = f(z) - g(z)$ . По условию  $h \in H(\Omega)$  и  $h(z_n) = 0$ .  $a := \lim z_n$ , по непрерывности  $h(a) = 0 \implies \exists U_a$ , т.ч.  $h(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$ , но  $z_n$  начиная с некоторого места лежат в  $U_a$ .  $\square$

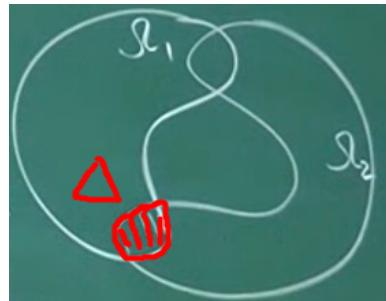
по следствию 1

**Следствие.**  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$ .

### 4.3. Аналитическое продолжение

**Определение 4.7.**  $f_1 \in H(\Omega_1), f_2 \in H(\Omega_2)$ .

$\Delta$  – компонента связности  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .



$f_2$  непосредственное аналитическое продолжение  $f_1$  через  $\Delta$ , если  $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Delta$ .

**Замечание.** 1. При фиксации  $\Omega_1, \Omega_2, \Delta, f_1$ , функция  $f_2$  определена однозначно.

**Доказательство.**  $g$  – непоср. аналитическое продолжение  $f_1$ :

$$g(z) = f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in \Delta$$

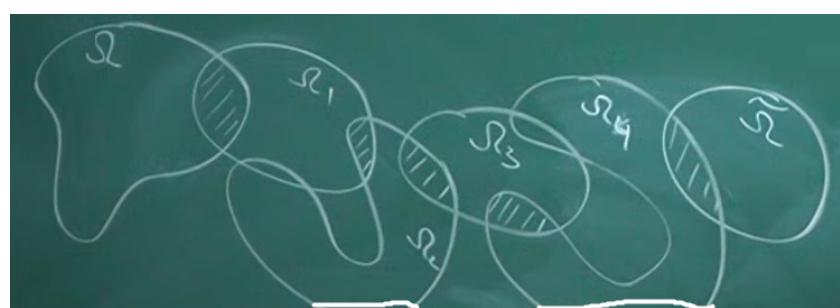
$$g, f_2 \in H(\Omega_2) \quad \xrightarrow{\text{по т. единственности}} \quad f_2 \equiv g.$$

□

2. Для другой компоненты продолжение может быть другим (тут понятнее на картинке, добавьте, плиз).

**Определение 4.8.**  $f \in H(\Omega), \tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$ .

$\tilde{f}$  – аналитическое продолжение  $f$  на цепочке областей, если  $\exists \Omega_1, \dots, \Omega_n$  и  $f_1 \in H(\Omega_1), \dots, f_n \in H(\Omega_n)$ , т.ч.  $f_1$  – непосредственное аналитическое продолжение  $f$ ,  $f_2$  – непосредственное аналитическое продолжение  $f_1, \dots, \tilde{f}$  – непосредственное аналитическое продолжение  $f_n$ .



**Замечание.** Рассмотрим всевозможные пары  $(f, \Omega)$ , т.ч.  $f \in H(\Omega)$ , тогда существование аналитического продолжения по цепочке областей – отношение эквивалентности на мн-ве таких пар.

**Определение 4.9.** Полная аналитическая функция – класс эквивалентности.

$F$  – полная аналитическая ф-я.  $M := \bigcup_{(f, \Omega) \in F} \Omega$  – область определения (существования)  $F$ .

**Утверждение 4.20.**  $M$  – область.

**Доказательство.** **Открытость:** объединения открытых – открытое.

**Линейная связность:**  $a, b \in M \implies a \in \Omega, b \in \tilde{\Omega}$ .  $(f, \Omega), (\tilde{f}, \tilde{\Omega})$  связана аналитическим продолжением по цепочке, будем переходить по соответствующим областям и дойдем из  $a$  в  $b$ .  $\square$

**Определение 4.10.**  $F$  – полная аналитическая функция,  $M$  – область определения  $F$ ,  $z \in M$ .

$$F(z) := \{f(z) : (f, \Omega) \in F \wedge z \in \Omega\}.$$

**Теорема 4.21.** Пуанкаре-Вольтерры.

$F(z)$  – не более чем счетное мн-во.

**Пример.**  $\underbrace{\frac{1}{1-z}}_{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  – ряд сх-ся при  $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$$

$\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$  – круг сходимости ряда.

$$|z - a| < |1 - a|$$

**Определение 4.11.**  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ ,  $R$  – радиус сх-ти ряда.

Берем точку  $w$  на границе круга ( $|w - z_0| = R$ ).  $w$  – правильная точка, если найдется  $U_w$  – окр-ть точки  $w$  и  $g \in H(U_w)$  являющаяся непосредственным продолжением  $f$ .

**Определение 4.12.** Особая точка – точка, не являющаяся правильной.

**Теорема 4.22.** На границе круга сх-ти лежит хотя бы одна особая точка.

**Доказательство.** От противного.

Пусть все точки правильные  $|z| = R$  – правильные.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, R – радиус сх-ти.$$

$\forall w : |w| = R$  – правильная, тогда найдется  $B_{r_w}(w)$  и  $g \in H(B_{r_w}(w))$ , т.ч.  $f = g$  на пересечении  $\{|z| < R\} \cap \{|z - w| < r_w\}$ .

То есть круги  $B_{r_w}(w)$  покрывают окр-ть  $|w| = R$ . Это компакт, выберем конечное подпокрытие.

По лемме Лебега  $\exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(w)$  целиком содержится в элементе подпокрытия.

$\{|z| < R + \epsilon\} \subset \{|z| < R\} \cup$  конечное подпокрытие.

$$h(z) := \begin{cases} f(z), & |z| < R \\ g_{w_j}(z), & |z - w_j| < r_{w_j} \end{cases} \in H(\{|z| < R + \epsilon\}).$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n – ряд Тейлора для  $g$ , он сх-ся в круге  $|z| < R + \epsilon$ .$$

Противоречие тому, что радиус сходимости был  $R$ .  $\square$

**Пример.** 1.  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  сх-ся при  $|z| \leq 1$ .

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

$$(zf'(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$  – сх-ся при  $|z| < 1$ , все точки  $|z| = 1$  – особые.

Начало 4-ого семестра.

**Теорема 4.23.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $\Omega$  – односвязная,  $f \neq 0$  в  $\Omega$ .

Тогда существует  $g \in H(\Omega)$ , т.ч.  $e^{g(z)} = f(z)$  и  $g$  – единственна с точностью до аддит. константы  $2\pi ik$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство. Существование:**

$\frac{f'}{f} \in H(\Omega) \implies$  есть первообразная  $g \in H(\Omega)$ .

Подберем константу так, что  $e^{g(z_0)} = f(z_0)$  для некоторого  $z_0 \in \Omega$ .

Покажем, что  $g$  подходит:  $h(z) := e^{-g(z)} \cdot f(z)$ .

Хотим доказать, что  $h \equiv 1$ . Знаем, что  $h(z_0) = 1$  и

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} + f(z)e^{-g(z)}(-g'(z)) = e^{-g(z)} \left( f'(z) - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \equiv 0.$$

**Единственность:**

Пусть  $e^{g(z)} = f(z) = e^{\tilde{g}(z)} \implies e^{g(z)-\tilde{g}(z)} \equiv 1 \implies \underbrace{g(z) - \tilde{g}(z)}_{\in H(\Omega) \subset C(\Omega)} = 2\pi ik_z : k_z \in \mathbb{Z} \implies g(z) - \tilde{g}(z) = 2\pi ik$

□

**Следствие.** Пусть  $0 \notin \Omega$  – односвязна, тогда существует единственный с точностью до  $+2\pi ik$  функция  $g \in H(\Omega)$ , т.ч.  $e^{g(z)} = z$ .

**Замечание.**  $g(z) = \ln|z| + i \arg z$

**Замечание.** Обозначение:

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$$

ветви логарифма

**Свойства.** 1.  $e^{\text{Ln}(z)} = z : \forall z \neq 0$

$$2. \text{Ln}(zw) = \text{Ln}(z) + \text{Ln}(w)$$

$$3. \text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z), \text{ где } \text{Arg}(z) = \{\arg z + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$$

**Замечание.** Св-во 2 для ветви может быть неверно.

Берем конкретную ветку и точку:  $0 < \arg z < 2\pi$

$$\text{Ln}(-i) = \underbrace{\ln|-i|}_{=0} + i \text{Arg}(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

$$\text{Ln}((-i)^2) = \text{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \text{Arg}(-1) = \pi i$$

$$\text{Но } \pi i \neq \frac{3\pi i}{2} + \frac{3\pi i}{2}$$

**Замечание.**  $z^p := e^{p\text{Ln}(z)}$  – полная аналит. функция.

Если  $p \in \mathbb{Z}$ , то все однозначно, т.к.  $e^{p(2\pi ik)} = 1$ .

Если  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $p = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{несократимая}}$ , то  $e^{\frac{m}{n}(2\pi ik)}$  – принимает  $n$  значений.

Если  $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ , то  $e^{p(2\pi ik)}$  – принимает счетное кол-во значений.

**Упражнение.** 1. Найти  $i^i$

$$2. \text{Д-ть, что } (z^p)' = \frac{pz^p}{z} \text{ при } z \neq 0$$

$$3. (zw)^p = z^p w^p \text{ как полные аналитичные функции, но это неверно для ветвей.}$$

## 4.4. Ряды Лорана

**Определение 4.13.**  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  – ряд Лорана.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  – правильная часть.

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  – главная часть.

Ряд Лорана сходится  $\Leftrightarrow$  правильная и главная части сходятся.

Ниже будем считать, что  $z_0 = 0$  для простоты записи.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  – сх-ся в круге сх-ти  $|z| < R$  – радиус сх-ти  $[0, +\infty]$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ , где  $w = \frac{1}{z}$  – сх-ся в круге сх-ти  $|w| < \tilde{R} \implies |z| > \frac{1}{\tilde{R}} =: r$ .

То есть ряд Лорана сх-ся в кольце  $r < |z| < R$  – кольцо сх-ти ряда Лорана.

**Свойства.** 1. Ряд Лорана абс. сх-ся в кольце  $r < |z| < R$ , где  $r, R \in [0, +\infty]$

2. В кольце, лежащем строго внутри кольца сх-ти, ряда Лорана сх-ся равномерно.

3. В кольце сх-ти ряд Лорана можно почленно дифференцировать.

4. Ряд Лорана в кольце сх-ти – голоморфная функция.

**Теорема 4.24. О единственности ряда Лорана.**

Пусть  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  в кольце  $r < |z| < R$ .

Тогда  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ , где  $r < \rho < R$ .

**Доказательство.**  $\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{|z|=\rho} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k}{z^{n+1}} dz =$

$= \int_{|z|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z|=\rho} z^{k-n-1} dz = 2\pi i a_n$  – т.к. при  $|z| = \rho$  ряд равномерно сходится, то можно интегрировать по-членно.

$$\int_{|z|=\rho} z^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it} dt = \rho^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{при } m = -1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
□

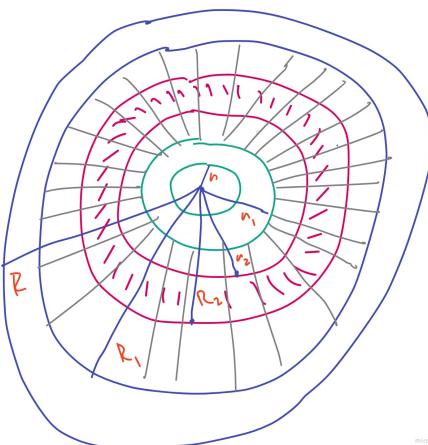
**Замечание.** Нер-во Коши тут тоже выполняется:

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}, \text{ где } M_\rho = \max_{|z|=\rho} \{|f(z)|\}.$$

**Теорема 4.25. О существовании ряда Лорана.**

Пусть  $f \in H(r < |z| < R)$ . Тогда  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ , для некоторых  $a_n \in \mathbb{C}$ .

**Доказательство.**  $r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$ .



Берем  $r_2 < |z| < R_2$ : пишем для него и компакта  $K = \{r_1 \leq |\zeta| \leq R_1\}$  интегральную теорему Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

1. Пускай  $|\zeta| = R_1$ ,  $|z| < R_2$ ,  $|\frac{z}{\zeta}| < \frac{R_2}{R_1} < 1$ .

Распишем:  $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$

Считаем первое слагаемое:

$$\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=R_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=:a_n} - \text{можем менять интеграл и}$$

сумму местами, из-за того, что ряд равномерно сходящийся.

2. Теперь пускай  $|\zeta| = r_1$ ,  $|z| > r_2$ ,  $|\frac{\zeta}{z}| < \frac{r_1}{r_2} < 1$ .

Распишем:  $\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$ .

Считаем второе слагаемое (переходы по аналогии):

$$-\int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=r_1} \frac{1}{z^{n+1}} f(\zeta) \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \underbrace{\int_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \zeta^n d\zeta}_{=:a_{n-1}}$$

Складывая воедино как раз и получим ряд Лорана для  $f(z)$ . □

**Теорема 4.26.** Пусть  $f \in H(r < |z| < R)$ . Тогда существует  $g \in H(|z| < R)$  и  $h \in H(|z| > r)$ , т.ч.  $f(z) = g(z) + h(z)$ . А если добавить условие:  $h \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$ , то такое представление единственное.

**Доказательство. Существование:**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  – главная часть (сх-ся в  $\{|z| < R\}$ ),  $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$  – правильная часть (сх-ся в  $\{|z| > r\}$ ).

**Единственность:**

Пусть  $f(z) = g(z) + h(z)$ ,  $f(z) = g_1(z) + h_1(z) \implies g(z) - g_1(z) = h_1(z) - h(z)$  при  $r < |z| < R$ .

$$F(z) := \begin{cases} g(z) - g_1(z), & \text{при } |z| < R \\ h_1(z) - h(z), & \text{при } |z| > r \end{cases} \in H(\mathbb{C})$$

Поймем, что  $F$  ограничена:  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 \implies$

$$|F(z)| \leq 1 \text{ при } |z| \geq \rho$$

$|F(z)|$  – ограничено при  $|z| \leq \rho$ , так как  $F(z)$  непрерывная на компакте.

Получили, что  $F(z)$  голоморфна на  $\mathbb{C}$  и ограничена  $\implies$  теорема Луивилля  $F(z) \equiv const$ .

А так как  $F(z) \rightarrow_{z \rightarrow +\infty} 0$ , то  $F(z) = 0 \implies g_1 = g_2$  и  $h_1 = h_2$ . □

**Определение 4.14.**  $a \in \mathbb{C}$ . Если  $f$  голоморфна в проколотой окрестности точки  $a$ , но не голоморфна в  $a$ , то  $a$  – изолированная особая точка.

$$f \in H(0 < |z - a| < r)$$

**Определение 4.15.** Если существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ , то  $a$  – устранимая особая точка.

Если  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ , то  $a$  – полюс.

Если  $\lim_{z \rightarrow a}$  не существует, то  $a$  существенно особая точка.

**Пример.** 1.  $\frac{\sin z}{z}, \frac{e^z - 1}{z}$ .  $z = 0$  - устранимая особая точка. Из Тейлора.

2.  $\frac{1}{z}, \frac{1}{\sin z}$ .  $z = 0$  - полюс.

3.  $e^{\frac{1}{z}}$ .  $z = 0$  - существенно особая точка. Предела нет, т.к.  $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n$ ,  $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n + \pi$ . Разные последовательности точек.

#### Теорема 4.27. Характеристика устранимой особой точки

$f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1.  $a$  - устранимая особая точка
2.  $f$  ограничена в некоторой проколотой окрестности  $a$
3.  $\exists g \in H(|z - a| < r)$ , такая, что  $f(z) = g(z) \forall z \neq a$
4. В главной части ряда Лорана в точке  $a$  все коэффициенты 0

**Доказательство.** 1.  $4 \Rightarrow 3$  - очевидно

2.  $3 \Rightarrow 1$  - очевидно.  $g$  непрерывна, предел  $g(a)$

3.  $1 \Rightarrow 2$  - очевидно

4. Докажем  $2 \Rightarrow 4$ .

Пусть ограничена  $\forall 0 < |z - a| < r: f(z) \leq M$

Запишем ряд Лорана:  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n$ .

Теперь воспользуемся нер-вом Коши для ряда Лорана:  $|c_n| \leq \frac{\max |f(z)|}{\rho^n}$  при  $|z - a| = \rho$ .

$c_{-n} \leq \rho^n \max f(z) \leq M \rho^n$  и устремим  $\rho$  к 0.

Получаем, что  $M \rho^n \rightarrow 0$ , а тогда и  $c_{-n} \rightarrow 0$ .

□

#### Теорема 4.28. Характеристика полюса

Пусть  $f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1.  $a$  – полюс
2. Существует  $g \in H(|z - a| < r)$ ,  $g(a) \neq 0$ , такая, что  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$
3. В главной части ряда Лорана в точке  $a$  лишь конечное число ненулевых коэффициентов. Но они есть.

**Доказательство.** 1.  $2 \Rightarrow 3$ :

$g(z)$  – голоморфна, тогда раскладывается по Тейлору:

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ ,  $g(a) = c_0 \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^{n-m}$  – разложение в ряд Лорана, где  $c^{-m} \neq 0$ .

2.  $3 \Rightarrow 1$ :

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

Все слагаемые  $o((z-a)^{-m})$ , тогда перепишем  $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n \frac{(z-a)^{n+m}}{(z-a)^m}$  и становится видно, что при  $z \rightarrow a$  каждая дробь стремится к  $\infty$ .

3.  $1 \Rightarrow 2$ :

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

Значит, в некоторой проколотой окрестности  $0 < |z-a| < \varepsilon$ :  $|f(z)| > 1$ .

Рассмотрим  $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in H(0 < |z-a| < \varepsilon)$ :

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0.$$

Доопределим  $g(a) = 0$  и получим  $g \in H(|z-a| < \varepsilon)$ .

$a$  – ноль функции  $g$ , тогда по теореме о нулях голоморфной функции  $g(z) = (z-a)^m h(z)$ , где  $h(a) \neq 0$  и  $h \in H(|z-a| < \varepsilon)$

$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z-a)^m h(z)$ , тогда  $f(z) = (z-a)^{-m} \frac{1}{h(z)}$  и  $\frac{1}{h(z)} \in H(|z-a| < \varepsilon)$ , потому что  $h$  не обращается в 0.

□

**Определение 4.16.** Это  $m$  называется порядком полюса.

**Замечание.** Это аналог кратности нуля

**Замечание.**  $f$  имеет в  $a$  полюс порядка  $m \iff \frac{1}{f}$  имеет в точке  $a$  ноль кратности  $m$  (доопределяем  $\frac{1}{f}$  в  $a$  пл непрерывности)

А также  $\iff f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ , где  $c_m \neq 0$

**Теорема 4.29. Характеристика существенной особой точки**

$$f \in H(0 < |z-a| < r)$$

Следующие условия равносильны

1.  $a$  - существенно особая точка

2. В главной части ряда Лорана в точке  $a$  бесконечное число ненулевых коэффиц.

**Доказательство.** Доказательство очевидно следует из предыдущего.

□

**Определение 4.17.**  $f$  - мероморфная в  $\Omega$ , если  $f \in H(\Omega \setminus E)$  и в точках из  $E$  у неё полюсы

**Пример.**  $f = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}$  - мероморфная в  $\mathbb{C} \setminus 0$

Полюсы в точках  $z = \frac{1}{\pi k}$ .

Но при этом  $\operatorname{ctg} \frac{1}{z}$  не будет мероморфной в  $\mathbb{C}$ . В точке  $z=0$  проблема. В любой окрестности 0, найдётся плохая точка, а значит она не изолированная особая.

**Замечание.** 1.  $E$  не имеет предельных точек в  $\Omega$ .

2.  $E$  не более чем счётно.

**Свойства.** Пусть  $f$  и  $g$  мероморфные в  $\Omega$ . Тогда:

1.  $f \pm g, \frac{f}{g}, fg, f'$  - мероморфны в  $\Omega$ .

**Доказательство.** Если подставляем точки, которые не полюсы и не нули, то голоморфность сохранится.

Тогда пускай:

$$f(z) = \varphi(z)(z - a)^n, \text{ } a \text{ -- полюс или } 0.$$

$$g(z) = \psi(z)(z - a)^m, \text{ } a \text{ -- полюс или } 0.$$

(a)  $f g$  и  $\frac{f}{g}$ :

$$\text{Тогда } f(z)g(z) = (z - a)^{n+m} \underbrace{\varphi(z)\psi(z)}_{=(*)}.$$

$(*)$  – в окр-ти точки  $a$  голоморфна и в самой точке в ноль не обращается.

Для отношения по аналогии.

(b)  $f \pm g$ :

Складываем ряды Лорана в точке  $a$ , в главной части  $f \pm g$  конечное число ненулевых коэффициентов.

(c)  $f'$ :

$$f'(z) = (z - a)^n \varphi'(z) + n(z - a)^{n-1} \varphi(z) = (z - a)^{n-1} \cdot \underbrace{((z - a)\varphi'(z) + n\varphi(z))}_{=(*)}$$

$(*)$  – в окр-ти точки  $a$  голоморфна и в самой точке в ноль не обращается.

□

2. Порядки полюсов у  $f'$  на 1 больше, чем у  $f$

**Утверждение 4.30.** Если  $f$  мероморфна в  $\mathbb{C}$ , то существует  $g, h \in H(\mathbb{C})$ , т.ч.  $f = \frac{g}{h}$

### Теорема 4.31. Сохоцкого

Пусть  $a$  – существенно особая точка функции  $f$ . Тогда  $Cl(f(0 < |z - a| < \varepsilon)) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Более того,  $\forall b \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  найдётся такая последовательность  $z_n \rightarrow a$ , т.ч.  $f(z_n) \rightarrow b$

**Доказательство.** 1. Случай  $b = \infty$ .  $f$  не ограничена в  $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$ . Иначе  $a$  была бы устранимой особой точкой. Значит найдётся  $z_n$ , такое что  $0 < |z_n - a| < \frac{1}{n}$  и  $|f(z_n)| \geq n$ .  $z_n \rightarrow a$  и  $f(z_n) \rightarrow \infty$

2.  $b \in \mathbb{C}$ . Если найдётся последовательность  $z_n \rightarrow a$ , т.ч.  $f(z_n) = b$ , то всё ясно. Если не найдётся, то в некоторой проколотой окретности  $0 < |z - a| < \varepsilon$   $f(z) \neq b$ . Тогда рассмотрим  $g(z) = \frac{1}{f(z) - b} \in H(0 < |z - a| < \varepsilon)$ .  $a$  – изолированная особая точка для  $g$ .

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$$

Если  $a$  – полюс у  $g$ , то  $a$  – устранимая особая точка  $f$  – не подходит

Если  $a$  – устранимая особая точка  $g$ , то  $a$  – устранимая особая точка  $f$  или полюс – не подходит

Значит  $a$  – существенно особая точка  $g$ . Воспользуемся уже доказанным случаем для  $g$ . Найдётся  $z_n \rightarrow a$ , такая, что  $g(z_n) \rightarrow \infty$ . А тогда  $\lim f(z_n) = b$ .

□

### Теорема 4.32. Пикара

Пусть  $a$  – существенно особая точка  $f$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $f(0 < |z - a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{C}$  без одной точки.

**Пример.**  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  не обращается в ноль, хотя  $z = 0$  - существенно особая точка.

**Определение 4.18.** Бесконечные пределы.  $\lim z_n = \infty \iff \lim |z_n| = +\infty$

### Свойства.

Если  $\lim z_n = \infty$ ,  $w_n$  ограничена. Тогда  $\lim(z_n \pm w_n) = \infty$

$$\lim z_n = 0 \iff \lim \frac{1}{z_n} = \infty$$

Если  $\lim z_n = \infty$  и  $|w_n| \geq c > 0$ , то  $\lim z_n w_n = \infty$

Доказательства очевидны + с первого курса

**Определение 4.19.**  $f \in H(|z| > R)$ .  $f$  голоморфна в  $\infty$ , если там устранимая особая точка. То есть  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$

**Замечание.**  $g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$  - перешли от бесконечности к нулю.

**Замечание.**  $f \in H(|z| > R), g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$

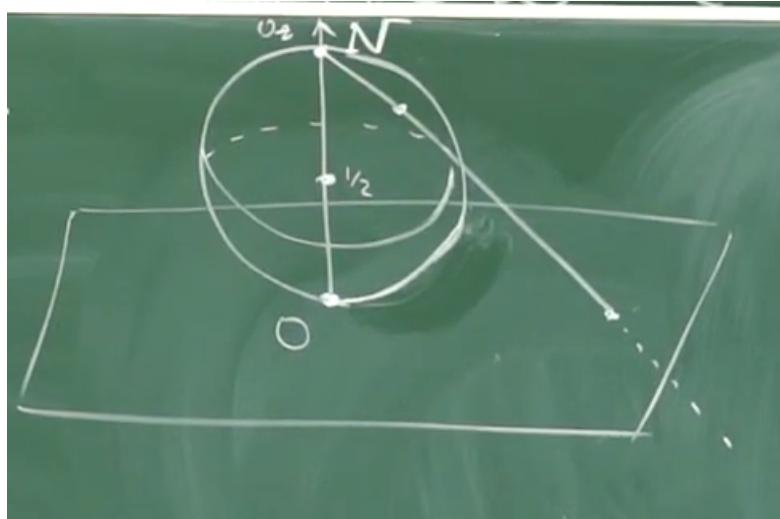
1.  $\infty$  - устранимая особая точка  $f \iff 0$  - устранимая особая точка  $g$
  2.  $\infty$  - полюс  $f \iff 0$  - полюс  $g$
  3.  $\infty$  - существенно особая точка  $f \iff 0$  - существенно особая точка  $g$
- $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{z^n}$$
4.  $\infty$  - устранимая особая точка  $f \iff$  коэфф. при положительных степенях 0
  5.  $\infty$  - полюс  $f \iff$  при положительных степенях лишь конечное число ненулевых коэффициентов.
  6.  $\infty$  - существенно особая точка  $f \iff$  при положительных степенях беск. число ненулевых коэффиц.

### Теорема 4.33. Лиувилля

Если  $f \in H(\bar{\mathbb{C}})$ , то  $f \equiv \text{const}$

**Доказательство.**  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$ , значит при больших ограничена.  $|f(z)| \leq M$  для  $|z| > R$ . С другой стороны  $f \in C(|z| \leq R)$ . Значит  $|f(z)| \leq \bar{M}$ . По теореме Лиувилля(старой),  $f \equiv \text{const}$   $\square$

**Определение 4.20.** Стереографическая проекция



$z = x + iy$  - плоскость.  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ .

$$u^2 + v^2 + (w - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$$

Или же  $u^2 + v^2 + w^2 = w$  - уравнение сферы Римана.

**Теорема 4.34. Связь между точкой на плоскости и точной на сфере**

Точке  $z$  соответствует точка с координатами  $(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2})$

**Замечание.** Точке  $(u, v, w)$  соответствует точка  $z = x + iy = \frac{u}{1-w} + i \frac{v}{1-w}$

**Доказательство.** Прямая через точки  $(0, 0, 1)$  и  $(x, y, 0)$ . Параметризация луча:  $(xt, yt, 1-t)$ . Нас интересует точка, в которой луч пересекает сферу, то есть:

$$(xt)^2 + (yt)^2 + (1-t)^2 = 1 - t.$$

$$(x^2 + y^2 + 1)t^2 + 1 - 2t = 1 - t \Leftrightarrow t = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{|z|^2 + 1} \quad \square$$

**Следствие.** 1. Расстояние между образами  $z$  и  $\tilde{z}$  равно  $\rho = \frac{|z - \tilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2} \cdot \sqrt{1+|\tilde{z}|^2}}$ , а расстояние между  $z$  и  $\infty$  равно  $\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$

**Доказательство:** предложено посчитать самому, у кого есть силы добавьте, плиз.

2. Сходимость на плоскости и сходимость на сфере Римана совпадают

**Доказательство:**  $z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow \frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$

$$z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$$

$$\text{Пусть } \frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$$

Тогда  $\frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$ . Если  $z_n$  ограничена, то  $|z_n - z_0| \rightarrow 0$

Если не ограничена, то возьмём  $|z_{n_k}| \rightarrow \infty$ , тогда  $\frac{|z_{n_k} - z_0|}{\sqrt{1+|z_{n_k}|^2}} \rightarrow 1$

3.  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  - компакт.

## 4.5. Вычеты

**Определение 4.21.**  $a$  - изолированная особая точка.  $f \in H(0 < |z-a| < R)$ .  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  - сходится при  $0 < |z-a| < R$ .

$$\operatorname{res}_{z=a} f = c_{-1}$$

**Определение 4.22.**  $f \in H(|z| > R)$  раскладывается в  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$$

**Свойства.** 1.  $f \in H(0 < |z-a| < R)$  и  $0 < r < R$ .

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$  - положительный обход точки  $a$ .

**Доказательство:** смотреть формулу для коэффициентов ряда Лорана.

2.  $f \in H(|z| > R), r > R$ .

Тогда  $\operatorname{res}_{z=\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz$  - положительный обход для  $\infty$

3. Если  $a \in \mathbb{C}$  - полюс  $n$ -го порядка.

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z))$

**Доказательство:** Считаем, что  $a = 0$ .

$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k z^k \Rightarrow g(z) = z^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n} z^k$  - формула Тейлора.

Тогда  $c_{-1} = \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$ .

4. Если  $a \in \mathbb{C}$  - полюс первого порядка.

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$

5. Если  $a \in \mathbb{C}$ ,  $g$  и  $h$  голоморфны в окрестности точки  $a$ .  $h(a) = 0, h'(a) \neq 0, g(a) \neq 0$ .  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

**Доказательство:**  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{h(z)-h(a)} g(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

6. Если  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$ .

Тогда  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(A - f(z))$

**Доказательство:**  $f(z) = A + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_n z^n$ , правильная часть - константа, иначе всё бы попало на бесконечность.

7.  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}$

**Доказательство:**  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n-2}$$

### Теорема 4.35. Коши о вычетах

$f$  голоморфна в  $\Omega$ , за исключением точек  $a_1, \dots, a_n$ .  $K \subset \Omega$  - компакт и  $a_1, \dots, a_n \in \operatorname{Int} K$

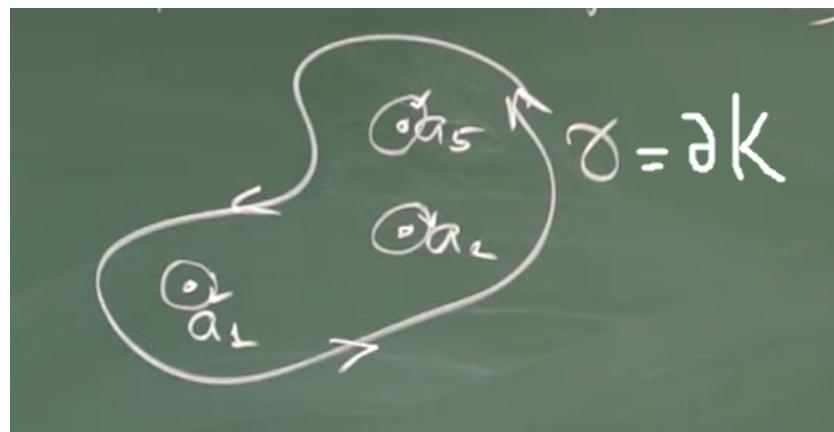
Тогда  $\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$

**Доказательство.** У каждой точки можем взять окрестность, чтобы они лежали внутри компакта и попарно не пересекаются.  $\tilde{K} = K \setminus \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(a_k)$  - компакт.

А ещё  $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$

Из интегральной формулы Коши:  $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = 0$

Но  $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-a_k|=\varepsilon} f(z) dz$ , а под знаком суммы - вычеты.



□

**Следствие.** Если  $f$  голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \{a_1 \dots a_n\}$ , то  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = 0$

**Доказательство:** возьмём круг  $B_R(0)$ , внутри которого содержатся все эти точки.

$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f(z).$$

Но также  $\int_{|z|=R} f(z) dz = \int_{|z|=R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$ . Перекидываем и доказываем.

**Пример.** 1.  $\int_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=\pi i} + \operatorname{res}_{z=-\pi i}) = -4\pi^5 i$ .

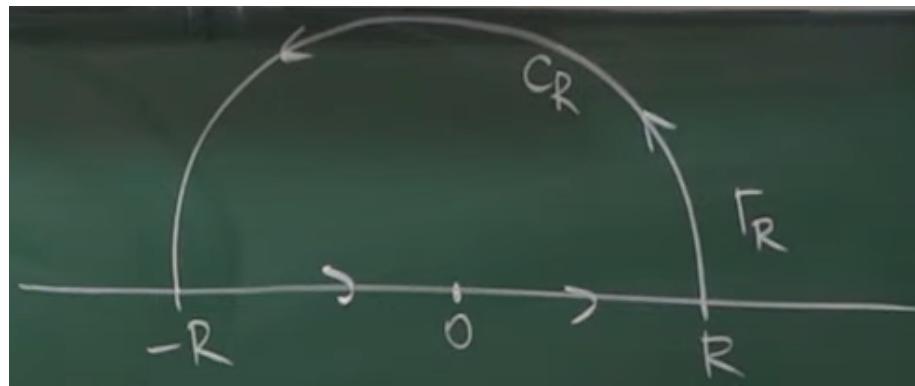
Особые точки:  $e^z = -1$  при  $z = \pi i + 2\pi i k$ .

$$\text{Пусть } g(z) = z^4, h(z) = e^z + 1 \implies f = \frac{g}{h}.$$

$$\pi i - \text{полюс первого порядка: } \operatorname{res}_{z=\pi i} f = \frac{g(\pi i)}{h'(\pi i)} = -\pi^4$$

$$-\pi i - \text{полюс первого порядка: } \operatorname{res}_{z=-\pi i} f = \frac{g(-\pi i)}{h'(-\pi i)} = -\pi^4$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$



Контур - полукруг.  $I := \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i \sum \operatorname{res}$

$$\text{Но с другой стороны } \int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^R + \int_{c_R}$$

$$\left| \int_{c_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} \right| \leq \underbrace{\pi R}_{\text{длина кривой}} \cdot \underbrace{\max \left| \frac{1}{1+z^{2n}} \right|}_{\text{макс. подынтегрального выражения}} = \pi R \frac{1}{\min |1+z^{2n}|} \leq \underbrace{\frac{\pi R}{R^{2n}-1}}_{|a+b| \geq |a|-|b|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$$

Значит то, что мы хотим найти - просто сумма вычетов.

Какие особые точки?

$z^{2n} = -1 \implies z = e^{\frac{\pi i k}{2n}}$  и  $k$  нечётно.

Нас интересует  $k = 1, 3 \dots 2n - 1$

Тогда  $I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{2k-1}$

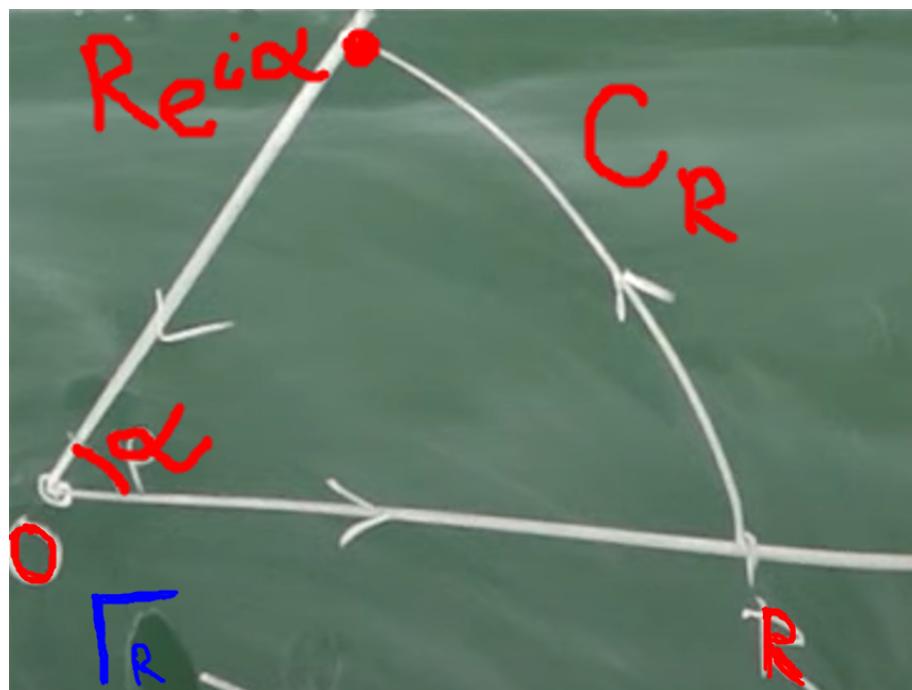
Все  $a_k$  – полюсы первого порядка:

(\*): так как все  $a_k$  – корни уравнения  $z^{2n} = -1$ , то  $a_k^{2n} = -1$ .

$$\operatorname{res}_{a_k} f = \frac{1}{(z^{2n}+1)'} \Big|_{z=a_k} = \frac{1}{2n \cdot a_k^{2n-1}} = \frac{a_k}{2n \cdot a_k^{2n}} \underset{(*)}{=} -\frac{a_k}{2n}.$$

3. Оптимизация решения из предыдущего пункта: мы хотим считать не по всей дуге, а по какой-то ее части (до такого угла  $\alpha$ , что интеграл  $\int_{R \cdot e^{i\alpha}}$  был бы равен исходному интегралу, домноженному на какую-то константу).

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = I$  - т.к. функция  $f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$  четная.



$$f(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}.$$

$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{C_R} + \int_0^R + \int_{R \cdot e^{i\alpha}}$  - интеграл по контуру разбили на кусочки.

$$\int_{R \cdot e^{i\alpha}}^0 f(z) dz = - \int_0^{R \cdot e^{i\alpha}} \underset{z=e^{i\alpha} \cdot t, t \in [0, R]}{=} - \int_0^R f(e^{i\alpha} t) e^{i\alpha} dt - \text{взяли параметризацию } z \rightarrow e^{i\alpha} t.$$

$$f(e^{i\alpha} t) = \frac{1}{1+e^{2n \cdot i \cdot \alpha} \cdot t^{2n}} \underset{\text{Хотим: } e^{2n \cdot i \cdot \alpha} = 1}{=} \frac{1}{1+t^{2n}}, \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Единственная особая точка  $e^{\frac{i\pi}{2n}}$  (т.к. особые точки имеют вид  $e^{\frac{\pi i k}{2n}}$ , и мы хотим, чтобы точка лежала **строго внутри контура**:  $0 < \frac{\pi k}{2n} < \alpha \Rightarrow 0 < \frac{\pi k}{2n} < \frac{\pi}{n} \Rightarrow k = 1$ ).

Тогда, так как особая точка для контура  $\Gamma_R$  всего одна, то интеграл  $\int_{\Gamma_R}$  равен:  $2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} \dots$

Получаем равенство (при этом  $\int_{C_R} \rightarrow 0$ , т.к. он еще меньше того, что мы считали выше, поэтому про  $\int_{C_R}$  можно забыть):  $2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} = \int_{\Gamma_R} = I - e^{i\frac{\pi}{n}} \cdot I + \int_{C_R} \Rightarrow$

$\Rightarrow I - e^{i\frac{\pi}{n}}I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} f = 2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}}}{2n}\right)$  - вычет именно такой, так как наша точка является полюсом 1-ого порядка, следовательно применимо свойство вычета  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \Rightarrow \operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}$ .

$$\text{Тогда } I = -\frac{2ie^{\frac{i\pi}{2n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{2n}}} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2i \cdot e^{\frac{2\pi}{2n}}}{e^{\frac{i\pi}{2n}} \cdot (e^{\frac{i\pi}{2n}} - e^{-\frac{i\pi}{2n}})} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}} \text{ - т.к. } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

### Лемма. Жордана

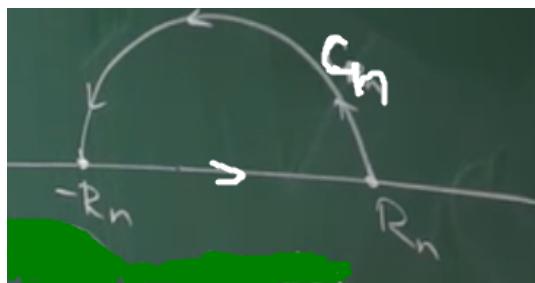
$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n, \operatorname{Im} z \geq 0\}, R_n \rightarrow +\infty$$

$$g : \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$M_n = \sup_{z \in C_n} |g(z)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Тогда } \forall \lambda > 0 : \int_{C_n} g(z) e^{i\lambda z} dz \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

**Доказательство.** Пусть  $f(z) = g(z)e^{i\lambda z}$ .



Введем параметризацию:  $z = R_n e^{it}$ ,  $dz = R_n e^{it} dt$ , где  $t \in [0, \pi]$ , тогда получим

$$\int_{C_n} f(z) dz = i \int_0^\pi R_n e^{it} \cdot f(R_n e^{it}) dt$$

Оценим этот интеграл по модулю:

$$\left| i \int_0^\pi R_n e^{it} f(R_n e^{it}) dt \right| \leq R_n \int_0^\pi \underbrace{|g(R_n e^{it})|}_{\leq M_n} \cdot \left| e^{i\lambda R_n e^{it}} \right| dt \leq M_n R_n \int_0^\pi \left| e^{i\lambda R_n e^{it}} \right| dt = (*)$$

Поймем, что такое  $|e^{i\lambda R_n e^{it}}|$ :

$$\operatorname{Re}(i\lambda R_n e^{it}) = \lambda R_n \operatorname{Re}(ie^{it}) = \lambda R_n (-\sin t)$$

Тогда можем продолжить оценивать исходный интеграл, но предварительно заметим, что под интегралом записана выражение симметричное относительно  $\frac{\pi}{2}$ , тогда переписываем так:

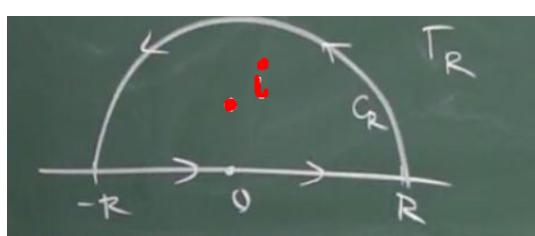
$$(*) = 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \sin t} dt \stackrel{(**)}{\leq} 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \frac{2}{\pi} t} dt = 2M_n R_n \frac{1 - e^{-\lambda R_n}}{\lambda R_n \frac{2}{\pi}} \leq \frac{\pi M_n}{\lambda} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

(\*\*): верно, так как при  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ :  $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ . □

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = I$ .

Можем считать на всей прямой и не исходный интеграл, а  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = I^*$ .

Тогда  $\operatorname{Re} I^* = 2I$ .



Пусть  $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ .

Контур - полуокружность от  $-R$  до  $R$ .

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R + \int_{C_R}.$$

Здесь  $\int_{C_R} \rightarrow 0$  по лемме Жордана, где  $\lambda = 1$  и  $M_R = \sup_{|z|=R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \rightarrow 0$

(написанное выше верно, так как  $|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$ )

Тогда  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=i} f = (*)$ .

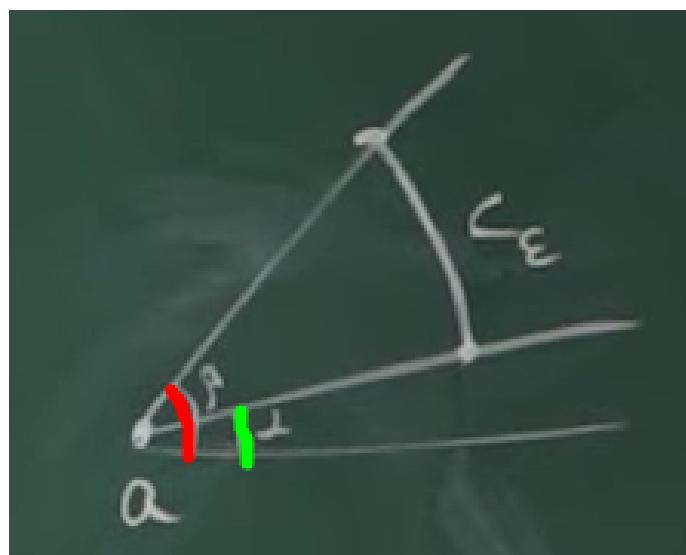
$i$  - полюс 1-ого порядка, тогда  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , где  $g(i) \neq 0, h(i) = 0, h'(i) \neq 0$ :

$$\operatorname{res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Тогда  $(*) = \frac{\pi}{e} \implies I = \frac{\pi}{2e}$

### Лемма. О полувычете

$f \in H(0 < |z - a| < R)$  и  $a$  - полюс первого порядка.  $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \varepsilon, \alpha \leq \arg(z) \leq b\}$



Тогда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = (\beta - \alpha)i \cdot \operatorname{res}_{z=a} f$

**Доказательство.** Считаем, что  $a = 0$ .

У нас полюс 1-го порядка, тогда  $f(z) = \frac{c}{z} + g(z)$ , где  $g \in H(|z| < R)$ .

Параметризация  $z = \varepsilon e^{it}$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ . Тогда  $dz = \varepsilon e^{it} i dt$ .

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{c}{z} dz + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{c}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon e^{it} i dt + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = (\beta - \alpha) \cdot i \cdot c + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz$$

Оценим второй интеграл:

$g$  - голоморфна, тогда ограничена в окр. точки  $\implies |g| \leq M$ .

$$\left| \int_{C_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq M \underbrace{\varepsilon(\beta - \alpha)}_{\text{длина дуги}}, \text{ где } M = \max_{|z| \leq \frac{R}{2}} |g(z)|. \text{ и тогда } \int_{C_\varepsilon} g(z) dz \rightarrow 0. \quad \square$$

**Определение 4.23. Главное значение интеграла (v.p.  $\int$ ).**

$\int_a^b f(x) dx$ , где  $c$  - единственная особая (в этой точке нет непрерывности функции) точка,  $c \in (a, b)$ .

$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$  и устремляем  $\varepsilon$  к нулю. Предел - главное значение интеграла.

**Пример.**  $v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$ .

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 = 0$ , потому что функция нечетная.

$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$

**Свойства.** 1. Если  $\int$  сходится, то  $\int = v.p. \int$

2. Линейность

3. Аддитивность, если резать не по особым точкам

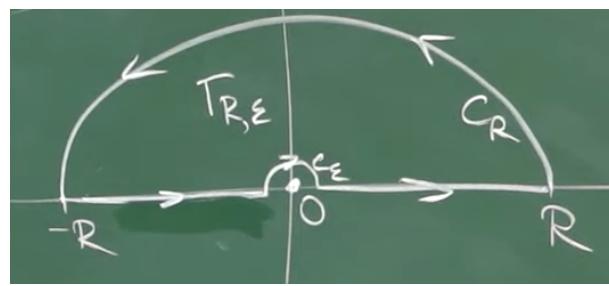
**Пример.**  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Функция четная, поэтому  $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$(\frac{e^{ix}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{ix}{x} + \dots)$ .

Тогда  $2I = \operatorname{Im} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R$ .



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0$ , так как особая точка только 0, а она не в контуре.

Но с другой стороны:  $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon}$

$$1. \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \rightarrow v.p. \int_{-R}^R$$

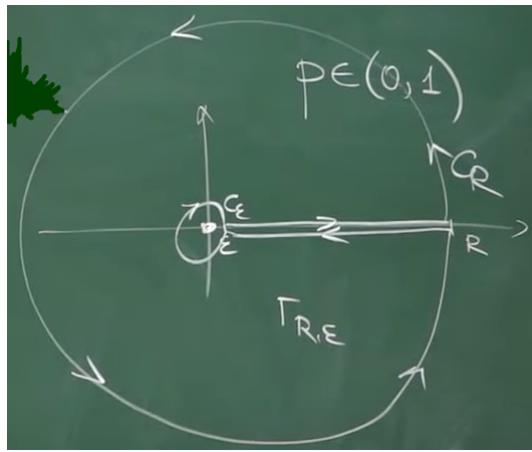
$$2. \int_{C_R} \rightarrow 0 - \text{по лемме Жордана.}$$

$$3. \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \rightarrow -\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} f = (-\pi i) - \text{лемма о полувычете, где } \alpha = \pi, \beta = 0, 0 - \text{полюс 1-го порядка.}$$

А значит  $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$ .

$$\text{Тогда } I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \frac{\pi}{2}$$

**Пример.**  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$ , где  $0 < p < 1$ .



$f(z) = \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z}$ , и пусть  $Ln(1) = 0$ .

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-\varepsilon}^R + \int_{R e^{2\pi i}} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R}.$$

Но с другой стороны  $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f = e^{(p-1)Ln(-1)} = e^{(p-1)\pi i} = -e^{p\pi i}$$

$$1. \int_{-\varepsilon}^R \rightarrow I$$

$$2. \int_{R e^{2\pi i}} = \int_R^\varepsilon \frac{e^{(p-1)\cdot(ln(x)+2\pi i)}}{1+x} dx = e^{2\pi i \cdot (p-1)} \cdot (-1) \cdot \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \rightarrow -e^{(p-1)2\pi i} \cdot I = -e^{2\pi pi} \cdot I$$

$$3. \left| \int_{C_R} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leqslant 2\pi R \cdot \max_{|z|=R} \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = 2\pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{\min |1+z|} = 2\pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{R-1} \rightarrow 0$$

$$4. \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leqslant 2\pi \varepsilon \cdot \max_{|z|=\varepsilon} \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = 2\pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{\min |1+z|} = 2\pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{1-\varepsilon} \rightarrow 0$$

Тогда получаем, что  $I - e^{2\pi pi} \cdot I = -2\pi i e^{\pi pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi i e^{\pi pi}}{e^{2\pi pi} - 1} = \pi \cdot \frac{2i}{e^{\pi pi} - e^{-\pi pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

**Теорема 4.36.** Пусть  $f$  - мероморфная функция в  $\mathbb{C}$ .  $z_1, \dots, z_n$  - полюсы.  $G_1, \dots, G_n$  - главные части рядов Лорана в точках  $z_1, \dots, z_n$ .  $\infty$  - полюс или устранимая особая точка.  $G$  - правильная часть ряда Лорана в  $\infty$

Тогда  $f(z) = G(z) + \sum_{k=1}^n G_k(z) + C$ , в частности,  $f$  - рациональная функция.

**Доказательство.**  $g(z) = f(z) - G(z) - \sum_{k=1}^n G_k(z)$ . У этой функции  $z_1, \dots, z_n, \infty$  - устранимые особые точки, а во всех остальных точках есть голоморфность.

Тогда по теореме Луивилля  $g \equiv const$ . □

**Теорема 4.37.** Пусть  $f$  мероморфная функция в  $\mathbb{C}$ ,  $z_1, z_2, \dots$  - полюсы,  $R_1, R_2, \dots$  - последовательность радиусов, т.ч.  $R_n$  возрастают и  $R_n \rightarrow +\infty$ ,  $M_{R_n} = \max_{|z|=R_n} |f(z)| \rightarrow 0$ .

Тогда  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |z_k| < R_n} G_k(z)$ .

**Доказательство.**  $I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_n} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=:g(\zeta)} d\zeta = \sum \operatorname{res} g = \operatorname{res}_{\zeta=z} g(\zeta) + \sum_{k: |z_k| < R_n} \operatorname{res}_{\zeta=z_k} g$

1.  $\text{res}_{\zeta=z} g = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)'}|_{\zeta=z} = f(z)$  – формула для полюса 1-ого порядка.

2.  $\text{res}_{\zeta=z_k} g = \underbrace{\text{res}_{\zeta=z_k} \frac{f(\zeta) - G_k(\zeta)}{\zeta - z}} + \text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$   
голоморфна в окр.  $z_k$ , т.е. равна 0

Рассмотрим окр. радиуса  $R$  и запишем интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{res}_{\zeta=z} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} + \text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$  – так как все особые точки для подынтегрального выражения это  $z$  и  $z_k$ .

$\text{res}_{\zeta=z} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = G_k(z)$  (по формуле для полюса 1-ого порядка), а второе слагаемое равно тому, что мы хотим найти.

$\left| \int_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{O(\frac{1}{R})}{R - |z|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$ , где  $G_k = \frac{c_{-1}}{\zeta - z_k} + \frac{c_{-2}}{(\zeta - z_k)^2} + \dots = O(\frac{1}{R})$  (кол-ва слагаемых конечно, т.к.  $a_k$  – полюс).

Из стремления к нулю, мы поняли, что  $\text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = -G_k(z)$ .

Теперь мы имеем, что  $I_n(z) = f(z) - \sum_{k: |z_k| < R_n} G_k(z)$ , осталось доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(z) = 0$ .

Вспоминаем, что  $I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  и тогда:

$$|I_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_n \cdot \max_{|\zeta|=R_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \leq R_n \cdot \frac{M_{R_n}}{R_n - |z|} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

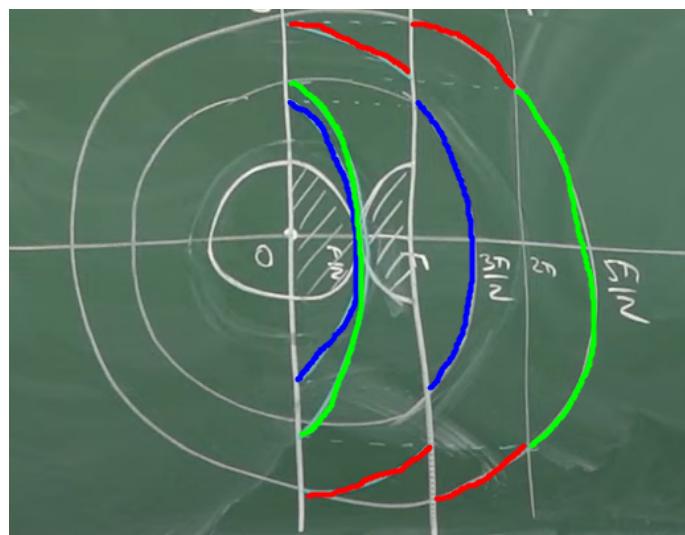
**Пример.**  $\text{ctg}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$

**Лемма.** Существует  $M$ , такая что,  $|\text{ctg } z| \leq M$  на окружностях  $|z| = \pi(n + \frac{1}{2})$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Леммы.

Наблюдения про  $\text{ctg } z$ :

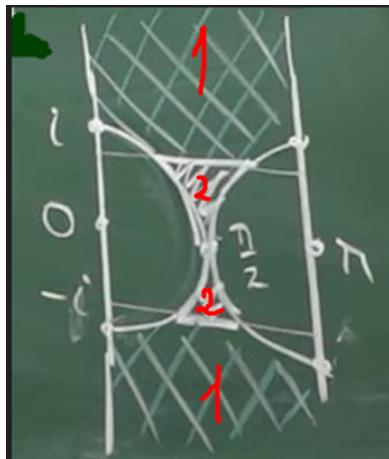
1.  $\pi$ -периодическая функция  $\Rightarrow$  все значения содержатся в полосе  $0 \leq \text{Re}(z) \leq \pi$ , можно все окружности сдвинуть по периоду.
2. нечетная функция  $\Rightarrow$  можем интересоваться только половиной картинки (давайте смотреть на  $\text{Re}(z) \geq 0$ ).



Мы получаем полосу, за некоторым исключением (так как есть определенные точки, которые точно не получаются):

$$\{0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi\} \setminus \{|z| < \frac{\pi}{2}\} \cup \{|z - \pi| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Получаем следующее мн-во:



Хотим понять, что  $\operatorname{ctg}$  ограничен на запятыхованом мн-ве.

$$z = x + iy$$

1. Зона 1 ( $y \geq 1$  или  $y \leq -1$ , в силу нечетности  $\operatorname{ctg}$ ):

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos z}{\sin z} \right| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{1 + e^{2iz}}{1 - e^{2iz}} \right| \leq \frac{1 + |e^{2iz}|}{|1 - e^{2iz}|} = (*)$$

Пусть  $z = x + iy$  и пока что  $y \geq 1$ :

$$|e^{2iz}| = |e^{2ix} \cdot e^{-2y}| = e^{-2y}, \text{ тогда } (*) = \frac{1 + e^{-2y}}{|1 - e^{2iz}|} \leq \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2}}$$

2. Зона 2:

Очевидно, что эта зона это компакт, а  $\operatorname{ctg}$  на ней непрерывен  $\implies \operatorname{ctg}$  – ограничен на этом компакте.

□

**Доказательство.** Примера.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}, \text{ из леммы: } \operatorname{ctg} z \leq M \text{ при } |z| = \pi(n + \frac{1}{2}).$$

$$\text{Берем радиусы } R_n = \pi(n + \frac{1}{2}) \implies M_{R_n} \leq \frac{M}{\pi(n + \frac{1}{2})} \rightarrow 0.$$

Особые точки  $f(z)$ :  $z = 0$  – полюс 2-ого порядка,  $z = \pi k$  – полюсы 1-ого порядка при  $k \neq 0$ .

$$G_k \text{ – главная часть ряда Лорана в } \pi k, k \neq 0 \implies G_k(z) = \frac{\operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z}}{z - \pi k} = \frac{1}{\pi k(z - \pi k)}, \text{ где } \operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = \frac{\cos(z)}{\sin'(z)}|_{z=\pi k} = \frac{1}{\pi k}.$$

$G_0(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{\operatorname{res}_{z=0} f(z)}{z} = \frac{A}{z^2}$ , вычет занулился, так как  $f(z)$  – четная функция и все коэффициенты перед нечетными степенями в ряде Лорана равны 0.

$$G_0(z) = \frac{A}{z^2} = \frac{1}{z^2}, \text{ так как } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = \frac{\cos(z)}{z \sin(z)} \sim \frac{1}{z^2} \text{ при } z \text{ близких к нулю.}$$

$$\text{То есть } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = G_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k(z) + G_{-k}(z)) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi k(z - \pi k)} + \frac{1}{\pi(-k)(z + \pi k)} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - \pi^2 k^2}.$$

□

**Пример.**  $(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z$

$$(\ln \frac{\sin z}{z})' = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \int_0^z (\operatorname{ctg} w - \frac{1}{w}) dw = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw \quad (\text{можем переставлять, потому что есть равномерная сходимость}).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \left( \frac{1}{w - \pi k} + \frac{1}{w + \pi k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(w - \pi k) + \ln(w + \pi k) \Big|_0^z = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( \frac{z^2 - \pi^2 k^2}{-\pi^2 k^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Тогда } \frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Либо } \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ . Посмотрим на  $f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z)$ . Тогда  $\operatorname{res}_{z=k} f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z) \underset{\substack{f(z) \cdot \cos \pi z \\ f(k) \neq 0}}{=} \frac{f(z) \cdot \cos \pi z}{(\sin \pi z)'}|_{z=k} = \frac{f(k)}{\pi}$  - т.е. если  $f(k) \neq 0$ , то  $z = 0$  - полюс кратности 1, значит  $\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}$  при условии, что  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ .

$$g(z) = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} \text{ и проинтегрируем.}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz = \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{1}{\pi k^2} + \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

$$\text{При этом есть такая оценка: } \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz \right| \leq (n + \frac{1}{2}) \cdot \frac{M}{(n + \frac{1}{2})^2} \rightarrow 0$$

$$\text{Значит, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

Такой вычет не очень приятно считать – раскладываем в ряд (хотим найти коэффициент  $c_{-1}$  перед  $\frac{1}{z}$ , т.к. это и есть вычет по определению). Тогда нужно найти коэффициент перед  $z^1$  в разложении  $\operatorname{ctg} z$ , т.к. потом мы поделим на  $\frac{1}{z^2}$  и получим то, что надо.

$$(*): \frac{1}{1-t} = 1 + t + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{Найдем коэффициент перед } z^1: \text{ в разложении } \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4)}{\pi z (1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))} \underset{(*)}{=}$$

$$= \frac{(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4))(1 + \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))}{\pi z} = \frac{1}{\pi z} - \frac{1}{3}\pi z + \mathcal{O}(z^3).$$

$$\text{То есть этот коэффициент равен: } -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Теорема 4.38.** (О числе нулей и полюсов).

Пусть  $f$  мероморфна в  $\Omega$ ,  $\gamma$  – простая замкнутая кривая в  $\Omega$ , не проходящая через нули и полюсы  $f$ .

$$\text{Тогда } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_f - \mathcal{P}_f$$

$\mathcal{N}_f$  – количество нулей  $f$  с учетом кратности в контуре  $\gamma$ .

$\mathcal{P}_f$  – количество полюсов  $f$  с учетом кратности (порядка) в контуре  $\gamma$ .

**Доказательство.** Если  $a$  – ноль или полюс  $f$ , то  $f(z) = (z-a)^m g(z)$ , где  $g(a) \neq 0$  и  $g$  голоморфна в окрестности  $a$ .

1. Если  $a$  – ноль, то  $m$  – кратность нуля
2. Если  $a$  – полюс, то  $-m$  – порядок полюса (т.к.  $m$  будет отрицательным числом).

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^mg'(z)$$

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ , второе слагаемое голоморфно в окрестности  $a$ . Значит,  $a$  - полюс первого порядка  $\frac{f'}{f}$ , а  $m$  - вычет.

Так как  $m$  - вычет, то со знаком плюс он пойдет в сумму как кратность нуля, а со знаком минус - как порядок полюса.  $\square$

**Следствие.** 1. Если  $f \in H(\Omega)$ ,  $\gamma$  - простая замкнутая кривая, не проходящая через нули  $f$ , тогда  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_f$

**Доказательство.** Потребовали голоморфность  $f$ , а значит, полюсов просто нет.  $\square$

## 2. Принцип аргумента

Пусть  $f \in H(\Omega)$ ,  $\gamma$  - простая замкнутая кривая в  $\Omega$ , не проходящая через нули  $f$ .

Тогда  $\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} \arg f(z)$ , где  $\Delta_{\gamma}$  - изменение аргумента при движении по кривой.

**Доказательство.**  $\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ . Но  $\frac{f'}{f} = (Ln f)'$ . Если рассмотрим  $Ln$  на кривой  $\gamma$ , то это будет первообразная вдоль пути  $\gamma$  для  $\frac{f'}{f}$ .

$$\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} (Ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i} (\Delta_{\gamma} (\ln |f(z)| + i \arg f(z))) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z)$$

$\square$

### Теорема 4.39. Руше

$f, g \in H(\Omega)$ ,  $\gamma$  - простой замкнутая кривая в  $\Omega$  и  $|f| > |g|$  на  $\gamma$ .

Тогда  $f + g$  и  $f$  внутри  $\gamma$  имеют одинаковое число нулей с учетом кратности.

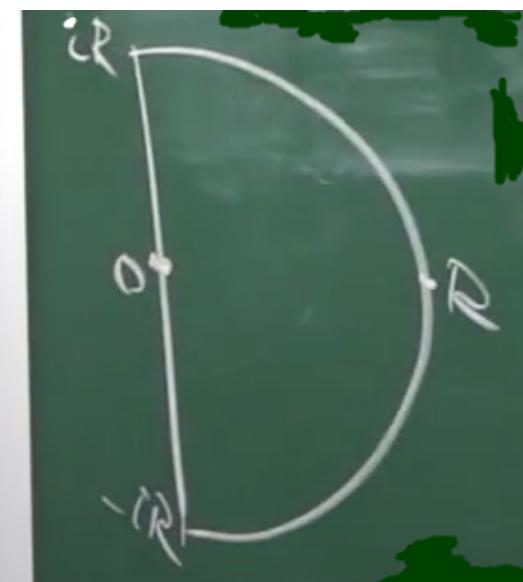
**Доказательство.**  $\mathcal{N}_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(f+g)$ .  $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$  на  $\gamma$ , поэтому в ноль обращения нет и можно использовать принцип аргумента.

$$\mathcal{N}_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(f \cdot (1 + \frac{g}{f})) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(1 + \frac{g}{f}).$$

Значит надо доказать, что  $\Delta_{\gamma} \arg(1 + \frac{g}{f}) = 0$ .

Значения  $1 + \frac{g}{f}$  на  $\gamma$  лежат в круге  $|z-1| < 1$ , потому что  $\frac{|g|}{|f|} < 1$ . А значит вокруг нуля обойти не можем и изменения аргумента нет.  $\square$

**Пример.**  $z - e^{-z} = \lambda > 1$ . Хотим понять, что в правой полуплоскости есть ровно 1 корень.



Возьмём окружность большого радиуса и по ней обход по контуру  $\gamma$ .

Возьмём  $f(z) = z - \lambda$  и  $g(z) = -e^{-z}$ . Хотим подставить в т. Руше, тогда необходимо чтобы  $|f| > |g|$ , проверим это:

1. На вертикальном отрезке:  $|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{y^2 + \lambda^2} \geq \lambda > 1$ , а  $|g(z)| = |-e^{-iy}| = 1$ , значит всё выполняется.
2. На полуокружности:  $|f(z)| = |z - \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda$ , а  $|g(z)| = |-e^{-x-iy}| = e^{-x} \leq 1$ . То есть если  $R > \lambda + 1$ , то  $|f| > |g|$  на  $\gamma$ .

Тогда  $\mathcal{N}_{f+g} = \mathcal{N}_f = 1$

## 4.6. Конформные отображения

**Определение 4.24.**  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega}$  - области,  $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  - конформное отображение, если  $f$  биекция и  $f \in H(\Omega)$

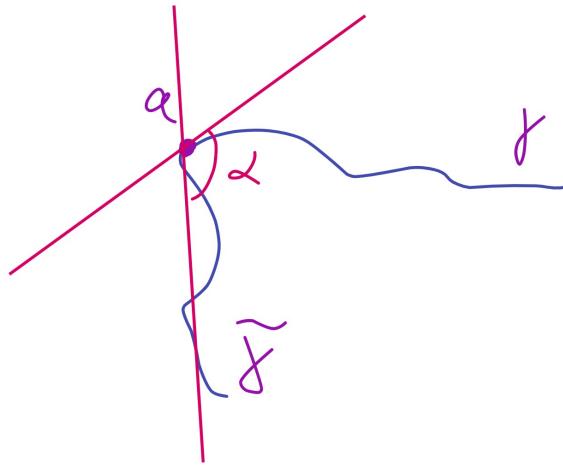
**Теорема 4.40.** Пусть  $f \in H(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ , такая, что  $f'(a) \neq 0$ .

Тогда  $f$  сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку  $a$ .

**Доказательство.**  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  и  $\gamma(0) = a$  (можно так считать).

$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}$  и  $\tilde{\gamma}(0) = a$ .

Угол между кривыми в точке  $a$  определяется, как угол между касательными к данным кривым в данной точке.



miro

$\arg \gamma'(0) - \arg \tilde{\gamma}'(0)$  - угол между кривым в  $\Omega$ .

$$\arg(f \circ \gamma)'(0) - \arg(f \circ \tilde{\gamma})'(0) = \arg f'(a)\gamma'(0) - \arg f'(a)\tilde{\gamma}'(0) = \arg \tilde{\gamma}'(0) - \arg \tilde{\gamma}'(0)$$

□

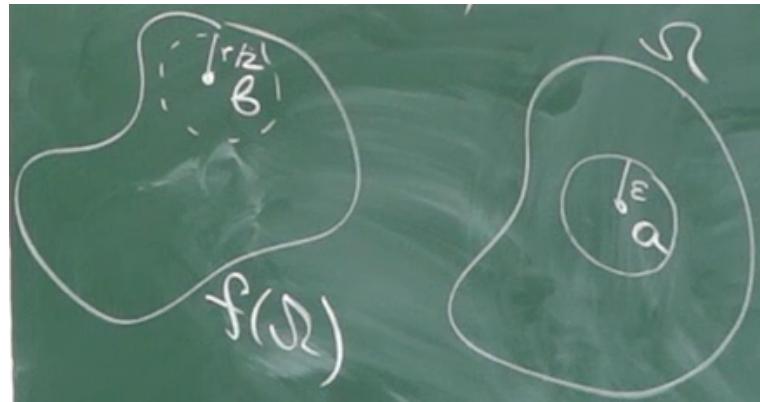
**Определение 4.25.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  - однолистная, если  $f \in H(\Omega)$  и инъекция.

**Теорема 4.41.** Если  $f \in H(\Omega)$  и  $f \neq \text{const}$ , то  $f(\Omega)$  - область.

**Доказательство.** 1. Линейная связность остаётся (т.к. при непрерывном отображении путь, соединяющий некоторые точки, под действием непрерывного отображения будет переходить в путь, соединяющий образы этих точек).

2. Нужно проверить, что  $f(\Omega)$  - открытое множество. Возьмём точку в образе и докажем, что она там лежит с некоторым шариком.

$$b \in f(\Omega) \Rightarrow \exists a \in \Omega : f(a) = b.$$



Найдётся окружность  $|z - a| = \varepsilon$ , что  $|f(z) - b| \neq 0$ . Иначе бы на окружности радиуса  $\frac{r}{n}$  нашлась точка  $z_n$ , такая, что  $f(z_n) = b$ , то  $f \equiv b$  по теореме единственности, но  $f \neq \text{const}$  по условию.

$r = \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - b| > 0$ . Мы хотим показать, что некоторый шарик  $B_{\frac{r}{2}}(b) \subset f(\Omega)$ , для этого посмотрим на уравнение  $f(z) - w = 0$ . Хотим понять, что такое уравнение имеет решение при  $w$  близких к  $b$  (а именно:  $|w - b| < \frac{r}{2}$ ). Это и будет значить, что близкие к  $b$  точки попадают в образ.

Подставим всё в теорему Руше:  $f(z) - w = (f(z) - b) + (b - w)$ . Нужно, чтобы  $|f(z) - b| > |b - w|$ :  $|f(z) - b| \geq r$  - т.к.  $r$  - это минимум данного выражения.

$|b - w| \leq \frac{r}{2}$  - т.к. мы берем  $w$  из шарика  $B_{\frac{r}{2}}(b)$ .

Итого получаем:  $|f(z) - b| \geq r > \frac{r}{2} \geq |b - w| \rightarrow |f(z) - b| > |b - w|$  - условия теоремы Руше выполнены, тогда  $\mathcal{N}_{f(z)-w} = \mathcal{N}_{f(z)-b} \geq 1 \implies$  существует корень.

Возьмём  $|b - w| < \frac{r}{2}$  и всё выполнится.

Получили, что  $\{|w - b| < \frac{r}{2}\} \subset f(\Omega) \Rightarrow f(\Omega)$  открытое.

□

**Следствие.** Если  $f$  однолистна, то  $f$  конформное отображение  $\Omega$  на  $f(\Omega)$ .

**Теорема 4.42.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  однолистна. Тогда  $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $f'(a) = 0$ ,  $b = f(a)$ . Возьмём  $\varepsilon$  так, что  $f(z) - b \neq 0$  при  $|z - a| = \varepsilon$  и  $r = \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - b| > 0$ .



Смотрим на уравнение  $f(z) - w = f(z) - b + b - w$ . Мы выяснили, что  $\mathcal{N}_{f-w} = \mathcal{N}_{f-b} \geq 2$ , потому что  $a$  - корень кратности  $\geq 2$ . Тогда  $f(z) = w$  имеет хотя бы 2 решения. Но у нас инъекция, поэтому все решения с кратностью 2. Хотим показать, что тогда найдётся последовательность нулей производных, стремящаяся к точке  $a$  и получить противоречие.

Берём радиус  $\frac{r}{2}$ .  $\{|w - b| \leq \frac{r}{2}\} \subset f(\Omega)$ . Берём  $w_1, w_2, \dots$  из этого круга. Значит  $\exists z_1, \dots$  из  $|z - a| < \varepsilon$ ,  $f(z_k) = w_k$  и  $f'(z_k) = 0 \Rightarrow$  в  $|z - a| \leq \varepsilon$  бесконечно много нулей  $f'$ . Значит у них есть предельная точка и тогда  $f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv \text{const}$ .  $\square$

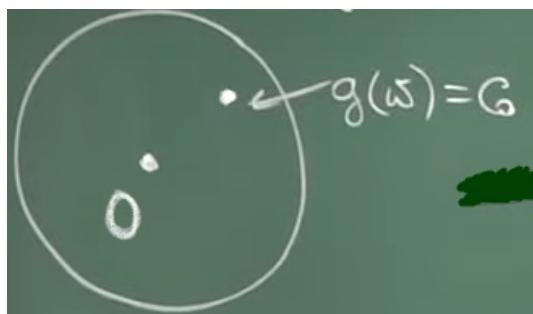
**Замечание.** Обратное неверно.  $f(z) = e^z$ ,  $f'(z) = e^z \neq 0$ , но нет однолистности.

**Следствие.** 1. Конформное отображение сохраняет углы между кривыми

*Доказательство:* оно инъективно, а значит производная в ноль не обращается.

2. Если  $f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$  однолистна в окрестности  $\infty$ , то  $c_1 \neq 0$ .

*Доказательство:*  $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  однолистна в проколотой окрестности нуля, в нуле можем доопределить, чтобы была голоморфность.



Теперь, когда  $g$  определена в нуле, то могло так случиться, что  $\exists w : g(w) = g(0) = c_0$ , то есть мы потеряли инъективность. Чтобы решить эту проблему уменьшим окрестность так, чтобы точка  $w$  в нее не попадала.

Тогда  $g$  однолистна в меньшей и уже непроколотой окрестности, тогда по теореме:

$$c_1 = g'(0) \neq 0.$$

3.  $f$  имеет полюс в точке  $a$  и однолистна в проколотой окрестности точки  $a$ , тогда это полюс первого порядка.

*Доказательство:* пусть  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  - однолистна в проколотой окрестности точки  $a$ . Можем доопределить нулём в точке  $a$  и тогда будет голоморфность,  $g(a) = 0$ .

Тогда  $g$  однолистна в окрестности точки  $a$ , а значит  $g'(a) \neq 0$ , тогда  $a$  - ноль первого порядка у  $g$ , а значит и ноль первого порядка у  $f$ .

**Определение 4.26.**  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega}$  конформно эквивалентны, если  $\exists f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  - конформное отображение.

**Замечание.** Это отношение эквивалентности.

**Теорема 4.43.**  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{D}$  не конформно эквивалентны.

**Доказательство.** От противного. Пусть  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  - конформное отображение.

Тогда  $f \in H(\mathbb{C})$ ,  $|f| \leq 1$ . Тогда  $f$  константа по теореме Луивилля. А это не биекция  $\square$

**Лемма. Шварца**

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  голоморфная,  $f(0) = 0$ . Тогда:

1.  $|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$
2. Если для какого-то  $a \neq 0$ ,  $|f(a)| = |a|$ , то  $f(z) = e^{i\phi}z$ , где  $\phi \in \mathbb{R}$

**Доказательство.** 1. Пусть  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ , в нуле устранимая особая точка (т.к. для  $f(\cdot)$  0 - ноль первого порядка, то  $f(z)$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности этой точки, при этом коэффициент  $c_0 = f(0) = 0$ , значит если далее поделить ряд на  $z$ , то новый ряд для  $\frac{f(z)}{z}$  все равно будет сходиться, т.к. слагаемое  $\frac{c_0}{z} = \frac{0}{z} = 0$ ), устраним - получим голоморфную в круге функцию. Согласно принципу максимума (т.е.  $\Omega$  - компакт, максимум функции  $f \in H(\Omega)$  достигается на границе компакта), в круге  $|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r} \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} 1$ . И тогда  $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$

2. Знаем, что  $|g(z)| \leq 1$  в  $\mathbb{D}$ . Если  $|g(a)| = 1$ , для  $a \in \mathbb{D}$  (значит у нас есть какая-то внутренняя точка, в которой достигается максимум), то  $a$  является точкой максимума, тогда по принципу максимума,  $g \equiv \text{const} \Rightarrow g(z) = e^{i\phi} \Rightarrow f(z) = e^{i\phi} \cdot z$

□

#### Теорема 4.44. Римана о конформных отображениях

$\Omega$  и  $\tilde{\Omega}$  - односвязные области в  $\bar{\mathbb{C}}$ , причём их граница состоит больше, чем из одной точки (есть хотя бы какая-то кривая). Есть точка  $z_0 \in \Omega$ ,  $\tilde{z}_0 \in \tilde{\Omega}$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Тогда существует единственное конформное отображение  $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ , такое, что  $f(z_0) = \tilde{z}_0$  и  $\arg f'(z_0) = \alpha$ .

**Доказательство. Единственность**

1.  $\Omega = \tilde{\Omega} = \mathbb{D}$ ,  $z_0 = \tilde{z}_0 = \alpha = 0$ .

Пусть  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(0) = 0$  и  $\arg f'(0) = \alpha = 0$ . По лемме Шварца для  $f$  получаем, что  $|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$ .

С другой стороны,  $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  тоже конформное,  $f^{-1}(0) = 0$ , значит для неё тоже можно применить лемму Шварца.  $|f^{-1}(z)| \leq |z| \Rightarrow |z| \leq |f(z)|$ .

Значит  $|f(z)| = |z| \forall z \in \mathbb{D}$ , тогда по лемме Шварца это поворот, то есть  $f(z) = e^{i\phi}z$ .

Также мы знаем, что  $f'(z) = e^{i\phi}$  и  $\arg f'(0) = \alpha = 0 \Rightarrow e^{i\phi} = 1$ .

Итого, получили, что  $f(z) = z \Rightarrow$  есть единственность, т.к. мы явно предъявили функцию.

2.  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega}$  произвольные. Пусть  $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  - конформное.  $f_i(z_0) = \tilde{z}_0$  и  $\arg f'_i(z_0) = \alpha$ , где  $i \in \{1, 2\}$ .

Воспользуемся существованием:

- $\exists \phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  - конформное,  $\phi(0) = z_0$  и  $\phi'(0) > 0$  (то есть, что  $\arg \phi'(0) = 0$ ).
- $\exists \psi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$  - конформное,  $\psi(\tilde{z}_0) = 0$  и  $\arg \psi'(\tilde{z}_0) = -\alpha$ .

Посмотрим на  $g_i = \psi \circ f_i \circ \phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ :

- $g_i(0) = 0$
- $g'_i(0) = \psi'(f_i(\phi(0))) \cdot f'_i(\phi(0)) \cdot \phi'(0) = \psi'(\tilde{z}_0) \cdot f'_i(z_0) \cdot \phi'(0)$  - мы интересуемся аргументом  $g'_i$ , но аргумент произведения равен сумме аргументов, тогда:  
 $\arg g'_i(0) = -\alpha + \alpha + 0 = 0$  - сумма аргументов множителей.

То есть мы получили, что  $g_1$  и  $g_2$  – два комформных отображения из круга в круг, переводящие ноль в ноль, и производную в нуле имеют с нулевым аргументом  $\xrightarrow[\text{по пункту (1)}]{} g_1(z) = g_2(z) = z$ .

Тогда восстановим  $f_i$  и поймем, что они равны:

$f_i(\phi(z)) = \psi^{-1}(g_i(z)) \implies f_i(z) = \psi^{-1}(g_i(\phi^{-1}(z))) \implies$  т.к.  $g_1 = g_2$ , то по полученной формуле  $f_1 = f_2$ .

□

### Следствие. Обобщенная теорема Лиувилля

$f \in H(\mathbb{C})$  и  $f$  не принимает значения на некоторой кривой  $\gamma$ . Тогда  $f \equiv const$

**Доказательство.**  $\bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma$  - односвязная область, с границей, состоящей из более чем одной точки.

Тогда по теореме Римана о конформных отображениях существует  $g : \bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{D} \Rightarrow g \circ f \in H(\mathbb{C})$  и  $g \circ f \subset \mathbb{D}$ , то есть это ограниченная функция.

Тогда по теореме Лиувилля (стандартной),  $g \circ f$  - константа, значит  $f(z) = g^{-1}(const) = const$ .

□

### Замечание. Малая теорема Пикара

Если  $f \in H(\mathbb{C})$  не принимает 2 каких-то значения, то  $f \equiv const$ .

**Пример.**  $f(z) = e^z \neq 0$  - одно значение целая функция может не принимать.

**Следствие.** Если  $f$  мероморфна в  $\mathbb{C}$  и не принимает 3 значения, то  $f \equiv const$

**Доказательство.** Пусть нет значений  $a, b, c$ . Сделаем из мероморфной - голоморфную, которая не принимает 2 значения. Пусть  $c \neq \infty$ , тогда  $g(z) = \frac{1}{f(z)-c} \in H(\mathbb{C})$ , но она не принимает значения  $\frac{1}{a-c}$  и  $\frac{1}{b-c}$ , а тогда по малой теореме Пикара получаем, что  $f \equiv const$ .

□

**Пример.**  $f(z) = \operatorname{tg} z \neq \pm i$  - пример мероморфной функции, не принимающей 2 значения.

**Определение 4.27.**  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  - дробно-линейное отображение,  $ad - bc \neq 0$ .

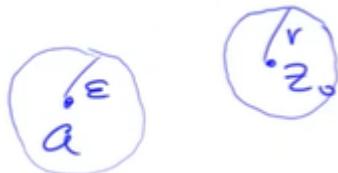
**Теорема 4.45.** Если  $f \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\})$  и однолистна, то  $f$  дробно-линейное отображение.

**Доказательство.** 1.  $z_0$  – существенная особая точка. Тогда по теореме Сохоцкого  $\operatorname{Cl} f \{0 < |z - z_0| < r\} = \mathbb{C}$  при некотором  $r$ .

Возьмём  $b = f(a)$ . Тогда  $f(|z - a| < \varepsilon)$  – открытое множество (т.к.  $\{|z - a| < \varepsilon\}$  – открытое и  $f$  – однолистная).

Возьмем  $r$  и  $\varepsilon$  такими, чтобы шарики не пересекались, т.е.:  $\{|z - a| < \varepsilon\} \cap \{|z - z_0| < r\} = \emptyset$ .

Так как функция  $f$  однолистная (есть инъективность), то и образы данных шариков тоже не будут пересекаться:  $f(|z - a| < \varepsilon) \cap f(0 < |z - z_0| < r) = \emptyset$ .



Так как образ открытого множества при непрерывном отображении переходит в открытое множество, то  $f(|z - a| < \varepsilon)$  и  $f(0 < |z - z_0| < r)$  - открыты. Тогда к одному из них можно приписать замыкание, и они все еще не будут пересекаться  $\Rightarrow$  к  $f(0 < |z - z_0| < r)$  припишем замыкание:

$f(|z - a| < r) \cap Cl\ f(0 < |z - z_0| < \varepsilon) = \emptyset$  – однако мы только что показали, что замыкание это все  $\mathbb{C} \Rightarrow$  противоречие. Следовательно,  $z_0$  - точно не существенная особая точка.

2.  $z_0 \neq \infty$  – полюс. Тогда из однолистности это полюс первого порядка. Тогда в главной части Лорана лишь конечное число ненулевых слагаемых, а именно ровно одно (т.к. полюс кратности 1):  $\frac{c}{z-z_0}$  – вычтем его из функции  $f$  (останется только ряд Тейлора) и получим функцию голоморфную на всей плоскости:

$$g(z) = f(z) - \frac{c}{z-z_0} \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow g(z) = const \Rightarrow f(z) = \frac{c}{z-z_0} + const$$

3.  $z_0 = \infty$  – полюс. Тогда в правильной части ряда Лорана для  $f$  есть только 1 ненулевой коэффициент при  $z^1$ :  $c \cdot z^1$  – вычтем его и получим голоморфную на всей плоскости функцию:  $g(z) = f(z) - cz \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow g(z) = const \Rightarrow f(z) = cz + const$  – т.е.  $f$  является линейной функцией.

4.  $z_0$  – устранимая особая точка. Устраним особенность в данной точке  $\Rightarrow f \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f \equiv const \Rightarrow$  нет однолистности  $f$  – противоречие. Следовательно,  $z_0$  не является устранимой особой точкой.

□

**Следствие.** Если функция  $f \in H(\mathbb{C})$  и однолистная, то  $f$  линейная.

**Доказательство.**  $z_0 = \infty$  в теореме.

□

## 4.7. Производящие функции

**Определение 4.28.** Есть последовательность  $a_0, a_1, \dots$ . Производящая функция последовательности  $\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

Мы хотим, чтобы ряд сходился при  $|z| < R$  для какого-то  $R > 0$

**Пример. Задача о размене**

Есть монетки 1, 2, 5, 10 рублей. Интересуемся, каким количеством способов мы можем разменять  $n$  рублей, если запас монет не ограничен, пусть это число равно  $a_n$ .

Вместо формулы для этих коэффициентов будет искать формулу для ряда:

$$\mathcal{A}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Это будет равно:

$$\mathcal{A}(z) = (1 + z + z^2 + \dots)(1 + z^2 + \dots)(1 + z^5 + z^{10} + \dots)(1 + z^{10} + z^{20} + \dots) \text{ и раскроем все скобки.}$$

Коэффициент при  $z^n = z^a \cdot z^{2b} \cdot z^{5c} \cdot z^{10d}$ , где  $a + 2b + 5c + 10d = n$ . Тогда коэффициент  $a_n$  – число решений уравнения  $a + 2b + 5c + 10d = n$  в неотрицательных целых числах.

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z^{10}}.$$

**Определение 4.29.**  $H \subset \mathbb{N}$ ,  $p(n, H)$  - количество способов представить  $n$  в виде суммы слагаемых из  $H$ .

$$\mathcal{F}_H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, H) z^n = \prod_{k \in H} \frac{1}{1-z^k}$$

Если каждое слагаемое можно брать  $\leq m$ , то  $\prod_{k \in H} \frac{1 - z^{(m+1)k}}{1 - z^k} = (1 + z^k + z^{2k} + \dots + z^{mk})$

**Определение 4.30.** Число разбиений  $n$  на натуральные слагаемые  $p(n) = p(n, \mathbb{N})$ .

**Теорема 4.46.**  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}$  – сходится при  $|z| < 1$  и  $p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$  при  $0 < r < 1$ .

**Доказательство.**  $\ln \left( \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-z^k} \right| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} -\ln |1-z^k| = (*)$  – покажем, что этот ряд сходится.

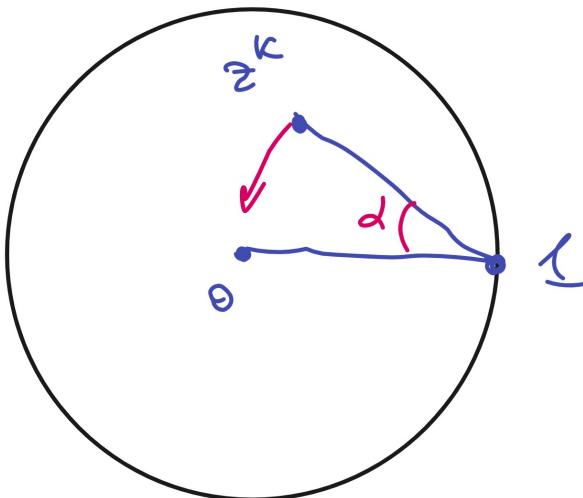
1.  $\ln(1-t) \geq -t - t^2 \implies -\ln(1-t) \leq t + t^2$
2.  $\ln |1-z^k| \geq \ln(1-|z|^k) \implies -\ln |1-z^k| \leq -\ln(1-|z|^k) \leq |z|^k + |z|^{2k}$

Из пункта (2) выше получаем, что  $(*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z|^k + \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{2k} < +\infty$  – справа от нер-ва сумма рядов сх-ся, тогда и  $(*)$  тоже.

Проверим, что аргумент ничего не испортит:

$$\arg \left( \frac{1}{1-z^k} \right) = -\arg(1-z^k)$$

$$|\arg(1-z^k)| \leq \arcsin |z|^k \leq 2|z|^k$$



mira

Т.к.  $z$  ( $|z| < 1$ ) возводится в степень  $k$ , и  $k \rightarrow +\infty$ , то  $z^k \rightarrow 0$ , значит угол  $\alpha$  стремится к нулю (см. картинку).

Действительно, аргумент ничего не портит. □

**Замечание. Теорема Харди-Рамануджана**

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{n}}$$

**Теорема 4.47. Эйлера**

Количество разбиений  $n$  на нечётные слагаемые равно количеству разбиений  $n$  на различные слагаемые

**Доказательство.** Для различных слагаемых –  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k)$ .

Для нечётных слагаемых –  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{2k-1}}\right)$ .

Хотим понять, что это одно и то же:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{2k-1}}\right) = \frac{\text{Произведение всех } k}{\text{Произведение четных } k} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}}{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^{2k}}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-z^{2k}}{1-z^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k) \quad \square$$

**Пример.**  $b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \dots b_{2k}$  счастливый билет, если сумма первых  $k$  равна сумме последних  $k$ .

Пусть  $a_n$  – количество  $k$ -значных чисел с суммой цифр  $n$ . То есть количество счастливых билетов  $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{9k}^2$ .

Пусть  $\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1 + z + z^2 + \dots + z^9)^k$

$\mathcal{A}(z) \cdot \mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right)$  – здесь коэффициент перед  $z^0$  – это  $a_0^2 + a_1^2 + \dots$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\mathcal{A}(z)\mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right)}{z} dz$  – количество счастливых билетов.

**Пример. Диагонализация степенных рядов**

Пусть дана  $f(w, z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} w^n z^k$ , а мы хотим найти  $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nn} w^n$ .

Запишем  $f\left(\frac{w}{z}, z\right) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} \frac{w^n}{z^n} z^k$ , видно, что нас интересует коэффициент перед  $z^0$  (если мы его найдем, то получим ответ).

$$\begin{aligned} \text{То есть } g(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f\left(\frac{w}{z}, z\right)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} w^n z^{k-n-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n,k=0}^{\infty} w^n a_{nk} \underbrace{\int_{|z|=r} z^{k-n-1} dz}_{=0, \text{ при } k \neq n, \text{ } 2\pi i \text{ иначе}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} w^n a_{nn} 2\pi i = g(w) \end{aligned}$$

Чтобы можно было переставить интеграл и сумму, нужна равномерная сходимость. То есть нужно попасть строго внутрь круга сходимости ряда  $\sum |a_{nk}| r^{k-1} \left|\frac{w}{z}\right|^n$ .

Пусть радиус сх-ти для  $z$  и для  $w$  равен  $R$ , тогда нужно, чтобы  $r < R, \left|\frac{w}{r}\right| < R$ .

Давайте теперь воспользуемся полученной схемой на конкретном примере:

пусть  $f(w, z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} w^n z^k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} w^{m-k} z^k = \sum_{m=0}^{\infty} (w+z)^m = \frac{1}{1-w-z}$ .

Найдем  $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f\left(\frac{w}{z}, z\right)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z(1-\frac{w}{z}-z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2-z+w} = (*)$ .

Ищем нули знаменателя, получаем особые точки:  $\frac{1 \pm \sqrt{1-4w}}{2}$ .

В контур попадает только  $\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}$ , так как второй корень близок к 1, а этот как раз к нулю.

$$(*) = -\text{res} = -\frac{1}{2z-1} \Big|_{z=\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4w}}.$$

Мы получили, что  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} w^n = \frac{1}{\sqrt{1-4w}}$ .

**Определение 4.31. Произведение Адамара**

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\mathcal{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

**Пример.** Как находить произведение Адамара.

$$f(w, z) = \mathcal{A}(z)\mathcal{B}(w) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n b_k z^n w^k.$$

Нас интересует диагональ этой штуки.

**Теорема 4.48.** Произведение Адамара рациональных функций – рациональная функция

**Определение 4.32.** Последовательность  $\{a_n\}$  – **квазимногочлен**, если

$$a_n = p_1(n)q_1^n + p_2(n)q_2^n + \dots + p_k(n)q_k^n,$$

где  $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}$ , а  $p_1, \dots, p_k$  – многочлены с комплексными коэффициентами.

**Лемма.**  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  – рациональная функция  $\Leftrightarrow$  при больших  $n$ :  $a_n$  – квазимногочлен.

**Доказательство.** 1.  $\Rightarrow$ . Разложим рациональную функцию на простейшие,  $\frac{1}{(1-qz)^m}$  – то есть на линейную комбинацию таких.

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} z^n$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{(1-qz)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)\dots(n+1)}{(m-1)!} q^n z^n$$

2.  $\Leftarrow$ . Достаточно понять, что  $a_n = p(n) \cdot q^n$  имеет рациональную производящую функцию, а потом просто сложить в сумму.

Индукция по степени многочлена:

(а) База:  $\deg = 0$ ,  $a_n = q^n$  производящая функция  $\frac{1}{1-qz}$ .

(б) Переход:  $d - 1 \rightarrow d$ .

Возьмём конкретный многочлен степени  $d$ :  $\tilde{p}(n) = \frac{(n+d)(n+d-1)\dots(n+1)}{d!}$ .

Для  $b_n = \tilde{p}(n)q^n$  производящая функция  $\frac{1}{(1-qz)^{d+1}}$ .

Из  $p(n)$  вычтем  $c \cdot \tilde{p}(n)$  так, чтобы степень уменьшилась, тогда по предположению индукции – все работает.

□

### Пример. Метод Дарбу

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  сходится в круге  $|z| < R$ .

Тогда при любом  $r$ , таком что  $r < R$ , ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  – сходится и  $a_n r^n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n = o(r^{-n})$ .

Пусть  $R$  – радиус сходимости  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , тогда мы знаем, что на границе круга сходимости есть особая точка.

Если особых точек конечное число и это полюсы (для простоты будем считать, что одна), то тогда возьмём эту точку и напишем главную часть ряда Лорана:

$h(z)$  = главная часть ряда Лорана для функции  $f$  в точке  $a$ .

Тогда  $g(z) = f(z) - h(z)$  имеет устранимую особую точку  $a$ . Давайте устраним ее, тогда  $g(z)$  голоморфна в точке  $a$ . Тогда скорее всего её радиус сходимости  $\tilde{R} > R$ .

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \Rightarrow b_n = o((\tilde{R} - \varepsilon)^{-n})$$

$h(z) = \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_r}{(z-a)^r}$ , где  $r$  – порядок полюса, у  $h(z)$  можно явно выписать коэффициенты (самый быстрорастущий это последний).

$$\frac{1}{(z-a)^r} = \frac{1}{a^r (\frac{z-a}{a})^r} = \frac{(-1)^r}{a^r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} \left(\frac{z-a}{a}\right)^n$$

Оценим биномиальный коэффициент:  $\binom{n+r-1}{r-1} = \frac{(n+r-1)\dots(n+1)}{(r-1)!} \sim \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$ .

$$\text{Тогда } a_n \sim c_r \cdot \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{(-1)^r}{a^{n+r}}$$

**Теорема 4.49.** Пусть  $f \in H(|z| < R)$ , где  $R > 1$  и  $f(1) \neq 0$ .

Пусть  $\frac{f(z)}{(1-z)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0, -1, -2 \dots$

Тогда  $b_n \sim f(1) \cdot \binom{n+\alpha-1}{n} \sim f(1) \cdot \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

**Доказательство.** Возьмём  $1 < r < R$  и разложим  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

Ряд сходится в точке  $z = r \Rightarrow a_n = o(r^{-n})$ .

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+\alpha-1}{n}}_{=\frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots\alpha}{n!}} z^n.$$

Получаем:

$$\frac{f(z)}{(1-z)^\alpha} = \sum a_n z^n \cdot \sum \binom{n+\alpha-1}{n} z^n$$

$$b_n = a_n \binom{\alpha-1}{0} + a_{n-1} \binom{\alpha}{1} + \dots + a_0 \binom{n+\alpha-1}{n} = \binom{n+\alpha-1}{n} (a_0 + \frac{n}{n+\alpha-1} a_1 + \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} a_2 + \dots + (\dots) \cdot a_n),$$

где все коэффициенты при  $a_i$  стремятся к 1.

$$\begin{aligned} \text{Хотим сказать, что } b_n &\sim \binom{n+\alpha-1}{n} \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \sim \binom{n+\alpha-1}{n} \cdot f(1) = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} f(1) \rightarrow \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot f(1) - \text{последний переход из формулы Эйлера-Гаусса.} \end{aligned}$$

$$\text{Осталось понять, что } \Delta_n = (a_0 + \frac{n}{n+\alpha-1} a_1 + \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} a_2 + \dots + (\dots) \cdot a_n) - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \rightarrow 0.$$

Мы знаем, что  $a_n = \mathcal{O}(r^{-n}) \Rightarrow |a_n| \leq \frac{C}{r^n}$ .

$$\text{Тогда } |\Delta_n| \leq |a_1| \underbrace{\left| \frac{n}{n+\alpha-1} - 1 \right| + |a_2| \left| \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} - 1 \right| + \dots + |a_m| |(\dots) - 1| +}_{\text{конечное число слагаемых} \rightarrow 0} + \left( \frac{C}{r^{m+1}} + \frac{C}{r^{m+2}} + \dots \right)$$

Подберём так  $m$  чтобы  $\sum \frac{C}{r^{m+i}} \leq \varepsilon$ . И тогда всё выполнилось при больших  $n$ .  $\square$

**Пример.** 1.  $f(z) = \frac{\sqrt{2-z}}{(1-z)^2}$

Здесь круг сходимости  $|z| < 1$ , особая точка  $z = 1$  – полюс второго порядка.

Главная часть ряда Лорана:  $\frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2}$ .

$$\text{Здесь } b = \sqrt{2-1} = 1, a = \text{res}_{z=1} = ((1-z)^2 f(z))' \Big|_{z=1} = (\sqrt{2-z})' \Big|_{z=1} = \frac{-1}{2\sqrt{2-z}} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

$g(z) = f(z) - \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z}$  – голоморфна в  $z = 1$ , тогда  $g \in H(|z| < 2)$ .

Пусть  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ,  $b_n = o\left(\frac{1}{(2-\varepsilon)^n}\right)$

$$a_n = b_n - \frac{1}{2} + n + 1 = n + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{(2-\varepsilon)^n}\right)$$

2.  $f(z) = \frac{e^z}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , круг сходимости  $|z| < 1$ , но  $z = 1$  не полюс, а точка ветвления.

$$g(z) = \frac{e^z}{\sqrt{1-z}} - \frac{e}{\sqrt{1-z}} = \frac{e}{\sqrt{1-z}} (e^{z-1} - 1) = \frac{e}{\sqrt{1-z}} (1-z) \underbrace{\frac{e^{z-1}-1}{1-z}}_{=h(z), \text{ голоморфна в } 1} = e\sqrt{1-z} h(z), \text{ где на}$$

самом деле  $h(z) = \frac{1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2}+\dots}{1-z} \in H(\mathbb{C})$ .

$$g(z) = \sum b_n z^n, \text{ из теоремы имеем } b_n \sim h(1) \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\frac{1}{\sqrt{\pi n} \sqrt{n}}$$

$$e\sqrt{1-z} = e \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

$$\text{Тогда } a_n = e \cdot c_n + b_n = \underbrace{\frac{e \cdot \binom{2n}{n}}{4^n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} + b_n = e \cdot \underbrace{\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n - \text{с одной из прошлой лекции. Тогда } \sqrt{1-z} = \sum \binom{2n}{n} \frac{z^n}{4^n}.$$

$$\text{И тогда } a_n = e \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} + b_n = e \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

### Пример. Метод Лапласа

Есть  $2k$ -значный номер, интересуемся количеством таких номеров, что сумма первых  $k$  знаков равна сумме последних  $k$  (счастливые билеты).

Пусть  $a_k$  = количество  $2k$  значных счастливых билетов.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \mathcal{A}(z) \mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}$$

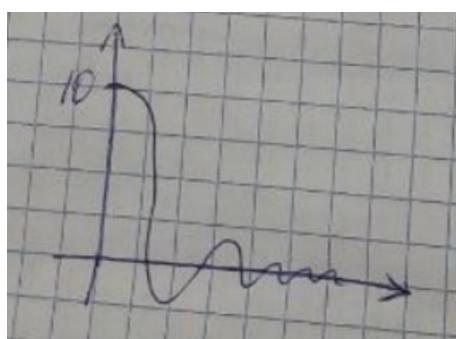
$$\mathcal{A}(z) = (1 + z + z^2 + \dots + z^9)^k = \left(\frac{1-z^{10}}{1-z}\right)^k$$

$$\text{Тогда } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{(1-z^{10})(1-z^{-10})}{(1-z)(1-\frac{1}{z})}\right)^k \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{2-z^{10}-z^{-10}}{2-z-\frac{1}{z}}\right)^k \frac{dz}{z} = (*)$$

Делаем замену:  $z = e^{it}$ ,  $dz = i \cdot e^{it} dt$ .

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-e^{10it}-e^{-10it}}{2-e^{it}-e^{-it}}\right)^k \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-2\cos(10t)}{2-2\cos t}\right)^k dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sin^2(5t)}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\right)^k dt = \\ \text{Делаем доп. замену: } s = \frac{t}{2}, \quad 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}. \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2 \left(\frac{\sin(10s)}{\sin s}\right)^{2k} ds \quad \underset{\substack{= \\ \text{т.е. симметрия отн. } \frac{\pi}{2}}}{=} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x}\right)^{2k} dx.$$

Можно выловить скорость роста интеграла: поведение определено точкой максимума у  $\frac{\sin(10x)}{\sin x}$ .



1. В нуле максимум равен 10
2. В окрестности нуля разложим по Тейлору
3. Остальное просто оценим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x}\right)^k dx = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$$

1. Посмотрим на окрестность нуля.

Раскладываем по Тейлору:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(10x)}{\sin x} &= \frac{10x - \frac{(10x)^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)} = 10 \cdot \frac{1 - \frac{100x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \\ &= 10(1 - \frac{100}{6}x^2 + \mathcal{O}(x^4))(1 + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)) = 10(1 - \frac{33}{2}x^2 + O(x^4)) \end{aligned}$$

Под интегралами у нас это степенная функция, поэтому распишем логарифм от нашего выражения:

$$\ln \frac{\sin(10x)}{\sin x} = \ln \left( 10 \left( 1 - \frac{33}{2} x^2 + O(x^4) \right) \right)$$

$$\left( \frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} = e^{2k \ln(10(1 - \frac{33}{2} x^2 + O(x^4)))} = 10^{2k} \cdot e^{-33kx^2} \cdot e^{\mathcal{O}(2kx^4)}$$

Подставим это в интеграл с  $\varepsilon$ :

$$k\varepsilon^4 \rightarrow 0,$$

$$\int_0^\varepsilon 10^{2k} e^{-33kx^2} \underbrace{e^{\mathcal{O}(kx^4)}}_{=e^{\mathcal{O}(k\varepsilon^4)}, \text{ выберем } \varepsilon \text{ так, что } =1+\mathcal{O}(k\varepsilon^4)} dx = 10^{2k} (1 + \mathcal{O}(k\varepsilon^4)) \int_0^\varepsilon e^{-33kx^2} dx = (')$$

Делаем замену:  $y = \sqrt{33k}x$ .

$$(') = 10^{2k} (1 + \mathcal{O}(k\varepsilon^4)) \int_0^{\varepsilon\sqrt{33k}} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{33k}} dy \sim 10^{2k} \frac{1}{\sqrt{33k}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = (")$$

Хотим, чтобы  $\varepsilon\sqrt{33} \rightarrow +\infty$ , тогда  $(") \rightarrow \int_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Для этого подойдет  $\varepsilon = \sqrt{1}k^{\frac{1}{3}}$ .

2. Посмотрим на остальное.

$$\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} dx \leq \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{длина отрезка} \leq \text{этого}} \left( \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{10})} \right)^{2k}$$

если  $\frac{\pi}{10}$  не подойдет, то немного подвинуть.

Смотрим на вторую часть:

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{10}} \left( \frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} \underbrace{\leq}_{\text{т.к. функция убывает}} \frac{\pi}{10} \left( \frac{\sin(10\varepsilon)}{\sin \varepsilon} \right)^{2k} \underbrace{=}_{\text{считали в предыдущем пункте}} \frac{\pi}{10} 10^{2k} \underbrace{e^{-33k\varepsilon^2}}_{\text{быстро убывает}} \underbrace{e^{\mathcal{O}(k\varepsilon^4)}}_{\sim 1}$$

Метод работает в случае  $\int_a^b (f(x))^n$  и  $n \rightarrow \infty$ .

## 5. Ряды Фурье

## 5.1. Пространства Лебега

**Определение 5.1.**  $\mu$  – мера,  $p \geq 1$ .

$L^p(E, \mu) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ - измеримые, т.ч. } \int_E |f|^p d\mu < \infty\}$  – векторное пр-во.

$$\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Нер-во треугольника – нер-во Минковского:  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .
2. Неотрицательность:  $\|f\|_p \geq 0$ .
3. Константа выносится:  $\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$ .
4. Но в нуле не всегда значение равно нулю:  $\|f\|_p = 0 \Rightarrow$  интеграл от неотрицательной функции  $|f|^p$  равен нулю  $\Rightarrow f = 0$  **почти везде**.

Рассматриваем не функции, а классы эквивалентности с точностью до совпадения почти везде.

Проблема: нет значения функции в точке.

**Определение 5.2. Существенный супремум (esssup или rraisup)**

$a$  – существенный супремум функции  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,

если  $a = \inf\{c \in \mathbb{R} : f(x) \leq c \text{ при почти всех } x \in E\}$ .

**Свойства.** 1.  $\text{esssup } f \leq \sup f$

2.  $f(x) \leq \text{esssup } f$  при почти всех  $x$

**Доказательство.**  $a := \text{esssup } f \implies \exists e_n : \mu e_n = 0$  (т.е. существует мн-во  $e_n$  нулевой меры), т.ч.  $f(x) \leq a + \frac{1}{n}, \forall x \in E \setminus e_n$

$$e = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n, \mu e = 0 \text{ и } f(x) = a + \frac{1}{n}, \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq a \quad \forall x \in E \setminus e. \quad \square$$

**Определение 5.3.**  $L^\infty(E, \mu) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ - измеримые, т.ч. } \text{esssup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$  – векторное пр-во.

Заведем норму для данного векторного пр-ва:  $\|f\|_\infty := \text{esssup}_{x \in E} |f(x)|$ .

1. Константа выносится
2. Нер-во треугольника есть
3. Функция 0 почти везде, но все же не везде

Рассмотрим классы эквивалентности...

**Важный частный случай ( $X = \mathbb{N}$ )**

$X = \mathbb{N}$ ,  $\mu$ - считающая мера, тогда:

1.  $l^p = \{(x_1, x_2, \dots) \text{ - последовательность} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\}$

Норма в данном случае:  $\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

2.  $l^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) : \sup |x_k| < +\infty\}$

Норма в данном случае:  $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$

**Теорема 5.1. Вложение пространств Лебега**

Пусть  $\mu E < +\infty$  и  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ .

Тогда  $L^q(E, \mu) \subset L^p(E, \mu)$  и  $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot (\mu E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$

**Доказательство.** Пусть  $q < +\infty$ .

Напишем неравенство Гёльдера:

$$\int_E |f|^p \cdot 1 \, d\mu \leq \left( \int_E (|f|^p)^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \left( \int_E 1^{r'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{r'}} = (*)$$

$$\text{Здесь } \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad r = \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{1}{r'} = \frac{q-p}{q}.$$

Тогда  $(*) = (\|f\|_q)^p \cdot (\mu E)^{\frac{q-p}{q}}$   $\Rightarrow$  извлекаем корень  $p$ -ой степени слева и справа  $\|f\|_p \leq \|f\|_q (\mu E)^{\frac{q-p}{pq}}$

Пусть  $q = +\infty$ , тогда  $\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\mu \leq \int_E \|f\|_\infty^p \, d\mu = \mu E \|f\|_\infty^p$

**Замечание.** Для  $\mu E = +\infty$  вложений нет

□

**Теорема 5.2.**  $L^p(E, \mu)$  - полное, где  $1 \leq p \leq +\infty$ 

**Доказательство.** Только для  $p < +\infty$

Идейно, что хотим доказать: пространство является полным, если  $\forall$  фундаментальная последовательность сходится, и её предел принадлежит данному пространству.

Пусть  $f_n$  - фундаментальная последовательность функций. Мы знаем по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Выберем некоторую подпоследовательность  $f_{n_k}$ :

1. Берём  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ , по нему возьмем  $N_1$  из определения, далее определим  $n_1 := N_1$ .

2. Далее возьмем  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2}$ , по нему возьмем  $N_2$  из определения, далее определим  $n_2 := \max(N_2, n_1 + 1)$ .

И так далее.

Получилось, что  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , а также  $\|f_{n_k} - f_n\| < \frac{1}{2^k}$  при  $n \geq n_k$ , в частности  $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$  - так строили подпоследовательность.

Рассматрим  $\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p$ :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < 1$ .

Пусть  $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)|$ .  $S : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Пусть  $S_m(t) := \sum_{k=1}^m |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)|$  - частичная сумма.

$\|S_n\|_p \leq \|f_{n_1} - f_{n_2}\|_p + \|f_{n_2} - f_{n_3}\|_p + \dots + \|f_{n_m} - f_{n_{m+1}}\|_p < 1$  - норма суммы меньше суммы норм.

Следовательно:  $\|S_n\|_p < 1$  (\*).

Теперь рассмотрим  $\|S\|_p^p$ :

Напоминание (Лемма Фату): Если  $f_n \geq 0$ , то  $\int_E \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu$ .

$$\|S\|_p^p = \int_E |S(t)|^p dt = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_m(t)|^p dt \underset{\text{л. Фату}}{\leqslant} \lim \int_E |S_m(t)|^p dt = \lim \|S_m\|_p^p \underset{\text{т.к. верно (*)}}{\leqslant} 1.$$

Так как по определению  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  (т.е. предел  $S_n$  существует и равен  $S$ ), то  $\underline{\lim} = \lim = \bar{\lim}$ .

$$\Rightarrow \int_E |S(t)|^p dt < +\infty \Rightarrow S(t) < +\infty \text{ при почти всех } t \in E.$$

Тогда  $S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty$  – ряд из суммы неотрицательных слагаемых ограничен, значит он сходится. Если мы рассматриваем данный ряд без модулей, то такой ряд уже имеет абсолютную сходимость почти везде, а значит и обычную почти везде тоже.

Заметим, что:  $f_{n_1} + \sum_{k=1}^m (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = \sum_{k=2}^{m+1} f_{n_k} - \sum_{k=2}^m f_{n_k} = f_{n_{m+1}}$  – так как сумма ряда сходится почти везде, то  $f_{n_m}$  сходятся при почти всех  $t \in E \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} f_{n_m} = f$ .

Сейчас мы показали обычную сходимость, нужно показать сходимость по норме пр-ва, т.е.  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ :

Возьмём  $n \geq n_k$ , тогда:

$$\|f_n - f\| \leq \underbrace{\|f_n - f_{n_k}\|}_{\cdot < \frac{1}{2^k}} + \underbrace{\|f_{n_k} - f\|}_{\cdot < \frac{1}{2^k} (**)} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

Нужно показать, что  $(**)$  верно:

Мы уже знаем, что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{n_k} = f$  – почти везде, тогда рассмотрим  $\|f_{n_k} - f\|_p^p$ :

$$\|f_{n_k} - f\|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_{n_k} - f|^p d\mu \underset{(***)}{=} \int_E \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k} - f|^p}_{\text{Почти везде} = 0} d\mu$$

Выше мы использовали теорему Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости), для того, чтобы ее использовать в  $(***)$  нужно показать, что  $|f_{n_k} - f|^p \leq F$ , где  $F$  – некоторая суммируемая функция (т.е. искомая суммир. мажорантна):

Ранее мы уже показали, что  $f_{n_{m+1}} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^m (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$  – заметим, что если написать  $f_{n_k} + \sum_{i=k}^m (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_{m+1}}$ , то сумма не изменится. Тогда рассмотрим произвольное  $k$  и устремим  $m \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= f_{n_k} + \sum_{i=k}^{+\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(t) - f_{n_k}(t)| &= \left| \sum_{i=k}^{+\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \right| \leq \sum_{i=k}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \leq S(t) \underset{\text{т.к. ранее показали}}{\leq} +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall k : |f - f_{n_k}| &\leq S^p(t) < +\infty \end{aligned}$$

Получаем суммируемую мажорантну  $S^p(t) \Rightarrow$  переход  $(***)$  корректен. А значит и утверждение  $(**)$  тоже корректно, следовательно у нашей фундаментальной последовательности  $f_n$  есть сходимость по норме.

Осталось показать, что предел  $f = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_n$  принадлежит пространству  $\Leftrightarrow$  его норма конечна (см. опр.  $L^p(E, \mu)$ ):

Применим нер-во Минковского для  $f = f_{n_k} + \sum_{i=k}^{+\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ :

$$\begin{aligned} \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \underbrace{\left( \int_E |f_{n_k}|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_{\cdot < +\infty \text{ т.к. } f_{n_k} \in L^p(E, \mu)} + \underbrace{\left( \int_E |\Sigma|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_{\cdot \leq (\int_E |S(t)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < +\infty} < +\infty \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{т.к. } p < +\infty: \int_E |f|^p d\mu < +\infty \end{aligned}$$

Следовательно,  $f \in L^p(E, \mu)$ , чтд.  $\square$

**Определение 5.4.**  $(X, \rho)$  - метрическое пространство и  $A \subset X$ .  $A$  **всюду плотно** в  $X$  (или **плотно** в  $X$ ), если  $ClA = X$ .

**Пример.**  $X = \mathbb{R}$  и  $A = \mathbb{Q}$ .

**Определение 5.5.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется ступенчатой, если она измерима и у неё конечное число значений.

**Лемма.**  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\varphi$  ступенчатая  $\in L^p(E, \mu)$

Тогда  $\mu E\{\varphi \neq 0\} < +\infty$

**Доказательство.**  $|\varphi|$  - рассмотрим положительные значения, их конечное число, значит среди них есть наименьшее. Тогда на множестве  $E\{\varphi \neq 0\}$ ,  $|\varphi| \geq m$

Тогда  $\int_E |\varphi|^p d\mu = \int_{E\{\varphi \neq 0\}} |\varphi|^p d\mu \geq \int_{E\{\varphi \neq 0\}} m^p d\mu = m^p \mu E\{\varphi \neq 0\}$   $\square$

**Теорема 5.3.**  $1 \leq p \leq +\infty$

Тогда множество ступенчатых функций из  $L^p(E, \mu)$  плотно в  $L^p(E, \mu)$ .

**Доказательство.** Идейно данная теорема утверждает, что любая функция из  $L^p(E, \mu)$  сколь угодно хорошо может быть приближена ступенчатыми функциями.

1.  $p = +\infty$ . Идейно: хотим д-ть, что замыкание мн-ва ступенчатых ф-й является всем мн-вом  $L^p(E, \mu)$  (**def:** замыкание – это мн-во предельных точек), т.е. нужно показать, что любая точка мн-ва  $L^p(E, \mu)$  является предельной для мн-ва ступенчатых функций  $\Rightarrow$  любая функция  $f \in L^p(E, \mu)$  сколь угодно хорошо приближается ступенчатыми функциями.

Возьмём  $f \in L^\infty(E, \mu)$ ,  $f \geq 0$ . Выберем такую  $f$ , что она ограничена (всегда можем так сделать, так как мы рассматриваем класс эквивалентности, значит нужно выбрать ограниченного представителя данного класса). Тогда существует возрастающая последовательность простых  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$ , таких, что  $\varphi_n \rightrightarrows f$  - теорема из теории меры (простые подходят под определение ступенчатых ф-й).

Тогда  $\|\varphi_n - f\|_\infty = \sup_{t \in E} |f(t) - \varphi_n(t)| \rightarrow 0$  из равномерной сходимости.

Если  $f$  произвольная, то расписываем ее как  $f = f_+ - f_-$  (для них существуют  $\varphi_n$  и  $\psi_n$ , равномерно сходящиеся к  $f_+$  и  $f_-$  соответственно):

Здесь  $\|\varphi_n - f_+\|_\infty \rightarrow 0$  и  $\|\psi_n - f_-\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|(\varphi_n - \psi_n) - (f_+ - f_-)\|_\infty \rightarrow 0$

Таким образом, мы показали, что  $\forall f \in L^\infty(E, \mu)$ :  $f$  – предельная точка мн-ва ступенчатых функций, значит замыкание мн-ва ступенчатых ф-й действительно совпадает с  $L^\infty(E, \mu)$ .

2.  $p < +\infty$ . Возьмём  $f \in L^p(E, \mu)$ ,  $f \geq 0 \Rightarrow$  существуют ступенчатые  $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$ , такие, что  $\lim \varphi_n = f$  (равномерной сходимости может не быть, так как нет условия, что  $f$  ограниченная).

$\|f - \varphi_n\|_p^p = \int_E |f(t) - \varphi_n(t)|^p d\mu \rightarrow \int_E \lim |f(t) - \varphi_n(t)|^p d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$ . Опять же нужна суммируемая мажорантна (чтобы под интегралом можно было сделать предельный переход), но она есть, потому что  $0 \leq \varphi_n \leq f$  ( $|f(t) - \varphi_n(t)|^p$  – неотрицательная ф-я, стремящаяся к 0,  $f^p$  – её мажоранта). Тогда  $|f - \varphi_n|^p \leq f^p$

Для произвольной опять  $f_+$  и  $f_-$  (берем для них последовательности ф-й  $\varphi_n$  и  $\psi_n$ ):

$$\|(\varphi_n - \psi_n) - f\|_p \leq \|\varphi_n - f_+\|_p + \|\psi_n - f_-\|_p$$

□

**Определение 5.6.**  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – финитная функция, если она тождественно равна нулю вне некоторого компакта (т.е. мн-во  $\{f \neq 0\}$  ограничено).

**Пример.** Индикаторная функция отрезка

**Теорема 5.4.**  $1 \leq p < +\infty$  и  $E \in \mathbb{R}^d$  измеримо.

Тогда множество финитных бесконечно дифференцируемых функций плотно в  $L^p(E, \lambda)$  ( $\lambda$  – мера Лебега).

**Доказательство.** Для приближения непрерывными финитными функциями.

$f$  приближается ступенчатыми функциями, поэтому достаточно научиться приближать только их, то есть достаточно научится приближать функции  $\mathbb{1}_A$ , где  $A$  – измеримое и конечной меры.

Рассмотрим  $\mathbb{1}_A$ , найдётся  $K$  – компакт и  $G$  – открытое, такие, что  $K \subset A \subset G$  и  $\lambda(G \setminus K) < \varepsilon$ .  
 $\varphi(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^d \setminus G)}{d(x, K) + d(x, \mathbb{R}^d \setminus G)}$ .

По определению  $d(x, B) = \inf_{y \in B} \rho(x, y)$ .

$\varphi(x) = 0$ , если  $x \notin G$  и  $\varphi(x) = 1$ , если  $x \in K$  и в целом  $\varphi \in [0, 1]$

Тогда  $\|\varphi - \mathbb{1}_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) - \mathbb{1}_A(x)|^p dx = \int_{G \setminus K} \underbrace{|\varphi(x) - \mathbb{1}_A(x)|^p}_{\leq 1} dx \leq \lambda(G \setminus K) < \varepsilon$  □

**Определение 5.7.**  $h \in \mathbb{R}^d, f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

Тогда  $f_h$  – сдвиг  $f$ , если  $f_h(x) = f(x + h)$

**Теорема 5.5. О непрерывности сдвига**

1. Если  $f$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}^d$ , то  $\|f_h - f\|_\infty \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$
2. Если  $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , то  $\|f_h - f\|_p \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$
3. Если  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна и  $2\pi$  периодична, то  $\|f_h - f\|_\infty \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$

**Доказательство.** 1. 1 и 3 пункт – определение равномерной непрерывности:

Для 1:  $\|f_h - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_h(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x + h) - f(x)| \rightarrow 0$  – по опр. равномерной непрерывности.

Для 3: Непрерывна +  $2\pi$ -периодична  $\Rightarrow$  равномерно непрерывна, так как мы можем сузить рассматриваемую функцию на 2 периода  $\Rightarrow$  получим компактное мн-во. Так как непрерывная ф-я на компакте равномерно непрерывна, то получаем утв. данного пункта.

2. Возьмём  $\varepsilon > 0$  и  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  финитную функцию, что  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ ,  $\{g \neq 0\} \subset B_R(0)$  (по предыдущей теореме мн-во финитных беск. дифф. функций плотно, значит существует  $g$  сколь угодно близкая к  $f$ ).

$$\|f_h - f\|_p \leq \underbrace{\|f_h - g_h\|_p}_{\cdot \leq \varepsilon (*)} + \|g_h - g\|_p + \underbrace{\|g - f\|_p}_{\cdot \leq \varepsilon} \leq 2\varepsilon + \|g_h - g\|_p.$$

(\*): Так как  $f_h(x) = f(x+h)$ ,  $g_h(x) = g(x+h)$  (аргументы сдвинули одинаково у обеих функций) и  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ , то для сдвигов нер-во  $\leq \varepsilon$  тоже верно.

Теперь хотим доказать, что  $\|g_h - g\|_p \leq \varepsilon$ :

$$\|g_h - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |g_h(x) - g(x)|^p d\lambda = (*).$$

$g$  нулится вне  $B_R(0)$ ,  $g_h(x) = g(x+h)$  при малых  $h$  нулится вне круга  $B_{R+1}(0)$ , значит можно интегрировать по кругу  $B_{R+1}(0)$ :

$$(*) = \int_{B_{R+1}(0)} |g(x+h) - g(x)|^p dx \leq \lambda B_{R+1}(0) \cdot \underbrace{\sup_{\|g_h - g\|_\infty \rightarrow 0} |g(x+h) - g(x)|}_{(**)}$$

(\*\*): Функция  $g$  непрерывна и задана в круге  $B_R(0)$ , при этом данный круг является компактом  $\Rightarrow g$  равномерно непрерывна в данном круге. При этом вне этого круга  $g$  нулится  $\Rightarrow g$  равномерно непрерывна в  $\mathbb{R}^d$ . Следовательно, можно воспользоваться 1-ым пунктом данной теоремы.

□

## 5.2. Гильбертовы пространства

**Замечание.** Скалярное произведение.  $H$  - векторное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$

Тогда  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \bar{0}$
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
4.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \forall x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$  (заметим, что  $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ )

**Определение 5.8.**  $H$  гильбертово, если в нём есть скалярное произведение и оно полное.

**Пример.** 1.  $l^2$ , в нём  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

2.  $L^2(E, \mu)$ , в нём  $\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu$

3.  $\mathbb{R}^d(\mathbb{C}^d)$ , в нём  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k \bar{y}_k$

**Лемма.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится, то  $\langle \sum_{n=1}^{\infty} x_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle$

**Доказательство.**  $S_n = \sum_{k=1}^n x_n \rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} x_n \Rightarrow \underbrace{\langle S_n, y \rangle}_{=\langle \sum_{k=1}^n x_k, y \rangle} = \sum_{k=1}^n \langle x_k, y \rangle \rightarrow \langle S, y \rangle$  □

**Определение 5.9.**  $x \perp y$  ортогональны, если  $\langle x, y \rangle = 0$

**Определение 5.10.** Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$  ортогональный, если  $x_n \perp x_k \forall k \neq n$

**Замечание.** Если  $x_n \neq 0$  и попарно ортогональны, то они линейно независимы

**Доказательство.** Пусть  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$ . Тогда  $\langle c_1x_1 + \dots + c_nx_n, x_k \rangle = 0$ . Раскроем по линейности  $\sum_{j=1}^n c_j \langle x_k, x_k \rangle = 0 = c_k \langle x_k, x_k \rangle \implies c_k = 0$   $\square$

**Теорема 5.6.** Пусть  $H$  - гильбертово пространство,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  - ортогональный ряд, где  $x_n \in H$ .

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  - сходится  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty$

**Доказательство.**  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k, C_n = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$

Пространство полно, есть критерий Коши.

$S_n$  - сх-ся  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : \|S_n - S_m\| < \varepsilon$ .

$C_n$  - сх-ся  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m \geq N : C_m - C_n < \varepsilon$  (будем считать, что  $m > n$ ).

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=n+1}^m x_k, \sum_{k=n+1}^m x_k \right\rangle = \\ &= \sum_{k=n+1}^m \sum_{j=n+1}^m \underbrace{\langle x_k, x_j \rangle}_{\text{пользуемся ортогональностью ряда}} = \sum_{k=m+1}^n \langle x_k, x_k \rangle = \\ &= \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|^2 = C_m - C_n \iff C_n \text{ - фундаментальная последовательность} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty \end{aligned} \quad \square$$

**Следствие.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходящийся ортогональный ряд в гильбертовом пространстве  $H$ , а  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - перестановка.

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$  сходится к той же сумме

**Доказательство.** 1. Сходимость:

$S = \sum x_n$  - сходится  $\iff \sum \|x_n\|^2$  - сходится  $\iff \sum \|x_{\varphi(n)}\|^2$  - сходится  $\iff \sum x_{\varphi(n)} = \tilde{S}$  - сходится.

2. Сумма сохраняется:

$$\begin{aligned} \text{Посмотрим на } \|S - \tilde{S}\|^2 &= \langle S - \tilde{S}, S - \tilde{S} \rangle = \langle S, S \rangle + \langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle - \langle S, \tilde{S} \rangle - \langle \tilde{S}, S \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, x_k \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(k)} \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, x_{\varphi(k)} \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_k \rangle = (*) \end{aligned}$$

Воспользуемся ортогональностью:

- (a)  $\langle x_n, x_k \rangle \neq 0 \iff n = k$
- (b)  $\langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(k)} \rangle \neq 0 \iff n = k$
- (c)  $\langle x_n, x_{\varphi(k)} \rangle \neq 0 \iff n = \varphi(k)$
- (d)  $\langle x_{\varphi(n)}, x_k \rangle \neq 0 \iff \varphi(n) = k$

Тогда можем переписать как:

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \rangle = 0$$

$\square$

**Определение 5.11.**  $x_1, x_2, \dots$  ортогональная система, если они попарно ортогональны и  $x_n \neq 0 \forall n$

**Определение 5.12.**  $x_1, x_2, \dots$  ортонормированная система, если они попарно ортогональны и  $\|x_n\| = 1 \forall n$

**Замечание.** Эти системы линейно независимы

**Пример.** 1.  $l^2, e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ое место}}, 0, \dots, 0)$  - ортонормированная система.

2.  $L^2[0, 2\pi]$ , ортогональная система  $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$
3.  $L^2[0, 2\pi]$ , ортогональная система  $e^{int}, n \in \mathbb{Z}$   
А  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$  - ортонормированная система
4.  $L^2[0, \pi]$ , ортогональная система  $1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots$
5.  $L^2[0, \pi]$ , ортогональная система  $\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$

**Теорема 5.7.** Пусть  $e_1, e_2, \dots$  ортогональная система в  $H$  и  $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$ .

$$\text{Тогда } c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} \left( = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} \right)$$

**Доказательство.**  $\langle x, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \langle e_j, e_k \rangle = c_k \langle e_k, e_k \rangle = c_k \|e_k\|^2$  □

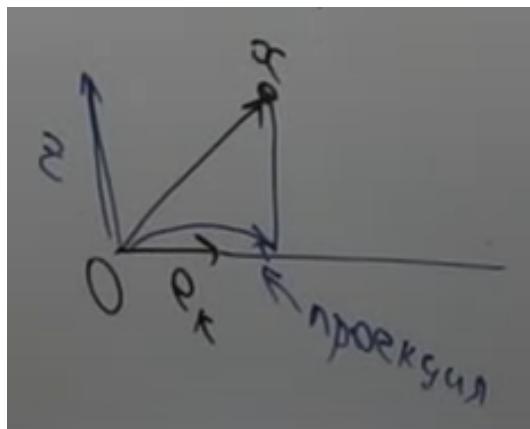
**Определение 5.13.** Пусть  $e_1, e_2, \dots$  - ортогональная система в  $H$  и  $x \in H$ . Назовём  $c_k(x) = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$  коэффициентом Фурье для вектора  $x$  по ортогональной системе  $\{e_n\}$

А  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$  - ряд Фурье

**Замечание.** 1. Если  $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ , то этот ряд - ряд Фурье.

2.  $k$ -ое слагаемое ряда Фурье - это проекция вектора  $x$  на прямую, идущую в направлении  $e_k$

То есть  $x = c_k(x) e_k + z$ , где  $z \perp e_k$



**Теорема 5.8. о частичных суммах ряда Фурье**

$x \in H$ ,  $\{e_n\}$  ортогональная система и  $S_n = \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k$  - частичная сумма ряда Фурье для  $x$ .  $L_n$  - линейная оболочка  $\{e_1, \dots, e_n\}$

Тогда:

1.  $S_n$  - ортогональная проекция  $x$  на  $L_n$ , то есть  $x = S_n + z$ , где  $z \perp L_n$
2.  $S_n$  - наилучшее приближение к  $x$  в  $L_n$ , т.е.  $\|x - S_n\| = \min_{y \in L_n} \|x - y\|$
3.  $\|S_n\| \leq \|x\|$

**Доказательство.** 1.  $z = x - S_n$ , надо доказать, что  $z \perp L_n$ , то есть  $z \perp e_j$  при  $j = 1, \dots, n$

$$\langle z, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle S_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - c_j(x) \langle e_j, e_j \rangle = 0$$

$$2. x - \underbrace{y}_{\in L_n} = \underbrace{S_n + z - y}_{z \perp L_n} = z + (S_n - y)$$

Тогда  $\|x - y\|^2 = \|\underbrace{S_n - y}_{\in L_n} + \underbrace{z}_{\perp L_n}\|^2 = \|z\|^2 + \|S_n - y\|^2 \geq \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$  и равенство  
 $\iff y = S_n$

$$3. x = S_n + z \text{ и } z \perp S_n = (*)$$

Тогда  $\|x\|^2 = \|S_n + z\|^2 = \underbrace{\|S_n\|^2 + \|z\|^2}_{\text{т.к. } (*)} \geq \|S_n\|^2$

□

### Следствие. Неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$$

**Доказательство.**  $\|x\|^2 \geq \|S_n\|^2 = \langle \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k, \sum_{k=1}^n c_k(x) e_k \rangle = \sum_{k=1}^n |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$  и  $n \rightarrow \infty$

□

### Теорема 5.9. Рисса-Фишера

$H$  - гильбертово пространство,  $\{e_n\}$  - ортогональная система в  $H$  и  $x \in H$ . Тогда:

1. Ряд Фурье  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$  сходится

2.  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n + z$ , где  $z \perp e_n \forall n$

3.  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n \iff \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2$

**Доказательство.** 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$  - сходится  $\iff \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n(x) e_n\|^2}_{=\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2} < +\infty$

2.  $z = x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$

$$\langle z, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - c_n(x) \langle e_n, e_n \rangle = 0$$

3.  $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k + z$ , где  $z \perp e_n \forall n$

Тогда  $\|x\|^2 = \|z\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ , то есть  $z = 0 \iff \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$

□

**Замечание.**  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$  - это ортогональная проекция на  $Cl(Lin\{e_n\})$ , где  $Lin\{\dots\}$  – линейная оболочка векторов.

**Замечание.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2 < +\infty$ , то найдётся  $x \in H$ , для которого  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$  - ряд Фурье

**Определение 5.14.**  $\{e_n\}$  - ортогональная система в  $H$

1.  $\{e_n\}$  - базис, если  $\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$

2.  $\{e_n\}$  - полная, если из того, что  $z \perp e_n \forall n \implies z = 0$

3.  $\{e_n\}$  - замкнутая, если  $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2$

**Теорема 5.10.**  $\{e_n\}$  ортогональная система в  $H$ . Следующие условия равносильны:

1.  $\{e_n\}$  - базис
2.  $\{e_n\}$  - полная
3.  $\{e_n\}$  - замкнутая
4.  $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \overline{c_n(y)} \|e_n\|^2$
5.  $Cl Lin \{e_n\} = H$

**Доказательство.** 1. 4  $\implies$  3

Берём  $x = y$

2. 1  $\implies$  4

$$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k, \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \overline{c_n(y)} \|e_n\|^2$$

3. 3  $\implies$  2

Возьмём  $z \perp e_n \forall n$ . Тогда  $\|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|c_n(z)|^2}_{=0} \|e_n\|^2 = 0 \implies z = 0$

4. 2  $\implies$  1

Рисс-Фишер  $\implies x = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k$  и  $z \perp e_n \forall n$ , то есть по пункту  $z = 0$ .

5. 1  $\implies$  5

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) e_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^n c_k(x) e_k}_{\in Lin \{e_n\}} \implies$$

$\implies \lim \in Cl Lin \{e_n\} \implies x \in Cl Lin \{e_n\} \implies H \subset Cl Lin \{e_n\}$  – так как  $x$  произвольный вектор из  $H$ .

6. 5  $\implies$  2

Пусть  $z \perp e_n \forall n$ . Тогда  $z \perp Lin \{e_n\} \implies z \perp Cl Lin \{e_n\} = H \implies z \perp z \implies z = 0$

□

**Пример.** Ортогональные системы

1. Функция Радемахера  $L^2[0, 1]$

$$r_k(t) = (-1)^{\lceil 2^k t \rceil}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Это ортонормированная система, покажем это:

$$\mathbb{1}_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}(t) r_n(t) = 0 \text{ и } \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = 0$$

Она не полная:  $r_1 r_2 \perp r_n \forall n$

2. Функция Уолша. Пространство  $L^2[0, 1]$

$$A \subset \mathbb{N} \text{ и } \#A < +\infty. \text{ Пусть } w_A(t) = \prod_{k \in A} r_k(t)$$

Это ортонормированная система:

$$\langle w_A, w_B \rangle = \langle w_{A \setminus B}, w_{B \setminus A} \rangle = \int_0^1 \prod_{i \in A \setminus B} r_i(t) dt = 0$$

Это полная система  $Cl Lin w_A = L^2[0, 1]$

$$Lin_{A \subset \{0, 1, \dots, n\}} w_A = Lin_{j=0, 1, \dots, 2^n - 1} \mathbb{1}_{[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]} \text{. Тогда } Lin w_A = Lin \mathbb{1}_{(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})}$$

### 3. Функции Хаара. Пространство $L^2[0, 1]$

(a)  $h_0(t) \equiv 1$

(b)  $h_1(t) = \begin{cases} +1, & \text{на } [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{на } [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$

(c)  $h_2(t) = \begin{cases} +1, & \text{на } [0, \frac{1}{4}) \\ -1, & \text{на } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{cases}$

(d)  $h_3(t) = \begin{cases} +1, & \text{на } [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -1, & \text{на } [\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$

(e) ...

Это ортогональная система и полная система

$$\text{Lin}\{h_0, h_1, \dots, h_{2n}\} = \text{Lin} \mathbf{1}_{[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})}$$

#### Замечание. Ортогонализация Грамма-Шмидта

$\{x_1, x_2, \dots\}$  линейно независимые вектора.

Тогда существуют  $\{e_1, e_2, \dots\}$  - ортонормированная система, т.ч.:  $\text{Lin}\{e_1, \dots\} = \text{Lin}\{x_1, x_2, \dots\}$

Если  $f_1, f_2, \dots$  тоже ортонормированная система с тем же свойством, то  $f_k = \lambda_k e_k$ , где  $|\lambda_k| = 1$

**Замечание.** Пусть  $w : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  измеримая, т.ч.  $t^n w(t)$  - суммируемая на  $\mathbb{R} \forall n$ . Определим меру  $\mu_A = \int_A w d\lambda$  и пространство будет  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$

Если  $f \perp g$  в таком пространстве, то они ортогональны с весом  $w$

Рассмотрим последовательность мономов  $1, t, t^2, \dots \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ , они линейно независимы.

Тогда мы можем прокрутить ортогонализацию Грамма-Шмидта на этой последовательности мономов. Получим последовательность многочленов  $p_0, p_1, \dots$ . Мы понимаем, что  $\langle p_i, p_j \rangle = 0 \forall i \neq j$ . А ещё  $\deg p_n = n$  - по индукции.

Получившиеся многочлены называют ортогональными многочленами с весом  $w$ .

#### Пример. Ортогональные многочлены.

##### 1. Многочлены Лежандра. Пространство $L^2(-1, 1)$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} ((t^2 - 1)^n)^{(n)}, \text{ считаем, что } n > k:$$

$$\begin{aligned} \langle P_k, P_n \rangle &= \underbrace{\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!}}_{=C} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} ((t^2 - 1)^n)^{(n)} dt = \\ &= C \left( ((t^2 - 1)^k)^{(k)} \cdot ((t^2 - 1)^n)^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k+1)} ((t^2 - 1)^n)^{(n-1)} dt \right) = \dots \\ &= \pm C \int_{-1}^1 \underbrace{((t^2 - 1)^k)^{(2k+1)}}_{=0} ((t^2 - 1)^n)^{(n-k-1)} dt = 0 \end{aligned}$$

##### 2. Многочлены Чебышёва первого рода. Пространство $L^2((-1, 1), w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}})$

$T_n(t) = \cos(n \arccos t)$  - оказывается, что это многочлен. Проверить можно по индукции.

$$\langle T_k, T_n \rangle = \int_{-1}^1 \cos(k \arccos t) \cdot \cos(n \arccos t) \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = (*)$$

Пусть  $x = \arccos t$ . Тогда  $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$(*) = \int_0^\pi \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$$

3. Многочлены Чебышёва второго рода. Пространство  $L^2((-1, 1), w(t) = \sqrt{1 - t^2})$

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\langle U_k, U_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\sin((k+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\sin((n+1) \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^\pi \sin((n+1)x) \sin((k+1)x) dx = 0$$

такая же замена.

4. Многочлены Лагерра. Пространство  $L^2((0, +\infty), w(t) = e^{-t})$

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t (t^n e^{-t})^{(n)}$$

Ортогональность проверяется также, как в Лежандре - интегрированием по частям.

5. Многочлены Эрмита. Пространство  $L^2(\mathbb{R}, w(t) = e^{-t^2})$

$$H_n(t) = e^{t^2} (e^{-t^2})^{(n)}$$

Ортогональность проверяется опять интегрированием по частям.

**Определение 5.15.**  $(X, \rho)$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ , и есть точка  $x \in X$ . Назовём расстоянием от  $x$  до  $A$  (или наилучшим приближением к  $x$  в множестве  $A$ ):

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

**Определение 5.16.** Элемент  $y^* \in A$  элемент наилучшего приближения, если  $\rho(x, y^*) = d(x, A)$

**Теорема 5.11. о существовании наилучшего приближения в гильбертовом пространстве**

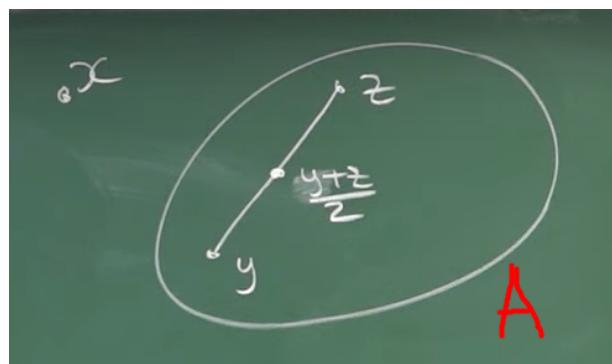
$H$  - гильбертово пространство,  $A \subset H$  - выпуклое и замкнутое и  $x \in H$ .

Тогда в  $A$  существует единственный элемент наилучшего приближения.

**Лемма.**  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

**Доказательство.** Теоремы.

Пусть  $d = d(x, A)$  – оно конечно. Возьмём  $y, z \in A$ , тогда  $\frac{y+z}{2} \in A$  из выпуклости.



$$\underbrace{\|2\left(x - \frac{y+z}{2}\right)\|^2}_{=4\|x - \frac{y+z}{2}\|^2} + \|y - z\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 \geq 4d^2 \text{ – подставили в лемму } x - y \text{ и } x - z.$$

$$\text{Отсюда } \|y - z\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\|x - \frac{y+z}{2}\|^2 \leq 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4d^2$$

### 1. Единственность:

Если  $\|x - y\|^2 = d$  и  $\|x - z\|^2 = d$ , то  $\|y - z\|^2 \leq 0 \implies y = z$

**2. Существование:**

Возьмём  $y_n$ , т.ч.  $\|x - y_n\| \rightarrow d$ , то есть  $\|x - y_n\|^2 < d^2 + \varepsilon$ .

Тогда  $\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2 < 4\varepsilon$ , значит это фундаментальная последовательность и у нее есть предел  $y^* \in A$ , поскольку  $A$  – замкнуто.

$$\|x - y^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d.$$

□