

Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

29 марта 2023 г.

Содержание

1. Теория меры	1
1.1 Система множеств	2
1.2 Объем и мера	6
1.3 Продолжение мер	9
1.4 Мера Лебега	13
2. Интеграл Лебега	19
2.1 Измеримые функции	20
2.2 Последовательности измеримых функций	23
2.3 Определение интеграла	26
2.4 Суммируемые функции	29
2.5 Предельный переход под знаком интеграла	34
2.6 Произведение мер	36
2.7 Замена переменной	42
3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы	46
3.1 Собственные интегралы с параметрами	47
3.2 Несобственные интегралы с параметрами	49
3.3 В- и Г-функции Эйлера	54
3.4 Криволинейные интегралы	57
3.5 Точные и замкнутые формы	64
4. ТФКП	70
4.1 Голоморфные функции	71
4.2 Теоремы единственности	78
4.3 Аналитическое продолжение	81
4.4 Ряды Лорана	84
4.5 Вычеты	91
4.6 Конформные отображения	102
4.7 Производящие функции	107

5. Ряды Фурье	114
5.1 Пространства Лебега	115

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные обозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B , такие что $A \cap B = \emptyset$

Определение 1.1. Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

Определение 1.2. E – мн-во; если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E .

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

Определение 1.3. \mathcal{A} – система подмн-в X : $A \subset 2^X$

1. (δ_0) : если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0) : если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ) : если $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ) : если $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Определение 1.4. \mathcal{A} – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Утверждение 1.1. Если \mathcal{A} – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$.

Доказательство. $A_{\alpha \in I} \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ □

Определение 1.5. \mathcal{A} – алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симметр., $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\forall A, B \in \mathcal{A}: A \cup B \in \mathcal{A}$ (по утв. 1.1 $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$; смотри [опр. алгебры](#)).

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

Определение 1.6. \mathcal{A} - σ -алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симм., $\emptyset \in \mathcal{A}$ и свойство (σ) выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множеств; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$).

Замечание. σ -алгебра \implies алгебра.

Пример. 1. 2^X - σ -алгебра.

2. $X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{A} - всевозможные [огр. подмн-ва](#) \mathbb{R}^2 и их дополнения. (\mathcal{A} – алгебра, но не σ -алгебра).

Рем: ограничение – в метрич. пр-ве это множество ограниченного диаметра ($d(x, y) := \|x - y\|$), т.е. $\sup\{d(x, y) | x, y \in X\}$ – ограничен.

3. \mathcal{A} - алгебра (σ -алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ -алгебра).

4. Пусть \mathcal{A}_α – алгебры (σ -алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ -алгебра).
5. $A, B \subset X$ ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей A, B :
- $$\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A).$$

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X , тогда существует наименьшая по включению σ -алгебра (алгебра) \mathcal{A} , такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. \mathcal{A}_α – всевозможные σ -алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon. \text{ Теперь проверим, что } \mathcal{A} \text{ – наим. по вкл. } \mathcal{A} \subset A_\alpha \forall \alpha \in I.$$

Определение 1.7. 1. Такая σ -алгебра – борелевская оболочка ϵ – $(\mathcal{B}(\epsilon))$.

2. $X = \mathbb{R}^n$; такая σ -алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская σ -алгебра (\mathcal{B}^n) .

Замечание. $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

□

Определение 1.8. R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$.

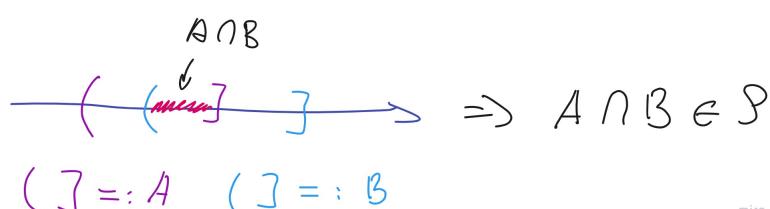
Замечание. Кольцо $+ (X \in R) \implies$ алгебра.

Определение 1.9. P – полукольцо, если

1. $\emptyset \in P$
2. $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$
3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in P$, такие что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

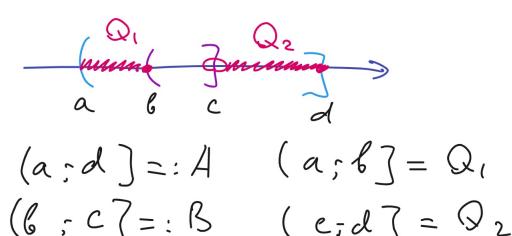
Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

Свойство 2:



miro

Свойство 3:



miro

Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}.$

Доказательство. $\supset:$ Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \emptyset \implies B_n \cap B_m = \emptyset.$

$\subset:$ Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m , такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. \square

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n . База – опр. полукольца. Переход ($n \rightarrow n+1$):

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$$

\square

Замечание. В (2) можно писать $n = \infty$.

Определение 1.10. \mathcal{P} – полукольцо подмн-ва X .

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-ва Y .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколоц.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколоц – полукольцо.

Доказательство.

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

\square

Замечание. Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

Определение 1.11. Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

Открытый параллелепипед:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_m, b_m)$$

Ячейка:

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_m, b_m]$$

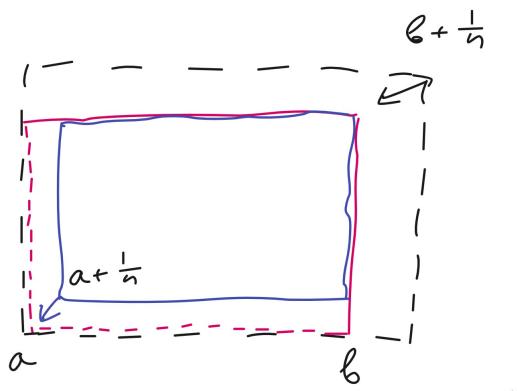
Теорема 1.5. Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$$P_n \supset P_{n+1} \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$$

$$Q_n \subset Q_{n+1} \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$$



□

Обозначения: \mathcal{P}^m – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m .

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m с рациональными координатами вершин.

Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ – полукольца.

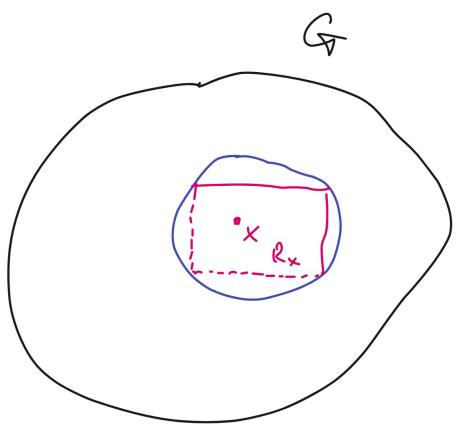
Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m = \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^{m-1} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^1$$

□

Теорема 1.7. $G \neq \emptyset$ – открытое множество в \mathbb{R}^m . Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объединение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатами вершинами).

Доказательство. R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$, $x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.



□

Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

G – открытое $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \supset \mathcal{B}^m$

□

1.2. Объем и мера

Определение 1.12. \mathcal{P} – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup_{k=1}^n P_k) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Определение 1.13. μ – мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu \underbrace{\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \right)}_{\text{счетная аддитивность}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\emptyset = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. \mathcal{P}^1 , $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – нестрого монотонная

(а) $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).

3. \mathcal{P}^m (m-мерные ячейки), $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$, $a := (a_1, \dots, a_m)$, $b := (b_1, \dots, b_m)$ – классический объем.

4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} a, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

μ – мера.

5. \mathcal{P} – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

μ – объем, но не мера.

Теорема 1.8. μ – объем на полукольце \mathcal{P}

1. Монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$

2. (а) Усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$
 (б) Пункт (а), но $n = \infty$

3. Полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство. 1. Очев типо.

$$2. \text{ (a)} \quad P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$\text{(b)} \quad \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$$

$$3. P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P} \quad (\mathcal{P} - \text{полукольцо}), \quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\leq \mu P'_k \leq \mu P_k \text{ (свойство 2(a))}} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

Замечание. 1. Если \mathcal{P} – кольцо и A, B ($B \subset A$) $\in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$$

$$\text{Если } \mu B \neq +\infty, \text{ то } \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$$

Теорема 1.9. \mathcal{P} – полукольцо подмн-в X , μ – объем на \mathcal{P}

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-в Y , ν – объем на \mathcal{Q}

$$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q, \text{ где } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$$

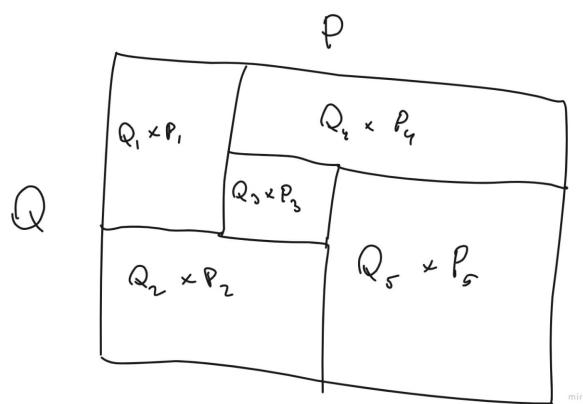
Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, тогда:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j, \text{ докажем, что } \underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$$

Общий случай.



$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.
(Rem: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ – непрерывность слева).
3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.
4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множество, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \rightarrow \mu$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

1. $\sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (*)$.
 2. $\sum_{k: t_k \in A} w_k (**)$.
 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (***)$.
1. $\mu A = \sum_{k: t_k \in A} w_k (**) \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (*)$ – т.к. $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($\forall i, j : i \neq j$), то каждое слагаемое w_k не более 1 раза попадет в $(*)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k (***) \geq \sum_{k: t_k \in A}$ – нер-во верно, так как мы можем к каждому w_k из $(**)$ найти этот же w_k в $(***)$.

Итого имеем равенство:

$$(**) = (***) : \sum_{k: t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n, \text{ чтд.}$$

(От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

□

Теорема 1.10. (О счетной аддитивности меры).

μ – объем на полукольце \mathcal{P} . Тогда μ -мера \Leftrightarrow если $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P, P_n \in \mathcal{P}$, то $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$ (счетная полуаддитивность).

Доказательство. " \Leftarrow ": Пусть $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$, тогда надо д-ть, что $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$: для " \leq " – счетная полуаддитивность, для " \geq " – усиленная монот. объема.

" \Rightarrow ": $P'_n := P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n}$ – усиленная монот. объема. $\bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$. □

Следствие. Если μ – мера на σ -алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

Доказательство. $\mu A_n = 0 \implies \mu (\bigcup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$. □

Теорема 1.11. (О непрерывности меры снизу).

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} . Тогда μ – мера \Leftrightarrow если $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$, то $\mu (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ – непр. меры снизу.

Доказательство. " \Rightarrow ": $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $A_0 = \emptyset$.

B_n – дизъюнктыны: $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\mu(\bigcup A_n) = \mu \bigsqcup B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \lim \mu A_n.$$

" \Leftarrow ": Пусть $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$$A_n := \bigsqcup_{k=1}^n C_k, \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{=\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n)} = \lim \mu A_n = \lim \mu(\bigsqcup_{k=1}^n C_k) = \lim \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$$

□

Теорема 1.12. (О непрерывности меры сверху).

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} и $\mu X < +\infty$.

Тогда равносильны:

1. μ – мера
2. если $A_n \supset A_{n+1}$, то $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim \mu A_n$
3. если $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\lim \mu A_n = 0$.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2): $A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\Rightarrow \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)}_{\mu(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3) \Rightarrow (1): $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$, $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, тогда $\lim \mu A_n = 0$.

$$C = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu C = \sum_{k=1}^n \mu C_k + \mu A_n.$$

□

Следствие. Если μ – мера, $A_n \supset A_{n+1}$ и существует m , такое что $\mu A_m < +\infty$, тогда $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Просто берем $X := A_m$ и пользуемся теоремой о непрерывности меры сверху.

□

Упражнение. Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

1.3. Продолжение мер

Определение 1.14. $\nu : 2^X \rightarrow [0; +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu \emptyset = 0$
2. монотонность: если $A \subset B$, $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

Замечание. 1. счетная полуаддитивность \Rightarrow конечная.

2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности) $A \subset B$, $n = 1$.

Определение 1.15. μ – полная мера на σ -алгебре \mathcal{A} , если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$.

Замечание. это означает, что $\mu A = 0$.

Определение 1.16. ν – субмера, назовем $E \subset X$ ν -измеримым, если $\forall A \subset X \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

Замечание. Достаточен знак " \geq " (следует из счетной полуаддитивности).

Теорема 1.13. Каратаедори.

Пусть ν – субмера. Тогда все ν -измеримые мн-ва образуют σ -алгебру и сужение ν на эту σ -алгебру – это полная мера.

Доказательство. Обозначим через \mathcal{A} ν -измеримые мн-ва.

1. Если $E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.

$$\forall A \subset X, \nu A \underset{?}{\geq} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$$

$A \cap E \subset E, \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$, тогда доказали вопросик сверху.

2. \mathcal{A} – симметричное семейство мн-в.

$$E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$A \cap E = A \setminus (X \setminus E)$$

$$A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$$

3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\nu(A \cap E)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \cap F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} + \nu((A \setminus E) \setminus F) \geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \nu(A \setminus (E \cup F))$$

4. \mathcal{A} – алгебра.

5. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathcal{A} \underset{?}{\implies} E \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \nu A &= \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^n E_k) \geq \underbrace{\nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies \\ &\implies \nu A \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E). \end{aligned}$$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $E \in \mathcal{A}$.

7. \mathcal{A} – σ -алгебра.

8. ν – мера на \mathcal{A} .

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \underset{?}{\implies} \nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n.$$

Докажем, что $\nu E \geq \sum_{k=1}^n \nu E_k$ (т. к. \leq уже есть из определения субмеры). Знаем, что $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu E_k$

□

Определение 1.17. μ – мера на полукольце \mathcal{P} , $A \subset X$.

$$\mu^*A := \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \wedge A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\}$$

если покрытия нет, то $+\infty$.

– внешняя мера, порожд. μ .

Замечание. 1. Можно считать, что P_k – дизъюнктны

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_n} Q_{nk}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

2. Если μ задана на σ -алгебре \mathcal{A} , то $\mu^*A = \inf \{\mu B : B \in \mathcal{A} \wedge A \subset B\}$

Теорема 1.14. Пусть μ – мера на полукольце \mathcal{P} . Тогда μ^* – субмера, совпадающая с мерой μ на полукольце \mathcal{P} .

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{P}$, хотим доказать, что $\mu A = \mu^*A$.

” \geq ”: очевидно, так как множество покрывает само себя. $\mu^*A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\}$

$$\text{”}\leq\text{”: } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad \xrightarrow[\text{счетная полуаддитивность}]{} \quad \mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \leq \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k\} = \mu^*A$$

2. μ^* – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \xrightarrow[?]{} \mu^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*A + \epsilon$$

$\mu^*A_n = \inf \dots$, берем покрытие $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^*A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*A_n + \epsilon$ и $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ – устремляем ϵ к нулю.

□

Определение 1.18. Стандартное продолжение меры – конструкция, полученная следующими действиями:

1. Берем меру μ_0 на полукольце \mathcal{P} .
2. Берем μ_0^* – внешняя мера.
3. Сужаем полученную внешнюю меру на множество всех μ_0^* -измеримых множеств.

Получилась полная мера μ на σ -алгебре $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ и $\mu P = \mu_0 P$ для $P \in \mathcal{P}$.

Множества, содержащиеся в \mathcal{A} , назовем μ -измеримыми.

Теорема 1.15. Это действительно продолжение, то есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$.

Доказательство. Надо доказать, что $E \in \mathcal{P} \wedge A \subset X$, $\mu_0^*A \geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$.

Рассмотрим случаи:

1. $A \in \mathcal{P}$.

$$\mu_0^*A = \mu_0 A, \quad \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$$

$$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k, \quad Q_k \in \mathcal{P}$$

$$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k \implies \mu_0^*A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2. $A \notin \mathcal{P}$.

Если $\mu_0^* A = +\infty$, то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$. Возьмем $P_k \in \mathcal{P}$, такое что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$.

Знаем, что $\mu_0^* P_k \geq \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

$$\begin{aligned} \mu_0^* A + \epsilon &> \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)} \\ &\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E) \end{aligned}$$

□

Замечание. 1. Дальше меру и ее продолжение обозначаем как μ .

Если A – μ -измеримое множество, то $\mu A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P}\}$

2. Стандартное продолжение, примененное к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

Упражнение. Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же врешнюю меру, что и μ .

3. Можно ли распространить меру на более широкую σ -алгебру.

4.

Определение 1.19. ν – σ -конечная мера на полукольце \mathcal{P} , если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P} \wedge \mu P_n < +\infty$.

Можно ли по-другому продолжить на σ -алгебру μ -измерим. мн-в?

Если μ – σ -конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на μ -измеримых множествах.

Если μ – σ -конечная мера, то обязательно.

Теорема 1.16. μ – стандартное продолжение меры с полукольца \mathcal{P} , μ^* – соответствующая внешняя мера, $A \subset X$, $\mu^* A < +\infty$. Тогда $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$, такие что $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$, $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A \wedge \mu^* A = \mu C$.

Доказательство. $\mu^* A = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P}\}$, берем покрытие с суммой $< \mu^* A + \frac{1}{n}$.

$$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A.$$

$$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$$

□

Следствие. μ – стандартное продолжение с полукольца \mathcal{P} . A – μ -измеримое мн-во и $\mu A < +\infty$. Тогда $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство. Берем $C \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ из теоремы. $A \subset C$, и $\mu A = \mu C$.
получаем автоматически

$e_1 := C \setminus A$, $\mu e_1 = 0$, теперь подставляем e_1 в теорему:

найдется $e_2 : e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \wedge e_2 \supset e_1 \wedge \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A$.

$C \setminus e_2 \subset B \subset C$, $\mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \mu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A$. $e = A \setminus B \implies \mu e = 0$

□

Теорема 1.17. (Единственность продолжения).

μ – стандартное продолжение с полукольца \mathcal{P} на σ -алгебру \mathcal{A} .

ν – другая мера на \mathcal{A} , совпадающая с μ на \mathcal{P} . Если μ – σ -конечная, то $\mu = \nu$.

Доказательство. Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$ (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$$\mu A = \inf \{\sum \mu P_n\} \geq \nu A.$$

Возьмем $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$: $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если $\mu P < +\infty$, то равенство вместо неравенства.

$$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \text{ т.ч. } \mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A$$

□

1.4. Мера Лебега

Теорема 1.18. Классический объем λ_m на полукольце ячеек \mathcal{P}^m – мера.

Доказательство. Так как λ_m – объем, то нам необходимо проверить счетную полуаддитивность, то есть следующую стрелочку:

$$(a; b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a^{(n)}; b^{(n)}) \xrightarrow{?} \lambda(a; b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a^{(n)}; b^{(n)}).$$

Берем $\epsilon > 0$.

Затем возьмем:

1. $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\lambda_m[a, b) < \lambda_m[a, b'] + \epsilon$.
2. $(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \supset (a^{(n)}, b^{(n)})$ и $\lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] < \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \frac{\epsilon}{2^n}$.

Тогда получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{открытое мн-во}}$ \implies существует конечное подпокрытие, то есть $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$.

Далее можно написать ячейки и вложенность сохранится:

$$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^N [\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}].$$

Теперь давайте запишем конечную полуаддитивность для объема:

$$\begin{aligned} \lambda_m[a, b') &\stackrel{\text{кон. полуаддитивность}}{\leq} \sum_{n=1}^N \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}] < \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \frac{\epsilon}{2^n}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \epsilon. \end{aligned}$$

Теперь поймем, что у нас есть нер-во в другую сторону и мы можем зажать $\lambda_m[a, b')$ с двух сторон:

$$\lambda_m[a, b) - \epsilon < \lambda_m[a, b') < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + \epsilon.$$

Переносим ϵ в другую сторону и устремляем к 0:

$$\lambda_m[a, b) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}] + 2\epsilon$$

$\lambda_m[a, b) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}]$ – получили, что хотели. □

Определение 1.20. Мера Лебега в \mathbb{R}^m (обозначение λ_m) – стандартное продолжение классического объема с \mathcal{P}^m .

σ -алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская σ -алгебра (\mathcal{L}^m).

Замечание. $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : P_k – ячейки и \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supseteq A\}$.

Можно вместо $P_k \in \mathcal{P}^m$ писать $P_k \in \mathcal{P}_Q^m$.

Свойства. Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого > 0 .

Доказательство. Пусть G – открытое, $x \in G$, B – шар, накрывающий x и $B \subset G$, вписываем ячейку в шар. \square

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва $= 0$.

Доказательство. Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по ϵ), тогда $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$. \square

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

Доказательство. Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик. \square

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

Доказательство. Берем все \mathbb{R}^m и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$, тогда $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$. \square

5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$.

$A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$ и $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$, тогда $E \in \mathcal{L}^m$

Доказательство. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ и $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$.

$A \subset E \subset B$, $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$.

$\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$.

$E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathcal{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathcal{L}^m$. \square

6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \exists B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$, такое что $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$ и $E \subset B_\epsilon$.

Тогда $E \in \mathcal{L}^m$ и $\lambda_m E = 0$.

Доказательство. $A_\epsilon := \emptyset \xrightarrow[\text{свойство (5)}]{} E$ – измеримое.

$\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$. \square

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Int}E \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E$. \square

10. Если $\lambda e = 0$, то существуют кубические ячейки Q_j , такие что $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset e$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$.

Доказательство. $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \wedge \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$, нарезаем P_j на кубические ячейки. \square

11. Если $m \geq 2$, то гиперплоскость $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$ имеет нулевую меру.

Доказательство. $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$, $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Достаточно доказать, что $\lambda E_n = 0$. $E_n \subset Y := (-n, n] \times \dots \times (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$.

$\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$, так как n фиксированное, а ϵ – произвольное $\implies \lambda E_n = 0$. \square

Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединение таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12. $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$ – по предыдущему свойству.

Замечание. Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

Замечание. 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если $m \geq 2$, то пример это гиперплоскость $H_1(c)$ подходит.

Если $m = 1$, то подходит [Канторого множество](#).

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0}$$

K – несчетно, $K = \{x \in [0, 1] : \text{в троичной записи нет цифры } 1\}$, а у таких чисел есть биекция между $[0, 1]$, просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

Теорема 1.19. (Регулярность меры Лебега).

Если E – измеримое, то найдется G – открытое, такое что оно накрывает E и мера зазора $< \epsilon$, то есть $E \subset G \wedge \lambda(G \setminus E) < \epsilon$.

Доказательство. $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \text{ – ячейка и } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$.

(1): Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем покрытие, для которого $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$.

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$, хотим $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$.

Тогда $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b'_j)$ – открытое и $E \subset G$.

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть $\lambda E = +\infty$. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, такие что $\lambda E_n < +\infty$.

Возьмем G_n – открытое $\supset E_n$, такое что $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$.

$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ – открытое $G \supset E$.

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}.$$

□

Следствие. 1. Если E – измеримо, то найдется $F \subset E$ – замкнутое, такое что $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$.

Доказательство. $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$, такое что $\underbrace{\lambda(G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E))}_{=E \setminus (\mathbb{R}^m \setminus G) = E \setminus F} < \epsilon$, где $F := \mathbb{R}^m \setminus G$ – замкнутое и $F \subset E$. □

2. Если E – измеримо, то

$$\lambda E = \inf\{\lambda G : G \text{ – открытое и } G \supset E\}.$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda F : F \text{ – замкнуто и } F \subset E\}$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda K : K \text{ – компакт и } K \subset E\}$$

Доказательство. $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$$

Возьмем F – замкнутое из второго вывода и $K_n := [-n, n]^m \cap F$ – компакт. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$ и $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если $\lambda F = +\infty$, то есть K_n со сколь угодно большой мерой.

Если $\lambda F < +\infty$, то есть K_n , такие что $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$ □

3. Если E – измеримо, то существует последовательность компактов K_n , такая что компакты $K_n \subset K_{n+1}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, где $\lambda e = 0$.

Доказательство. (1) Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем $\tilde{K}_n \subset E \wedge \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n}$

$$K_n := \bigcup_{j=1}^n \tilde{K}_j \subset E, \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n} \leq \lambda K_n + \frac{1}{n}.$$

$$e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \lambda e = \lambda E - \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0.$$

(2) Пусть $\lambda E = +\infty$. Берем $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \lambda E_j < +\infty$.

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e, \text{ где } e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \wedge \lambda e = 0.$$

Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет). □

Упражнение. E – измеримое. Д-ть, что $\exists G_n$ – открытое $\supset E$, $G_n \supset G_{n+1}$, т.ч. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$, где $\lambda e = 0$.

Теорема 1.20. При сдвиге мн-ва на вектор \vec{v} измеримость сохраняется и мера не изменяется.

Доказательство. $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$, μ, λ заданы на ячейках и на них совпадают $\implies \mu = \lambda$ по единственности продолжения. □

Теорема 1.21. μ -мера на \mathcal{L}^m , т.ч.

1. μ – инвариантна относительно сдвигов.

2. μ конечна на ячейках = μ конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда $\exists k \in [0; +\infty)$, т.ч. $\mu = k \cdot \lambda$ (т.е. $\mu E = k\lambda E \forall E \in \mathcal{L}^m$)

Доказательство. $Q := (0, 1]^m$, $k := \mu Q$, $k \in [0, +\infty)$

Рассмотрим случаи:

1. $k = 1$. Надо доказать, что $\mu = \lambda$, достаточно доказать, что $\mu = \lambda$ на $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies$ достаточно доказать на $(0, \frac{1}{n}]^m$.

Q можно сложить из n^m сдвигов $(0, \frac{1}{n}]^m$.

$$\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m} \mu Q = \frac{1}{n^m} \lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m.$$

2. $k > 0$. $\nu E := \frac{1}{k} \mu E$. Тогда $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$.

3. $k = 0$. Покажем, что $\mu \equiv 0$.

$$\mu Q = 0, \mathbb{R}^m - \text{счетное объединение сдвигов } Q \implies \mu \mathbb{R}^m = 0.$$

□

Теорема 1.22. $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема. Тогда

1. Если $e \subset G$, т.ч. $\lambda e = 0$, то $\Phi(e)$ – мн-во нулевой меры.
2. Если E – измеримое, то $\Phi(E)$ – измеримое.

Замечание. Для Φ – непрер. или даже дифф. это неверно.

Доказательство. Пункт (1):

Случай:

1. $e \subset P \subset CLP \subset G$, P – ячейка $\implies \|\Phi'\|$ непрерывно на $G \supset Cl P$ – компакт $\implies \|\Phi'\| \leq M$ на $Cl P$ (норма ограничена на замыкании P).

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \|\Phi'(c)\| \cdot \|x - y\|, \text{ где } x, y \in P; c \in P \implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M \|x - y\|$$

Существуют кубические ячейки, такие что Q_j , т.ч. $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$

Рассмотрим $\Phi(Q_j)$

Пусть a_j – стороная кубика Q_j . $x, y \in Q_j \implies \|x - y\| < \sqrt{m} \cdot a_j$ (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка) $\implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M \sqrt{m} a_j$.

Зафиксируем x и меняем $y \implies \Phi(Q_j)$ содержится в шаре с центром в $\Phi(x)$ и радиусом $M \sqrt{m} a_j \implies \Phi(Q_j)$ содержится в ячейке R_j со стороной $2M \sqrt{m} a_j$.

$$\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty} (2M \sqrt{m})^m a_j^m = (2M \sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M \sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e) \text{ измеримо и } \lambda(\Phi(e)) = 0.$$

2. e – произвольное $\subset G$, $\lambda e = 0$. Представим G как $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, где P_j – ячейка $Cl P_j \subset G$.

$$e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j) – \text{мн-ва нулевой меры} \implies \lambda(\Phi(e)) = 0.$$

Пункт (2):

E – измеримое $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, $\lambda e = 0$, K_n – компакт $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$. $\lambda(\Phi(e)) = 0$ и $\Phi(K_n)$ – компакт \implies измеримое. □

Теорема 1.23. λ – инвариантна относительно движения.

Доказательство. Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что λ не меняется. Проверим поворот:

пусть $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U \text{ – линейное отображение}}, \mu, \lambda \text{ – заданы на } \mathcal{L}^m.$$

μ – инварианта относительно сдвига. $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$. μ конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда $\mu = k\lambda$.

Хотим показать, что $k = 1$. Но на единичном шаре B , $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$. \square

Теорема 1.24. (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейное, E – измеримое. Тогда $\lambda(TE) = |\det T| \cdot \lambda E$

Доказательство. $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как } T \text{ – лин. отображ.}}, \mu$ инвариантно относительно сдвига и

конечно на огр. мн-вах. $\implies \mu k \cdot \lambda$, где $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |\det T|$

\square

Пример. неизмеримое мн-во в \mathbb{R} .

$x \sim y$ если $(x - y) \in \mathbb{Q}$ – отношение эквивалентности.

Разобьем \mathbb{R} на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку $(0, 1]$.

A – получившееся мн-во. Докажем, что A не может быть измеримым.

От противного. Если $\lambda A = 0$, то $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) = \mathbb{R}$. Но тогда $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda \mathbb{R} = 0$ – противоречие.

Если $\lambda A > 0$. $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \lambda(A + r) \leq 2 \implies$ противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

2. Интеграл Лебега

2.1. Измеримые функции

Определение 2.1. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, лебеговы мн-ва функции f:

$$E\{f \leq a\} := \{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

$$E\{f < a\} := \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$$

$$E\{f \geq a\} := \{x \in E : f(x) \geq a\}$$

$$E\{f > a\} := \{x \in E : f(x) > a\}$$

Теорема 2.1. E – измеримое, $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, тогда равносильны:

1. $E\{f \leq a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $E\{f < a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $E\{f \geq a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
4. $E\{f > a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leq a\}$

$$2. (2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \geq a\}$$

$$3. (1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \leq a - \frac{1}{n}\}$$

$$4. (3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$$

□

Определение 2.2. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\forall a \in \mathbb{R}$ все ее лебеговы мн-ва измер.

Замечание. E – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

Пример. 1. $f = \text{const}$, лебеговы множества: \emptyset, X .

2. $E \subset X$ – измеримое, $f = \mathbf{1}_E(x) = 1$, если $x \in E$, иначе 0.

Лебеговы множества: $\emptyset, X, E, X \setminus E$.

3. \mathcal{L}^m – лебеговская σ -алгебра на \mathbb{R}^m

$f \in C(\mathbb{R}^m)$ – измеримая.

$f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{измеримое}})$ – открытое \implies измеримое.

Свойства. 1. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\implies E$ – измеримое.

2. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измеримая и $E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0}$ – измеримое.

Доказательство. $E_0\{g \leq c\} = E\{ \underbrace{f \leq c}_{\text{измеримое}} \} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}$. □

3. Если f – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.

Доказательство. $E\{a \leq f \leq b\} = E\{ \underbrace{a \leq f}_{\text{измеримое}} \} \cap E\{ \underbrace{f \leq b}_{\text{измеримое}} \}$. □

4. Если f – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

Доказательство. $U \subset \mathbb{R}$ – открытое мн-во $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \implies f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}}.$ \square

5. Если f – измеримая, то $|f|$ и $-f$ – измеримы.

Доказательство. $E\{-f \leq c\} = E\{f \geq -c\}, E\{|f| \leq c\} = E\{-c \leq f \leq c\}.$ \square

6. Если $f, g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измеримы, то $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ – измеримы.

В частности, $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ – измеримы.

Доказательство. $E\{\max\{f, g\} \leq c\} = E\{f \leq c\} \cap E\{g \leq c\}$ \square

7. Если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, f|_{E_n}$ – измерима $\forall n \implies f$ – измеримая.

$f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}.$

Доказательство. $E\{f \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \{f \leq c\}.$ \square

8. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измерима, то найдется $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, такая что $f = g|_E$

Доказательство. $g(x) := 0$, если $x \notin E, g(x)$, иначе. \square

Теорема 2.2. Пусть $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – последовательность измеримых функций. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ – измеримые.
2. $\underline{\lim} f_n$ и $\overline{\lim} f_n$ – измеримые.
3. Если существуют $\lim f_n$, то он измеримый.

Доказательство. 1. $E\{\sup f_n \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leq c\}$

2. $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$ и $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$

3. Если существует $\lim f_n$, то $\lim f_n = \underline{\lim} f_n.$

\square

Теорема 2.3. Пусть $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow H \subset \mathbb{R}$ – измеримые, $\phi \in C(H)$, тогда $g : E \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := \phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$ – измеримая.

Доказательство. $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$ – открытое в $H \implies \exists G$ – открытое в \mathbb{R}^m , т.ч. $U = H \cap G$

$\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки $(\alpha, \beta]$, что $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$ – измерима, $\bigcup_{k=1}^n E\{\alpha_k < f_k \leq \beta_k\}$

\square

Следствие. Если в теореме ϕ – поточечный предел непрерывных, то g – измерима.

Доказательство. $\phi = \lim \phi_n$, $\phi_n \vec{f}$ – измер. и поточечно стремится к $\phi_0 \vec{f}$ □

Арифметические операции в \mathbb{R} :

1. Если $x \in \mathbb{R}$, то $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$ и т.д.
2. $(+\infty) + (-\infty) = 0$, $(+\infty) - (+\infty) = 0$, $(-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$, то $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, где знак $\pm : \pm = +$, $\pm : \mp = -$
4. $0 \cdot \pm\infty = 0$ и $\frac{x}{\pm\infty} = 0$, $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}$, т.е. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$.
5. Делить на 0 не умеем.

Теорема 2.4. 1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримая.

2. Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая и $\phi \in C(\mathbb{R})$, то $\phi \circ f$ – измеримая.
3. Если $f \geq 0$ – измеримая, то f^p ($p > 0$) – измеримая, $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$, то $\frac{1}{f}$ – измерима на \tilde{E} .

Доказательство. 1. $f + g$. Для каждой функции рассмотрим три множества:

$$E\{f \neq \pm\infty\}, E\{f = +\infty\}, E\{f = -\infty\}$$

$$E\{g \neq \pm\infty\}, \underbrace{E\{g = +\infty\}}_{= \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}}, E\{g = -\infty\}$$

Для конечного случая ($E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\}$) можем сослаться на предыдущую теорему, взяв в качестве непрерывной $\phi(f, g) = f + g$.

На остальных случаях тоже рассматриваем $f + g$: измеримость будет, т.к. $f + g = const$.

2. Частный случай предыдущей теоремы.

3. $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4. $f|_{\tilde{E}}$ – измерима и $\neq 0$

$$\tilde{E}\left\{\frac{1}{f} \leq c\right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad (3)$$

□

Следствие. 1. Произведение конечного числа измер. – измер.

2. Натуральная степень измер. функции – измер.
3. Линейная комбинация измер. функций – измер.

Теорема 2.5. $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое, $f \in C(E)$. Тогда f – измер. относительно меры Лебега.

Доказательство. $U := f^{-1}(-\infty, c)$ – открытое мн-во в $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, т.ч. $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$ (E измеримо по условию, а G измеримо в σ -алгебре) □

Определение 2.3. Измеримая функция – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение X – разбиение X на конечное число измеримых множеств, таких что на каждом множестве простая функция константна.

Следствие. 1. Если X разбито на конечное число измеримых мн-в и f постоянна (то есть сужение на каждом кусочке X это какая-та константа) на каждом из них, то f – простая.
2. Если f и g – простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

Доказательство. $X = \bigsqcup_{k=1}^m A_k = \bigsqcup_{j=1}^n B_j \implies X = \bigsqcup_{k=1}^m \bigsqcup_{j=1}^n (A_k \cap B_j)$ – допустимое для f и g . □

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.
4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.
5. \max и \min конечного числа простых функций – простая функция.

Теорема 2.6. (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – неотрицательная измеримая функция, тогда \exists последовательность простых функций ϕ_1, ϕ_2, \dots , такие что $\phi_i \leq \phi_{i+1}$: $\forall i$ в каждой точке и $\lim \phi_n = f$. Более того, если f – ограничена сверху, то можно выбрать ϕ_n так, что $\phi_n \rightrightarrows f$ на X .

Доказательство. $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ при $k = 0, \dots, (n^2 - 1)$ и $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$.

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k$, $A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$ – измеримое мн-во.

ϕ_n на A_k равно $\frac{k}{n} \implies 0 \leq \phi_n(x) \leq f(x) \quad \forall x$ и $f(x) \leq \phi_n(x) + \frac{1}{n}$ при $x \notin A_{n^2}$.

$\phi_n(x) \rightarrow f(x)$:

1. если $f(x) = +\infty$, то $x \in A_{n^2}^{(n)}$ $\forall n \implies \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$
2. если $f(x) \neq +\infty$, то $x \notin A_{n^2}^{(n)}$ при больших $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \leq \phi_n(x) \leq f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое n , а только степени двойки, тогда нам нужно взять $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ (тут должна быть картинка)

Равномерность: если f ограничена, начиная с некоторого момента A_{n^2} пусто \implies все $x \notin A_{n^2} \implies \forall x \in E : f(x) - \frac{1}{n} < \phi_n(x) \leq f(x) \implies |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \implies$ есть равномерная сходимость. □

2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание. $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Поточечная сходимость: $f_n \rightarrow f$, $\forall x \in E : f_n(x) \rightarrow f(x)$

Равномерная сходимость: $f_n \rightrightarrows f$ на E , $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

Определение 2.4. $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые.

f_n сходится к f **почти везде**, если $\exists e \subset E$, $\mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$

Замечание. Обозначение: $\mathcal{L}(E, \mu) = \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} - \text{измеримые}, \mu E\{f = \pm\infty\} = 0\}$

Пусть $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, f_n сходится к f почти везде.

$\exists e \subset E, \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$

Определение 2.5. $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, f_n сходится по мере μ к f , если $\forall \varepsilon > 0$, $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, $f_n \Rightarrow_\mu f$

Замечание. Зависимость: равномерная \implies (поточечная \implies почти везде) | (сходимость по мере).

Равномерная \implies поточечная – знаем.

Поточечная \implies почти везде – у нас уже есть сходимость во всех точках, поэтому для “почти везде” ничего не надо выкидывать.

Равномерная \implies сходимость по мере – начиная с некоторого момента $E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$ будет пустым множеством по определению равномерной сходимости.

Утверждение 2.7. 1. Если f_n сходится к f п.в. (почти везде) и f_n сходится к g п.в., то $f = g$ (за исключением мн-ва нулевой меры)

2. Если $f_n \Rightarrow_\mu f$ и $f_n \Rightarrow_\mu g$, то $f = g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. 1. Берем $e \subset E, \mu e = 0$ и $\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in E \setminus e$

$\tilde{e} \subset E, \mu \tilde{e} = 0$ и $\lim f_n(x) = g(x), \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

Тогда на $E \setminus (e \cup \tilde{e})$ $\lim f_n(x) = g(x)$ и $\lim f_n(x) = f(x) \implies f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$

2. $\mu E\{f \neq g\} \underset{?}{=} 0, E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}.$

Достаточно доказать, что $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$.

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0 ?} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

Знаем, что $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \rightarrow 0$

$\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ вложены по убыванию

$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \dots = \lim_N \left(\mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \right) \leq \lim_N (\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) = 0$

□

Теорема 2.8. Лебега.

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Пусть $\mu E < +\infty$ и f_n сходится к f почти везде.

Тогда f_n сходится к f по мере μ .

Доказательство. Найдется $e \subset E, \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Выкинем e и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\}, \mu A_n \rightarrow 0$.

1. Частный случай ($f_n \searrow 0$): $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$.

$$\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mu \emptyset = 0.$$

Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies 0 < f_n(x) > \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \implies$ таких x не существует.

2. Общий случай: $g_n(x) := \sup_{k \geq n} \{|f_k(x) - f(x)|\}$. $g_n(x) \searrow$, т.к. множество уменьшается.

$$\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k \geq n} \{ \dots \} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$$

$$\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\rightarrow 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

$$E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

□

Замечание. 1. Условие $\mu E < +\infty$ существенно.

$$E = \mathbb{R}, \mu = \lambda, f_n = \mathbf{1}_{[n, +\infty)} \xrightarrow[\text{посточечно}]{} f \equiv 0$$

$$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\rightarrow 0.$$

2. Обратное неверно. Более того, может быть сходимость по мере и расходимость во всех точках вообще: $E = [0, 1], \mu = \lambda$

$$\mathbf{1}_{[0,1]} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2})} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{3})} \mathbf{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} \mathbf{1}_{[\frac{2}{3}, 1)} - \text{ни для какого аргумента нет предела: } [0, \frac{1}{n}) [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \dots [\frac{n-1}{n}, 1)$$

Теорема 2.9. Рисса.

$f, f_n \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Если $f_n \Rightarrow_{\mu} f$, то существует подпоследовательность f_{n_k} , т.ч. f_{n_k} сходится к f почти везде.

Доказательство. $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Выберем n_k так, что $n_k > n_{k-1}$, и $\underbrace{\mu E\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}}_{=:A_k} < \frac{1}{2^k}$

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

$B_1 \supset B_2 \supset \dots \implies \underbrace{\mu B_n}_{\mu B_n \rightarrow 0} = 0$, проверим, что если $x \notin B$, то $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$, где $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

$x \notin B \implies \exists m$, т.ч. $x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$

$$\implies x \notin A_k \forall k \geq m \implies \forall k \geq m \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\rightarrow k \rightarrow 0 0} \leq \frac{1}{k}$$

□

Следствие. Если $f_n \leq g$ и $f_n \Rightarrow_{\mu} f$, то $f \leq g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. Выберем f_{n_k} сходится к f почти везде. Пусть e – искл. мн-во $\mu e = 0$.

$$\lim \underbrace{f_{n_k}}_{\leq g(x)} = f(x) : \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in E \setminus e$$

□

Теорема 2.10. Фреше.

Если $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ измерима относительно λ_m (мера Лебега), то $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, т.ч. f_n сходится к f почти везде.

Теорема 2.11. Егорова.

Пусть $\mu E < +\infty$, $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Если f_n сходится к f почти везде, то найдется $e \subset E$, $\mu e < \epsilon$, т.ч. $f_n \rightharpoonup f$ на $E \setminus e$.

Теорема 2.12. Лузина.

$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримо, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измерима (относительно λ_m – мера Лебега). Тогда найдется $e \subset E$, $\mu e < \epsilon$, т.ч. $f|_{E \setminus e}$ – непрерывна.

Фреше + Егоров \implies Лузин:

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримое $\underbrace{\implies}_{\text{Фреше}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, f_n сходится к f почти везде $\underbrace{\implies}_{\text{Егоров}} \exists e : \lambda_m e < \epsilon$,

т.ч. $f_n \underbrace{\rightharpoonup}_{\mathbb{R}^m \setminus e} f$, равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

2.3. Определение интеграла

Лемма. Пусть $f \geq 0$ простая функция A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_m – допустимые разбиения.

a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_m значения f на соответственных мн-вах.

Тогда $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j)$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

(1) $\underbrace{=}_{?}$ (2).

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если $A_k \cap B_j \neq \emptyset$, то $a_k = b_j$, если $A_k \cap B_j = \emptyset$, то $\mu(\dots) = 0$.

Условие $f \geq 0$ важно, т.к. в ином случае могли бы получится ∞ разных знаков и равенство зависело бы от порядка сложения. \square

Определение 2.6. $f \geq 0$ простая, $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k)$, где A_1, \dots, A_n – допустимые разбиения ($\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$), a_1, \dots, a_n – соответс. значения.

Свойства. 1. $\int_E c d\mu = c \mu E$, $c \geq 0$

2. Если f, g – простые и $0 \leq f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

3. Если $f, g \geq 0$ – простые, то $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

4. Если $c \geq 0$ и $f \geq 0$ – простая, то $\int_E c f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$

Доказательство. $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$ – общее допустимое разбиение, a_k, b_k – значения на A_k .

3. $\int_E (f + g) d\mu = \sum (a_k + b_k) \mu(E \cap A_k) = \sum a_k \mu(A_k \cap E) + \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

2. $\int_E f d\mu = \sum a_k \mu(A_k \cap E) \leq \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E g d\mu$ \square

Определение 2.7. Интеграл от неотриц. измеримой ф-ции $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$.

$\int_E f d\mu := \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая и } 0 \leq \phi \leq f \}$

Определение 2.8. Интеграл от измеримой функции

$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$ (если тут $+\infty - (+\infty)$, то интеграл не определен)

Замечание. Новое определение на простых функциях совпадает со старым.

Доказательство. $f \geq 0$ – простая \Rightarrow

- (1): $\phi = f$ подходит (новое \geq старое, т.к. берем супремум).
- (2): $\phi \leq f \Rightarrow \int_E \phi d\mu \leq \int_E f d\mu$ (sup \leq старое, т.к. задали $\phi : 0 \leq \phi \leq f$).
- (3): В определении для произвольных измеримых: $\int_E (f)_- d\mu = 0$

□

Свойства. 1. Если $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

2. Если $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = 0$

3. f – измеримая $\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_X \mathbf{1}_E f d\mu$

Доказательство. Проверим для f_{\pm} :

$\int_E f_+ d\mu = \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq f_+ \} = \sup \{ \int_X \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq \mathbf{1}_E f_+ \} = \int_X \mathbf{1}_E f_+ d\mu$ (в одном случае сужаем ϕ на множество E , в другом – дополняем нулями на $X \setminus E$) □

4. Если $f \geq 0$ – измеримая, $A \subset B$, то $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

Доказательство. $\int_A f d\mu = \int_X \mathbf{1}_A f d\mu \underset{\substack{\leq \\ \text{т.к. } \mathbf{1}_A f \leq \mathbf{1}_B f}}{\leq} \int_X \mathbf{1}_B f d\mu = \int_B f d\mu$. □

Упражнение. Доказать, что $\int_{[1;+\infty)} \frac{\sin x}{x} d\lambda_1$ не определен.

Теорема 2.13. Беппо Леви.

Пусть $f_n \geq 0$ – измеримые функции, $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, последовательность поточечно возрастающая $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$. $f(x) := \lim f_n(x)$ – поточечный предел.

Тогда $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. (1): $f_n \leq f \Rightarrow \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(2): $f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$

(1) и (2) $\Rightarrow \exists L := \lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

Осталось проверить, что $L \geq \int_E f d\mu$ (можно считать, что $L < +\infty$ т.е. конечна, иначе утверждение очевидно).

$$\int_E f d\mu = \sup \{ \int_E \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ – простая} \}$$

Достаточно доказать, что $L \geq \int_E \phi d\mu$ для ϕ – простая и $0 \leq \phi \leq f$.

Возьмем $0 < \theta < 1$ и докажем, что $L \geq \int_E \theta \phi d\mu$:

$E_n := E\{\phi \geq \theta \phi\}, f_n \nearrow \Rightarrow E_n \subset E_{n+1}$. Покажем, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Пусть $x \in E$:

1. если $\phi(x) = 0$, то $\forall n : x \in E_n$

2. если $\phi(x) > 0$, то $\lim f_n(x) = f(x) \geq \phi(x) > \theta \phi(x) \underset{\substack{\Rightarrow \\ \text{при больших } n}}{\Rightarrow} f_n(x) > \theta \phi(x) \underset{\substack{\Rightarrow \\ \text{при больших } n}}{\Rightarrow} x \in E_n$

Посмотрим на $\underbrace{\int_E f_n d\mu}_{(*)} \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \underbrace{\int_{E_n} \theta \phi d\mu}_{(**)}$.

Переходим к пределу $n \rightarrow \infty$: $\underbrace{L}_{\text{получили из } (*)} \geq \underbrace{\int_E \theta \phi d\mu}_{\text{это нужно понять для } (**)}$

Осталось понять, что $\underbrace{\int_{E_n} \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m a_k \mu(E_n \cap A_k)} \rightarrow \underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \mu(E \cap A_k)}.$

Поймем, что $\mu(E_n \cap A_k) \rightarrow \mu(E \cap A_k)$ – непрерывность меры снизу, $E_n \cap A_k \subset E_{n+1} \cap A_k$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_n \cap A_k) = E \cap A_k$. \square

Свойства. Продолжаем писать свойства:

5. $f, g \geq 0$ – измеримые $\Rightarrow \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ – аддитивность.
6. $f \geq 0, \alpha \geq 0 \Rightarrow \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$ – однородность.
7. $\alpha, \beta \geq 0, f, g \geq 0$ – измеримые, тогда $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

Доказательство. 5. $f \geq 0$ измеримая $\Rightarrow \exists 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ – простые, причем $\phi_n \rightarrow f$ поточечно.

$g \geq 0$ измеримая $\Rightarrow \exists 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots$ – причем $\psi_n \rightarrow g$ поточечно.

$\Rightarrow 0 \leq \phi_1 + \psi_1 \leq \dots$ простые и $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g$.

$$\underbrace{\int_E (\phi_n + \psi_n) d\mu}_{\rightarrow \int_E (f+g) d\mu} = \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{\xrightarrow{\text{по Леви}} \int_E f d\mu} + \underbrace{\int_E \psi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E g d\mu}$$

Свойства. Продолжаем свойства.

8. Аддитивность по мн-ву. Если $A \cap B = \emptyset$, $f \geq 0$ измеримая, то $\underbrace{\int_{A \cup B} f d\mu}_{(*)} = \underbrace{\int_A f d\mu}_{(**)} + \underbrace{\int_B f d\mu}_{(***)}$ \square

Доказательство. $(*) = \int_X \mathbb{1}_{A \cup B} f d\mu$

$$(**) = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu$$

$$(***) = \int_X \mathbb{1}_B f d\mu$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f$$

\square

9. Если $\mu E > 0$ и $f > 0$ измери., то $\int_E f d\mu > 0$.

Доказательство. $E_n := E\{f \geq \frac{1}{n}\}, E_n \subset E_{n+1}, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$\Rightarrow \lim \mu E_n = \mu E > 0 \Rightarrow \mu E_n > 0$ для больших n

$\Rightarrow \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu E_n > 0$. \square

Пример. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное, $w_1, w_2, \dots \geq 0$.

$\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$ – мера.

$\int_E f d\mu = \sum_{k: t_k \in E} w_k = (*)$.

Пусть $f = \mathbb{1}_A$, тогда $\int_E f d\mu = \int_E \mathbb{1}_A d\mu = \mu(E \cap A) = \sum_{k: t_k \in E \cap A} w_k = \sum_{k: t_k \in E} \mathbb{1}(t_k) w_k = (*)$.

\Rightarrow равенство есть и на простых функциях

Пусть $f \geq 0$ измерим. $\phi_n = f \cdot \mathbb{1}_{\{t_1, t_2, \dots, t_n\}}$, $0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq f$.

$$\lim \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{= \lim \sum_{k < n: t_k \in E} f(t_k) w_k = \sum_{k: t_k \in E} f(t_k) w_k} = \int_E \underbrace{\lim \phi_n}_{\leq f} d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Проверим, что $\underbrace{\int_E f d\mu}_{\sup\{\dots\}} \leq \sum_{f(t_k)w_k}$. Берем $0 \leq \underbrace{\phi}_{\text{простая}} \leq f$ и проверяем, что $\underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k: t_k \in E} \phi(t_k) w_k} \leq \sum_{k: t_k \in E} f(t_k) w_k$

Замечание. $T = \mathbb{N}$, $w_n \equiv 1$.

$$\mu A = \#\{A \cap \mathbb{N}\}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Определение 2.9. $P(x)$ – св-во, зависящее от точки. $P(x)$ выполняется **почти везде**, если на E (для **почти всех** точек из E), если $\exists e \subset E$, $\mu e = 0$ и $P(x)$ выполнено $\forall x \in E \setminus e$.

Замечание. P_1, P_2, \dots последовательность св-в, каждое из которых верно почти везде на E , то они все вместе верны почти везде на E .

Теорема 2.14. (Неравенство Чебышева).

$$f \geq 0 \text{ измер., } t, p > 0. \text{ Тогда } \mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \cdot \int_E f^p d\mu.$$

Доказательство. $\int_E f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} t^p d\mu = t^p \cdot \mu E\{f \geq t\}$. □

Свойства. Свойства интеграла, связанные с понятием "почти везде".

1. Если $\int_E |f| d\mu < +\infty$, то f почти везде конечна.
2. Если $\int_E |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ почти везде.
3. Если $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$, то $\int_A f d\mu$ и $\int_B f d\mu$ либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.
4. Если $f = g$ почти везде на E , тогда $\int_E f$ и $\int_E g$ либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.

Доказательство. 1. $E\{|f| = +\infty\} \subset E\{|f| \geq t\}$

$$\mu E\{|f| = +\infty\} \leq \mu E\{|f| \geq t\} \leq \underbrace{\frac{\int_E |f| d\mu}{t}}_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$$

2. Если $\mu E\{f > 0\} > 0$, то $\int_E f d\mu = \int_{E\{f > 0\}} f d\mu > 0$ (св-во. 9 из уже доказанных выше).

$$3. \int_B f_{\pm} d\mu = \int_{B \setminus A} f_{\pm} d\mu + \int_A f_{\pm} d\mu = \int_A f_{\pm} d\mu$$

$$4. A := E\{f = g\}, \mu(E \setminus A) = 0 \quad \int_E f d\mu = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_E g d\mu$$
□

2.4. Суммируемые функции

Определение 2.10. f – суммируема на мн-ве E , если f измерима и $\int_E f_{\pm} d\mu < +\infty$.

Замечание. В этом случае $\int_E f d\mu$ конечен.

Свойства. 1. f – суммируема на $E \Leftrightarrow \int_E |f|d\mu < +\infty$ и f – измерима.

В этом случае $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f|d\mu$

Доказательство. $0 \leq f_{\pm} \leq |f| = f_+ + f_-$

” \Rightarrow ”: $\int_E |f|d\mu = \int_E f_+d\mu + \int_E f_-d\mu < +\infty$

” \Leftarrow ”: $\int_E f_{\pm}d\mu \leq \int_E |f|d\mu < +\infty$

$$\text{Нер-во: } -\int_E |f|d\mu = -\int_E f_+d\mu - \int_E f_-d\mu \leq \underbrace{\int_E f_+d\mu}_{\int_E f d\mu} - \underbrace{\int_E f_-d\mu}_{\int_E f d\mu} \leq \int_E f_+d\mu + \int_E f_-d\mu = \int_E |f|d\mu$$

□

2. f суммируема на $E \implies f$ почти везде конечна на E .

3. Если $A \subset B$ и f суммируема на B , то f суммируема на A .

Доказательство. $\int_A |f|d\mu \leq \int_B |f|d\mu < +\infty$

□

4. Ограниченнная функция суммируема на мн-ве конечной меры.

Доказательство. $|f| \leq M \implies \int_E |f|d\mu \leq \int_E M d\mu = M \cdot \mu E < +\infty$

□

5. Если f и g суммируемы и $f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

Доказательство. $f_+ - f_- = f \leq g = g_+ - g_- \implies 0 \leq f_+ + g_- \leq f_- + g_+ \implies \int_E f_+d\mu + \int_E g_-d\mu \leq \int_E f_-d\mu + \int_E g_+d\mu$ – переносим слагаемые в нужные стороны и чтд.

□

6. f и g – суммируемы $\implies f + g$ суммируема и $\int_E (f + g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

Доказательство. $|f + g| \leq |f| + |g| \implies f + g$ суммируема.

$h := f + g$, $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$

$\implies h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \geq 0$

$\implies \int_E h_+d\mu + \int_E f_-d\mu + \int_E g_-d\mu = \int_E f_+d\mu + \int_E g_+d\mu + \int_E h_-d\mu$ – далее просто переносим нужные слагаемые через равно.

□

7. f – суммируема, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f$ суммируема и $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

Доказательство. $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \implies |\alpha f|$ – суммируема.

Если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$ и $(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$ и $\int_E (\alpha f)_{\pm}d\mu = \alpha \cdot \int_E f_{\pm}d\mu$

Если $\alpha = -1$, то $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$ $\implies \int_E (-f)d\mu = \int_E f_- - \int_E f_+ = -\int_E f d\mu$

□

8. Линейность.

Если f, g – суммируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ – суммируема и $\int_E (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

9. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$. Тогда f – суммируема на $E \Leftrightarrow f$ – суммируема на $E_k : \forall k = 1, \dots, n$. А если f суммируема на $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$, то $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$

Доказательство. $\mathbb{1}_{E_k}|f| \leq \mathbb{1}_E|f| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}|f| \implies \int_{E_k} |f| d\mu \leq \sum_{k=1}^n \int_{E_k} |f| d\mu$.

Если $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, то $\mathbb{1}_E = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} \implies \mathbb{1}_E f_\pm = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} f_\pm \implies \int_E f_\pm d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_\pm d\mu$ \square

10. Интегрирование по сумме мер. Пусть μ_1 и μ_2 – меры, заданные на одной σ -алгебре, $\mu := \mu_1 + \mu_2$.

Если $f \geq 0$ измерима, то $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2 (*)$.

f – суммируема относительно $\mu \Leftrightarrow f$ – суммируема относительно μ_1 и μ_2 и в этом случае есть равенство (*).

Доказательство. (*) для $f \geq 0$:

$$(*) \text{ есть для простых } \phi \geq 0, \int_E \phi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\mu(E \cap A_k)}_{\mu_1(E \cap A_k) + \mu_2(E \cap A_k)} = \int_E \phi d\mu_1 + \int_E \phi d\mu_2.$$

$f \geq 0$ – измеримая \implies возьмем $0 \leq \phi \leq \dots \leq \phi_n$ – простые, $\phi_n \rightarrow f$.

$\int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n d\mu_1 + \int_E \phi_n d\mu_2$ по т. Леви получаем (предельный переход) $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$ \square

Определение 2.11. Интеграл от комплекснозначной функции $f : E \rightarrow \mathbb{C}$.

$Re(f)$ и $Im(f)$ – измеримые функции.

$$\int_E f d\mu := \int_E Re(f) d\mu + i \cdot \int_E Im(f) d\mu$$

Замечание. Все св-ва, связанные с равенствами, сохраняются:

Доказательство. $Re(if) = -Im(f), Im(if) = Re(f)$

$$\int_E if d\mu = i \int_E f d\mu$$

Замечание. $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $|\int_E f d\mu| = e^{i\alpha} \cdot \int_E f d\mu = \int_E e^{i\alpha} f d\mu =$

$$= \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \underbrace{\int_E Im(e^{i\alpha} f) d\mu}_{=0, \text{ т.к. слева от равенства вещественное число}} = \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu \leq \int_E |Re(e^{i\alpha} f)| d\mu \leq \int_E |e^{i\alpha}| d\mu =$$

$$\int_E |f| d\mu.$$

$$|Re(f)|, |Im(f)| \leq |f|$$

$$|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

Теорема 2.15. (О счетной аддитивности интеграла).

Пусть $f \geq 0$ – измеримая и $E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n$.

$$\text{Тогда } \int_E f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu$$

Доказательство. $\sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f d\mu = \lim \int_E \left(\underbrace{\mathbb{1}_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f}_{:= g_n} d\mu \right) =$

$$\lim \int_E g_n d\mu \underset{\text{т. Леви}}{=} \int_E f d\mu$$

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots, \lim g_n = f, g_n(x) = f(x) \text{ если } x \in \bigsqcup_{k=1}^n E_k.$$

- Следствие.**
1. Если $f \geq 0$ – измеримая, то $\nu E := \int_E f d\mu$ – мера, заданная на той же σ -алгебре, что и μ .
 2. Если $f \geq 0$ и $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
 3. Если f – суммируема и $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
 4. Если f – суммируема на E , $\epsilon > 0$, то $\exists A \subset E : \mu A < +\infty \wedge \int_{E \setminus A} |f| d\mu < \epsilon$

Доказательство. 1. $\nu \emptyset = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$ + счетная аддитивность из теоремы: $\int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$ все конечно, поэтому можно вычесть.

2. $\nu A := \int_A f d\mu$ – мера $\implies \nu A$ непрерывна снизу.

$$\underbrace{\nu E}_{\int_E f d\mu} = \underbrace{\lim}_{\lim \int_{E_n} f d\mu} \nu E_n$$

3. $\nu_{\pm} A := \int_A f_{\pm} d\mu$, $\nu_{\pm} A$ – конечные меры $\implies \nu_{\pm}$ – непрерывна сверху.

$$\implies \int_E f_{\pm} d\mu = \nu_{\pm} E = \lim \nu_{\pm} E_n = \lim \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$$

4. $E_n := E\{|f| \leq \frac{1}{n}\} \implies E_n \supset E_{n+1}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\} \implies \lim \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0 \implies \exists n : \epsilon > \int_{E_n} |f| d\mu \geq \left| \int_{E_n} f d\mu \right|$$

$$A := E \setminus E_n = E\{|f| > \frac{1}{n}\}$$

$$\mu A \leq \underbrace{\frac{\int_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}}}_{\text{Чебышев}} < +\infty$$

□

Теорема 2.16. (Абсолютная непрерывность интеграла).

f – суммируема на E , тогда $\forall \epsilon : \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall e$ – измер. $\mu e < \delta \implies |\int_e f d\mu| < \epsilon$

Доказательство. $\int_E |f| d\mu < +\infty \implies \exists \underbrace{\phi}_{\leq f}$ – неотрицательная простая, т.ч.

$$\int_E |f| d\mu < \int_E \phi d\mu + \epsilon.$$

Пусть C – наибольшее значение ϕ . Возьмем $\delta = \frac{\epsilon}{C}$.

Если $\mu e < \delta$, то $\int_e |f| d\mu < \underbrace{\int_e \phi d\mu + \epsilon}_{\leq \int_e C d\mu + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon}$ – это следует из того, что $|f| - \phi \geq 0$,

$$\int_e (|f| - \phi) d\mu \leq \int_e (|f| - \phi) d\mu < \epsilon.$$

□

Следствие. Если f суммируема на E и $\mu A_n \rightarrow 0$, $A_n \subset E$, то $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$.

Доказательство. Берем $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ для него из теоремы, тогда если $\mu A_n < \delta$, то $|\int_{A_n} f d\mu| < \epsilon$

□

Определение 2.12. Пусть μ и ν меры на одной σ -алгебре \mathcal{A} . Если существует измеримая функция $w \geq 0$, т.ч. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu A = \int_A w d\mu$.

Тогда w плотность меры ν относительно меры μ .

Замечание. Если w существует, то ν обладает свойством: если $\mu e = 0$, то $\nu e = 0$.

Теорема 2.17. Пусть f, g – суммируемые функции. Если $\forall A$ – измерим. $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, то $f = g$ почти везде.

Доказательство. $h := f - g$, $E_+ := E\{f \geq g\}$, $E_- := E\{f < g\}$

$$\int_E |h| d\mu = \underbrace{\int_{E_+} h d\mu}_{=0} - \underbrace{\int_{E_-} h d\mu}_{=0} = 0 \implies h = 0 \text{ почти везде.} \quad \square$$

Теорема 2.18. (Единственность плотности).

Если ν – σ -конечная мера (на σ -алгебре \mathcal{A}) и w – плотность ν относительно μ , то w – единственна с точностью до **почти везде**.

Доказательство. Так как наша мера – σ -конечна, то все пространство представляется как $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$, т.ч. $\nu X_n < +\infty \implies$ т.к. w – плотность $\nu|_{X_n}$ относительно $\mu|_{X_n} \implies w$ – суммируема на X_n .

Пусть w_1, w_2 – плотности ν относительно μ на сужении одного кусочка, тогда по определению плотности верно, что $\forall A \in \mathcal{A} : \nu A = \int_A w_1 d\mu = \int_A w_2 d\mu \implies w_1 = w_2$ почти везде.
по пред. теореме

Ну если две плотности на каждом из кусочков отличаются на множество нулевой меры, тогда и на объединении кусочков тоже будут отличаться на множество нулевой меры, тогда плотность единственна почти везде и на всей σ -алгебре. \square

Определение 2.13. ν, μ – меры, заданные на одной σ -алгебре. ν абсолютно непрерывна относительно μ , если $\forall e$ – измер., т.ч. $\mu e = 0 \implies \nu e = 0$.

Обозначение $\nu \prec \mu$ или $\nu \ll \mu$.

Теорема 2.19. (Радона-Никодима).

Пусть меры μ и ν заданы на одной σ -алгебре. Тогда $\nu \prec \mu \Leftrightarrow$ существует плотность меры ν относительно μ .

Теорема 2.20. w – плотность ν относительно μ . Тогда

1. Если $f \geq 0$, то $\int_E f d\nu = \int_E f w d\mu : (*)$
2. fw – суммируема, относительно $\mu \Leftrightarrow f$ – суммируема относительно ν , и в этом случае есть формула $(*)$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbb{1}_A$, тогда $\int_E f d\nu = \nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} w d\mu = \int_E \mathbb{1}_A w d\mu$. По линейности $(*)$ верна для неотрицательных простых.

Пусть $f \geq 0$ – измер. Тогда найдутся простые $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ ($0 \leq w\phi_1 \leq w\phi_2 \leq \dots$) и

$$\phi_n \rightarrow f \text{ поточечно. } \underbrace{\int_E \phi_n d\nu}_{\rightarrow \int_E f d\nu} = \underbrace{\int_E \phi_n w d\mu}_{\rightarrow \int_E f w d\mu} - \text{по т. Леви.}$$

2. $\int_E |f| d\nu = \int_E |f| w d\mu \implies f$ – суммируема относительно $\nu \Leftrightarrow fw$ суммируема относительно μ
 $\int_E f_{\pm} d\nu = \int_E f_{\pm} w d\mu$ и вычитаем.

\square

Свойства. Неравенство Гельдера.

Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $\int_E |fg| d\mu \leq (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_E |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} = A \cdot B$

Доказательство. Пусть $f, g \geq 0$ (просто чтобы не писать модули), $A^p := \int_E f^p d\mu$, $B^q := \int_E g^q d\mu$.

Случай $A = 0 \implies f^p = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде $\implies fg = 0$ почти везде $\implies \int_E fgd\mu = 0$.

Можно считать, что $A, B > 0$.

Случай $A = +\infty$. Очевидно.

Можно считать $0 < A, B < +\infty$.

$$u := \frac{f}{A}, \quad v := \frac{g}{B}$$

$\int_E u^p d\mu = 1 = \int_E v^q d\mu$, $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ верно (Упражнение, ну конечно. Фиксируем одну из переменных как параметр и исследуем нер-во по второй переменной).

Интегрируем полученное нер-во: $\frac{1}{AB} \int_E fgd\mu = \int_E uv d\mu \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int_E u^p d\mu}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int_E v^q d\mu}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \square$

Свойства. Неравенство Минковского.

$$p \geq 1, \text{ тогда } (\int_E |f+g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_E |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Можно считать, что $f, g \geq 0$, также можно считать, что $\int_E f^p d\mu$ и $\int_E g^p d\mu < +\infty$.

Проверим, что $\int_E (f+g)^p d\mu < +\infty$:

$$f+g \leq 2 \max\{f, g\} \implies (f+g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p (f^p + g^p)$$

$$\underbrace{\int_E (f+g)^p d\mu}_{=:C^p} \leq 2^p (\int_E f^p d\mu + \int_E g^p d\mu) < +\infty \text{ -- показали, что левая часть конечна.}$$

Можем считать, что $0 < C < +\infty$:

$$C^p = \int_E (f+g)^p d\mu = \int_E (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu = \int_E f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f+g)^{p-1} d\mu$$

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q = \frac{p}{p-1}$, $(p-1)q = p$, тогда:

$$\int_E f \cdot (f+g)^{p-1} d\mu \underset{\substack{\text{нер-во Гельдера} \\ \text{напомним}}} \leq (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_E ((f+g)^{p-1})^q d\mu)^{\frac{1}{q}} = (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{(C^p)^{\frac{1}{q}}}_{=:C^{p-1}} \leq (\int_E f^p d\mu)^{\frac{1}{p}} C^{p-1} +$$

$$(\int_E g^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{p-1} \text{ -- сокращаем на } C^{p-1}. \quad \square$$

2.5. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 2.21. Леви.

$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ и $f = \lim f_n$, тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Следствие. Пусть $u_n \geq 0$. Тогда $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n d\mu$

Доказательство. $s_n := \sum_{k=1}^n u_k$, $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$ и $s_n \rightarrow s := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$\int_E s d\mu = \lim \int_E s_n d\mu = \lim \int_E \sum_{k=1}^n u_k d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k d\mu \quad \square$$

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится при почти всех $x \in E$.

Доказательство. $+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ -- суммируем.

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ почти везде конечна $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ абс. сходится при почти всех $x \in E \implies$ сходится при почти всех $x \in E$. \square

Лемма. Фату.

Если $f_n \geq 0$, то $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. $\underline{\lim} f_n = \liminf_{=:g_n} \underbrace{\{f_n, f_{n+1}, \dots\}}_{=:g_n}$

$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ и $g_n \rightarrow \underline{\lim} f_n$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{\text{теорема Леви}} \quad \overbrace{\lim_{\int_E g_n d\mu}}^{=:\underline{\lim} \int_E g_n d\mu} = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \\ = \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \end{array}$$

$$g_n \leq f_n \implies \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \implies \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

□

Замечание. Равенства может и не быть:

$$\mu = \lambda, E = \mathbb{R}, f_n = \mathbf{1}_{[n, +\infty)}$$

$$\int_E f_n d\mu = +\infty, \text{ но } f_n \rightarrow 0$$

Из этих двух условие следует, что $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$

Следствие. (Усиленный вариант теоремы Леви).

Пусть $0 \leq f_n \leq f$ и $f = \lim f_n$. Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

Доказательство. $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \implies \int_E f d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

□

Теорема 2.22. Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть $f = \lim f_n$ и $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$ — суммируема на E .

Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$, более того $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

Доказательство. $g_n := 2F - |f_n - f| \leq 2F$ и $g_n \rightarrow 2F$.

$$g_n \geq 2F - |f_n| - |f| \geq 0.$$

Тогда предел $\lim \int_E g_n d\mu = 2 \int_E F d\mu$

$$\int_E g_n d\mu = \int_E 2F d\mu - \int_E |f_n - f| d\mu$$

Из двух строчек выше делаем вывод, что

$$\begin{aligned} & \int_E |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \\ & \geq |\int_E (f_n - f) d\mu| = |\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu| \end{aligned}$$

□

Замечание. 1. Без суммир. мажоранты неверно:

$$f_n = n \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow f = \begin{cases} +\infty, & \text{в точке } 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0, \quad \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1, \quad F := \sup f_n, \quad F(x) = n \text{ при } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

2. Поточечную сходимость можно заменить на сходимость почти везде, можно заменить и на сходимость по мере.

Теорема 2.23. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Доказательство. $a = x_0$

$$b = x_n$$

$$S_* := \sum_{k=1}^n \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$S^* := \sum_{k=1}^n \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Если мелкость дробления $\rightarrow 0$, то $S_*, S^* \rightarrow \int_a^b f$.

$$g_*(x) := \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$g^*(x) := \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\int_{[a,b]} g_* d\lambda = S_*, \quad \int_{[a,b]} g^* d\lambda = S^*$$

$g_* \leq f \leq g^*$ почти везде.

$$\underbrace{S_*}_{\rightarrow \int_a^b f} = \int_{[a,b]} g_* d\lambda \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_{[a,b]} g^* d\lambda = \underbrace{S^*}_{\rightarrow \int_a^b f} \implies \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f$$

□

Замечание. На самом деле это верно для любой функции, интегрируемой по Риману на $[a, b]$.

Теорема 2.24. (Критерий Лебега интегрированности по Риману).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f – интегрируема по Риману \Leftrightarrow множество точек разрыва f имеет нулевую меру Лебега.

Пример. Возьмем $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \mathbf{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$.

$f = 0$ почти везде $\implies \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$, но точки разрыва – весь отрезок $[0, 1]$.

2.6. Произведение мер

Определение 2.14. (X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с σ -конечными мерами.

$$\mathcal{P} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu A < +\infty \wedge \nu B < +\infty\}$$

$$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B < +\infty, \quad A \times B \text{ – измеримый прямоугольник.}$$

Теорема 2.25. \mathcal{P} – полукольцо, а m_0 – σ -конечная мера на нем.

Доказательство. $\{A \in \mathcal{A} : \mu A < +\infty\}$ и $\{B \in \mathcal{B} : \nu B < +\infty\}$ – полукольца (проверяем определение полукольца для обоих множеств).

\mathcal{P} – декартово произведение полуколец, то есть тоже полукольцо (это по теореме, которая была выше).

Проверяем, что m_0 – мера. Пусть $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$.

$$\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) = \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \times \mathbf{1}_{B_k}(y)$$

$$\int_Y \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(Y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \mathbf{1}_{B_k}(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

$$\int_X \mathbf{1}_A(x) \nu B d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \cdot \nu B_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_0(A_k \times B_k)$$

$$\sigma\text{-конечность } m_0: X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_j, \quad Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j, \quad \mu X_j < +\infty, \quad \nu Y_j < +\infty$$

$$X \times Y = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} X_j \times Y_k$$

$$m_0(X_j \times Y_k) < +\infty.$$

□

Определение 2.15. (X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с σ -конечными мерами. Произведения меры μ и ν – стандартное продолжение меры m_0 .

Обозначение: $\mu \times \nu$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – σ -алгебра, на которую продолжили. $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

Свойства. 1. Декартово произведение измеримых – измеримо.

2. Если $\mu e = 0$, то $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$.

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A_n < +\infty$

$$B \in \mathcal{B} \implies B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \nu B_n < +\infty$$

$$A \times B = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \underbrace{A_k \times B_k}_{\in \mathcal{P}} - \text{измер.}$$

2. $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \nu Y_k < +\infty$

$$e \times Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} e \times Y_k, (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu e \cdot \nu Y_k = 0$$

□

Замечание. Обозначения: $C \subset X \times Y$, $x \in X$.

$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$ – сечения мн-ва C .

$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$

Следствие. 1. $(\bigcup_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcup_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

2. $(\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcap_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

Определение 2.16. Пусть функция f задана на мн-ве E , за исключением некоторого мн-ва e , $\mu e = 0$. Если f измерима на $E \setminus e$, то f измерима на E в **широком смысле**.

Определение 2.17. Система множеств – **монотонный класс**, если

1. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

2. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

Теорема 2.26. Если монотонный класс содержит алгебру \mathcal{A} , то он содержит и $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Докажем, что минимальный монотонный класс \mathcal{M} , содержащий \mathcal{A} – σ -алгебра.

Рассмотрим $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий \mathcal{A} .

Если $B \in \mathcal{A}$, то $B \cap A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ и $A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \implies \mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$

$E_1 \subset E_2 \subset \dots, E_n \in \mathcal{M}_A \implies E_n \cap A \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{E_n} \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \in \mathcal{M}$

Следовательно $\mathcal{M}_A = \mathcal{M} \implies \forall B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \setminus B \in \mathcal{M}$

$\implies \mathcal{M}$ – симметричная структура.

Рассмотрим $B \in \mathcal{M}$: $\mathcal{N}_B := \{C \in \mathcal{M} : B \cap C \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий \mathcal{A} (проверка по аналогии с предыдущим случаем).

$\implies \mathcal{N}_B = \mathcal{M} \implies \forall C \in \mathcal{M}, B \cap C \in \mathcal{M} \implies \mathcal{M}$ – алгебра.

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$

$\implies \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{=A} \in \mathcal{M}$, так как \mathcal{M} – монотонный класс.

□

Теорема 2.27. Принцип Кавальieri.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $m = \mu \times \nu$. Тогда

1. $C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \nu C_x$ измеримая в широком смысле.
3. $mC = \int_X \nu C_x d\mu(x)$

Доказательство. Меры конечны и $C \in$

$$\underbrace{\mathcal{B}}_{\text{борелевская оболочка (см. определение 1.7)}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

\mathcal{E} – система мн-в, в $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, такая что, если $E \in \mathcal{E}$, то $E_x \in \mathcal{B} \forall x \in X$ и $\phi(x) = \nu E_x$ – измеримая функция.

Шаг 1. $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

а. \mathcal{E} – измеримая система.

$$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}, \quad \nu(Y \setminus E_x) = \nu Y - \phi(x) – \text{измеримая.}$$

б. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcup E_n \in \mathcal{E}$.

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(E_n)_x}_{\in \mathcal{B}}$$

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) = \lim \nu(E_n)_x – \text{измеримая функция.}$$

в. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$ (можно переходить к дополнениям).

г. (б) + (в) $\implies \mathcal{E}$ – монотонный класс.

д. $\mathcal{E} \supset$ измеримый прямоугольник $E = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \implies E_x = \begin{cases} \mathcal{B}, & \text{если } x \in \mathcal{A} \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$,

$$\nu E_x = \begin{cases} 0 \\ \nu \mathcal{B} \end{cases} – \text{измеримая функция.}$$

е. Если E и $\tilde{E} \in \mathcal{E}$, то $E \sqcup \tilde{E} \in \mathcal{E}$.

$$(E \sqcup \tilde{E})_x = \underbrace{E_x}_{\in \mathcal{B}} \sqcup \underbrace{\tilde{E}_x}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$$\nu((E \sqcup \tilde{E})_x) = \nu E_x + \nu \tilde{E}_x – \text{сумма измеримых функций.}$$

ж. \mathcal{E} содержит дизъюнктивное объединение всевозможных изм. прямоугольников $\implies \mathcal{E}$ содержит кольцо $\implies \mathcal{E}$ содержит алгебру $\implies \mathcal{E} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

по т. о монотонном классе

Мы сейчас проверили, что если $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, то первые два пункта теоремы выполнены. Давайте для этой эе упрощенной ситуации проверять 3-ий пункт.

Шаг 2. Формула (3) для $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Рассмотрим $\int_X \nu E_x d\mu(x) =: \tilde{m}E$ – хотим сказать, что это мера на $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Пусть E_n – дизъюнктны $\implies \tilde{m}(\bigsqcup E_n) = \int_X \nu(\bigsqcup (E_n)_x) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}E_n$.

$m = \tilde{m}$ на измеримых прямоугольниках \implies они совпадают. Получили, что хотели.

Шаг 3. $mC = 0, C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies$ найдется $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, т.ч. $C \subset \tilde{C}$ и $m\tilde{C} = 0$.

$$0 = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) \implies \nu \tilde{C}_x = 0 \text{ при почти всех } x \in X.$$

$C_x \subset \tilde{C}_x \implies C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$ и $\nu C_x = 0$ при почти всех $x \in X$.

$$mC = 0 = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

Шаг 4. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e, \tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}), me = 0$.

$$C_x = \underbrace{\tilde{C}_x}_{\text{изм. } \forall x \in X} \sqcup \underbrace{e_x}_{\text{изм. при почти всех } x}, \nu C_x = \nu \tilde{C}_x + \nu e_x = \nu \tilde{C}_x.$$

$$mC = m\tilde{C} + me = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

Шаг 5. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n, Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \mu X_n < +\infty$.

$$X \times Y = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} X_n \times Y_k$$

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, C_{nk} = C \cap X_n \times Y_k \implies C_{nk}$ удовлетворяет теореме.

$$C_x = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} (C_{nk})_x$$

$$mC = \sum_{n,k=1}^{\infty} mC_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \int_X \nu(C_{nk})_x d\mu(x) = \int \sum \cdots = \int_X \nu C_x d\mu. \quad \square$$

Замечание. 1. Нужна лишь полнота ν .

2. Измеримость всех C_x не гарантирует измеримость C .

Доказательство. $\mathbb{R}^2, E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, $E \times [0, 1]$ \square

3. Среди C_x могут попадаться неизмеримые.

Доказательство. $\mathbb{R}^2, E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримые, $\{0\} \times E$ \square

4. Хочется интегрировать не по X , а по проекции, то есть $P := \{x \in X : C_x \neq \emptyset\}$. Но P может быть неизмеримо.

Доказательство. $E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, решение проблемы, это взять $\tilde{P} := \{x \in X : \nu C_x > 0\}$ – измеримое. \square

Определение 2.18. (X, \mathcal{A}, μ) – пр-во с σ -конечной мерой.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0, E \in \mathcal{A}, m = \mu \times \underbrace{\lambda_1}_{\text{одномерная мера Лебега}}.$$

График функции над мн-вом E :

$$\Gamma_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Подграфик функции над мн-вом E :

$$\mathcal{P}_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Лемма. (Лемма 1).

Если f – измеримая, то $m\Gamma_f = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu X < +\infty$. Возьмем $\epsilon > 0$ и $A_n := X\{\epsilon \cdot n \leq f < \epsilon \cdot (n+1)\}$

$$\Gamma_f \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) =: A.$$

$$mA = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) = \epsilon \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu A_n = \epsilon \cdot \mu X – сколь угодно маленькое.$$

Пусть μ – σ -конечна. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n, \mu X_n < +\infty$,

$$\Gamma_f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_f(X_n) – нулевой меры. \quad \square$$

Лемма. (Лемма 2).

$f \geq 0$ – измерима в широком смысле $\implies \mathcal{P}_f$ – измеримое мн-во.

Доказательство. 1. Пусть f – простая $\implies f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k} \implies \mathcal{P}_f = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \times [0, a_k]$ – измеримое.

2. Пусть f – измеримая $\implies 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \rightarrow f$ – простые ϕ_i , $\mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$.

$$\mathcal{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f.$$

Берем $x \in X$.

Если

(a) $f(x) = +\infty$, то $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$, над точкой x , $[0, \phi_n(x)]$ их объединение будет луч.

(b) $f(x) < +\infty$, то $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$, $\bigcup [0, \phi_n(x)] \supset [0, f(x)]$

□

Теорема 2.28. (О мере подграфика).

(X, \mathcal{A}, μ) – пространство с σ -конечной мерой, $f \geq 0$, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $m = \mu \times \lambda_1$.

Тогда f – измеримая в широком смысле $\Leftrightarrow \mathcal{P}_f$ – измер. и в этом случае $\int_X f d\mu = m \mathcal{P}_f$.

Доказательство. " \Rightarrow ": Лемма 2.

" \Leftarrow ": принцип Кавальieri для \mathcal{P}_f :

$$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{при } f(x) = +\infty \\ [0, f(x)), & \text{при } f(x) < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(x) := \lambda_1((\mathcal{P}_f)_x) = \underbrace{f(x)}_{\text{измеримая в широком смысле}}$$

$$m \mathcal{P}_f = \int_X \underbrace{\lambda((\mathcal{P}_f)_x)}_{=f(x)} d\mu(x) - \text{получили, что хотели.}$$

□

Теорема 2.29. Тонелли.

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримая, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – измерима, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – измерима относительно ν .
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbf{1}_C$ (характеристическая функция мн-ва C), тогда $f_x(y) = \mathbf{1}_{C_x}(y)$.

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y \mathbf{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu C_x$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_{X \times Y} \mathbf{1}_C dm = mC = \int_X \nu C_x d\mu(x) = \int_X \phi d\mu.$$

2. Пусть $f \geq 0$ – простая, тогда $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$

3. Пусть $f \geq 0$ – измеримая, тогда берем последовательность простых функций $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $\lim f_n = f$.

$(f_n)_x(y)$ – измерим. при почти всех x .

$(f_n)_x \nearrow f_x$ – измерим. при почти всех x .

$\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$ – измерим. и $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$

$\lim \phi_n(x) = \int_Y \lim f_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \phi(x)$ – измерим.

$$\int_{X \times Y} f dm \underset{\substack{\leftarrow \\ \text{т. Леви}}}{=} \int_{X \times Y} f_n dm = \int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu.$$

□

Теорема 2.30. Фубини.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, суммируема, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – суммируема, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – суммируема относительно ν .
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X (\int_Y f(x, y) d\nu(y)) d\mu(x)$

Доказательство. $(*) : \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty$ – следует из суммируемости f .

$$\begin{aligned} (*) \underset{\substack{= \\ \text{т. Тонелли}}}{=} & \int_X \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{:=\alpha(x)} d\mu(x) \\ \implies \alpha(x) = & \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{\implies f_x \text{ – суммируема при почти всех } x \in X} \quad \text{– конечна при почти всех } x \in X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_X |\phi| d\mu &= \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty \\ \implies \phi &\text{ – суммируема.} \end{aligned}$$

$$\int_{X \times Y} f_\pm dm = \int_X \left(\int_Y f_\pm(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ и вычтем } f = f_+ - f_-.$$

□

Следствие. Если $f \geq 0$ и измеримая или f – суммируемая, то

$$(**): \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Следствие. $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по μ , $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по ν .

Тогда $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ суммируема по $m = \mu \times \nu$ и $\int_{X \times Y} h dm = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$.

Доказательство. $\int_{X \times Y} |h| dm \underset{\substack{= \\ \text{т. Тонелли}}}{=} \int_X \left(\int_Y |f(x)| |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) =$

$$= \int_X |f(x)| \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y |g| d\nu \cdot \int_X |f| d\mu < +\infty \implies h \text{ – суммируема.}$$

По Фубини пишем все без модулей.

□

Замечание. 1. Суммируемости $f_x(y) = f(x, y)$, $f^y(x) = f(x, y)$, $\phi(x) = \int_X f_x d\nu$, $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$ не хватает для суммируемости f по мере m .

2. Без суммируемости f по m равенства $(**)$ может не быть.

Пример. \mathbb{R}^2 , $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $g(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

Первообразные:

$$1. \int f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$2. \int g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Подставляем:

$$1. \int_{[-1,1]} f(x,y)dx = -\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{y^2+1}$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)dxdy = -2 \int_{[-1,1]} \frac{dy}{y^2+1} = -2 \cdot \arctan(y) \Big|_{-1}^1 = -\pi$$

$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)dydx = \pi$ – не совпали из-за отсутствия суммируемости.

$$2. \int_{[-1,1]} g(x,y)dx = -\frac{y}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

Теорема 2.31. (X, \mathcal{A}, μ) – пространство с σ -конечной мерой, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измерим.

$$\int_X |f|d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t\}dt \quad (\text{в скобках записана функция распределения}).$$

Доказательство. $m = \mu \times \lambda_1$.

$$\int_X |f|d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} = \int_{[0,+\infty]} \left(\int_X \underbrace{\mathbf{1}_{\mathcal{P}_{|f|}}(x,t)}_{=1 \Leftrightarrow |f(x)| \geq t} d\mu(x) \right) d\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty]} \mu X\{|f| \geq t\}d\lambda_1(t).$$

□

Следствие. 1. В условии теоремы $\int_X |f|d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\}dt$

Доказательство. $g(t) := \mu X\{|f| \geq t\}$ – монотонно возраст., не более чем счетное число точек разрыва.

$$\mu X\{|f| > t\} = \lim \mu X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \frac{1}{n}) = \lim_{s \rightarrow t+} g(s) = g(t) \text{ при почти всех } t.$$

$$X\{|f| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\}$$

□

$$2. \int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \mu X\{|f| \geq t\} dt \text{ при } p > 0.$$

Доказательство. $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t^{\frac{1}{p}}\} dt = \int_0^{+\infty} g(t^{\frac{1}{p}}) dt = \int_0^{+\infty} ps^{p-1} g(s) ds$

$$\text{Где } t = s^p, s = t^{\frac{1}{p}}, dt = ps^{p-1}ds.$$

□

2.7. Замена переменной

Определение 2.19. Ω и $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые.

$$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

Φ – диффеоморфизм, если

1. Φ – биекция.
2. Φ – непр. дифф.
3. Φ^{-1} – непр. дифф.

Замечание. $Id = \Phi^{-1} \circ \Phi \implies x = (\Phi(x)^{-1})' \cdot (\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \implies 1 = \det(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \det(\Phi'(x)).$

Замечание. Обозначение.

$$J_\Phi := \det \Phi'$$

якобиан = определитель матрицы Якоби.

Теорема 2.32. (о замене переменной).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ диффеоморфизм. $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ открыты, $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, $f \geq 0$ измеримая. Тогда $\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |J_\Phi(x)| d\lambda_m$.

Такая же формула есть и для суммир. функций f .

Частные случаи:

1. Сдвиг: $\Phi(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}^m$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x+a) d\lambda_m(x)$$

2. $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ обратимое линейное отображение.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(Lx) |det L| d\lambda_m(x)$$

3. Гомотетия: $Lx = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = c^m \cdot \int_{\mathbb{R}^m} f(c \cdot x) d\lambda_m(x).$$

Лемма. (о расщеплении).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые, $a \in \Omega$, $1 \leq k \leq m - 1$.

Тогда существует U_a и $\Phi_2 : U_a \rightarrow \mathbb{R}_m$, $\Phi_1 : \Phi_2(U_a) \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$.

Φ_1 – остался на месте k координат, а Φ_2 – оставляет на месте $m - k$ координат.

Доказательство. $x, u \in \mathbb{R}^m$, $y, v \in \mathbb{R}^{m-k}$, $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \underbrace{\phi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, \underbrace{\psi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}} \end{pmatrix}$.

$$\Phi_1(x, y) = (x, \underbrace{f(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}})$$

$$\Phi_2(x, y) = (\underbrace{g(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, y)$$

$$\Phi_1(\Phi_2(x, y)) = (*)$$

$$(*) = \Phi_1(g(x, y), y) = (g(x, y), f(g(x, y), y))$$

$$(*) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \implies g(x, y) := \phi(x, y)$$

$$\implies f(u, v) = \psi(\Phi_2^{-1}(u, v))$$

$$f(\phi_2(x, y)) = f(\phi(x, y), y) = \psi(x, y)$$

Нужна локальная обратимость Φ_2 , а для этого нужна обратимость $\Phi'_2(a)$, то есть $det(\Phi'_2(a)) \neq 0$.

$$\Phi_2(x, y) = (\phi(x, y), y), \quad \Phi'_2(x, y) = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad det(\Phi'_2) = det(\Phi_x).$$

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{pmatrix}$$

блок $k \times k$, ненулевой минор найдется. □

Следствие. $\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $a \in \Omega$, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые.

Тогда существует U_a , т.ч. $\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_m$, где Φ_j – диффеоморфизм, оставляющие на месте все координаты, кроме одной (но их перенумерующие).

Доказательство. Индукция + предыдущая лемма. □

Теорема 2.33. Линделефа.

$A \subset \mathbb{R}^m$, A – покрыто открытыми мн-вами.

Тогда из него можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

Доказательство. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} \left(\underbrace{G_\alpha}_{\text{открытое}} \right)$.

Берем $a \in A$, рисуем картинку, которую кто-нибудь *обязательно* добавит.

Пусть U_a – шарик с рациональным центром и рациональным радиусом. $a \in U_a$ и U_a содержатся в каком-то элементе покрытия. Очевидно, что $a \in U_a \subset G_{\alpha_i}$, тогда выкинем все лишние G_α , а остальных останется не более чем счетное кол-во (так как U_a с рациональным центром и радиусом, а таких счетное кол-во), при этом они покрывают A . \square

Теорема 2.34. (об изменении меры множества при диффеоморфизме).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые, $A \subset \Omega$ – измеримое.

Тогда $\lambda_m \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m$.

Замечание. Если теорема верна для конкретного Φ и произвольного A , то для того же Φ верна формула замена переменной.

Формула замены переменной:

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda_m.$$

Доказательство. Замечания.

$$f = \mathbf{1}_{\Phi(A)}, \quad A \subset \Omega.$$

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{1}_{\Phi(A)} d\lambda_m = \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A |J_\Phi| d\lambda_m.$$

$$\mathbf{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x)) = \mathbf{1}_A.$$

Нужно проверить для простых, а дальше для измеримых, в общем, все раскручивается (так говорил Храбров...). \square

Доказательство. Теоремы.

Шаг 1. Пусть $\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Если т. верна для каждого G_α , то она верна и для Ω .

Выбираем нбчс подпокрытие $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

$$\lambda_m \Phi(A \cap G_k) = \int_{A \cap G_k} |J_\Phi| d\lambda_m \text{ и просуммируем } A \cap \left(G_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j \right).$$

Шаг 2. Если т. верна для диффеоморфизмов Φ и Ψ , то она верна и для $\Psi \circ \Phi$.

$$\begin{aligned} \lambda_m \Psi(\Phi(A)) &= \int_{\Phi(A)} |J_\Psi| d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \underbrace{\mathbf{1}_{\Phi(A)} \cdot |J_\Psi|}_{=: f} d\lambda_m = \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{1}_{\Phi(A)} \circ \Phi}_{= \mathbf{1}_A} \cdot |J_\Psi \circ \Phi| \cdot |J_\Phi| d\lambda_m = \\ &= \int_A |J_\Psi(\Phi(x))| |J_\Phi(x)| d\lambda_m(x). \\ \det(\Psi'(\Phi(x))) \cdot \det(\Phi'(x)) &= \det(\Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)) = \det(\Psi \circ \Phi)' = J_{\Psi \circ \Phi}. \end{aligned}$$

Шаг 3. $m = 1$. $\Phi(x)$ – строго монот. и непр. дифф.

$$\nu A := \lambda_1(\phi(A)) – \text{мера.}$$

$$\mu A := \int_A |\phi'| d\lambda_1 - \text{мера.}$$

Хотим проверить, что $\nu = \mu$, тогда проверим, что они совпадают на ячейках $(a, b]$ (а по единственности продолжения получим, что нужно).

$$\lambda(\phi(a, b]) = \int_{(a, b]} |\phi'| d\lambda.$$

Эти значения стремятся к тем, что выше, соответственно. $\lambda(\phi[a + \frac{1}{n}, b]) = \int_{[a + \frac{1}{n}, b]} |\phi'| d\lambda$

Эти равны тем, что выше, соответственно. $\phi(b) - \phi(a + \frac{1}{n}) = \int_{a + \frac{1}{n}}^b \phi' d\lambda$, если ϕ – возрастает, $\phi[a + \frac{1}{n}, b] = [\phi(a + \frac{1}{n}), \phi(b)]$

Шаг 4. Φ оставляет на месте $m - 1$ коорд. $x = (\underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{m-1}}, \underbrace{t}_{\in \mathbb{R}})$.

$$\Phi(y, t) = (y, \phi(y, t)).$$

$$\lambda_m \Phi(A) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\lambda_1 \Phi(A))_y d\lambda_{m-1}(y) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \lambda_1(\phi(y, A_y)) d\lambda_{m-1}(y) \underset{(*)}{=}.$$

$t \in (\Phi(A))_y \Leftrightarrow (y, t) \in \Phi(A) \Leftrightarrow \exists (y', t') \in A, \text{ т.ч. } (y, t) = \Phi(y', t') = (y', \phi(y', t')) \Leftrightarrow \exists t' :$
 $\underbrace{(y, t') \in A}_{t' \in A_y} \text{ и } \underbrace{(y, t) = (y, \phi(y, t'))}_{t = \phi(y, t')}$

$$\underset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{A_y} |\phi'(y, t)| d\lambda_1(t) d\lambda_{m-1}(y) \right) = \int_A |J_\Phi| \lambda_m.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \phi'_y & \phi'_t \end{pmatrix}$$

Дальше были какие-то умные слова. Я не успел записать...

□

Пример. Полярная замена. \mathbb{R}^2 .

$$(r, \phi) \rightarrow (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

$$r \in (0, +\infty)$$

$$\phi \in (0, 2\pi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2 = \int_{[0, 2\pi] \times [0, +\infty)} (f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot r) dr d\phi.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\det = r$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx, \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Полярная замена:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\phi dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi \cdot (-e^{-t})|_0^{+\infty} = \pi.$$

$$t = r^2, \quad df = 2r dr$$

3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы

3.1. Собственные интегралы с параметрами

Утверждение 3.1. (X, \mathcal{A}, μ) – пр-во с мерой, T – метрическое пр-во, $f : X \times T \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, $\forall t \in T$, $E_t \in \mathcal{A}$, $f(\cdot, t)$ – измеримая.

$$F(t) := \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x).$$

1. t_0 – предельная точка.

$$\forall x \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{f(x, t)}} \dots \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}}$$

2. $f(x, t)$ непрер. в точке t_0 , $\forall x \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F$ непрер. в t_0 .

3. $f(x, t)$ дифф. по t , $\forall x \underset{?}{\overbrace{\Rightarrow}} F$ дифф., какая формула для производной?

4. Если ν – мера на T . $\int_T F(t) d\nu(t) = \int_T \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x) d\nu(t) = \int_T \int_X \mathbf{1}_{E_t}(x) \cdot f(x, t) d\mu(x) d\nu(t)$

Теорема 3.2. t_0 – предельная точка T . $f(\cdot, t)$ – суммируема $\forall t \in T$, $g(x) := \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$.

Локальное условие Лебега:

Пусть найдется окр-ть U_{t_0} и суммир. ф-я $\Phi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, т.ч. $|f(x, t)| \leq \Phi(x) \forall t \in U_{t_0}$.

Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} (\int_X f(x, t) d\mu(x)) = \int_X g(x) d\mu(x)$.

Доказательство. Проверяем по Гейне. Берем $t_n \rightarrow t_0$, $f_n(x) := f(x, t_n)$, $\Phi(x) \geq |f(x, t_n)| = |f_n(x)|$ при больших n .

$$\underset{\text{т. Лебега}}{\overbrace{\Rightarrow}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=g(x)} d\mu(x)$$

□

Определение 3.1. $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, t_0 – предельная точка T , $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x)$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, $\forall t \in T : \rho_T(t, t_0) < \delta$, $\forall x \in X : |f(x, t) - g(x)| < \epsilon$.

Замечание. $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x, t) - g(x)| \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}} 0$

Следствие. Если $\mu X < +\infty$, $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} g(x)$, то $\int_X f(x, t) d\mu(x) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\rightarrow}} \int_X g d\mu$ и g – суммируемая ф-я.

Доказательство. При t близких к t_0 : $|f(x, t) - g(x)| \leq 1 \implies$ берем t_1 , для которого верно $|f(x, t_1) - g(x)| \leq 1 \implies |g(x)| \leq 1 + |f(x, t_1)|$ – суммируема \implies при t близких к t_0 : $|f(x, t)| \leq 1 + |g(x)|$ – суммир. □

Замечание. Условие $\mu X < +\infty$ существенно.

$$X = [0, +\infty), \mu = \lambda_1, f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]}(x) \underset{t \rightarrow t_0}{\overbrace{\Rightarrow}} 0,$$

$$\int_{[0, +\infty)} f_n d\lambda_1 = 1.$$

Следствие. $f(x, t)$ непрер. в точке t_0 , $\forall x \in X$ и существует суммир. $\Phi(x)$, т.ч. $|f(x, t)| \leq \Phi(x)$ при t близких к t_0 , $\forall x \in X$.

Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ непрер. в точке t_0 .

Доказательство. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ и подставляем в теорему. \square

Лемма. Декартово произведение компактов – компакт.

$(X, \rho), (Y, d)$ – метрические про-ва. $A \subset X, B \subset Y$ – компакты.

Тогда $A \times B$ – компакт в $(X \times Y, r)$, $r((x, y), (x', y')) = \rho(x, x') + d(y, y')$

Доказательство. Проверяем секвенциальную компактность.

$x_n \in A, y_n \in B, (x_n, y_n)$

хотим выбрать сх-ся подпосл. Выбираем x_{n_k} , т.ч. она сходится, а затем из y_{n_k} подпосл $y_{n_{k_j}}$, которая сх-ся.

Тогда $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ сх-ся покоординатно \Rightarrow сх-ся по метрике r . \square

Теорема 3.3. $\mu X < +\infty$, X и T – компакты, $f \in C(X \times T)$. Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(T)$.

Доказательство. f – непр-на на компакте \Rightarrow ограничена $\Rightarrow |f(x, t)| \leq M$ – суммир. мажоранта. \square

Следствие. Если $\mu X < +\infty$, X – компакт, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ открытое, $f \in C(X \times \Omega)$.

Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(\Omega)$.

Доказательство. Берем $a \in \Omega$. Хотим проверить непрер. в точке a .

Возьмем $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$ – компакт $\Rightarrow f \in C(X \times \overline{B}_r(a))$
 $\Rightarrow F \in C(\overline{B}_r(a)) \Rightarrow F$ непрер. в точке a . \square

Теорема 3.4. $T \subset \mathbb{R}$ промежуток, $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $f'_t(x, t)$ существ. $\forall x \in X, \forall t \in T$ и $f'_t(x, t)$ удовлетворяет **локальным условиям Лебега** в точке t_0 .

Тогда F – дифф. в точке t_0 и $F'(t_0) = \int_X f'_t(x, t_0) d\mu(x)$.

Доказательство. $\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \int_X \underbrace{\frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h}}_{=:g(x, h)} d\mu(x)$.

Нужно локальное условие Лебега для $g(x, h)$.

$$f(x, t_0 + h) - f(x, t_0) = h \cdot f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$$

$$g(x, h) = f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$$

Знаем, что $\exists U_{t_0}$, т.ч. $|f'_t(x, t)| \leq \Phi(x)$ – суммир. $\forall x, \forall t \in U_{t_0}$.

Рассмотрим $\|h\| < \epsilon$, т.ч. $t_0 + h \in U_{t_0}$

$\Rightarrow t_0 + \theta_h \cdot h \in U_{t_0} \Rightarrow |f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)| = |g(x, h)| \leq \Phi(x) \Rightarrow$ можно переходить к пределу под знаком интеграла, а предел $\lim_{h \rightarrow 0} g(x, h) = f'_t(x, t_0)$. \square

Следствие. $T \subset \mathbb{R}$ – отрезок, X – компакт, $\mu X < +\infty$, $f, f'_t \in C(X \times T)$.

Тогда $F \in C^1(T)$ и $F'(t) = \int_X f'_t(x, t) d\mu(x)$.

Доказательство. f'_t – непр. на компакте \Rightarrow ограничена $\Rightarrow |f'_t(x, t)| \leq M$ – сумм. мажоранта. \square

Теорема 3.5. Формула Лейбница.

$f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_t \rightarrow \mathbb{R}$, $f, f'_t \in C([a, b] \times [c, d])$, $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ непр. дифф.

$$F(t) := \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx.$$

Тогда F – дифф. и $F'(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x, t) dx + f(\psi(t), t) \cdot \psi'(t) - f(\phi(t), t) \cdot \phi'(t)$.

Доказательство. $\Phi(\alpha, \beta, t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx$.

$$\frac{d\Phi}{d\beta} = f(\beta, t) \text{ – непр. по условию}$$

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = -f(\alpha, t) \text{ – непр.}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} f'_t(x, t) dx \text{ – непр.}$$

Так как все частные производные непр., то Φ – дифф.

$$F(t) = \Phi(\phi(t), \psi(t), t) \implies F'(t) = \frac{d\Phi}{d\alpha}\phi'(t) + \frac{d\Phi}{d\beta}\psi'(t) + \frac{d\Phi}{dt}.$$

Пример. $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(tx) dx$

Так как есть локальное условие Лебега (на самом деле $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx < +\infty$):

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx) \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \sin(tx) \cdot d(e^{-x^2}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \sin(tx) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t \cos tx e^{-x^2} dx. \\ F'(t) &= -\frac{1}{2}tF(t). \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{F'}{F}}_{= (\ln F)'} = -\frac{t}{2} \implies \ln F = -\frac{t^2}{4} + C_0 \implies F(t) = C \cdot e^{\frac{-t^2}{4}}.$$

$$F(t)e^{\frac{t^2}{4}} = C.$$

Более строго:

$$\left(F(t)e^{\frac{t^2}{4}} \right)' = F'e^{\frac{t^2}{4}} + F \cdot \underbrace{\frac{t}{2}e^{\frac{t^2}{4}}}_{=0} = e^{\frac{t^2}{4}} \cdot (F' + \frac{t}{2} \cdot F) = 0.$$

Хотим узнать константу:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\frac{-t^2}{4}}.$$

3.2. Несобственные интегралы с параметрами

$$F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx : \forall t \in T \text{ интеграл сх-ся.}$$

Определение 3.2. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ – равномерно сх-ся, если $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : |\int_b^{+\infty} f(x, t) dx| < \epsilon$

Замечание. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx$.

$$\int_a^{+\infty} \dots \text{ – равном сх-ся} \Leftrightarrow F_b \underset{b \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} F \text{ равном. по } t \in T.$$

Доказательство. $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F(t)|}_{= - \int_b^{+\infty} f(x, t) dx} < \epsilon$

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx, t > 0$

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx} dx = -\frac{e^{-tx}}{t} \Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-bt}}{t}.$$

1. $t \geq t_0 > 0$:

$$\frac{e^{-bt}}{t} \leq \frac{e^{-bt_0}}{t_0} < \epsilon$$

2. $t > 0$:

$$\frac{e^{-bt}}{t} \underset{t \rightarrow 0+}{\curvearrowright} +\infty \implies \text{нет равномерной сх-ти.}$$

Теорема 3.6. Критерий Коши.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ равн. сх-ся} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

Доказательство. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равн. сх-ся \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow F_b \rightrightarrows F \text{ (где } F_b(t) = \int_a^b f(x, t) dx, F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx)$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F_c(t)|}_{\int_b^c f(x, t) dx} < \epsilon. \quad \square$$

Следствие. $f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная.

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ сх-ся } \forall t \in (c, d) \text{ и расх-ся при } t = c \text{ или } t = d.$$

Тогда сходимость неравномерная.

Доказательство. Пусть $\int_a^{+\infty}$ сх-ся равномерно \implies :

по Критерию Коши и тому, что f непр. на $[b, b'] \times [c, d]$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \forall t \in (c, d) : \left| \int_b^{b'} f(x, t) dx \right| < \epsilon \implies \underbrace{\int_b^{b'} f(x, c) dx}_{\rightarrow \int_b^{b'} f(x, c) dx, \text{ при } t \rightarrow c} < \epsilon \implies$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \left| \int_b^{b'} f(x, c) dx \right| \leq \epsilon \underset{\substack{\text{критерий Коши}}}{\implies} \int_a^{+\infty} f(x, c) dx \text{ сх-ся} \implies \text{противо-} \\ \text{речие.} \quad \square$$

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx, t > 0$ сх-ся неравномерно, так как при $t = 0$ расходится.

Теорема 3.7. Признак Вейерштрасса.

$$f, g : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } |f(x, t)| \leq g(x, t) : \forall x \geq a, \forall t \in T.$$

Если $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$ равном. сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равн. сх-ся.

Доказательство. Пишем критерий Коши для $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B : \underbrace{\int_b^c g(x, t) dx}_{< \epsilon} \geq \int_b^c |f(x, t)| dx \geq \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| \quad \square$$

Следствие. Если $|f(x, t)| \leq g(x) \forall x \geq a, \forall t \in T$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ сх-ся равномерно.

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1} dx$ равн. сх-ся при $t \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{\cos(xt)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ и } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} < +\infty.$$

Теорема 3.8. Признак Дирихле.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx.$$

Пусть

$$1. \exists M : \forall b > a, \forall t \in T : \left| \int_a^b f(x, t)dx \right| \leq M$$

$$2. g \text{ монотонна по } x : \forall t \in T.$$

$$3. g \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$ равномерно сх-ся.

Доказательство. Для дифф. ф-й g :

$$F(y, t) = \int_a^y f(x, t)dx.$$

$$(1) \Rightarrow |F(y, t)| \leq M : \forall y, \forall t.$$

$$\int_a^y f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F(x, t)g(x, t)|_{x=a}^{x=y}}_{=F(y, t)g(y, t)} - \int_a^y F(x, t)g'_x(x, t)dx$$

$$|F(y, t)g(y, t)| \leq M|g(y, t)| \underset{y \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$$\int_a^{+\infty} F(x, t)g'_x(x, t)dx - \text{равном. сх-ся.}$$

$$|F(x, t)g'_x(x, t)| \leq M|g'_x(x, t)|.$$

Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} |g'_x(x, t)|dx$ равн. сх-ся.

$$\int_a^y |g'_x(x, t)|dx = \left| \int_a^y g'_x(x, t)dx \right| = |g(x, t)|_{x=a}^{x=y} = \left| \underbrace{g(y, t)}_{\rightrightarrows 0 \text{ по усл.}} - g(a, t) \right| \rightrightarrows |g(a, t)|.$$

□

Теорема 3.9. Признак Абеля.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx. \text{ Пусть}$$

$$1. \int_a^{+\infty} f(x, t)dx \text{ равн. сх-ся.}$$

$$2. g \text{ монотонна по } x : \forall t \in T.$$

$$3. |g(x, t)| \leq M, \forall x \geq a, \forall t \in T$$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$ равн. сх-ся.

Доказательство. Для дифф. ф-й g :

$$F_b(y, t) = \int_b^y f(x, t)dx$$

$$\int_b^c f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F_b(x, t)g(x, t)|_{x=b}^{x=c}}_{=F_b(c, t)g(c, t)} - \int_b^c F_b(x, t)g'_x(x, t)dx$$

Применим крит. Коши для $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$:

$$\exists B : \forall y, b > B \forall t \in T : |F_b(y, t)| < \epsilon, \text{ смотрим на } b > B \implies |F_b(x, t)| < \epsilon.$$

$$|F_b(c, t)g(c, t)| < \epsilon \cdot M.$$

$$\left| \int_b^c F_b(x, t) g'_x(x, t) dx \right| \leq \int_b^c \underbrace{|F_b(x, t)|}_{<\epsilon} |g'_x(x, t)| dx < \epsilon \cdot \int_b^c g'_x(x, t) dx = \epsilon \left| \int_b^c g'_x(x, t) dx \right| = \epsilon |g(x, t)|_{x=b}^{x=c} \leq \epsilon \cdot 2M.$$

Получается, что оценили $\int_b^c f(x, t) g(x, t) dx < 3\epsilon M$, то есть проверили критерий Коши для исходного интеграла. \square

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^t} dx, t > 0$.

1. $t \geq t_0 > 0$. Дирихле: $f(x, t) = \sin(x)$, $g(x, t) = \frac{1}{x^t}$ – вторая монотонно убывает.

$$\left| \int_1^b \sin(x) dx \right| \leq 2.$$

$$g(x, t) \rightrightarrows 0: |g(x, t)| = \frac{1}{x^t} \leq \frac{1}{x^{t_0}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightharpoonup} 0.$$

Есть равн. сх-ть.

2. $t > 0$. Нет равн. сх-ти, так как расх-ся при $t = 0$.

Теорема 3.10. $f : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R}$, t_0 – предельная точка T .

Если

1. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равномерно сх-ся (по $t \in T$).
2. $f(x, t) \underset{t \rightarrow t_0}{\rightrightarrows} \phi(x)$ равномер. по x на любом конечном отрезке.

Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^{+\infty} f(x, t) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx$ и второй интеграл сх-ся.

Доказательство. (1) $\underset{\text{кр. Коши для } f}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| < \epsilon$.

$\rightarrow \left| \int_b^c \phi(x) dx \right| \text{ при } t \rightarrow t_0$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^{+\infty} \phi(x) dx \right| \leq \left| \underbrace{\int_b^{+\infty} f(x, t) dx}_{<\epsilon} \right| + \left| \underbrace{\int_b^{+\infty} \phi(x) dx}_{<\epsilon} \right| + \left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right|.$$

$$(1) \Rightarrow \exists B_1 \forall b > B_1 \text{ и } \forall t \in T : \left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

$$\int_a^{+\infty} \phi(x) dx - \text{сх-ся} \Rightarrow \exists B_2 \forall b > B_2 : \left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right| < \epsilon.$$

Фиксируем $b \geq \max\{B_1, B_2\}$.

$$\left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right| \leq (b-a) \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} \{ |f(x, t) - \phi(x)| \}}_{\rightarrow 0} < \epsilon \text{ при } t \text{ близких к } t_0. \quad \square$$

Замечание. Равн. сх-ть интеграла существенна:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{при } 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} 0$$

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^t \frac{1}{t} dx = 1 \neq 0.$$

Теорема 3.11. $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$, $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равном. сх-ся.

Тогда $F \in C[c, d]$.

Доказательство. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} F(t)$.

Достаточно понять, что $F_b \in C[c, d]$, а это знаем. \square

Замечание. Без равном. сх-ти неверно.

$$f(x, t) = te^{-t^2 x}, t \in \mathbb{R}.$$

$$F(t) := \int_0^{+\infty} te^{-t^2 x} dx - \text{сх-ся}.$$

$$F(0) = 0$$

$$F(t) = \frac{1}{t}$$
 при $t \neq 0$ нет непрер.

Теорема 3.12. (Интегральный аналог теоремы Абеля для степенных рядов).

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится и $f \in C[a, +\infty)$. Тогда $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x) e^{-tx} dx \in C[0, +\infty)$

Доказательство. Признак Абеля.

$g(x, t) = e^{-tx}$: монотонно убывает при фиксированном t .

$|g(x, t)| \leq 1$: равномерно ограничена. \square

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \text{сх-ся} \implies F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$ непрер. при $t \geq 0$.

Теорема 3.13. $f'_t, f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$

1. $\Phi(t) := \int_a^{+\infty} f'_t(x, t) dx$ равномерно сх-ся.

2. $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ сх-ся при $t = t_0$.

Тогда F равномерно сх-ся, $F \in C^1[c, d]$ и $F' = \Phi$.

Доказательство. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \implies F'_b(t) = \int_a^b f'_t(x, t) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} \Phi(t)$.

$$F_b(t) = \left(\underbrace{\int_{t_0}^t F'_b(u) du}_{\Rightarrow \int_{t_0}^t \Phi(u) du} \right) + \underbrace{F_b(t_0)}_{\rightarrow F(t_0)} \implies \underbrace{F_b(t)}_{\rightarrow F(t)} \Rightarrow \int_{t_0}^t \Phi(u) du + F(t_0)$$

\implies равномерная сх-ть и $F(t) = F(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{\Phi(u)}_{\text{непр. ф-я}} du \implies F \in C^1[c, d]$ и $F'(t) = \Phi(t)$. \square

Пример. $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx$. Знаем, что $F \in C[0, +\infty)$

$$\Phi(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{-tx} \cdot (-x) dx = \underbrace{- \int_0^{+\infty} \sin(x) \cdot e^{-tx} dx}_{=-\frac{1}{1+t^2} \text{ два раза инт. по частям}} - \text{равномерно сх-ся при } t \geq t_0 > 0.$$

$$\implies F'(t) = \Phi(t) \implies F(t) = C - \arctan(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx \underset{\text{по предыдущим теоремам...}}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx = 0.$$

$\left| e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq e^{-x} \cdot \frac{|\sin(x)|}{x} \leq e^{-x}$ – суммируемая мажоранта.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} C - \arctan(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \implies C[0, +\infty) \ni F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \in C[0, +\infty)$ при $t > 0$

$\implies F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$ при $t \geq 0 \implies F(0) = \frac{\pi}{2}$, то есть $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

3.3. В- и Г-функции Эйлера

Определение 3.3. $\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$, $p > 0$ – гамма-функция.

$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, $p, q > 0$ – бета-функция.

Свойства. Г-функции.

- Интеграл сходится в нуле эквивалентно тому, что $\frac{1}{x^{1-p}}$ сх-ся в $+\infty$

Доказательство. $x^{p-1} \leq e^{\frac{x}{2}}$ при больших x , $x^{p-1} \cdot e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}} \implies$ сх-ся. \square

- $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Доказательство. $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) = -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$. \square

- $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

Далее индукция. \square

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Доказательство. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$, где $y^2 = x$, $dx = 2ydy$. \square

- $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$.

Доказательство. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) = \dots = (n - \frac{1}{2}) \cdot (n - \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ – получилось ровно то, что хотели. \square

- Г бесконечно дифф. ф-я и $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^n e^{-x} dx$

Доказательство. Надо обосновать дифф. под знаком интеграла. Для этого надо потребовать равномерную сх-ть полученного интеграла.

$0 < a \leq p \leq b < +\infty$

(a) $0 \leq x \leq 1$:

$$x^{a-1} |\ln(x)|^n e^{-x}$$

(b) $1 \leq x$:

$$x^{b-1} |\ln(x)|^n e^{-x} \leq x^{n+b} e^{-x}$$

\square

7. Γ – строго выпуклая.

Доказательство. $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx > 0$

□

Свойства. B -функции.

1. Интеграл сх-ся

- (a) В нуле $\Leftrightarrow \frac{1}{x^{1-p}}$ – сх-ся.
- (b) В единице $\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^{1-q}}$ – сх-ся.

2. $B(p, q) = B(q, p)$.

Доказательство. $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = -\int_1^0 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = B(q, p)$, где $y = 1-x$, $dy = -dx$. □

3. $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$.

Доказательство. $B(p, q) = \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx$, где $y = \frac{x}{1+x}$, $y = 1 - \frac{1}{1+x}$, $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$. □

Теорема 3.14. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Доказательство. $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy =$
 $= \int_0^{+\infty} \int_0^u x^{p-1} (u-x)^{q-1} e^{-u} dx du \quad \underbrace{=}_{\text{замена } x=uv, dx=u \cdot dv} \int_0^{+\infty} \int_0^1 (uv)^{p-1} (u-uv)^{q-1} e^{-u} u dv du =$
 $= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} \cdot \underbrace{\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv}_{=B(p,q)} du = B(p, q) \Gamma(p+q)$. □

Следствие. (формула дополнения)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad p \in (0, 1).$$

Доказательство. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \Gamma(1)B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad \underbrace{=}_{\text{просто верим в это}} \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. □

Следствие. (формула удвоения)

$$\Gamma(p)\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$$

Доказательство. $\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx =$
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx \quad \underbrace{=}_{x=\frac{1}{2}-t} 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} d(-t) =$
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} dt \quad \underbrace{=}_{t=\frac{\sqrt{u}}{2}} 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{u}{4}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du =$
 $= \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{B(p, \frac{1}{2})}{2^{2p-1}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2^{2p-1}} =$
 $= \frac{\Gamma(p)\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2}) \cdot 2^{2p-1}}$

□

Теорема 3.15. $\Gamma(t+a) \sim t^a \Gamma(t)$ при $t \rightarrow +\infty$

Доказательство. $\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+a)}$ при больших t

$$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} = B(t+1, a) = \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx$$

$$t^a \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx \underset{y=xt}{=} t^a \int_0^t \left(\frac{y}{t}\right)^{a-1} \underbrace{\left(1 - \frac{y}{t}\right)^t}_{\rightarrow e^{-y}} \frac{1}{t} dy \rightarrow \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)$$

На самом деле интегрируем $\mathbb{1}_{[0,t]} y^{a-1} (1 - \frac{y}{t})^t \leq y^{a-1} e^{-y}$ – это суммируемая мажоранта, поэтому можем перейти к пределу по т. Лебега. \square

Следствие. При $a = \frac{1}{2}$ это формула Валлиса.

Доказательство. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \sim n^{\frac{1}{2}} \Gamma(n)$ \square

Теорема 3.16. формула Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

Доказательство. $\Gamma(n+p) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdots (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p)$

$$n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)} = \frac{n^p}{p+n} \cdot \frac{n! \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \underbrace{\frac{n}{p+n}}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left(n^p \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+p)} \right)}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \Gamma(p)$$

Пример. $1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdots (5n+1) = 5^n \cdot \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5}+1) \cdot (\frac{1}{5}+2) \cdots (\frac{1}{5}+n) \sim 5^{n+1} \frac{n^{\frac{1}{5}} n!}{\Gamma(\frac{1}{5})}$

Пример. 1. $\int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)$ при $p > 0$.

$$\text{Док-во: } \int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt \underset{x=t^p}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} dx = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right).$$

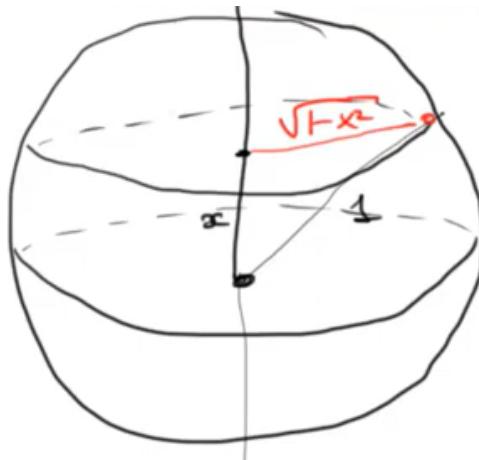
$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

$$\text{В частности, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}.$$

$$\text{Док-во: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\phi))^{\frac{p-2}{2}} \cdot (\cos^2(\phi))^{\frac{q-2}{2}} \cdot 2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \underset{t=\sin^2(\phi)}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{\frac{p}{2}-1} (1-t)^{\frac{q}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

3. Объем n -мерного шара $V_n(r) = C_n \cdot r^n$, где $C_n = V_n(1)$ – объем n -мерного шара, радиуса 1.



$$\begin{aligned} V_n(1) &= \int_{-1}^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{n-1} dx \\ &= 2 \cdot C_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\phi))^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Получили, что $C_n = C_{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi} \cdot C_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \cdots \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} C_1 = \\ &= 2 \cdot \frac{(\sqrt{\pi})^{n-1} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}. \end{aligned}$$

3.4. Криволинейные интегралы

Определение 3.4. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая кривая

f – функция, заданная на $\gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

Криволинейный интеграл (I рода (интеграл по длине дуги)):

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt, \text{ где } \|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2}$$

Теорема 3.17. 1. Не зависит от параметризации кривой

2. Не зависит от направления

3. $\int_{\gamma} ds = l(\gamma)$ – длина кривой

4. Линейность по функции

5. Аддитивность по кривой: если $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$, то $\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$

6. Если $f \leq g$, то $\int_{\gamma} f \leq \int_{\gamma} g$

7. $|\int_{\gamma} f ds| \leq \int_{\gamma} |f| ds$

8. $\int_{\gamma} f ds \leq \max f \cdot l(\gamma)$

Доказательство. 1-2 $\tilde{\gamma}$ – другая параметризация. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, где $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ – гладкая строго монотонная биекция

$$\int_{\tilde{\gamma}} f ds = \int_c^d f(\gamma(\tau(u))) \|\tilde{\gamma}'(u)\| du$$

$$\tilde{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'_1(u) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \circ \tau, \tilde{\gamma}_1'(u) = \gamma_1'(\tau(u))\tau'(u)$$

$\|\tilde{\gamma}'(u)\| = |\tau'(u)| \cdot \|\gamma'(\tau(u))\|$ – если бы не было модуля, могли бы просто сделать замену переменной, но надо что-то умнее

Если $\tau \uparrow$, тогда $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds$, где $t = \tau(u)$

А если $\tau \downarrow$, то лишний минус появится, когда поменяем местами концы

В итоге не зависим от убывания/возрастания

3 Формула для длины кривой

$$4 \int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \int_a^b (\alpha f(\gamma(t)) + \beta g(\gamma(t))) \|\gamma'(t)\| dt = \alpha \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt + \dots = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds$$

$$5 \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, c \in (a, b), \gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$$

и по аналогии

$$6 \int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

и если заменим на g , станем только больше

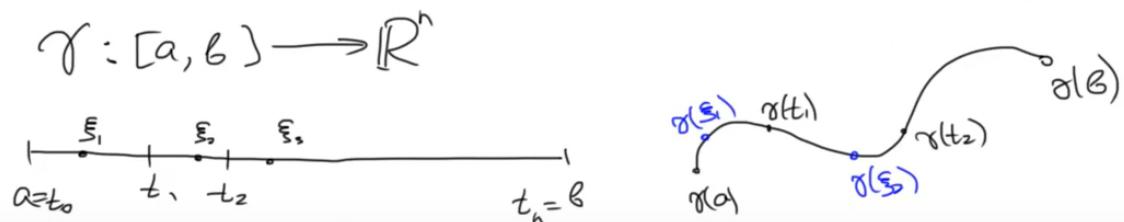
$$7 \left| \int_{\gamma} f ds \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \right| = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} |f| ds$$

$$8 f \leq \max f \implies \int_{\gamma} f ds \leq \int_{\gamma} \max f ds = l(\gamma) \cdot \max f$$

□

Замечание. Можно определить $\int_{\gamma} f ds$ для кусочно-гладких γ . Содержательная тут только проверка на корректность, но она проверяется с помощью аддитивности по кривой

Упражнение. $\int_{\gamma} f ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(\gamma(\xi_k)) \cdot l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]})$, где $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, при мелкости дробления $\rightarrow 0$.



Определение 3.5. Дифференциальная форма (1-го порядка) в \mathbb{R}^n .

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n, \text{ где}$$

$$f_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\omega(x)$ – линейное отображение: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$dx_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – проекция на k -ую координату, то есть $dx_k(\underbrace{h}_{\text{вектор } =(h_1, \dots, h_n)}) = h_k$.

Пример записи: $\omega(x, h) = f_1(x)h_1 + \dots + f_n(x)h_n$.

Определение 3.6. Криволинейный интеграл *II* рода (интеграл от дифференциальной формы)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая кривая

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \cdots + f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'_n(t)) dt$$

Если коротко: $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

Свойства. 1. Не зависит от параметризации

2. Смена направления меняет знак интеграла

3. (**Связь с интегралом по длине дуги**). $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds$, где $\bar{\sigma}$ – единичный касательный вектор к кривой

4. Линейность по \bar{f}

5. Аддитивность по кривой

$$6. |\int_{\gamma} \omega| \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| ds \leq \max \|\bar{f}\| \cdot l(\gamma)$$

Доказательство. 1. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau, \tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ – строго возрастает, гладкая, $\tau(c) = a, \tau(d) = b$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\tilde{\gamma}'(u)) du = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\tau(u))) \gamma'_k(\tau(u)) \tau'(u) du = (*)$$

$$\text{Делаем замену } t = \tau(u) : (*) = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_{\gamma} \omega$$

2. Доказали вместе с первым: если меняется направление, то $\tau(c) = b, \tau(d) = a, \int_b^a = - \int_{\gamma} \omega$

$$3. \bar{\sigma}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}. \text{ Тогда } \int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \bar{\sigma}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \\ = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

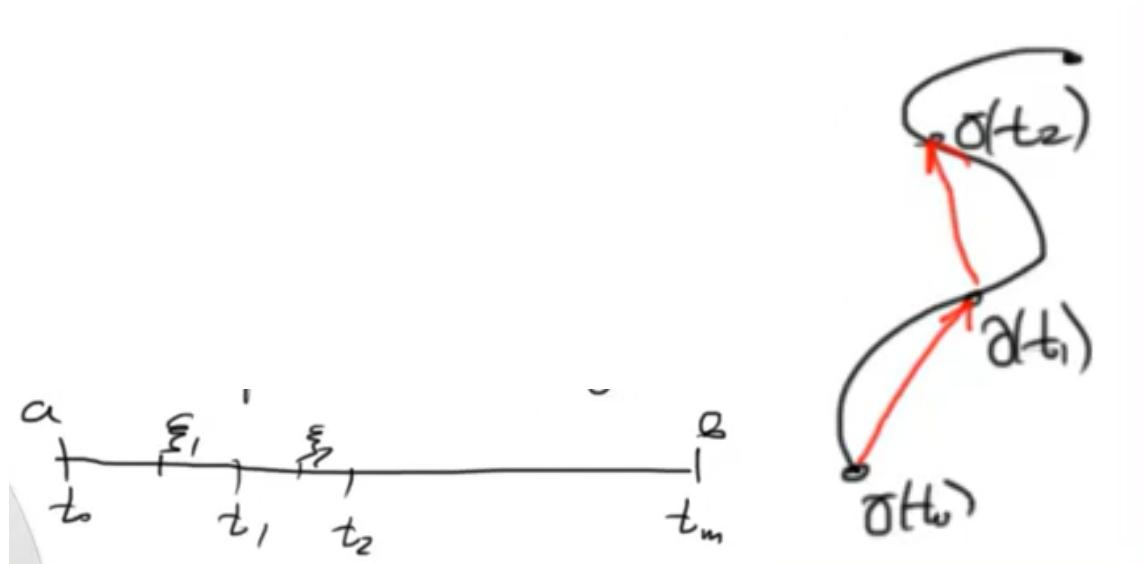
4, 5. следуют из 3 (по линейности интеграла *I* рода и линейности скалярного произведения).

$$6. |\int_{\gamma} \omega| = |\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds| \leq \int_{\gamma} |\langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle| ds \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| \cdot \|\bar{\sigma}\| ds$$

□

Упражнение. Доказать формулу: $\int_{\gamma} \omega = \lim \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\xi_j))(\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))$, если мелкость дробления $\rightarrow 0$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Определение 3.7. ω – дифференциальная форма, заданная в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытом множестве

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная для ω , если $dF = \omega$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n, \text{ т.е нужно, чтобы } \frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k \text{ при } k = 1, 2, \dots, n$$

Теорема 3.18. Пусть F – первообразная, ω, γ – кривая, соединяющая точки A, B

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A)$$

Доказательство. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_k(t)}_{(F \circ \gamma)'(t)} dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F \circ \gamma(b) - F \circ \gamma(a) =$$

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A).$$

□

Определение 3.8. Ω – область, если Ω – открытое линейно связное множество

Линейная связность – любая пара точек может быть соединена какой-либо кривой $\in \Omega$

Следствие. 1. Если у ω есть первообразная, то $\int_{\gamma} \omega$ зависит только от концов кривой, но не зависит от самой кривой

2. Если Ω – область, то все первообразные отличаются друг от друга на **const**

Доказательство.

2. F и G – первообразные ω , возьмем точки A, B из Ω и соединим кривой $\gamma \implies G(B) - G(A) = \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A) \implies G(B) = F(B) + \underbrace{G(A) - F(A)}_{=const, \text{ при фикс. } A}$ (фиксируем A и меняем B). □

Лемма. Ω – область \implies между любыми двумя её точками можно провести ломанную, все звенья которой параллельны осям координат

Доказательство. $A, B \in \Omega \implies \exists \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ такая что $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$. Для $t \in [a, b]$ рассмотрим шар $B_{r(t)}(\gamma(t)) \in \Omega$

$\gamma([a, b])$ – компакт \implies выберем конечное подпокрытие. Тогда можем перемещаться между центрами шариков по звеньям, параллельным осям координат

□

Теорема 3.19. Пусть Ω – область, $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ – дифференциальная форма в Ω и $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Тогда следующие условия равносильны

1. ω имеет первообразную $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
2. $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любой замкнутой кривой γ
3. $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любой замкнутой ломаной γ со звеньями, параллельными осям координат

Доказательство. 1) \implies 2) \implies 3) очевидны

3) \implies 1):

Соединим c и $x \in \Omega$ ломаной со звеньями, параллельными осям координат.

$F(x) := \int_{\gamma} \omega$. Поймем, что результат не зависит от выбора ломаной γ

$0 = \int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega$, где $\tilde{\gamma}^{-1}$ – инвертированная по направлению вторая ломаная

Осталось проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma \cup [x, x+h]} \omega}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \omega =$$

$$\underset{[0, h] = [x, x+h] \text{ (сдвиг на } x\text{)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{f_1(\gamma(t))}_{x+e_1 t} \underbrace{\gamma'(t)}_1 dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_1(x + e_1 t) dt =$$

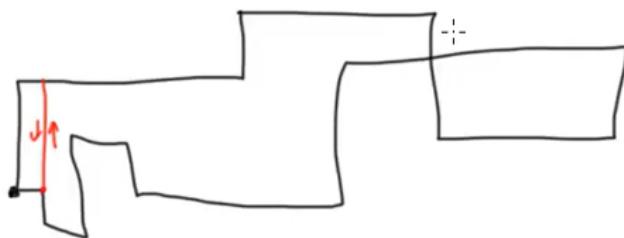
$$\underset{= h \cdot f_1(x + e_1 h \cdot \theta), \theta \in (0, 1)}{=} f_1(x)$$

$= f_1(x)$, т.к. $\gamma(t) = x + e_1 \cdot t$, $\gamma'_1(t) = 1$, $\gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0$

□

Замечание. Для \mathbb{R}^2 3) можно заменить на 3'): $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любого прямоугольного γ со сторонами, параллельными осям координат

Доказательство. Индукция по числу звеньев. Когда отсекаем новый прямоугольник, то по его ребру мы считаем интеграл в разные стороны, то есть с остатком фигуры значение сократится, поэтому такой индукционный переход сделать можно:



□

Замечание. ω в $\Omega \in \mathbb{R}^n$. В каждой точке Ω своё линейное отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

dx_1 - функция $g_1(x) = x_1$

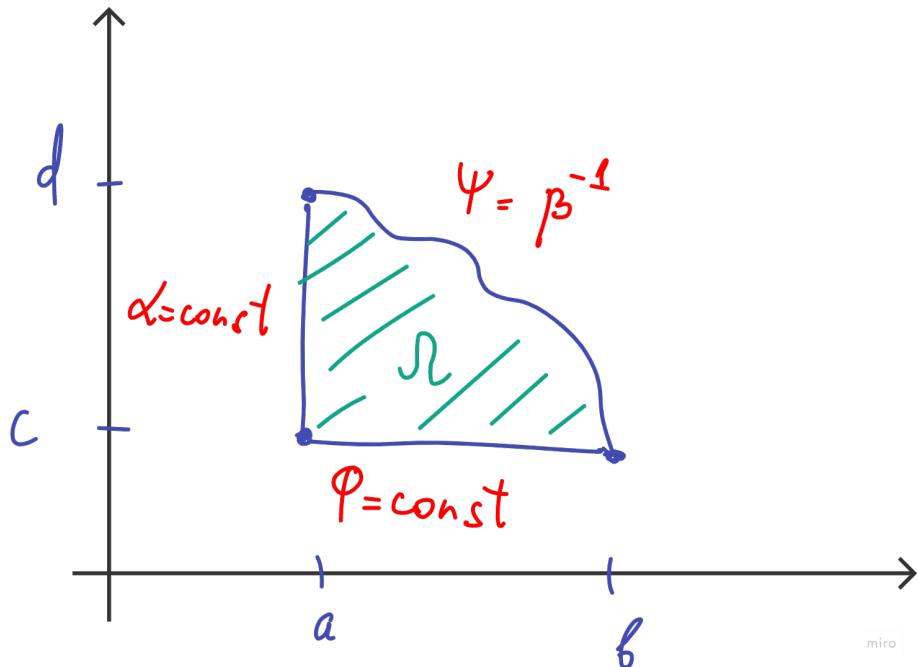
$$dg_1$$

$g_1(x+h) = g_1(x) + dg_1(g) = o(h)$, поэтому dx_i в определении ω - проекции на соотв. координаты

Определение 3.9. Живём в \mathbb{R}^2 . Назовём элементарной областью в \mathbb{R}^2 , если

$\Omega = \{(x, y) : a < x < b \wedge \phi(x) < y < \psi(x)\} = \{(x, y) : c < y < d \wedge \alpha(y) < x < \beta(y)\}$, причем ограничивающие функции непрерывны.

Может показаться, что такого не бывает, но вот пример:



miro

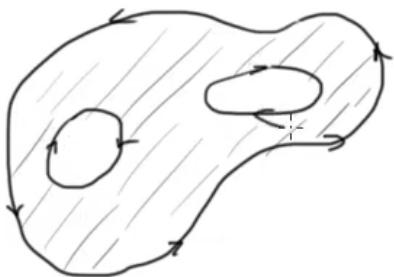
Теорема 3.20. Формула Грина

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ область, граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких простых замкнутых кривых, ориентированных положительно.

$P, Q : Cl(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны.

Тогда $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2$, где γ – граница Ω .

Заметим, что направление на кусочках границ такое, что область слева. То есть ориентация устроена так:



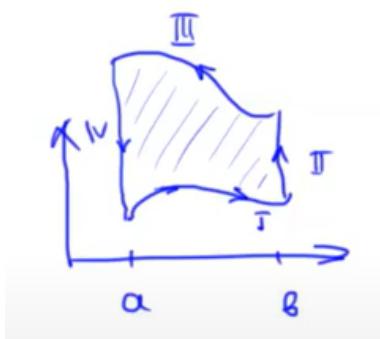
Область всегда по левую руку
при обходе

Доказательство. Хотим доказывать это: $\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Qdy$ и $-\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Pdx$, при этом формулы никак не связаны, то есть можно и по-отдельности доказывать. Проверим вторую формулу:

1. $\Omega = \{(x, y) : x \in (a, b), \phi(x) < y < \psi(x)\}$ – элементарная область.

Левая часть: $\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$

Правая часть: $\int_{\gamma} Pdx = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$



$$x \rightarrow (x, \phi(x)) : (I) = \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$$

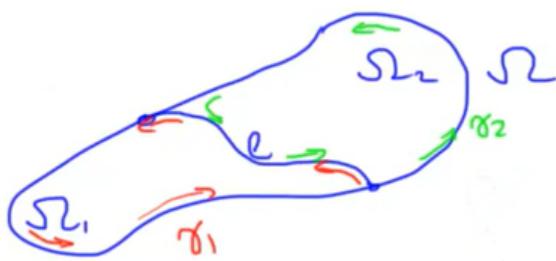
$$y \rightarrow (b, y) : (II) = \int_{\phi(b)}^{\psi(b)} P(b, y) b' dy = 0$$

$$x \rightarrow (x, \psi(x)) : (III) = - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx$$

$$y \rightarrow (a, y) : (IV) = - \int_{\phi(a)}^{\psi(x)} P(a, y) a' dy = 0$$

Записывая сумму $(I) + (II) + (III) + (IV)$, получим ровно то, что записано в левой части со знаком минус.

2. $\Omega = \Omega_1 \cup l \cup \Omega_2$. Пусть формула верна для Ω_1, Ω_2 , выведем ее для Ω .



$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2 = \int_{\Omega_1} + \underbrace{\int_l}_{=0, \text{ т.к. мера } l \text{ это } 0} + \int_{\Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} =$$

$= \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy$ (обходя l с разных сторон, слагаемое сократится).

3. Формула верна для конечного объединения элементарных областей.

4. Формула верна для области из условия, так как та нарезается на конечное число элементарных областей (без доказ-ва).

□

Следствие. Формулы площади.

$$\lambda_2 \Omega = \int_{\gamma} xdy = - \int_{\gamma} ydx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} xdy - ydx$$

Доказательство. Просто подставляем в формулу Грина подходящие P и Q (кто-то из них 0, а кто-то x , либо y). □

3.5. Точные и замкнутые формы

Определение 3.10. Ω – область, ω – дифф. форма в Ω . ω – точная форма, если у нее существует первообразная.

Определение 3.11. ω – локально точная форма, если $\forall a \in \Omega$ найдется U_a , такая что в U_a есть первообразная ω .

Определение 3.12. $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ – замкнутая, если $\forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Замечание. Точность \Rightarrow локальная точность (но не наоборот).

Возьмем $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и покажем, что она замкнутая, локально точная, но не точная.

Проверим на замкнутость, то есть на равенство частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\frac{y}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{-\frac{x}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Проверим на локальную точность: везде, кроме оси Ox , есть первообразная $F(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ (можно честно продифференцировать и проверить)

А теперь покажем, что точности нет: для этого нужно, чтобы интеграл любой замкнутой кривой был равен нулю. Возьмем тогда интеграл по единичной окружности с параметризацией $(x, y) \rightarrow (\cos t, \sin t)$:

$$\int_{\text{един. окр.}} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)(\sin(t))' - \sin(t)(\cos(t))'}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Теорема 3.21. Если коэффиц. формы f_i из C^1 , тогда локальная точность \Rightarrow замкнутость.

Доказательство. Берем $a \in \Omega$ и U_a , где есть первообразная $F \Rightarrow f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \quad \underset{\substack{= \\ \text{т.к. непрер. слева и справа от равенства}}}{=} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Rightarrow \text{замкнутость}$$

w. \square

Лемма. Пуанкаре.

Если Ω – выпуклая область и коэффиц. формы из C^1 , то замкнутость \Rightarrow точность.

Доказательство. Только для \mathbb{R}^2 .

Для существования первообр. достаточно чтобы интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат был равен 0.

$$\omega = Pdx + Qdy : \int_{\text{обход контура}} \omega = \int_{\text{заполненные прямоуг.}} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)}_{\text{этот интеграл} = 0 \text{ из-за замкнутости}} d\lambda_2 = 0.$$

Выпуклость Ω важна, чтобы внутри заполненного прямоугольника не было дырок. \square

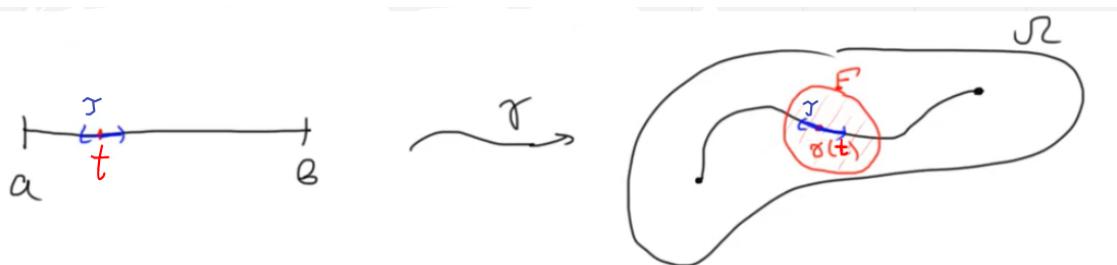
Следствие. 1. Замкнутая форма с коэффиц. из C^1 в любом открытом шаре из Ω имеет первообразную.

2. Замкнутая форма с коэффиц. из C^1 лок. точная.

Определение 3.13. ω – лок. точная форма в Ω .

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ путь.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ первообразная ω вдоль пути γ , если $\forall t \in [a, b]$ у $\gamma(t)$ найдется окр. $U_{\gamma(t)}$, а в ней первообразная F формы ω , т.ч. $f(\tau) = F(\gamma(\tau))$ при τ близких к t .



Теорема 3.22. Первообразная вдоль пути существует и единственная с точностью до константы.

Лемма. Локально постоянная функция (в каждой точке есть окрестность, что функция на ней постоянная) – константа.

Доказательство. Док-во теоремы.

Единственность: f_1, f_2 – первообр. вдоль пути γ .

$f_1 - f_2$ – лок. постоянная, покажем это:

Берем $t \in [a, b]$, есть $U_{\gamma(t)}$ и в ней первообр. F_1 и F_2 , т.ч. $f_1(\tau) = F_1(\gamma(\tau))$ и $f_2(\tau) = F_2(\gamma(\tau))$ при τ близких к t , но $F_1 - F_2 = \text{const} \Rightarrow f_1 - f_2 = \text{const}$ при τ близких к t .

Существование: берем $t \in [a, b]$, у $\gamma(t)$ есть окр-ть $U_{\gamma(t)}$, в которой существует первообр.

$\bigcup_{t \in [a,b]} U_{\gamma(t)}$ – покрытие $\gamma[a,b]$ – компакт.

Выберем конечные подпокрытия U_1, \dots, U_m и F_1, \dots, F_m – первообр. в соответствующем U_j .

Из леммы Лебега $\exists r > 0 : \forall t \in [a,b] : B_r(\gamma(t))$ целиком содержится в каком-то эл-те покрытия.

Нарежем $[a,b]$ на кусочки длины $< \delta$, где $\delta > 0$ выбрано по $\epsilon = r$ из равномерной непрерывности γ .

$a := t_0, t_1, \dots, t_n := b$ – нарезка.

Тогда образы маленьких отрезков целиком содержатся в своих элементах покрытия.

$\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$, так занумеруем F_i — первообр. в U_i .

$f|_{[t_0, t_1]} = F_1 \circ \gamma, f|_{[t_1, t_2]} = F_2 \circ \gamma$.

В $\underbrace{U_1}_{\exists \gamma(t_1)} \cap U_2 \neq \emptyset \implies F_1, F_2$ – первообр. \implies они отличаются на $const \implies F_2 = F_1 + c$,

подменяем c так, что в $U_1 \cap U_2$ они совпадали. И так далее для всех остальных кусочков. \square

Следствие. f – первообраз. ω вдоль пути $\gamma : [a,b] \rightarrow \Omega$. Тогда $\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$

Доказательство. Смотрим на нарезку из предыдущей теоремы. Тогда $\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}} \omega = \sum_{i=1}^n (F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))) = F_n(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$.

$F_i(\gamma(t_i)) = F_{i+1}(\gamma(t_i))$ так согласованы F_j . \square

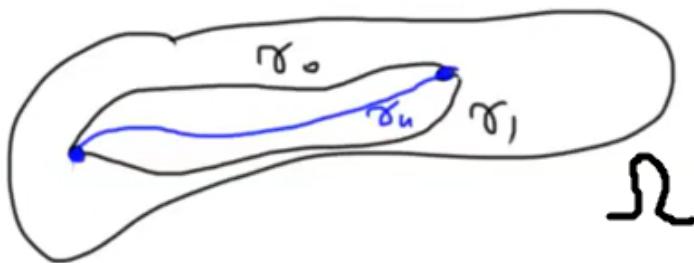
Определение 3.14. Ω – область в \mathbb{R}^2 .

$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \rightarrow \Omega$ пути в Ω .

1. $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

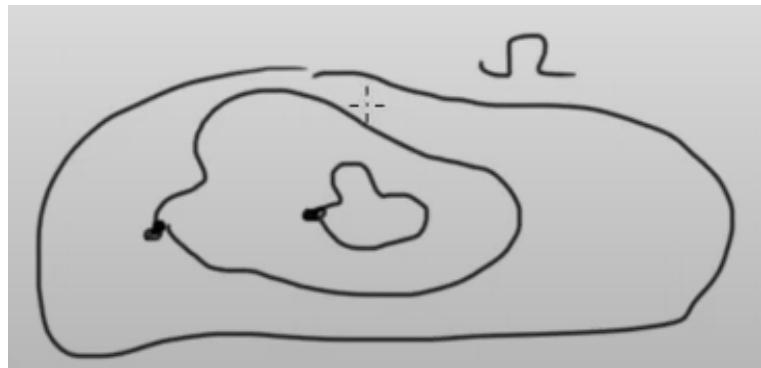
γ_0, γ_1 – гомотопные пути с неподвижными концами, если $\exists \gamma : [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$ непрерывное, т.ч. $\forall t : \gamma(t,0) = \gamma_0(t), \gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ и $\forall u : \gamma(a,u) = \gamma_0(a), \gamma(b,u) = \gamma_0(b)$.

$\gamma_u(t) := \gamma(t,u)$ путь, соединяющий точки $\gamma_0(a)$ и $\gamma_0(b)$.



2. $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$.

γ_0, γ_1 – гомотопно замкнутые пути, если $\exists \gamma : [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$ непрерывное, т.ч. $\forall t : \gamma(t,0) = \gamma_0(t), \gamma(t,1) = \gamma_1(t)$ и $\forall u : \gamma(a,u) = \gamma(b,u)$.



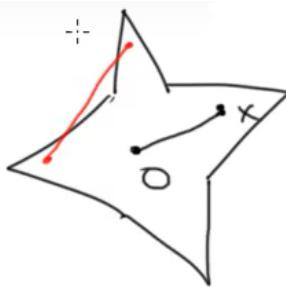
Определение 3.15. γ – стягиваемы замкнутый путь в Ω , если он гомотопен точке.

Определение 3.16. Ω – односвязная область, если любой замкнутый путь в ней – стягиваемый.

Пример. 1. Выпуклая область односвязна (для любых двух точек верно, что отрезок, соединяющий их лежит в области).

2. Звездная область односвязна (одна точка фиксирована и верно, что отрезок, соединяющий ее и любую другую, лежит в области)

PS. Напомним, что для обычной выпуклости нужно было, чтобы отрезок для двух произвольных точек из области целиком содержался в ней.



Доказательство. Ω – звездная, O – фикс. точка.

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ – замк. путь.

$\gamma_u(t) := u \cdot \gamma_1(t) \in \Omega$.

$\gamma_0(t) = 0$.

Хз, что это доказывает, но вот оно есть :/ □

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не явл. односвязной.

Упражнение. Ω – односвязна, $f : \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{окр. единичного радиуса}} \rightarrow \Omega$ непрер. отображ.

Доказать, что существует g : замк. круг. един. радиуса $\rightarrow \Omega$ – непрер.

Определение 3.17. $\gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega$ непрер. отображ.

ω – лок. точная форма в Ω .

$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная w относительно отображения γ , если $\forall (t, u) \in [a, b] \times [c, d]$ существует окр-ть $U_{\gamma(t, u)}$ и первообр F в этой окр-ти, т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ для (τ, ν) близких к (t, u) .

Теорема 3.23. Первообразная отн-но отображения существует и единственна с точностью до константы.

Доказательство. Единственность: f, g – первообразные отн-но отображения γ , то $(f - g)$ – локально постоянная функция двух переменных $\Rightarrow (f - g) = const$.

То что $(f - g)$ – локально постоянная следует отсюда:

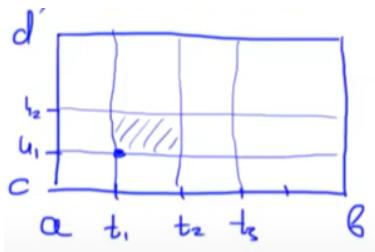
Берем $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$, в окр-ти $U_{\gamma(t,u)} : \exists F_1, F_2$ – первообразные, т.ч. $f(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu))$ и $g(\tau, \nu) = F_2(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (t, u) .

Знаем, что $F_1 = F_2 + const \Rightarrow f(\tau, \nu) - g(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu)) - F_2(\gamma(\tau, \nu)) = const$.

Существование: берем $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$, у $\gamma(t, u)$ есть окр-ть $U_{\gamma(t,u)}$ в которой существует первообразная $\Rightarrow [a, b] \times [c, d] \subset \bigcup_{(t,u) \in [a,b] \times [c,d]} U_{\gamma(t,u)}$.

Выбираем конечное подпокрытие, по нему $r > 0$ из леммы Лебега $\Rightarrow B_r(\gamma(t, u))$ целиком содержится в эл-те подпокрытия.

$\gamma \in C([a, b] \times [c, d]) \Rightarrow$ равном. непрер. Берем по $\epsilon = r$ такое $\delta > 0$ из равн. непрерывности \Rightarrow если (t, u) и (t', u') на расстоянии $< \delta$, то $\gamma(t, u)$ и $\gamma(t', u')$ на расстоянии $< r$.



$\gamma([t_{i-1}, t_i] \times [u_{j-1}, u_j]) \subset U_{ij}$ и F_{ij} первообразная в U_{ij} .

$$f|_{[t_0, t_1] \times [u_0, u_1]} = F_{11} \circ \gamma$$

$$f|_{[t_1, t_2] \times [u_0, u_1]} = F_{21} \circ \gamma$$

$\gamma(\{t_1\} \times [u_0, u_1]) \subset U_{11} \cap U_{21} \leftarrow$ тут F_{11}, F_{21} – первообраз. \Rightarrow они отличаются на $const$.

Подправим F_{21} так, что в $U_{11} \cap U_{21}$ они совпадают.

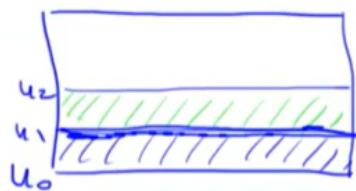
В итоге построим $f_1 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообр. отн-но $\gamma|_{[a,b] \times [u_0, u_1]}$.

Аналогично $f_j : [a, b] \times [u_{j-1}, u_j] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообр. отн-но $\gamma|_{[a,b] \times [u_{j-1}, u_j]}$.

осталось склеить их в f .

Рассмотрим f_1, f_2 . $f_1(\cdot, u_1), f_2(\cdot, u_1)$ – первообр. вдоль пути $\gamma_{u_1} \Rightarrow$ они отличаются на константу.

Подправим f_2 так, что $f_1(\cdot, u_1) = f_2(\cdot, u_1)$.



□

Теорема 3.24. γ_0, γ_1 – гомотопные пути с неподвижными концами в Ω . ω – локально точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Доказательство. $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ гомотопия между γ_0, γ_1 .

f – первообразная ω относительно отображения γ , $f(\cdot, 0), f(\cdot, 1)$ – первообразные вдоль путей γ_0, γ_1 , соответственно.

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0).$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1).$$

Докажем, что $f(a, \cdot)$ – лок. постоянная. Рассмотрим (a, u) : у $\gamma(a, u)$ есть окр-ть U и в ней первообразная F , т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (a, u) .

$f(a, \nu) = F(\gamma(a, \nu)) = F(\gamma_0(a))$ не зависит от ν (по аналогии делаем с другим концом, то есть доказываем, что $f(b, \cdot)$ – локальная постоянная, тогда получили, что $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$). \square

Теорема 3.25. γ_0, γ_1 – замкнутые гомотопные пути в Ω . ω – лок. точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Доказательство. $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ – гомотопия, f – первообразная ω относительно γ .

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0)$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1)$$

Докажем, что $(f(b, \cdot) - f(a, \cdot))$ лок. постоянна.

Рассмотрим (a, u) , у $\gamma(a, u)$ есть окр-ть U и в ней первообраз. F , т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (a, u) .

Рассмотрим (b, u) , у $\gamma(b, u)$ есть окр-ть \tilde{U} и в ней первообраз. \tilde{F} , т.ч. $f(\tau, \nu) = \tilde{F}(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (b, u) .

$$\gamma(a, u) = \gamma(b, u) \in U \cap \tilde{U}$$

$$F \text{ и } \tilde{F} \text{ – первообразные в } U \cap \tilde{U} \implies \tilde{F} = F + C \text{ в } U \cap \tilde{U}.$$

$$f(b, \nu) - f(a, \nu) = \tilde{F}(\gamma(b, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = \tilde{F}(\gamma(a, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = C.$$

\square

Следствие. Если γ_1 – стягиваемый путь в Ω , ω – лок. точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_1} \omega = 0$.

Теорема 3.26. Если Ω – односвязна, а ω – лок. точная, то ω – точная.

Доказательство. γ_1 – замкнутая кривая $\implies \gamma_1$ – стягиваемая $\implies \int_{\gamma_1} \omega = 0 \implies$ существует первообр. \square

Замечание. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не односвязна, т.к. там есть лок. точная форма, не являющаяся точной.

4. ТФКП

4.1. Голоморфные функции

Если доказательство не указано, то оно повторяет то, что было в \mathbb{R} (смотреть 1 семестр).

Определение 4.1. Ω – область в \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

f – голоморфна в точке z_0 , если существует $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$.

Определение 4.2. f комплексно дифф. в точке z_0 , если $\exists k \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0) \text{ при } z \rightarrow z_0.$$

Утверждение 4.1. f – голоморфна в точке $z_0 \Leftrightarrow f$ комплексно дифф. в точке z_0 и $k = f'(z_0)$.

Следствие. f и g голоморфны в точке z_0 . Тогда

1. $f \pm g$ голом. в точке z_0
2. $f \cdot g$ голом. в точке z_0
3. Если $g(z_0 \neq 0)$, то $\frac{f}{g}$ голом. в точке z_0 .
4. Если h голом. в точке $f(z_0)$, то $h \circ f$ голом. в точке z_0 .

Замечание. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$z = x + iy, \quad f(z) = f(x + iy) = g(x + iy) + ih(x + iy) : g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} = \frac{f'(z_0)}{i} = i \cdot f'(z_0).$$

Замечание. $\binom{g(x+iy)}{h(x+iy)} = \binom{g(x_0+iy_0)}{h(x_0+iy_0)} + \binom{a}{c} \binom{x-x_0}{y-y_0} + o(||(x - x_0, y - y_0)||)$.

$$k = \alpha + i\beta$$

$$k \cdot (z - z_0) = (\alpha + i\beta)((x - x_0) + i(y - y_0)) = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + i(\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0))$$

Вещественная линейность $+ \binom{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow$ комплексная линейность.

Замечание. Комплексная дифференцируемость \Leftrightarrow вещественная дифференцируемость + матрица Якоби $\binom{\alpha}{-\beta} \binom{\beta}{\alpha}$

Комплексная дифференцируемость \Leftrightarrow вещественная дифференцируемость + условия Коши-

$$\text{Римана} \quad \begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \end{cases}$$

Замечание. $f(z) = f(z_0) + \underbrace{k}_{\in \mathbb{C}}(z - z_0) + o(z - z_0)$

$$k(z - z_0) = kw = |k| \cdot e^{i\phi} \cdot w, \quad \phi = \arg(k)$$

Замечание. Обозначения.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$dz = dx + idy$$

$$d\bar{z} = dx - idy$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Теорема 4.2. Условия Коши-Римана.

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, a \in \Omega$$

f – дифф. в точке a как функция из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^2 . Следующие условия равносильны:

1. f – голоморфна в точке a .
2. $d_a f$ – комплексно линеен
3. условия Коши-Римана
4. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$

Доказательство. Мы выяснили все, кроме $(3) \Leftrightarrow (4)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial(\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f))}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{– а это}$$

и есть условия Коши-Римана. \square

Замечание. Обозначения.

$$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ и голоморфна во всех точках из } \Omega.$$

Следствие. Ω – область, $f \in H(\Omega)$ и $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{const} \implies f = \operatorname{const}$

Доказательство. $\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = 0$$

$$\implies \operatorname{Re}(f) = \operatorname{const}$$

\square

Теорема 4.3. Коши (ah, shit, here we go again...)

$$f \in H(\Omega) \implies \text{форма } f(z)dz \text{ локально точная.}$$

Доказательство. Будет два разных док-ва.

1. Для случая непрерывно-дифф. $\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}, \dots$ (имеются в виду все частные производные).

Тогда замкнутость \implies локальная точность.

$$f(z)dz = f(z)(dx + idy) = (\operatorname{Re}(f) + i \cdot \operatorname{Im}(f)) \cdot (dx + idy) = \operatorname{Re}(f)dx - \operatorname{Im}(f)dy + i(\operatorname{Im}(f)dx + \operatorname{Re}(f)dy).$$

$$Pdx + Qdy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

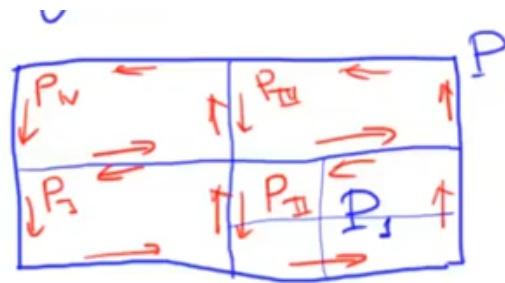
$$\operatorname{Re}(f)dx - \operatorname{Im}(f)dy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}$$

$$\operatorname{Im}(f)dx + \operatorname{Re}(f)dy \text{ – замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}$$

2. Общий случай.

Надо доказать, что интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат из шарика $U \subset \Omega$, содержащего произвольную точку, равен 0.

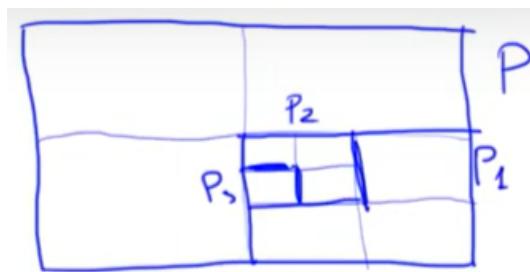
От противного: пусть нашелся прямоугольник P , т.ч. $\alpha(P) := \int_P f(z)dz \neq 0$.



Режем прямоугольник на 4 части, индексируем как P^1, P^2, P^3, P^4 , строим обходы каждого (против часовой стрелки). Тогда $\alpha(P) = \alpha(P^1) + \alpha(P^2) + \alpha(P^3) + \alpha(P^4)$, $|\alpha(P)| \leq |\alpha(P^1)| + |\alpha(P^2)| + |\alpha(P^3)| + |\alpha(P^4)|$.

Хотя бы одно из слагаемых $\geq \frac{1}{4}|\alpha(P)|$, назовем такое P_1 (индекс уже снизу!). Разрежем его на 4 равные части. Пусть P_2 такой, что $|\alpha(P_2)| \geq \frac{1}{4}|\alpha(P_1)|$ и т.д.

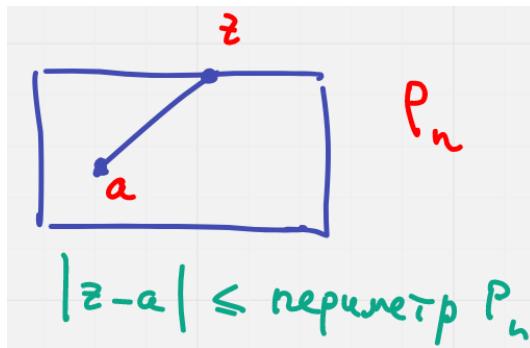
$$|\alpha(P_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\alpha(P)|.$$



Берем a из P_n :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + o(z - a)$$

$$\alpha(P_n) = \int_{P_n} f(z) dz = \underbrace{\int_{P_n} f(a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \underbrace{\int_{P_n} f'(a)(z - a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \int_{P_n} o(z - a) dz$$



$$o(z - a) = (z - a) \cdot \beta(z - a), \text{ где } \beta(z - a) \xrightarrow[z \rightarrow a]{} 0$$

$$\left| \int_{P_n} (z - a) \beta(z - a) dz \right| \leq \max_{z \in P_n} |z - a| \cdot |\beta(z - a)| \cdot \underbrace{l(P_n)}_{\text{периметр}} \leq \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \cdot \frac{l(P)}{2^n} \cdot \frac{l(P)}{2^n} \implies$$

$$\implies \frac{|\alpha(P)|}{4^n} \leq |\alpha(P_n)| \leq \frac{l(P) \cdot l(P)}{4^n} \cdot \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \implies \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \geq \frac{|\alpha(P)|}{l(P) \cdot l(P)} > 0 - \text{противоречие, т.к. } \beta(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow a.$$

□

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$, то у каждой точки $a \in \Omega$ есть окрестность, в которой существует ф-я F , т.ч. $F' = f$ в этой окрестности.

Доказательство. Пусть F первообразная формы $f(z)dz$. Поймем, что $F' = f$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \cdot f(z) \implies \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

□

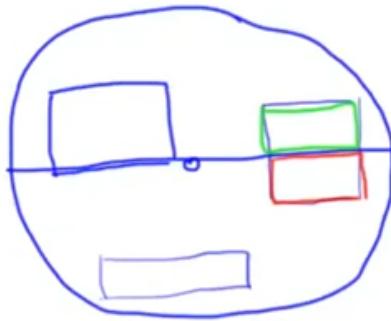
$$2. f \in H(\Omega), \gamma \text{ стягиваемый в } \Omega \text{ путь} \implies \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Теорема 4.4. $f \in C(\Omega)$, Δ – прямая параллельная осям координат.

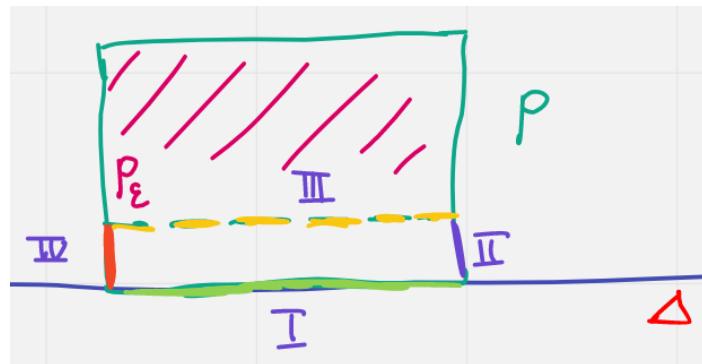
$$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$$

Тогда $f(z)dz$ локально точная.

Доказательство. Надо проверять, что интеграл по довольно маленькому прямоугольнику (со сторонами паралл. осям) это 0.



Очевидно, что если прямоугольник не пересекает Δ , то там все очевидно. Хотим рассматривать только те, что задевают. Те, что пересекают Δ , можно разбить на две части (верхнюю и нижнюю). По каждой из частей будет 0, тогда и в сумме тоже будет 0. То есть нас вообще интересуют только те прямоугольники, у которых Δ это одна из сторон. Рассмотрим их:



$$\int_{P_\epsilon} f(z)dz = 0 \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} \int_P f(z)dz$$

$$\left| \int_P f(z)dz - \int_{P_\epsilon} f(z)dz \right| \leq |J_1 + J_3| + |J_2| + |J_4|$$

$$|J_2 f(z)dz| \leq M \cdot (\text{длина 2}) = M\epsilon$$

$$|J_1 + J_3| = \left| \int_a^b (f(x + iy_0) - f(x + i(y_0 + \epsilon))) dx \right| \leq \int_a^b | \dots | dx = (*)$$

f непрер. на компакте \implies равномерно непрер.

$\forall \gamma > 0 : \exists \epsilon > 0$ если $\rho(\text{аргумент}) < \epsilon \implies |f(\dots) - f(\dots)| < \gamma$, тогда

$$(*) \leq (b-a) \cdot \gamma$$

□

Следствие. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$f \in C(\Omega)$ и f голоморфна в Ω за исключением мн-ва изолированных точек, тогда форма $f(z)dz$ все равно лок. точная.

Доказательство. Рассмотрим окр-ть, в которой ровно одна плохая точка.

Давайте проведем прямую через это точку, тогда работает теорема.

□

Определение 4.3. Индекс кривой отн-но точки $Ind(\gamma, z_0)$.

γ – замкнутая кривая, не проходящая через точку z_0 .

$Ind(\gamma, 0) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ – кол-во оборотов γ вокруг 0.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$, ϕ – непрерывна (полярная замена).

Теорема 4.5. Пусть γ – замкнутая кривая, не проходящая через 0. Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i Ind(\gamma, 0).$$

Доказательство. Берем параметризацию $r, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$z(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, dz = (r'e^{i\phi} + ri\phi'e^{i\phi}) dt$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{r'}{r} + i\phi'$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_a^b \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\phi'(t) \right) dt = (\ln(r(t)) + i\phi(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = i(\phi(b) - \phi(a)) = 2\pi i Ind(\gamma, 0)$$

□

Следствие. Пусть γ – замкнутая кривая, не проходящая через точку a . Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i Ind(\gamma, a).$$

Теорема 4.6. (интегральная формула Коши).

$$f \in H(\Omega)$$

γ – стягиваемая в Ω кривая, не проходящая через $a \in \Omega$.

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a) Ind(\gamma, a)$$

Доказательство. $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{при } z \neq a, \\ f'(a), & \text{иначе} \end{cases}$

$$g \in C(\Omega)$$

$$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$$

$\Rightarrow g(z)dz$ – локально точная форма $\Rightarrow \int_{\gamma} g(z)dz = 0$, так как γ – стягиваемая

$$\Rightarrow 0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{f(a)dz}{z-a} \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = f(a) \cdot 2\pi i \cdot Ind(\gamma, a)$$

□

Пример. Берем круг. f – голоморфна в окр-ти этого круга.

$$\int_{\text{окр.}} \frac{f(z)dz}{z-a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ вне круга} \\ f(a) \cdot 2\pi i, & \text{если } a \text{ внутри круга} \end{cases}$$

Замечание. Обозначение.

$$\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\} – \text{единичный круг.}$$

$$\mathbb{T} = \{|z| = 1\} – \text{единичная окружность, обход против часовой стрелки.}$$

$$r\mathbb{T} + a = \{|z - a| = r\}$$

Теорема 4.7. $f \in H(r\mathbb{D}) \implies f$ аналитична (= функция раскладывается в ряд) в этом круге.

Доказательство. В нашем круге радиуса r берем еще два круга с тем же центром, но меньшими радиусами ($r > r_1 > r_2 > 0$). Берем $z : |z| < r_2$ – точка внутри наименьшего круга. Хотим интегрировать по средней окружности.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} = (*) \text{ равномерно сх-ся, так как } \left| \frac{z}{\zeta} \right| \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=:a_n \cdot 2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
□

Следствие. 1. Если $f \in H(r\mathbb{D})$ и $0 < r_1 < r$, то

$$\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = f^{(n)}(0)$$

$$2. f \in H(r\mathbb{D} + a), 0 < r_1 < r \implies \frac{n!}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a)$$

$$z = w + a$$

$$g(w) = f(w + a)$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw$$

$$3. f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

Тогда f – голоморфна в $\Omega \Leftrightarrow f$ – аналитична в Ω .

$$4. f \in H(\Omega) \implies f \text{ – бесконечно дифференцируема.}$$

$$5. f \in H(\Omega) \implies f' \in H(\Omega)$$

$$6.$$

Определение 4.4. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гармоническая, если $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = 0$.

Продолжаем свойство:

$f \in H(\Omega) \implies \operatorname{Re}(f)$ и $\operatorname{Im}(f)$ – гармонические функции.

Доказательство. $\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial y^2}$

про $\operatorname{Im}(f)$ аналогично доказывается. □

Замечание. Если $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ гармоническая ф-я, то существует единств. (с точностью до прибавления $\operatorname{const} \in \mathbb{R}$) гармоническая ф-я $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, т.ч. $g + ih \in H(\Omega)$

Теорема 4.8. Мореры.

$f \in C(\Omega)$. Если $f(z)dz$ локально точная, то $f \in H(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем $a \in \Omega$. Существует окр-ть a , что для f в ней есть первообразная F (т.е. $F' = f$ в U).

Тогда $F \in H(U) \implies F' = f \in H(U)$ – это локальное свойство, поэтому на всей Ω тоже будет гомоморфность. □

Следствие. $f \in C(\Omega)$, Δ – прямая, параллельная оси координат.

$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$. Тогда $f \in H(\Omega)$.

Доказательство. $f \in C(\Omega)$ и $f \in H(\Omega \setminus \Delta) \implies f(z)dz$ локально точная в $\Omega \underset{\text{т. Мореры}}{\Rightarrow} f \in H(\Omega)$. □

Теорема 4.9. (интегральная формула Коши).

$f \in H(\Omega)$

$K \subset \Omega$ – компакт, граница которого – конечное число кусочно-гладких замкнутых кривых. Тогда

1. $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$
2. Если $a \in \text{Int}(K)$, то $\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$.

Доказательство. 1. Пишем формулу Грина.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z)dz &= \int_{\partial K} f(z)dx + i \cdot f(z)dy \underset{\text{Грин}}{=} \int_K \left(i \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= i \cdot \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Берем круг, содержащий a , не вылезающий за границу формы $B_r(a)$.

$\tilde{K} = K \setminus B_r(a)$ – компакт.

$\frac{f(z)}{z-a} \in H(\Omega \setminus \{a\})$, $\tilde{K} \subset \Omega \setminus \{a\}$.

$$0 = \int_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz - \underbrace{\int_{r\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{z-a} dz}_{=2\pi i f(a)}$$

□

Упражнение. $f \in H(r\mathbb{D})$ и $f \in C(Cl(r\mathbb{D}))$

$a \in \mathbb{D}$.

Доказать, что $\int_{r\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$

Теорема 4.10. $f \in C(\Omega)$. Следующие условия равносильны (равносильность всех утверждений, так или иначе, уже доказывалась ранее):

1. $f \in H(\Omega)$
2. $f(z)dz$ – локально точная в Ω
3. В окр-ти каждой точки y f есть первообразная
4. f аналитична в Ω
5. $\int f(z)dz = 0$ по любому достаточно малому прямоугольнику со сторонами параллельными осям
6. $f(z)dz$ – замкнутая и частн. производные по x и y непрерывны.

Теорема 4.11. Неравенство Коши.

$f \in H(R\mathbb{D})$, $0 < r < R$.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тогда $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$, где $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Теорема 4.12. $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot r = \frac{M(r)}{r^n}$$

Теорема 4.13. Луивилля.

Если $f \in H(\mathbb{C})$ и f – ограничена, то $f = \text{const}$.

Доказательство. f – ограничена $\Rightarrow |f| \leq M$.

$$f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ и ряд сходится } \forall z \in \mathbb{C} \xrightarrow[\text{неп-во Коши}]{} |a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow a_n = 0 : \forall n \geq 1 \quad \square$$

Замечание. \sin и \cos неограничены в \mathbb{C} .

Определение 4.5. Целая функция – функция, голоморфная в \mathbb{C} .

Теорема 4.14. Основная теорема алгебры.

P – многочлен степени ≥ 1 . Тогда у P есть хотя бы один корень.

Следствие. Если $\deg P = n$, то $P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ для некоторых $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Если z_1 – корень P , то $P(z) = (z - z_1) \cdot Q(z)$, где $\deg Q = n - 1$. \square

Доказательство. Основной теоремы алгебры.

От противного:

пусть $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Тогда $f(z) = \frac{1}{P(z)} \in H(\mathbb{C})$.

Докажем, что f – ограниченная функция.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

$$R := 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|. \text{ Пусть } |z| \geq R, |P(z)| \geq |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_1||z| - |a_0| \geq |z|^n - |z|^{n-1}(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|) = \underbrace{|z|^{n-1}}_{\geq 1} \underbrace{(|z| - |a_0| - |a_1| - \dots - |a_{n-1}|)}_{\geq 1} \Rightarrow |P(z)| \geq 1$$

при $|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \leq 1$ при $|z| \geq R$.

Докажем, что при $|z| \leq R$, $|f(z)|$ – ограничена.

$f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f$ непрер. в $\mathbb{C} \Rightarrow f$ непрер. в $\{|z| \leq R\}$ – компакт $\Rightarrow |f|$ ограничена в $\{|z| \leq R\}$.

Тогда по т. Луивилля $f(z) = \text{const} \Rightarrow P(z) = \frac{1}{\text{const}}$, что противоречит условию, что $P(z)$ – многочлен степени ≥ 1 . \square

4.2. Теоремы единственности

Теорема 4.15. $f \in H(\Omega)$, Ω – область, $z_0 \in \Omega$. След. условия равносильны:

1. $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n = 0, 1, 2, \dots$
2. $f = 0$ в некоторой окр-ти точки z_0 .

3. $f \equiv 0$ в Ω

Лемма. Ω – область в метрическом пространстве, $E \subset \Omega$, т.ч. $E \neq \emptyset$, E – открыто в Ω , E – замкнуто в Ω . Тогда $E = \Omega$.

Доказательство. Леммы.

Пусть $\Omega \setminus E \neq \emptyset$, берем $a \in E$ и $b \in \Omega \setminus E$. Возьмем путь γ , соединяющий эти точки.

$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$, т.ч. $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$. γ – непрер. $\Rightarrow \gamma^{-1}(E)$ – открыто, $\gamma^{-1}(\Omega \setminus E)$ – открыто $\Rightarrow \gamma^{-1}(E)$ – открыто. и замкнут. подмн-во $[\alpha, \beta]$, $\alpha \in \gamma^{-1}(E)$, $\beta \notin \gamma^{-1}(E)$.

$s := \sup \gamma^{-1}(E)$ из замкн. $s \in \gamma^{-1}(E) \Rightarrow s < \beta$.

Возьмем окр-ть s , т.ч. $(s - \delta, s + \delta) \subset \gamma^{-1}(E) \cap (\alpha, \beta) \Rightarrow$ в $\gamma^{-1}(E)$ есть точки $> s \Rightarrow s$ не sup. Противоречие. \square

Доказательство. Теоремы.

(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) – очевидно.

(1) \Rightarrow (2) – почти очевидно:

Берем $z_0 \in \Omega$ и $B_r(z_0) \subset \Omega$, тогда в круге $|z - z_0| < r$: f раскл. в свой ряд Тейлора \Rightarrow в нем $f \equiv 0$.

(2) \Rightarrow (3):

$E := \{z \in \Omega : \text{в некоторой окр-ти точки } z, f = 0\}$

$z_0 \in E$ по условию $\Rightarrow E \neq \emptyset$.

E – открыто. Если $w \in E$, то в круге $|z - w| < r$, $f = 0$.

$\forall z$ из этого круга есть круг меньшего радиуса, содержит. $\{|z - w| < r\}$, в нем $f = 0$.

E – замкнуто. Пусть z_* – предельная точка E , то есть $z_n \in E$ и $\lim z_n = z_*$. $f^{(m)}(z_n) = 0 \forall m, \forall n$ (так как есть (2) \Rightarrow (1)). По непрерывности $f^{(m)} f^{(m)}(z_*) = \lim f^{(m)}(z_n) = 0 \xrightarrow{(1) \Rightarrow (2)} z_* \in E$.

Тогда по лемме $E = \Omega$. \square

Следствие. $f, g \in H(\mathbb{C})$, т.ч. $f(z) = g(z)$ в окр-ти точки $z_0 \in \Omega \Rightarrow f \equiv g$.

Теорема 4.16. О среднем.

$f \in H(\Omega)$ и $a \in \Omega$, причем $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$, тогда $f(a) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi$ (т.е. среднее значение на окружности радиуса r с центром в a равно $f(a)$).

Доказательство. $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\phi})}{re^{i\phi}} re^{i\phi} id\phi$, где $z = a + re^{i\phi}$, $dz = re^{i\phi} id\phi$. \square

Следствие. $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$. Тогда $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|\leq r} f(z) d\lambda_2$.

Доказательство. $\int_{|z-a|\leq r} f(z) d\lambda_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) \rho d\phi d\rho = \int_0^r 2\pi f(a) \rho d\rho = 2\pi f(a) \frac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a)$. \square

Теорема 4.17. Принцип максимума.

$f \in H(\mathbb{C})$, $a \in \Omega$. Если $|f(a)| \geq |f(z)| \forall z$ из окр-ти точки a , то $f \equiv const$.

Доказательство. Пусть $|f(a)| =: M$. Домножим f на $e^{i\alpha}$ так, что $f(a) = M > 0$.

$$|f(a)| = M = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = M.$$

Все нер-ва обращаются в равенства $\implies |f(a + re^{i\phi})| = M \forall \phi \forall$ маленьких r .

$$\begin{aligned} Re(f(a)) = M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f(a + re^{i\phi})) d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq M. \text{ Это все равенства } \implies \\ Re(f(a + re^{i\phi})) &= |f(a + re^{i\phi})| = M \implies f(z) = M \text{ в окр-ти точки } a \end{aligned}$$

т. о единственности

Следствие. $f \in H(\Omega)$, Ω – огранич. область, $f \in C(Cl(\Omega))$. Тогда $|f|$ достигает своего max на границе Ω .

Доказательство. $Cl(\Omega)$ – компакт, $|f|$ непрер. на компакте \implies в какой-то точке $a \in Cl(\Omega)$ достигает max.

Если $a \in \Omega$, то по принципу максимума $f \equiv const$, значит на границе то же самое значение.

Если $a \notin \Omega$, то это точка на границе. \square

Определение 4.6. $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, a – ноль функции f , если $f(a) = 0$.

Теорема 4.18. $f \not\equiv 0$, $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, $f(a) = 0$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ и $g \in H(\Omega)$, т.ч. $g(a) \neq 0$ и $f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$.

Доказательство. Разложим f в ряд Тейлора в окр-ти точки a .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n, m := \min\{n : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m}, & z \neq a \\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!}, & z = a \end{cases}$$

$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$, g – непрерывная в точке a , $\implies g \in H(\Omega)$.

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-m} \xrightarrow[z \rightarrow a]{} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

\square

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$ и $a \in \Omega$ – ноль функции f , то $\exists U_a$ – кор-ть точки a , т.ч. $f(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$ (проколотая окр-ть).

Доказательство. $f(z) = (z - a)^m g(z)$, $g(a) \neq 0$ из теоремы.

g – непрер. в точке $a \implies g(z) \neq 0$ в окр-ти точки $a \implies f(z) = (z - a)^m g(z) \neq 0$ в прокол. окр-ти точки a . \square

2. Если $f, g \in H(\Omega)$ и $fg \equiv 0$, то либо $f \equiv 0$, либо $g \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f \not\equiv 0$. Если $f(z) \neq 0 \forall z$, то $g \equiv 0$. Иначе найдется $a \in \Omega$, т.ч. $f(a) = 0 \implies f(z) \neq 0, \forall z \in U_a^\circ \implies g(z) = 0 \forall z \in U_a^\circ \implies g \equiv 0$. \square

Теорема 4.19. Единственности.

$f, g \in H(\Omega)$ и $z_n \in \Omega$, z_n – различные, т.ч. $f(z_n) = g(z_n)$. Если $\lim z_n \in \Omega$, то $f \equiv g$.

Следствие. $f, g \in H(\Omega)$, $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. Если какая-то предельная точка мн-ва A лежит в Ω , то $f \equiv g$.

Доказательство. Теоремы.

$h(z) = f(z) - g(z)$. По условию $h \in H(\Omega)$ и $h(z_n) = 0$. $a := \lim z_n$, по непрерывности $h(a) = 0 \implies \exists U_a$, т.ч. $h(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$, но z_n начиная с некоторого места лежат в U_a . \square

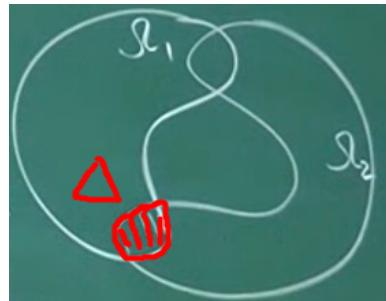
по следствию 1

Следствие. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

4.3. Аналитическое продолжение

Определение 4.7. $f_1 \in H(\Omega_1), f_2 \in H(\Omega_2)$.

Δ – компонента связности $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.



f_2 непосредственное аналитическое продолжение f_1 через Δ , если $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Delta$.

Замечание. 1. При фиксации $\Omega_1, \Omega_2, \Delta, f_1$, функция f_2 определена однозначно.

Доказательство. g – непоср. аналитическое продолжение f_1 :

$$g(z) = f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in \Delta$$

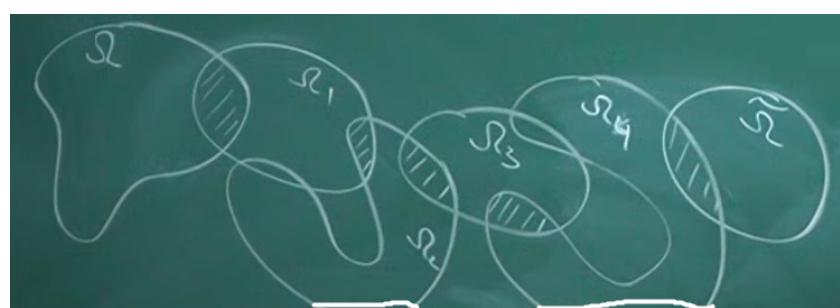
$$g, f_2 \in H(\Omega_2) \quad \xrightarrow{\text{по т. единственности}} \quad f_2 \equiv g.$$

□

2. Для другой компоненты продолжение может быть другим (тут понятнее на картинке, добавьте, плиз).

Определение 4.8. $f \in H(\Omega), \tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$.

\tilde{f} – аналитическое продолжение f на цепочке областей, если $\exists \Omega_1, \dots, \Omega_n$ и $f_1 \in H(\Omega_1), \dots, f_n \in H(\Omega_n)$, т.ч. f_1 – непосредственное аналитическое продолжение f , f_2 – непосредственное аналитическое продолжение f_1, \dots, \tilde{f} – непосредственное аналитическое продолжение f_n .



Замечание. Рассмотрим всевозможные пары (f, Ω) , т.ч. $f \in H(\Omega)$, тогда существование аналитического продолжения по цепочке областей – отношение эквивалентности на мн-ве таких пар.

Определение 4.9. Полная аналитическая функция – класс эквивалентности.

F – полная аналитическая ф-я. $M := \bigcup_{(f, \Omega) \in F} \Omega$ – область определения (существования) F .

Утверждение 4.20. M – область.

Доказательство. **Открытость:** объединения открытых – открытое.

Линейная связность: $a, b \in M \implies a \in \Omega, b \in \tilde{\Omega}$. $(f, \Omega), (\tilde{f}, \tilde{\Omega})$ связана аналитическим продолжением по цепочке, будем переходить по соответствующим областям и дойдем из a в b . \square

Определение 4.10. F – полная аналитическая функция, M – область определения F , $z \in M$.

$$F(z) := \{f(z) : (f, \Omega) \in F \wedge z \in \Omega\}.$$

Теорема 4.21. Пуанкаре-Вольтерры.

$F(z)$ – не более чем счетное мн-во.

Пример. $\underbrace{\frac{1}{1-z}}_{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ – ряд сх-ся при $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$$

$\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$ – круг сходимости ряда.

$$|z - a| < |1 - a|$$

Определение 4.11. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, R – радиус сх-ти ряда.

Берем точку w на границе круга ($|w - z_0| = R$). w – правильная точка, если найдется U_w – окр-ть точки w и $g \in H(U_w)$ являющаяся непосредственным продолжением f .

Определение 4.12. Особая точка – точка, не являющаяся правильной.

Теорема 4.22. На границе круга сх-ти лежит хотя бы одна особая точка.

Доказательство. От противного.

Пусть все точки правильные $|z| = R$ – правильные.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, R – радиус сх-ти.$$

$\forall w : |w| = R$ – правильная, тогда найдется $B_{r_w}(w)$ и $g \in H(B_{r_w}(w))$, т.ч. $f = g$ на пересечении $\{|z| < R\} \cap \{|z - w| < r_w\}$.

То есть круги $B_{r_w}(w)$ покрывают окр-ть $|w| = R$. Это компакт, выберем конечное подпокрытие.

По лемме Лебега $\exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(w)$ целиком содержится в элементе подпокрытия.

$\{|z| < R + \epsilon\} \subset \{|z| < R\} \cup$ конечное подпокрытие.

$$h(z) := \begin{cases} f(z), & |z| < R \\ g_{w_j}(z), & |z - w_j| < r_{w_j} \end{cases} \in H(\{|z| < R + \epsilon\}).$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n – ряд Тейлора для g , он сх-ся в круге $|z| < R + \epsilon$.$$

Противоречие тому, что радиус сходимости был R . \square

Пример. 1. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ сх-ся при $|z| \leq 1$.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

$$(zf'(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ – сх-ся при $|z| < 1$, все точки $|z| = 1$ – особые.

Начало 4-ого семестра.

Теорема 4.23. $f \in H(\Omega)$, Ω – односвязная, $f \neq 0$ в Ω .

Тогда существует $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = f(z)$ и g – единственна с точностью до аддит. константы $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Существование:

$\frac{f'}{f} \in H(\Omega) \implies$ есть первообразная $g \in H(\Omega)$.

Подберем константу так, что $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ для некоторого $z_0 \in \Omega$.

Покажем, что g подходит: $h(z) := e^{-g(z)} \cdot f(z)$.

Хотим доказать, что $h \equiv 1$. Знаем, что $h(z_0) = 1$ и

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} + f(z)e^{-g(z)}(-g'(z)) = e^{-g(z)} \left(f'(z) - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \equiv 0.$$

Единственность:

Пусть $e^{g(z)} = f(z) = e^{\tilde{g}(z)} \implies e^{g(z)-\tilde{g}(z)} \equiv 1 \implies \underbrace{g(z) - \tilde{g}(z)}_{\in H(\Omega) \subset C(\Omega)} = 2\pi ik_z : k_z \in \mathbb{Z} \implies g(z) - \tilde{g}(z) = 2\pi ik$ □

Следствие. Пусть $0 \notin \Omega$ – односвязна, тогда существует единственный с точностью до $+2\pi ik$ функция $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = z$.

Замечание. $g(z) = \ln|z| + i \arg z$

Замечание. Обозначение:

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$$

ветви логарифма

Свойства. 1. $e^{\text{Ln}(z)} = z : \forall z \neq 0$

$$2. \text{Ln}(zw) = \text{Ln}(z) + \text{Ln}(w)$$

$$3. \text{Ln}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z), \text{ где } \text{Arg}(z) = \{\arg z + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$$

Замечание. Св-во 2 для ветви может быть неверно.

Берем конкретную ветку и точку: $0 < \arg z < 2\pi$

$$\text{Ln}(-i) = \underbrace{\ln|-i|}_{=0} + i \text{Arg}(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

$$\text{Ln}((-i)^2) = \text{Ln}(-1) = \ln|-1| + i \text{Arg}(-1) = \pi i$$

$$\text{Но } \pi i \neq \frac{3\pi i}{2} + \frac{3\pi i}{2}$$

Замечание. $z^p := e^{p\text{Ln}(z)}$ – полная аналит. функция.

Если $p \in \mathbb{Z}$, то все однозначно, т.к. $e^{p(2\pi ik)} = 1$.

Если $p \in \mathbb{Q}$, $p = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{несократимая}}$, то $e^{\frac{m}{n}(2\pi ik)}$ – принимает n значений.

Если $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, то $e^{p(2\pi ik)}$ – принимает счетное кол-во значений.

Упражнение. 1. Найти i^i

$$2. \text{Д-ть, что } (z^p)' = \frac{pz^p}{z} \text{ при } z \neq 0$$

$$3. (zw)^p = z^p w^p \text{ как полные аналитичные функции, но это неверно для ветвей.}$$

4.4. Ряды Лорана

Определение 4.13. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ – ряд Лорана.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ – правильная часть.

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ – главная часть.

Ряд Лорана сходится \Leftrightarrow правильная и главная части сходятся.

Ниже будем считать, что $z_0 = 0$ для простоты записи.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – сх-ся в круге сх-ти $|z| < R$ – радиус сх-ти $[0, +\infty]$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$, где $w = \frac{1}{z}$ – сх-ся в круге сх-ти $|w| < \tilde{R} \implies |z| > \frac{1}{\tilde{R}} =: r$.

То есть ряд Лорана сх-ся в кольце $r < |z| < R$ – кольцо сх-ти ряда Лорана.

Свойства. 1. Ряд Лорана абс. сх-ся в кольце $r < |z| < R$, где $r, R \in [0, +\infty]$

2. В кольце, лежащем строго внутри кольца сх-ти, ряда Лорана сх-ся равномерно.

3. В кольце сх-ти ряд Лорана можно почленно дифференцировать.

4. Ряд Лорана в кольце сх-ти – голоморфная функция.

Теорема 4.24. О единственности ряда Лорана.

Пусть $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ в кольце $r < |z| < R$.

Тогда $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, где $r < \rho < R$.

Доказательство. $\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{|z|=\rho} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k}{z^{n+1}} dz =$

$= \int_{|z|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z|=\rho} z^{k-n-1} dz = 2\pi i a_n$ – т.к. при $|z| = \rho$ ряд равномерно сходится, то можно интегрировать по-членно.

$$\int_{|z|=\rho} z^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i\rho e^{it} dt = \rho^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{при } m = -1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
□

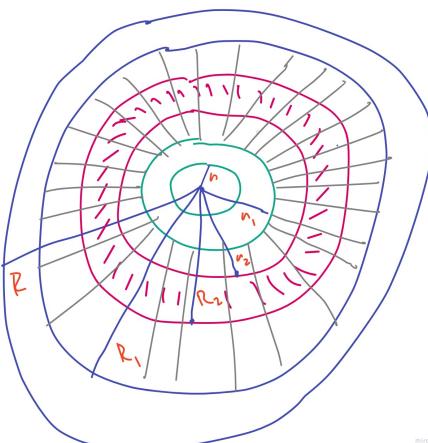
Замечание. Нер-во Коши тут тоже выполняется:

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}, \text{ где } M_\rho = \max_{|z|=\rho} \{|f(z)|\}.$$

Теорема 4.25. О существовании ряда Лорана.

Пусть $f \in H(r < |z| < R)$. Тогда $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, для некоторых $a_n \in \mathbb{C}$.

Доказательство. $r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$.



Берем $r_2 < |z| < R_2$: пишем для него и компакта $K = \{r_1 \leq |\zeta| \leq R_1\}$ интегральную теорему Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

1. Пускай $|\zeta| = R_1$, $|z| < R_2$, $|\frac{z}{\zeta}| < \frac{R_2}{R_1} < 1$.

Распишем: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$

Считаем первое слагаемое:

$$\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=R_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=:a_n} - \text{можем менять интеграл и}$$

сумму местами, из-за того, что ряд равномерно сходящийся.

2. Теперь пускай $|\zeta| = r_1$, $|z| > r_2$, $|\frac{\zeta}{z}| < \frac{r_1}{r_2} < 1$.

Распишем: $\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$.

Считаем второе слагаемое (переходы по аналогии):

$$-\int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=r_1} \frac{1}{z^{n+1}} f(\zeta) \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \underbrace{\int_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \zeta^n d\zeta}_{=:a_{n-1}}$$

Складывая воедино как раз и получим ряд Лорана для $f(z)$. □

Теорема 4.26. Пусть $f \in H(r < |z| < R)$. Тогда существует $g \in H(|z| < R)$ и $h \in H(|z| > r)$, т.ч. $f(z) = g(z) + h(z)$. А если добавить условие: $h \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$, то такое представление единственное.

Доказательство. Существование:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – главная часть (сх-ся в $\{|z| < R\}$), $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ – правильная часть (сх-ся в $\{|z| > r\}$).

Единственность:

Пусть $f(z) = g(z) + h(z)$, $f(z) = g_1(z) + h_1(z) \implies g(z) - g_1(z) = h_1(z) - h(z)$ при $r < |z| < R$.

$$F(z) := \begin{cases} g(z) - g_1(z), & \text{при } |z| < R \\ h_1(z) - h(z), & \text{при } |z| > r \end{cases} \in H(\mathbb{C})$$

Поймем, что F ограничена: $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 \implies$

$$|F(z)| \leq 1 \text{ при } |z| \geq \rho$$

$|F(z)|$ – ограничено при $|z| \leq \rho$, так как $F(z)$ непрерывная на компакте.

Получили, что $F(z)$ голоморфна на \mathbb{C} и ограничена \implies теорема Луивилля $F(z) \equiv const$.

А так как $F(z) \rightarrow_{z \rightarrow +\infty} 0$, то $F(z) = 0 \implies g_1 = g_2$ и $h_1 = h_2$. □

Определение 4.14. $a \in \mathbb{C}$. Если f голоморфна в проколотой окрестности точки a , но не голоморфна в a , то a – изолированная особая точка.

$$f \in H(0 < |z - a| < r)$$

Определение 4.15. Если существует $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, то a – устранимая особая точка.

Если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, то a – полюс.

Если $\lim_{z \rightarrow a}$ не существует, то a существенно особая точка.

Пример. 1. $\frac{\sin z}{z}, \frac{e^z - 1}{z}$. $z = 0$ - устранимая особая точка. Из Тейлора.

2. $\frac{1}{z}, \frac{1}{\sin z}$. $z = 0$ - полюс.

3. $e^{\frac{1}{z}}$. $z = 0$ - существенно особая точка. Предела нет, т.к. $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n$, $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n + \pi$. Разные последовательности точек.

Теорема 4.27. Характеристика устранимой особой точки

$f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1. a - устранимая особая точка
2. f ограничена в некоторой проколотой окрестности a
3. $\exists g \in H(|z - a| < r)$, такая, что $f(z) = g(z) \forall z \neq a$
4. В главной части ряда Лорана в точке a все коэффициенты 0

Доказательство. 1. $4 \Rightarrow 3$ - очевидно

2. $3 \Rightarrow 1$ - очевидно. g непрерывна, предел $g(a)$

3. $1 \Rightarrow 2$ - очевидно

4. Докажем $2 \Rightarrow 4$.

Пусть ограничена $\forall 0 < |z - a| < r: f(z) \leq M$

Запишем ряд Лорана: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n$.

Теперь воспользуемся нер-вом Коши для ряда Лорана: $|c_n| \leq \frac{\max |f(z)|}{\rho^n}$ при $|z - a| = \rho$.

$c_{-n} \leq \rho^n \max f(z) \leq M \rho^n$ и устремим ρ к 0.

Получаем, что $M \rho^n \rightarrow 0$, а тогда и $c_{-n} \rightarrow 0$.

□

Теорема 4.28. Характеристика полюса

Пусть $f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1. a – полюс
2. Существует $g \in H(|z - a| < r)$, $g(a) \neq 0$, такая, что $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$, $m \in \mathbb{N}$
3. В главной части ряда Лорана в точке a лишь конечное число ненулевых коэффициентов. Но они есть.

Доказательство. 1. $2 \Rightarrow 3$:

$g(z)$ – голоморфна, тогда раскладывается по Тейлору:

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$, $g(a) = c_0 \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^{n-m}$ – разложение в ряд Лорана, где $c^{-m} \neq 0$.

2. $3 \Rightarrow 1$:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

Все слагаемые $o((z-a)^{-m})$, тогда перепишем $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n \frac{(z-a)^{n+m}}{(z-a)^m}$ и становится видно, что при $z \rightarrow a$ каждая дробь стремится к ∞ .

3. $1 \Rightarrow 2$:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

Значит, в некоторой проколотой окрестности $0 < |z-a| < \varepsilon$: $|f(z)| > 1$.

Рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in H(0 < |z-a| < \varepsilon)$:

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0.$$

Доопределим $g(a) = 0$ и получим $g \in H(|z-a| < \varepsilon)$.

a – ноль функции g , тогда по теореме о нулях голоморфной функции $g(z) = (z-a)^m h(z)$, где $h(a) \neq 0$ и $h \in H(|z-a| < \varepsilon)$

$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z-a)^m h(z)$, тогда $f(z) = (z-a)^{-m} \frac{1}{h(z)}$ и $\frac{1}{h(z)} \in H(|z-a| < \varepsilon)$, потому что h не обращается в 0.

□

Определение 4.16. Это m называется порядком полюса.

Замечание. Это аналог кратности нуля

Замечание. f имеет в a полюс порядка $m \iff \frac{1}{f}$ имеет в точке a ноль кратности m (доопределяем $\frac{1}{f}$ в a пл непрерывности)

А также $\iff f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_m \neq 0$

Теорема 4.29. Характеристика существенной особой точки

$$f \in H(0 < |z-a| < r)$$

Следующие условия равносильны

1. a - существенно особая точка

2. В главной части ряда Лорана в точке a бесконечное число ненулевых коэффиц.

Доказательство. Доказательство очевидно следует из предыдущего.

□

Определение 4.17. f - мероморфная в Ω , если $f \in H(\Omega \setminus E)$ и в точках из E у неё полюсы

Пример. $f = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}$ - мероморфная в $\mathbb{C} \setminus 0$

Полюсы в точках $z = \frac{1}{\pi k}$.

Но при этом $\operatorname{ctg} \frac{1}{z}$ не будет мероморфной в \mathbb{C} . В точке $z=0$ проблема. В любой окрестности 0, найдётся плохая точка, а значит она не изолированная особая.

Замечание. 1. E не имеет предельных точек в Ω .

2. E не более чем счётно.

Свойства. Пусть f и g мероморфные в Ω . Тогда:

1. $f \pm g, \frac{f}{g}, fg, f'$ - мероморфны в Ω .

Доказательство. Если подставляем точки, которые не полюсы и не нули, то голоморфность сохранится.

Тогда пускай:

$$f(z) = \varphi(z)(z - a)^n, \quad a - \text{полюс или } 0.$$

$$g(z) = \psi(z)(z - a)^m, \quad a - \text{полюс или } 0.$$

(a) $f g$ и $\frac{f}{g}$:

$$\text{Тогда } f(z)g(z) = (z - a)^{n+m} \underbrace{\varphi(z)\psi(z)}_{=(*)}.$$

$(*)$ – в окр-ти точки a голоморфна и в самой точке в ноль не обращается.

Для отношения по аналогии.

(b) $f \pm g$:

Складываем ряды Лорана в точке a , в главной части $f \pm g$ конечное число ненулевых коэффициентов.

(c) f' :

$$f'(z) = (z - a)^n \varphi'(z) + n(z - a)^{n-1} \varphi(z) = (z - a)^{n-1} \cdot \underbrace{((z - a)\varphi'(z) + n\varphi(z))}_{=(*)}$$

$(*)$ – в окр-ти точки a голоморфна и в самой точке в ноль не обращается.

□

2. Порядки полюсов у f' на 1 больше, чем у f

Утверждение 4.30. Если f мероморфна в \mathbb{C} , то существует $g, h \in H(\mathbb{C})$, т.ч. $f = \frac{g}{h}$

Теорема 4.31. Сохоцкого

Пусть a – существенно особая точка функции f . Тогда $Cl(f(0 < |z - a| < \varepsilon)) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Более того, $\forall b \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ найдётся такая последовательность $z_n \rightarrow a$, т.ч. $f(z_n) \rightarrow b$

Доказательство. 1. Случай $b = \infty$. f не ограничена в $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$. Иначе a была бы устранимой особой точкой. Значит найдётся z_n , такое что $0 < |z_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(z_n)| \geq n$. $z_n \rightarrow a$ и $f(z_n) \rightarrow \infty$

2. $b \in \mathbb{C}$. Если найдётся последовательность $z_n \rightarrow a$, т.ч. $f(z_n) = b$, то всё ясно. Если не найдётся, то в некоторой проколотой окретности $0 < |z - a| < \varepsilon$ $f(z) \neq b$. Тогда рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z) - b} \in H(0 < |z - a| < \varepsilon)$. a – изолированная особая точка для g .

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$$

Если a – полюс у g , то a – устранимая особая точка f – не подходит

Если a – устранимая особая точка g , то a – устранимая особая точка f или полюс – не подходит

Значит a – существенно особая точка g . Воспользуемся уже доказанным случаем для g . Найдётся $z_n \rightarrow a$, такая, что $g(z_n) \rightarrow \infty$. А тогда $\lim f(z_n) = b$.

□

Теорема 4.32. Пикара

Пусть a – существенно особая точка f и $\varepsilon > 0$. Тогда $f(0 < |z - a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$ или \mathbb{C} без одной точки.

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ не обращается в ноль, хотя $z = 0$ - существенно особая точка.

Определение 4.18. Бесконечные пределы. $\lim z_n = \infty \iff \lim |z_n| = +\infty$

Свойства.

Если $\lim z_n = \infty$, w_n ограничена. Тогда $\lim(z_n \pm w_n) = \infty$

$$\lim z_n = 0 \iff \lim \frac{1}{z_n} = \infty$$

Если $\lim z_n = \infty$ и $|w_n| \geq c > 0$, то $\lim z_n w_n = \infty$

Доказательства очевидны + с первого курса

Определение 4.19. $f \in H(|z| > R)$. f голоморфна в ∞ , если там устранимая особая точка. То есть $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$

Замечание. $g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$ - перешли от бесконечности к нулю.

Замечание. $f \in H(|z| > R), g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$

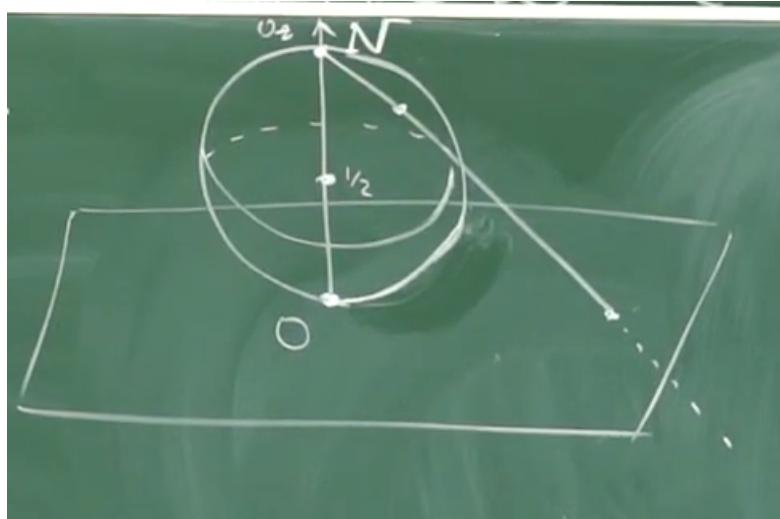
1. ∞ - устранимая особая точка $f \iff 0$ - устранимая особая точка g
 2. ∞ - полюс $f \iff 0$ - полюс g
 3. ∞ - существенно особая точка $f \iff 0$ - существенно особая точка g
- $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{z^n}$$
4. ∞ - устранимая особая точка $f \iff$ коэфф. при положительных степенях 0
 5. ∞ - полюс $f \iff$ при положительных степенях лишь конечное число ненулевых коэффициентов.
 6. ∞ - существенно особая точка $f \iff$ при положительных степенях беск. число ненулевых коэффиц.

Теорема 4.33. Лиувилля

Если $f \in H(\bar{\mathbb{C}})$, то $f \equiv \text{const}$

Доказательство. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$, значит при больших ограничена. $|f(z)| \leq M$ для $|z| > R$. С другой стороны $f \in C(|z| \leq R)$. Значит $|f(z)| \leq \bar{M}$. По теореме Лиувилля(старой), $f \equiv \text{const}$ \square

Определение 4.20. Стереографическая проекция



$z = x + iy$ - плоскость. $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

$$u^2 + v^2 + (w - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$$

Или же $u^2 + v^2 + w^2 = w$ - уравнение сферы Римана.

Теорема 4.34. Связь между точкой на плоскости и точной на сфере

Точке z соответствует точка с координатами $(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2})$

Замечание. Точке (u, v, w) соответствует точка $z = x + iy = \frac{u}{1-w} + i \frac{v}{1-w}$

Доказательство. Прямая через точки $(0, 0, 1)$ и $(x, y, 0)$. Параметризация луча: $(xt, yt, 1-t)$. Нас интересует точка, в которой луч пересекает сферу, то есть:

$$(xt)^2 + (yt)^2 + (1-t)^2 = 1 - t.$$

$$(x^2 + y^2 + 1)t^2 + 1 - 2t = 1 - t \Leftrightarrow t = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{|z|^2 + 1} \quad \square$$

Следствие. 1. Расстояние между образами z и \tilde{z} равно $\rho = \frac{|z - \tilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2} \cdot \sqrt{1+|\tilde{z}|^2}}$, а расстояние между z и ∞ равно $\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$

Доказательство: предложено посчитать самому, у кого есть силы добавьте, плиз.

2. Сходимость на плоскости и сходимость на сфере Римана совпадают

Доказательство: $z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow \frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$

$$z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$$

$$\text{Пусть } \frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$$

Тогда $\frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$. Если z_n ограничена, то $|z_n - z_0| \rightarrow 0$

Если не ограничена, то возьмём $|z_{n_k}| \rightarrow \infty$, тогда $\frac{|z_{n_k} - z_0|}{\sqrt{1+|z_{n_k}|^2}} \rightarrow 1$

3. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - компакт.

4.5. Вычеты

Определение 4.21. a - изолированная особая точка. $f \in H(0 < |z-a| < R)$. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ - сходится при $0 < |z-a| < R$.

$$\operatorname{res}_{z=a} f = c_{-1}$$

Определение 4.22. $f \in H(|z| > R)$ раскладывается в $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$$

Свойства. 1. $f \in H(0 < |z-a| < R)$ и $0 < r < R$.

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$ - положительный обход точки a .

Доказательство: смотреть формулу для коэффициентов ряда Лорана.

2. $f \in H(|z| > R), r > R$.

Тогда $\operatorname{res}_{z=\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz$ - положительный обход для ∞

3. Если $a \in \mathbb{C}$ - полюс n -го порядка.

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z))$

Доказательство: Считаем, что $a = 0$.

$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k z^k \Rightarrow g(z) = z^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n} z^k$ - формула Тейлора.

Тогда $c_{-1} = \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$.

4. Если $a \in \mathbb{C}$ - полюс первого порядка.

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$

5. Если $a \in \mathbb{C}$, g и h голоморфны в окрестности точки a . $h(a) = 0, h'(a) \neq 0, g(a) \neq 0$. $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

Доказательство: $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{h(z)-h(a)} g(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

6. Если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$.

Тогда $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(A - f(z))$

Доказательство: $f(z) = A + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_n z^n$, правильная часть - константа, иначе всё бы попало на бесконечность.

7. $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}$

Доказательство: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n-2}$$

Теорема 4.35. Коши о вычетах

f голоморфна в Ω , за исключением точек a_1, \dots, a_n . $K \subset \Omega$ - компакт и $a_1, \dots, a_n \in \operatorname{Int} K$

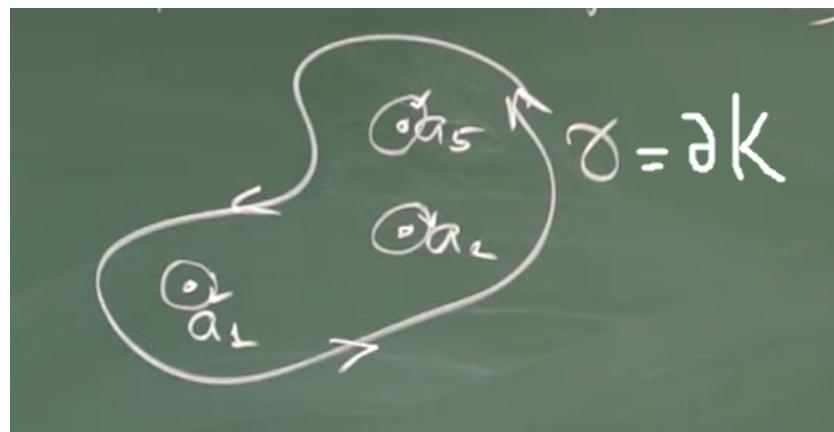
Тогда $\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$

Доказательство. У каждой точки можем взять окрестность, чтобы они лежали внутри компакта и попарно не пересекаются. $\tilde{K} = K \setminus \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(a_k)$ - компакт.

А ещё $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$

Из интегральной формулы Коши: $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = 0$

Но $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-a_k|=\varepsilon} f(z) dz$, а под знаком суммы - вычеты.



□

Следствие. Если f голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{a_1 \dots a_n\}$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = 0$

Доказательство: возьмём круг $B_R(0)$, внутри которого содержатся все эти точки.

$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f(z).$$

Но также $\int_{|z|=R} f(z) dz = \int_{|z|=R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$. Перекидываем и доказываем.

Пример. 1. $\int_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=\pi i} + \operatorname{res}_{z=-\pi i}) = -4\pi^5 i$.

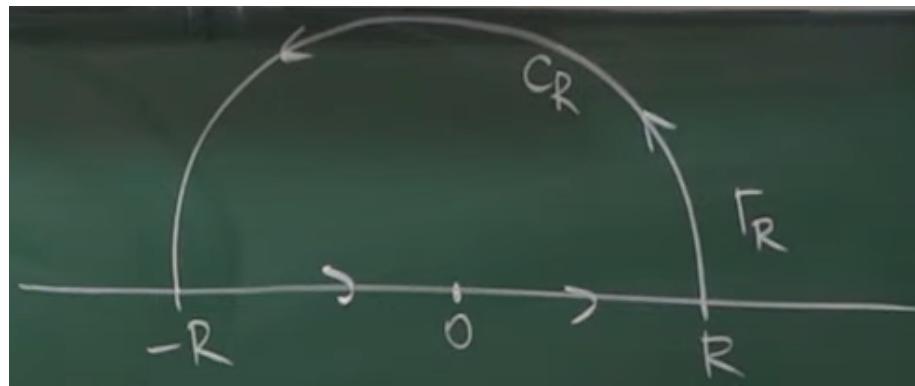
Особые точки: $e^z = -1$ при $z = \pi i + 2\pi i k$.

$$\text{Пусть } g(z) = z^4, h(z) = e^z + 1 \implies f = \frac{g}{h}.$$

$$\pi i - \text{полюс первого порядка: } \operatorname{res}_{z=\pi i} f = \frac{g(\pi i)}{h'(\pi i)} = -\pi^4$$

$$-\pi i - \text{полюс первого порядка: } \operatorname{res}_{z=-\pi i} f = \frac{g(-\pi i)}{h'(-\pi i)} = -\pi^4$$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^{2n}}$.



Контур - полукруг. $I := \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i \sum \operatorname{res}$

$$\text{Но с другой стороны } \int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^R + \int_{c_R}$$

$$\left| \int_{c_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} \right| \leq \underbrace{\pi R}_{\text{длина кривой}} \cdot \underbrace{\max \left| \frac{1}{1+z^{2n}} \right|}_{\text{макс. подынтегрального выражения}} = \pi R \frac{1}{\min |1+z^{2n}|} \leq \underbrace{\frac{\pi R}{R^{2n}-1}}_{|a+b| \geq |a|-|b|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$$

Значит то, что мы хотим найти - просто сумма вычетов.

Какие особые точки?

$z^{2n} = -1 \implies z = e^{\frac{\pi i k}{2n}}$ и k нечётно.

Нас интересует $k = 1, 3, \dots, 2n-1$

Тогда $I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{2k-1}$

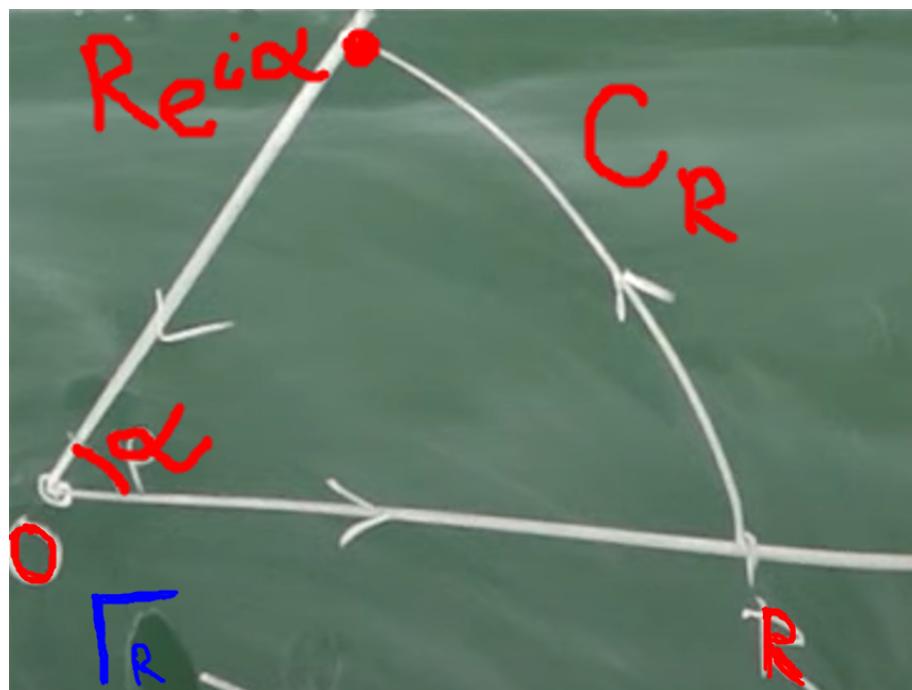
Все a_k – полюсы первого порядка:

(*): так как все a_k – корни уравнения $z^{2n} = -1$, то $a_k^{2n} = -1$.

$$\operatorname{res}_{a_k} f = \frac{1}{(z^{2n}+1)'} \Big|_{z=a_k} = \frac{1}{2n \cdot a_k^{2n-1}} = \frac{a_k}{2n \cdot a_k^{2n}} \underset{(*)}{=} -\frac{a_k}{2n}.$$

3. Оптимизация решения из предыдущего пункта: мы хотим считать не по всей дуге, а по какой-то ее части (до такого угла α , что интеграл $\int_{R \cdot e^{i\alpha}}$ был бы равен исходному интегралу, домноженному на какую-то константу).

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = I$ – т.к. функция $f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$ четная.



$$f(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}.$$

$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{C_R} + \int_0^R + \int_{R \cdot e^{i\alpha}}$ – интеграл по контуру разбили на кусочки.

$$\int_{R \cdot e^{i\alpha}}^0 f(z) dz = - \int_0^{R \cdot e^{i\alpha}} \underset{z=e^{i\alpha} \cdot t, t \in [0, R]}{-} - \int_0^R f(e^{i\alpha} t) e^{i\alpha} dt - \text{взяли параметризацию } z \rightarrow e^{i\alpha} t.$$

$$f(e^{i\alpha} t) = \frac{1}{1+e^{2n \cdot i \cdot \alpha} \cdot t^{2n}} \underset{\text{Хотим: } e^{2n \cdot i \cdot \alpha} = 1}{=} \frac{1}{1+t^{2n}}, \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Единственная особая точка $e^{\frac{i\pi}{2n}}$ (т.к. особые точки имеют вид $e^{\frac{\pi i k}{2n}}$, и мы хотим, чтобы точка лежала **строго внутри контура**: $0 < \frac{\pi k}{2n} < \alpha \Rightarrow 0 < \frac{\pi k}{2n} < \frac{\pi}{n} \Rightarrow k = 1$).

Тогда, так как особая точка для контура Γ_R всего одна, то интеграл \int_{Γ_R} равен: $2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} \dots$

Получаем равенство (при этом $\int_{C_R} \rightarrow 0$, т.к. он еще меньше того, что мы считали выше, поэтому про \int_{C_R} можно забыть): $2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} = \int_{\Gamma_R} = I - e^{i\frac{\pi}{n}} \cdot I + \int_{C_R} \Rightarrow$

$\Rightarrow I - e^{i\frac{\pi}{n}}I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} f = 2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}}}{2n}\right)$ - вычет именно такой, так как наша точка является полюсом 1-ого порядка, следовательно применимо свойство вычета $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \Rightarrow \operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

$$\text{Тогда } I = -\frac{2ie^{\frac{i\pi}{2n}}}{1-e^{\frac{i\pi}{2n}}} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2i \cdot e^{\frac{2\pi}{2n}}}{e^{\frac{i\pi}{2n}} \cdot (e^{\frac{i\pi}{2n}} - e^{-\frac{i\pi}{2n}})} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}} \text{ - т.к. } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Лемма. Жордана

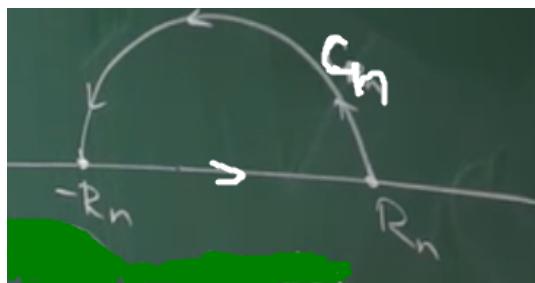
$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n, \operatorname{Im} z \geq 0\}, R_n \rightarrow +\infty$$

$$g : \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$M_n = \sup_{z \in C_n} |g(z)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Тогда } \forall \lambda > 0 : \int_{C_n} g(z) e^{i\lambda z} dz \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Доказательство. Пусть $f(z) = g(z)e^{i\lambda z}$.



Введем параметризацию: $z = R_n e^{it}$, $dz = R_n e^{it} idt$, где $t \in [0, \pi]$, тогда получим

$$\int_{C_n} f(z) dz = i \int_0^\pi R_n e^{it} \cdot f(R_n e^{it}) dt$$

Оценим этот интеграл по модулю:

$$\left| i \int_0^\pi R_n e^{it} f(R_n e^{it}) dt \right| \leq R_n \int_0^\pi \underbrace{|g(R_n e^{it})|}_{\leq M_n} \cdot \left| e^{i\lambda R_n e^{it}} \right| dt \leq M_n R_n \int_0^\pi \left| e^{i\lambda R_n e^{it}} \right| dt = (*)$$

Поймем, что такое $|e^{i\lambda R_n e^{it}}|$:

$$\operatorname{Re}(i\lambda R_n e^{it}) = \lambda R_n \operatorname{Re}(ie^{it}) = \lambda R_n (-\sin t)$$

Тогда можем продолжить оценивать исходный интеграл, но предварительно заметим, что под интегралом записана выражение симметричное относительно $\frac{\pi}{2}$, тогда переписываем так:

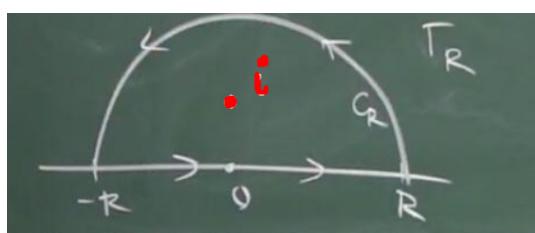
$$(*) = 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \sin t} dt \stackrel{(**)}{\leq} 2M_n R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \frac{2}{\pi} t} dt = 2M_n R_n \frac{1 - e^{-\lambda R_n}}{\lambda R_n \frac{2}{\pi}} \leq \frac{\pi M_n}{\lambda} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

(**): верно, так как при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$: $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$. □

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = I$.

Можем считать на всей прямой и не исходный интеграл, а $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = I^*$.

Тогда $\operatorname{Re} I^* = 2I$.



Пусть $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.

Контур - полуокружность от $-R$ до R .

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R + \int_{C_R}.$$

Здесь $\int_{C_R} \rightarrow 0$ по лемме Жордана, где $\lambda = 1$ и $M_R = \sup_{|z|=R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \rightarrow 0$

(написанное выше верно, так как $|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$)

Тогда $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=i} f = (*)$.

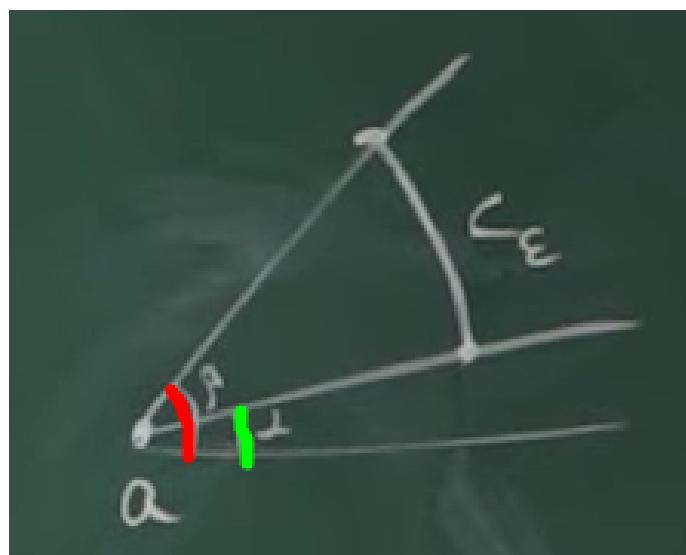
i - полюс 1-ого порядка, тогда $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(i) \neq 0, h(i) = 0, h'(i) \neq 0$:

$$\operatorname{res}_{z=i} f = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Тогда $(*) = \frac{\pi}{e} \implies I = \frac{\pi}{2e}$

Лемма. О полувычете

$f \in H(0 < |z - a| < R)$ и a - полюс первого порядка. $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \varepsilon, \alpha \leq \arg(z) \leq b\}$



Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = (\beta - \alpha)i \cdot \operatorname{res}_{z=a} f$

Доказательство. Считаем, что $a = 0$.

У нас полюс 1-го порядка, тогда $f(z) = \frac{c}{z} + g(z)$, где $g \in H(|z| < R)$.

Параметризация $z = \varepsilon e^{it}$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда $dz = \varepsilon e^{it} i dt$.

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{c}{z} dz + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{c}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon e^{it} i dt + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = (\beta - \alpha) \cdot i \cdot c + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz$$

Оценим второй интеграл:

g - голоморфна, тогда ограничена в окр. точки $\implies |g| \leq M$.

$$\left| \int_{C_\varepsilon} g(z) dz \right| \leq M \underbrace{\varepsilon(\beta - \alpha)}_{\text{длина дуги}}, \text{ где } M = \max_{|z| \leq \frac{R}{2}} |g(z)|. \text{ и тогда } \int_{C_\varepsilon} g(z) dz \rightarrow 0. \quad \square$$

Определение 4.23. Главное значение интеграла (v.p. \int).

$\int_a^b f(x) dx$, где c - единственная особая (в этой точке нет непрерывности функции) точка, $c \in (a, b)$.

$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$ и устремляем ε к нулю. Предел - главное значение интеграла.

Пример. $v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$.

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 = 0$, потому что функция нечетная.

$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$

Свойства. 1. Если \int сходится, то $\int = v.p. \int$

2. Линейность

3. Аддитивность, если резать не по особым точкам

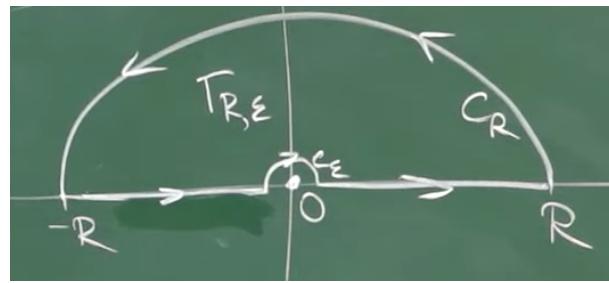
Пример. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Функция четная, поэтому $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$(\frac{e^{ix}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{ix}{x} + \dots)$.

Тогда $2I = \operatorname{Im} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R$.



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0$, так как особая точка только 0, а она не в контуре.

Но с другой стороны: $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon}$

$$1. \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R \rightarrow v.p. \int_{-R}^R$$

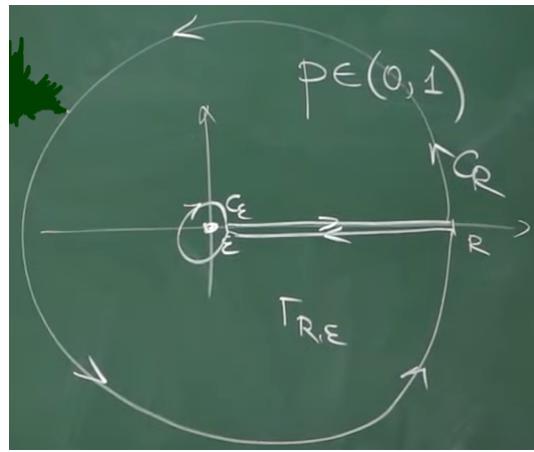
$$2. \int_{C_R} \rightarrow 0 - \text{по лемме Жордана.}$$

$$3. \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \rightarrow -\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} f = (-\pi i) - \text{лемма о полувычете, где } \alpha = \pi, \beta = 0, 0 - \text{полюс 1-го порядка.}$$

А значит $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$.

$$\text{Тогда } I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \frac{\pi}{2}$$

Пример. $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$, где $0 < p < 1$.



$f(z) = \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z}$, и пусть $Ln(1) = 0$.

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-\varepsilon}^R + \int_{R e^{2\pi i}} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R}.$$

Но с другой стороны $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} f = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f = e^{(p-1)Ln(-1)} = e^{(p-1)\pi i} = -e^{p\pi i}$$

$$1. \int_{-\varepsilon}^R \rightarrow I$$

$$2. \int_{R e^{2\pi i}} = \int_R^\varepsilon \frac{e^{(p-1)\cdot(ln(x)+2\pi i)}}{1+x} dx = e^{2\pi i \cdot (p-1)} \cdot (-1) \cdot \int_\varepsilon^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \rightarrow -e^{(p-1)2\pi i} \cdot I = -e^{2\pi pi} \cdot I$$

$$3. \left| \int_{C_R} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leqslant 2\pi R \cdot \max_{|z|=R} \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = 2\pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{\min |1+z|} = 2\pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{R-1} \rightarrow 0$$

$$4. \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leqslant 2\pi \varepsilon \cdot \max_{|z|=\varepsilon} \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = 2\pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{\min |1+z|} = 2\pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{1-\varepsilon} \rightarrow 0$$

Тогда получаем, что $I - e^{2\pi pi} \cdot I = -2\pi i e^{\pi pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi i e^{\pi pi}}{e^{2\pi pi} - 1} = \pi \cdot \frac{2i}{e^{\pi pi} - e^{-\pi pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Теорема 4.36. Пусть f - мероморфная функция в \mathbb{C} . z_1, \dots, z_n - полюсы. G_1, \dots, G_n - главные части рядов Лорана в точках z_1, \dots, z_n . ∞ - полюс или устранимая особая точка. G - правильная часть ряда Лорана в ∞

Тогда $f(z) = G(z) + \sum_{k=1}^n G_k(z) + C$, в частности, f - рациональная функция.

Доказательство. $g(z) = f(z) - G(z) - \sum_{k=1}^n G_k(z)$. У этой функции z_1, \dots, z_n, ∞ - устранимые особые точки, а во всех остальных точках есть голоморфность.

Тогда по теореме Луивилля $g \equiv const$. □

Теорема 4.37. Пусть f мероморфная функция в \mathbb{C} , z_1, z_2, \dots - полюсы, R_1, R_2, \dots - последовательность радиусов, т.ч. R_n возрастают и $R_n \rightarrow +\infty$, $M_{R_n} = \max_{|z|=R_n} |f(z)| \rightarrow 0$.

Тогда $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |z_k| < R_n} G_k(z)$.

Доказательство. $I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_n} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=: g(\zeta)} d\zeta = \sum \operatorname{res} g = \operatorname{res}_{\zeta=z} g(\zeta) + \sum_{k: |z_k| < R_n} \operatorname{res}_{\zeta=z_k} g$

1. $\text{res}_{\zeta=z} g = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)'}|_{\zeta=z} = f(z)$ – формула для полюса 1-ого порядка.

2. $\text{res}_{\zeta=z_k} g = \underbrace{\text{res}_{\zeta=z_k} \frac{f(\zeta) - G_k(\zeta)}{\zeta - z}} + \text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$
голоморфна в окр. z_k , т.е. равна 0

Рассмотрим окр. радиуса R и запишем интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \text{res}_{\zeta=z} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} + \text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$ – так как все особые точки для подынтегрального выражения это z и z_k .

$\text{res}_{\zeta=z} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = G_k(z)$ (по формуле для полюса 1-ого порядка), а второе слагаемое равно тому, что мы хотим найти.

$\left| \int_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{O(\frac{1}{R})}{R - |z|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$, где $G_k = \frac{c_{-1}}{\zeta - z_k} + \frac{c_{-2}}{(\zeta - z_k)^2} + \dots = O(\frac{1}{R})$ (кол-ва слагаемых конечно, т.к. a_k – полюс).

Из стремления к нулю, мы поняли, что $\text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z} = -G_k(z)$.

Теперь мы имеем, что $I_n(z) = f(z) - \sum_{k: |z_k| < R_n} G_k(z)$, осталось доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(z) = 0$.

Вспоминаем, что $I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ и тогда:

$$|I_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_n \cdot \max_{|\zeta|=R_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \leq R_n \cdot \frac{M_{R_n}}{R_n - |z|} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

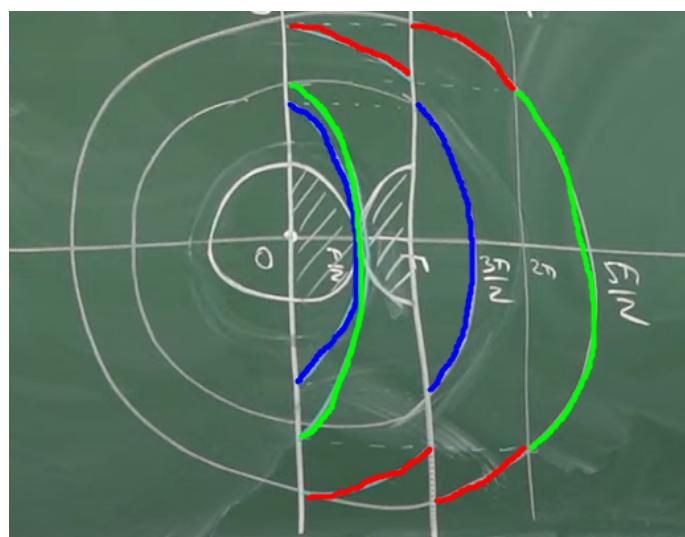
Пример. $\text{ctg}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$

Лемма. Существует M , такая что, $|\text{ctg } z| \leq M$ на окружностях $|z| = \pi(n + \frac{1}{2})$, где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Леммы.

Наблюдения про $\text{ctg } z$:

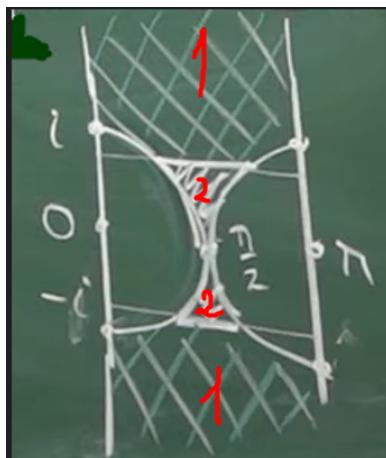
1. π -периодическая функция \implies все значения содержатся в полосе $0 \leq \text{Re}(z) \leq \pi$, можно все окружности сдвинуть по периоду.
2. нечетная функция \implies можем интересоваться только половиной картинки (давайте смотреть на $\text{Re}(z) \geq 0$).



Мы получаем полосу, за некоторым исключением (так как есть определенные точки, которые точно не получаются):

$$\{0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi\} \setminus \{|z| < \frac{\pi}{2}\} \cup \{|z - \pi| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Получаем следующее мн-во:



Хотим понять, что ctg ограничен на запятыхованом мн-ве.

$$z = x + iy$$

1. Зона 1 ($y \geq 1$ или $y \leq -1$, в силу нечетности ctg):

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos z}{\sin z} \right| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{1+e^{2iz}}{1-e^{2iz}} \right| \leq \frac{1+|e^{2iz}|}{|1-e^{2iz}|} = (*)$$

Пусть $z = x + iy$ и пока что $y \geq 1$:

$$|e^{2iz}| = |e^{2ix} \cdot e^{-2y}| = e^{-2y}, \text{ тогда } (*) = \frac{1+e^{-2y}}{|1-e^{2iz}|} \leq \frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}} \leq \frac{2}{1-e^{-2}}$$

2. Зона 2:

Очевидно, что эта зона это компакт, а ctg на ней непрерывен $\implies \operatorname{ctg}$ – ограничен на этом компакте.

□

Доказательство. Примера.

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}, \text{ из леммы: } \operatorname{ctg} z \leq M \text{ при } |z| = \pi(n + \frac{1}{2}).$$

$$\text{Берем радиусы } R_n = \pi(n + \frac{1}{2}) \implies M_{R_n} \leq \frac{M}{\pi(n + \frac{1}{2})} \rightarrow 0.$$

Особые точки $f(z)$: $z = 0$ – полюс 2-ого порядка, $z = \pi k$ – полюсы 1-ого порядка при $k \neq 0$.

$$G_k \text{ – главная часть ряда Лорана в } \pi k, k \neq 0 \implies G_k(z) = \frac{\operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z}}{z-\pi k} = \frac{1}{\pi k(z-\pi k)}, \text{ где } \operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = \frac{\cos(z)}{\sin'(z)}|_{z=\pi k} = \frac{1}{\pi k}.$$

$G_0(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{\operatorname{res}_{z=0} f(z)}{z} = \frac{A}{z^2}$, вычет занулился, так как $f(z)$ – четная функция и все коэффициенты перед нечетными степенями в ряде Лорана равны 0.

$$G_0(z) = \frac{A}{z^2} = \frac{1}{z^2}, \text{ так как } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = \frac{\cos(z)}{z \sin(z)} \sim \frac{1}{z^2} \text{ при } z \text{ близких к нулю.}$$

$$\text{То есть } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = G_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k(z) + G_{-k}(z)) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi k(z-\pi k)} + \frac{1}{\pi(-k)(z+\pi k)} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - \pi^2 k^2}.$$

□

Пример. $(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z$

$$(\ln \frac{\sin z}{z})' = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \int_0^z (\operatorname{ctg} w - \frac{1}{w}) dw = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw \quad (\text{можем переставлять, потому что есть равномерная сходимость}).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \left(\frac{1}{w - \pi k} + \frac{1}{w + \pi k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(w - \pi k) + \ln(w + \pi k) \Big|_0^z = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(\frac{z^2 - \pi^2 k^2}{-\pi^2 k^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Тогда } \frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Либо } \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$. Посмотрим на $f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z)$. Тогда $\operatorname{res}_{z=k} f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z) \underset{\substack{f(z) \cdot \cos \pi z \\ f(k) \neq 0}}{=} \frac{f(z) \cdot \cos \pi z}{(\sin \pi z)'}|_{z=k} = \frac{f(k)}{\pi}$ - т.е.

если $f(k) \neq 0$, то $z = 0$ - полюс кратности 1, значит $\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{g(a)}{h'(a)}$ при условии, что $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$.

$$g(z) = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} \text{ и проинтегрируем.}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz = \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{1}{\pi k^2} + \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

$$\text{При этом есть такая оценка: } \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz \right| \leq (n + \frac{1}{2}) \cdot \frac{M}{(n + \frac{1}{2})^2} \rightarrow 0$$

$$\text{Значит, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

Такой вычет не очень приятно считать – раскладываем в ряд (хотим найти коэффициент c_{-1} перед $\frac{1}{z}$, т.к. это и есть вычет по определению). Тогда нужно найти коэффициент перед z^1 в разложении $\operatorname{ctg} z$, т.к. потом мы поделим на $\frac{1}{z^2}$ и получим то, что надо.

$$(*): \frac{1}{1-t} = 1 + t + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

$$\text{Найдем коэффициент перед } z^1: \text{ в разложении } \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4)}{\pi z (1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))} \underset{(*)}{=}$$

$$= \frac{(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4))(1 + \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))}{\pi z} = \frac{1}{\pi z} - \frac{1}{3}\pi z + \mathcal{O}(z^3).$$

$$\text{То есть этот коэффициент равен: } -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Теорема 4.38. (О числе нулей и полюсов).

Пусть f мероморфна в Ω , γ – простая замкнутая кривая в Ω , не проходящая через нули и полюсы f .

$$\text{Тогда } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_f - \mathcal{P}_f$$

\mathcal{N}_f – количество нулей f с учетом кратности в контуре γ .

\mathcal{P}_f – количество полюсов f с учетом кратности (порядка) в контуре γ .

Доказательство. Если a – ноль или полюс f , то $f(z) = (z-a)^m g(z)$, где $g(a) \neq 0$ и g голоморфна в окрестности a .

1. Если a – ноль, то m – кратность нуля
2. Если a – полюс, то $-m$ – порядок полюса (т.к. m будет отрицательным числом).

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}g(z) + (z-a)^mg'(z)$$

$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$, второе слагаемое голоморфно в окрестности a . Значит, a - полюс первого порядка $\frac{f'}{f}$, а m - вычет.

Так как m - вычет, то со знаком плюс он пойдет в сумму как кратность нуля, а со знаком минус - как порядок полюса. \square

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$, γ - простая замкнутая кривая, не проходящая через нули f , тогда $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N}_f$

Доказательство. Потребовали голоморфность f , а значит, полюсов просто нет. \square

2. Принцип аргумента

Пусть $f \in H(\Omega)$, γ - простая замкнутая кривая в Ω , не проходящая через нули f .

Тогда $\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} \arg f(z)$, где Δ_{γ} - изменение аргумента при движении по кривой.

Доказательство. $\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. Но $\frac{f'}{f} = (Ln f)'$. Если рассмотрим Ln на кривой γ , то это будет первообразная вдоль пути γ для $\frac{f'}{f}$.

$$\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} (Ln f(z)) = \frac{1}{2\pi i} (\Delta_{\gamma} (\ln |f(z)| + i \arg f(z))) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f(z)$$

\square

Теорема 4.39. Руше

$f, g \in H(\Omega)$, γ - простой замкнутая кривая в Ω и $|f| > |g|$ на γ .

Тогда $f + g$ и f внутри γ имеют одинаковое число нулей с учетом кратности.

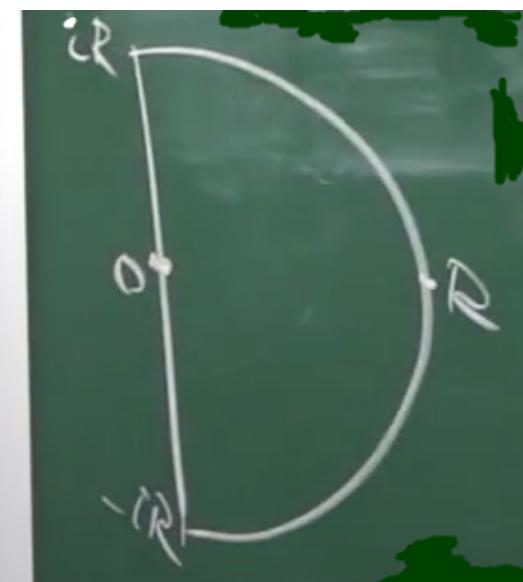
Доказательство. $\mathcal{N}_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(f+g)$. $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$ на γ , поэтому в ноль обращения нет и можно использовать принцип аргумента.

$$\mathcal{N}_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(f \cdot (1 + \frac{g}{f})) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg f + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(1 + \frac{g}{f}).$$

Значит надо доказать, что $\Delta_{\gamma} \arg(1 + \frac{g}{f}) = 0$.

Значения $1 + \frac{g}{f}$ на γ лежат в круге $|z-1| < 1$, потому что $\frac{|g|}{|f|} < 1$. А значит вокруг нуля обойти не можем и изменения аргумента нет. \square

Пример. $z - e^{-z} = \lambda > 1$. Хотим понять, что в правой полуплоскости есть ровно 1 корень.



Возьмём окружность большого радиуса и по ней обход по контуру γ .

Возьмём $f(z) = z - \lambda$ и $g(z) = -e^{-z}$. Хотим подставить в т. Руше, тогда необходимо чтобы $|f| > |g|$, проверим это:

1. На вертикальном отрезке: $|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{y^2 + \lambda^2} \geq \lambda > 1$, а $|g(z)| = |-e^{-iy}| = 1$, значит всё выполняется.
2. На полуокружности: $|f(z)| = |z - \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda$, а $|g(z)| = |-e^{-x-iy}| = e^{-x} \leq 1$. То есть если $R > \lambda + 1$, то $|f| > |g|$ на γ .

Тогда $\mathcal{N}_{f+g} = \mathcal{N}_f = 1$

4.6. Конформные отображения

Определение 4.24. Ω и $\tilde{\Omega}$ - области, $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ - конформное отображение, если f биекция и $f \in H(\Omega)$

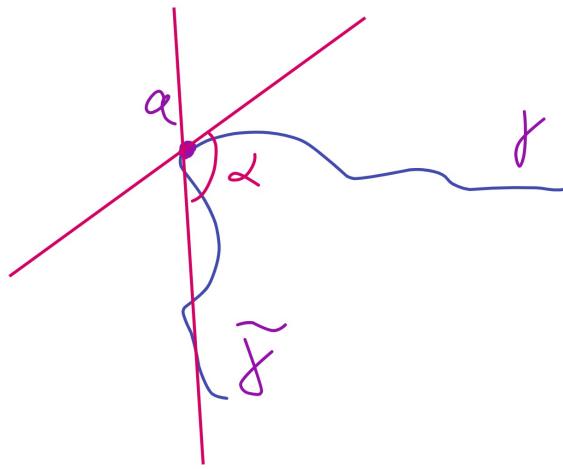
Теорема 4.40. Пусть $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, такая, что $f'(a) \neq 0$.

Тогда f сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку a .

Доказательство. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ и $\gamma(0) = a$ (можно так считать).

$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}$ и $\tilde{\gamma}(0) = a$.

Угол между кривыми в точке a определяется, как угол между касательными к данным кривым в данной точке.



miro

$\arg \gamma'(0) - \arg \tilde{\gamma}'(0)$ - угол между кривым в Ω .

$$\arg(f \circ \gamma)'(0) - \arg(f \circ \tilde{\gamma})'(0) = \arg f'(a)\gamma'(0) - \arg f'(a)\tilde{\gamma}'(0) = \arg \tilde{\gamma}'(0) - \arg \tilde{\gamma}'(0)$$

□

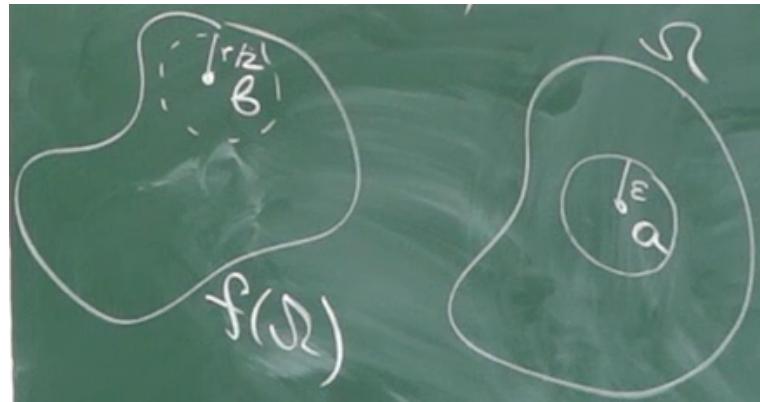
Определение 4.25. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ - однолистная, если $f \in H(\Omega)$ и инъекция.

Теорема 4.41. Если $f \in H(\Omega)$ и $f \neq \text{const}$, то $f(\Omega)$ - область.

Доказательство. 1. Линейная связность остаётся (т.к. при непрерывном отображении путь, соединяющий некоторые точки, под действием непрерывного отображения будет переходить в путь, соединяющий образы этих точек).

2. Нужно проверить, что $f(\Omega)$ - открытое множество. Возьмём точку в образе и докажем, что она там лежит с некоторым шариком.

$$b \in f(\Omega) \Rightarrow \exists a \in \Omega : f(a) = b.$$



Найдётся окружность $|z - a| = \varepsilon$, что $|f(z) - b| \neq 0$. Иначе бы на окружности радиуса $\frac{r}{n}$ нашлась точка z_n , такая, что $f(z_n) = b$, то $f \equiv b$ по теореме единственности, но $f \neq \text{const}$ по условию.

$r = \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - b| > 0$. Мы хотим показать, что некоторый шарик $B_{\frac{r}{2}}(b) \subset f(\Omega)$, для этого посмотрим на уравнение $f(z) - w = 0$. Хотим понять, что такое уравнение имеет решение при w близких к b (а именно: $|w - b| < \frac{r}{2}$). Это и будет значить, что близкие к b точки попадают в образ.

Подставим всё в теорему Руше: $f(z) - w = (f(z) - b) + (b - w)$. Нужно, чтобы $|f(z) - b| > |b - w|$: $|f(z) - b| \geq r$ - т.к. r - это минимум данного выражения.

$|b - w| \leq \frac{r}{2}$ - т.к. мы берем w из шарика $B_{\frac{r}{2}}(b)$.

Итого получаем: $|f(z) - b| \geq r > \frac{r}{2} \geq |b - w| \rightarrow |f(z) - b| > |b - w|$ - условия теоремы Руше выполнены, тогда $\mathcal{N}_{f(z)-w} = \mathcal{N}_{f(z)-b} \geq 1 \implies$ существует корень.

Возьмём $|b - w| < \frac{r}{2}$ и всё выполнится.

Получили, что $\{|w - b| < \frac{r}{2}\} \subset f(\Omega) \Rightarrow f(\Omega)$ открытое.

□

Следствие. Если f однолистна, то f конформное отображение Ω на $f(\Omega)$.

Теорема 4.42. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ однолистна. Тогда $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $f'(a) = 0$, $b = f(a)$. Возьмём ε так, что $f(z) - b \neq 0$ при $|z - a| = \varepsilon$ и $r = \min_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - b| > 0$.



Смотрим на уравнение $f(z) - w = f(z) - b + b - w$. Мы выяснили, что $\mathcal{N}_{f-w} = \mathcal{N}_{f-b} \geq 2$, потому что a - корень кратности ≥ 2 . Тогда $f(z) = w$ имеет хотя бы 2 решения. Но у нас инъекция, поэтому все решения с кратностью 2. Хотим показать, что тогда найдётся последовательность нулей производных, стремящаяся к точке a и получить противоречие.

Берём радиус $\frac{r}{2}$. $\{|w - b| \leq \frac{r}{2}\} \subset f(\Omega)$. Берём w_1, w_2, \dots из этого круга. Значит $\exists z_1, \dots$ из $|z - a| < \varepsilon$, $f(z_k) = w_k$ и $f'(z_k) = 0 \Rightarrow$ в $|z - a| \leq \varepsilon$ бесконечно много нулей f' . Значит у них есть предельная точка и тогда $f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv \text{const}$. \square

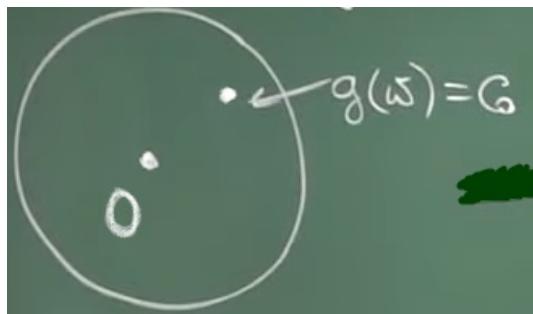
Замечание. Обратное неверно. $f(z) = e^z$, $f'(z) = e^z \neq 0$, но нет однолистности.

Следствие. 1. Конформное отображение сохраняет углы между кривыми

Доказательство: оно инъективно, а значит производная в ноль не обращается.

2. Если $f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$ однолистна в окрестности ∞ , то $c_1 \neq 0$.

Доказательство: $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ однолистна в проколотой окрестности нуля, в нуле можем доопределить, чтобы была голоморфность.



Теперь, когда g определена в нуле, то могло так случиться, что $\exists w : g(w) = g(0) = c_0$, то есть мы потеряли инъективность. Чтобы решить эту проблему уменьшим окрестность так, чтобы точка w в нее не попадала.

Тогда g однолистна в меньшей и уже непроколотой окрестности, тогда по теореме:

$$c_1 = g'(0) \neq 0.$$

3. f имеет полюс в точке a и однолистна в проколотой окрестности точки a , тогда это полюс первого порядка.

Доказательство: пусть $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ - однолистна в проколотой окрестности точки a . Можем доопределить нулём в точке a и тогда будет голоморфность, $g(a) = 0$.

Тогда g однолистна в окрестности точки a , а значит $g'(a) \neq 0$, тогда a - ноль первого порядка у g , а значит и ноль первого порядка у f .

Определение 4.26. Ω и $\tilde{\Omega}$ конформно эквивалентны, если $\exists f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ - конформное отображение.

Замечание. Это отношение эквивалентности.

Теорема 4.43. \mathbb{C} и \mathbb{D} не конформно эквивалентны.

Доказательство. От противного. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ - конформное отображение.

Тогда $f \in H(\mathbb{C})$, $|f| \leq 1$. Тогда f константа по теореме Луивилля. А это не биекция \square

Лемма. Шварца

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ голоморфная, $f(0) = 0$. Тогда:

1. $|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$
2. Если для какого-то $a \neq 0$, $|f(a)| = |a|$, то $f(z) = e^{i\phi}z$, где $\phi \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. Пусть $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, в нуле устранимая особая точка (т.к. для $f(\cdot)$ 0 - ноль первого порядка, то $f(z)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности этой точки, при этом коэффициент $c_0 = f(0) = 0$, значит если далее поделить ряд на z , то новый ряд для $\frac{f(z)}{z}$ все равно будет сходиться, т.к. слагаемое $\frac{c_0}{z} = \frac{0}{z} = 0$), устраним - получим голоморфную в круге функцию. Согласно принципу максимума (т.е. Ω - компакт, максимум функции $f \in H(\Omega)$ достигается на границе компакта), в круге $|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r} \rightarrow_{r \rightarrow 1^-} 1$. И тогда $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$

2. Знаем, что $|g(z)| \leq 1$ в \mathbb{D} . Если $|g(a)| = 1$, для $a \in \mathbb{D}$ (значит у нас есть какая-то внутренняя точка, в которой достигается максимум), то a является точкой максимума, тогда по принципу максимума, $g \equiv \text{const} \Rightarrow g(z) = e^{i\phi} \Rightarrow f(z) = e^{i\phi} \cdot z$

□

Теорема 4.44. Римана о конформных отображениях

Ω и $\tilde{\Omega}$ - односвязные области в $\bar{\mathbb{C}}$, причём их граница состоит больше, чем из одной точки (есть хотя бы какая-то кривая). Есть точка $z_0 \in \Omega$, $\tilde{z}_0 \in \tilde{\Omega}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Тогда существует единственное конформное отображение $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$, такое, что $f(z_0) = \tilde{z}_0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha$.

Доказательство. Единственность

1. $\Omega = \tilde{\Omega} = \mathbb{D}$, $z_0 = \tilde{z}_0 = \alpha = 0$.

Пусть $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $f(0) = 0$ и $\arg f'(0) = \alpha = 0$. По лемме Шварца для f получаем, что $|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}$.

С другой стороны, $f^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ тоже конформное, $f^{-1}(0) = 0$, значит для неё тоже можно применить лемму Шварца. $|f^{-1}(z)| \leq |z| \Rightarrow |z| \leq |f(z)|$.

Значит $|f(z)| = |z| \forall z \in \mathbb{D}$, тогда по лемме Шварца это поворот, то есть $f(z) = e^{i\phi}z$.

Также мы знаем, что $f'(z) = e^{i\phi}$ и $\arg f'(0) = \alpha = 0 \Rightarrow e^{i\phi} = 1$.

Итого, получили, что $f(z) = z \Rightarrow$ есть единственность, т.к. мы явно предъявили функцию.

2. Ω и $\tilde{\Omega}$ произвольные. Пусть $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ - конформное. $f_i(z_0) = \tilde{z}_0$ и $\arg f'_i(z_0) = \alpha$, где $i \in \{1, 2\}$.

Воспользуемся существованием:

- $\exists \phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ - конформное, $\phi(0) = z_0$ и $\phi'(0) > 0$ (то есть, что $\arg \phi'(0) = 0$).
- $\exists \psi : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{D}$ - конформное, $\psi(\tilde{z}_0) = 0$ и $\arg \psi'(\tilde{z}_0) = -\alpha$.

Посмотрим на $g_i = \psi \circ f_i \circ \phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$:

- $g_i(0) = 0$
- $g'_i(0) = \psi'(f_i(\phi(0))) \cdot f'_i(\phi(0)) \cdot \phi'(0) = \psi'(\tilde{z}_0) \cdot f'_i(z_0) \cdot \phi'(0)$ - мы интересуемся аргументом g'_i , но аргумент произведения равен сумме аргументов, тогда:
 $\arg g'_i(0) = -\alpha + \alpha + 0 = 0$ - сумма аргументов множителей.

То есть мы получили, что g_1 и g_2 – два комформных отображения из круга в круг, переводящие ноль в ноль, и производную в нуле имеют с нулевым аргументом $\xrightarrow[\text{по пункту (1)}]{} g_1(z) = g_2(z) = z$.

Тогда восстановим f_i и поймем, что они равны:

$f_i(\phi(z)) = \psi^{-1}(g_i(z)) \implies f_i(z) = \psi^{-1}(g_i(\phi^{-1}(z))) \implies$ т.к. $g_1 = g_2$, то по полученной формуле $f_1 = f_2$.

□

Следствие. Обобщенная теорема Лиувилля

$f \in H(\mathbb{C})$ и f не принимает значения на некоторой кривой γ . Тогда $f \equiv const$

Доказательство. $\bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ - односвязная область, с границей, состоящей из более чем одной точки.

Тогда по теореме Римана о конформных отображениях существует $g : \bar{\mathbb{C}} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{D} \Rightarrow g \circ f \in H(\mathbb{C})$ и $g \circ f \subset \mathbb{D}$, то есть это ограниченная функция.

Тогда по теореме Лиувилля (стандартной), $g \circ f$ - константа, значит $f(z) = g^{-1}(const) = const$.

□

Замечание. Малая теорема Пикара

Если $f \in H(\mathbb{C})$ не принимает 2 каких-то значения, то $f \equiv const$.

Пример. $f(z) = e^z \neq 0$ - одно значение целая функция может не принимать.

Следствие. Если f мероморфна в \mathbb{C} и не принимает 3 значения, то $f \equiv const$

Доказательство. Пусть нет значений a, b, c . Сделаем из мероморфной - голоморфную, которая не принимает 2 значения. Пусть $c \neq \infty$, тогда $g(z) = \frac{1}{f(z)-c} \in H(\mathbb{C})$, но она не принимает значения $\frac{1}{a-c}$ и $\frac{1}{b-c}$, а тогда по малой теореме Пикара получаем, что $f \equiv const$.

□

Пример. $f(z) = \operatorname{tg} z \neq \pm i$ - пример мероморфной функции, не принимающей 2 значения.

Определение 4.27. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ - дробно-линейное отображение, $ad - bc \neq 0$.

Теорема 4.45. Если $f \in H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\})$ и однолистна, то f дробно-линейное отображение.

Доказательство. 1. z_0 – существенная особая точка. Тогда по теореме Сохоцкого $\operatorname{Cl} f \{0 < |z - z_0| < r\} = \mathbb{C}$ при некотором r .

Возьмём $b = f(a)$. Тогда $f(|z - a| < \varepsilon)$ – открытое множество (т.к. $\{|z - a| < \varepsilon\}$ – открытое и f – однолистная).

Возьмем r и ε такими, чтобы шарики не пересекались, т.е.: $\{|z - a| < \varepsilon\} \cap \{|z - z_0| < r\} = \emptyset$.

Так как функция f однолистная (есть инъективность), то и образы данных шариков тоже не будут пересекаться: $f(|z - a| < \varepsilon) \cap f(0 < |z - z_0| < r) = \emptyset$.



Так как образ открытого множества при непрерывном отображении переходит в открытое множество, то $f(|z - a| < \varepsilon)$ и $f(0 < |z - z_0| < r)$ - открыты. Тогда к одному из них можно приписать замыкание, и они все еще не будут пересекаться \Rightarrow к $f(0 < |z - z_0| < r)$ припишем замыкание:

$f(|z - a| < r) \cap Cl\ f(0 < |z - z_0| < \varepsilon) = \emptyset$ – однако мы только что показали, что замыкание это все $\mathbb{C} \Rightarrow$ противоречие. Следовательно, z_0 - точно не существенная особая точка.

2. $z_0 \neq \infty$ – полюс. Тогда из однолистности это полюс первого порядка. Тогда в главной части Лорана лишь конечное число ненулевых слагаемых, а именно ровно одно (т.к. полюс кратности 1): $\frac{c}{z-z_0}$ – вычтем его из функции f (останется только ряд Тейлора) и получим функцию голоморфную на всей плоскости:

$$g(z) = f(z) - \frac{c}{z-z_0} \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow g(z) = const \Rightarrow f(z) = \frac{c}{z-z_0} + const$$

3. $z_0 = \infty$ – полюс. Тогда в правильной части ряда Лорана для f есть только 1 ненулевой коэффициент при z^1 : $c \cdot z^1$ – вычтем его и получим голоморфную на всей плоскости функцию: $g(z) = f(z) - cz \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow g(z) = const \Rightarrow f(z) = cz + const$ – т.е. f является линейной функцией.

4. z_0 – устранимая особая точка. Устраним особенность в данной точке $\Rightarrow f \in H(\bar{\mathbb{C}}) \Rightarrow f \equiv const \Rightarrow$ нет однолистности f – противоречие. Следовательно, z_0 не является устранимой особой точкой.

□

Следствие. Если функция $f \in H(\mathbb{C})$ и однолистная, то f линейная.

Доказательство. $z_0 = \infty$ в теореме.

□

4.7. Производящие функции

Определение 4.28. Есть последовательность a_0, a_1, \dots . Производящая функция последовательности $\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Мы хотим, чтобы ряд сходился при $|z| < R$ для какого-то $R > 0$

Пример. Задача о размене

Есть монетки 1, 2, 5, 10 рублей. Интересуемся, каким количеством способов мы можем разменять n рублей, если запас монет не ограничен, пусть это число равно a_n .

Вместо формулы для этих коэффициентов будет искать формулу для ряда:

$$\mathcal{A}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Это будет равно:

$$\mathcal{A}(z) = (1 + z + z^2 + \dots)(1 + z^2 + \dots)(1 + z^5 + z^{10} + \dots)(1 + z^{10} + z^{20} + \dots) \text{ и раскроем все скобки.}$$

Коэффициент при $z^n = z^a \cdot z^{2b} \cdot z^{5c} \cdot z^{10d}$, где $a + 2b + 5c + 10d = n$. Тогда коэффициент a_n – число решений уравнения $a + 2b + 5c + 10d = n$ в неотрицательных целых числах.

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z^{10}}.$$

Определение 4.29. $H \subset \mathbb{N}$, $p(n, H)$ - количество способов представить n в виде суммы слагаемых из H .

$$\mathcal{F}_H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, H) z^n = \prod_{k \in H} \frac{1}{1-z^k}$$

Если каждое слагаемое можно брать $\leq m$, то $\prod_{k \in H} \frac{1 - z^{(m+1)k}}{1 - z^k} = (1 + z^k + z^{2k} + \dots + z^{mk})$

Определение 4.30. Число разбиений n на натуральные слагаемые $p(n) = p(n, \mathbb{N})$.

Теорема 4.46. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}$ – сходится при $|z| < 1$ и $p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ при $0 < r < 1$.

Доказательство. $\ln \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1-z^k} \right| \right) = \sum_{k=1}^{\infty} -\ln |1-z^k| = (*)$ – покажем, что этот ряд сходится.

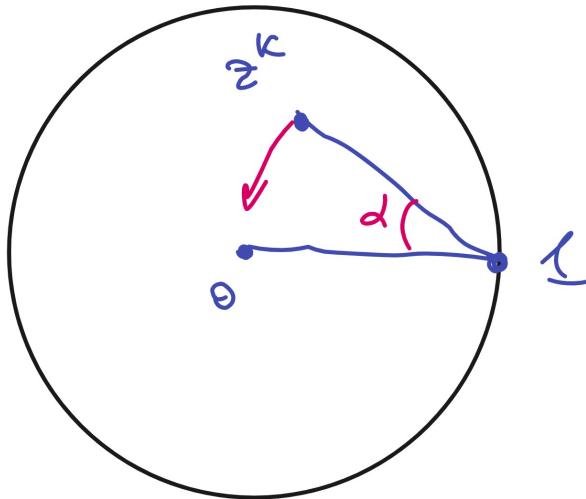
1. $\ln(1-t) \geq -t - t^2 \implies -\ln(1-t) \leq t + t^2$
2. $\ln |1-z^k| \geq \ln(1-|z|^k) \implies -\ln |1-z^k| \leq -\ln(1-|z|^k) \leq |z|^k + |z|^{2k}$

Из пункта (2) выше получаем, что $(*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z|^k + \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{2k} < +\infty$ – справа от нер-ва сумма рядов сх-ся, тогда и $(*)$ тоже.

Проверим, что аргумент ничего не испортит:

$$\arg \left(\frac{1}{1-z^k} \right) = -\arg(1-z^k)$$

$$|\arg(1-z^k)| \leq \arcsin |z|^k \leq 2|z|^k$$



mira

Т.к. z ($|z| < 1$) возводится в степень k , и $k \rightarrow +\infty$, то $z^k \rightarrow 0$, значит угол α стремится к нулю (см. картинку).

Действительно, аргумент ничего не портит. □

Замечание. Теорема Харди-Рамануджана

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{n}}$$

Теорема 4.47. Эйлера

Количество разбиений n на нечётные слагаемые равно количеству разбиений n на различные слагаемые

Доказательство. Для различных слагаемых – $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k)$.

Для нечётных слагаемых – $\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{2k-1}}\right)$.

Хотим понять, что это одно и то же:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^{2k-1}}\right) = \frac{\text{Произведение всех } k}{\text{Произведение четных } k} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k}}{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^{2k}}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-z^{2k}}{1-z^k} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k) \quad \square$$

Пример. $b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \dots b_{2k}$ счастливый билет, если сумма первых k равна сумме последних k .

Пусть a_n – количество k -значных чисел с суммой цифр n . То есть количество счастливых билетов $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{9k}^2$.

Пусть $\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1 + z + z^2 + \dots + z^9)^k$

$\mathcal{A}(z) \cdot \mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right)$ – здесь коэффициент перед z^0 – это $a_0^2 + a_1^2 + \dots$

$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\mathcal{A}(z)\mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right)}{z} dz$ – количество счастливых билетов.

Пример. Диагонализация степенных рядов

Пусть дана $f(w, z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} w^n z^k$, а мы хотим найти $g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nn} w^n$.

Запишем $f\left(\frac{w}{z}, z\right) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} \frac{w^n}{z^n} z^k$, видно, что нас интересует коэффициент перед z^0 (если мы его найдем, то получим ответ).

$$\begin{aligned} \text{То есть } g(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f\left(\frac{w}{z}, z\right)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} w^n z^{k-n-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n,k=0}^{\infty} w^n a_{nk} \underbrace{\int_{|z|=r} z^{k-n-1} dz}_{=0, \text{ при } k \neq n, \text{ } 2\pi i \text{ иначе}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} w^n a_{nn} 2\pi i = g(w) \end{aligned}$$

Чтобы можно было переставить интеграл и сумму, нужна равномерная сходимость. То есть нужно попасть строго внутрь круга сходимости ряда $\sum |a_{nk}| r^{k-1} \left|\frac{w}{z}\right|^n$.

Пусть радиус сх-ти для z и для w равен R , тогда нужно, чтобы $r < R, \left|\frac{w}{r}\right| < R$.

Давайте теперь воспользуемся полученной схемой на конкретном примере:

пусть $f(w, z) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} w^n z^k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} w^{m-k} z^k = \sum_{m=0}^{\infty} (w+z)^m = \frac{1}{1-w-z}$.

Найдем $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f\left(\frac{w}{z}, z\right)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z(1-\frac{w}{z}-z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2-z+w} = (*)$.

Ищем нули знаменателя, получаем особые точки: $\frac{1 \pm \sqrt{1-4w}}{2}$.

В контур попадает только $\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}$, так как второй корень близок к 1, а этот как раз к нулю.

$$(*) = -\text{res} = -\frac{1}{2z-1} \Big|_{z=\frac{1-\sqrt{1-4w}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4w}}.$$

Мы получили, что $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} w^n = \frac{1}{\sqrt{1-4w}}$.

Определение 4.31. Произведение Адамара

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\mathcal{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

Пример. Как находить произведение Адамара.

$$f(w, z) = \mathcal{A}(z)\mathcal{B}(w) = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n b_k z^n w^k.$$

Нас интересует диагональ этой штуки.

Теорема 4.48. Произведение Адамара рациональных функций – рациональная функция

Определение 4.32. Последовательность $\{a_n\}$ – **квазимногочлен**, если

$$a_n = p_1(n)q_1^n + p_2(n)q_2^n + \dots + p_k(n)q_k^n,$$

где $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{C}$, а p_1, \dots, p_k – многочлены с комплексными коэффициентами.

Лемма. $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – рациональная функция \Leftrightarrow при больших n : a_n – квазимногочлен.

Доказательство. 1. \Rightarrow . Разложим рациональную функцию на простейшие, $\frac{1}{(1-qz)^m}$ – то есть на линейную комбинацию таких.

$$\frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} z^n$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{(1-qz)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m-1)\dots(n+1)}{(m-1)!} q^n z^n$$

2. \Leftarrow . Достаточно понять, что $a_n = p(n) \cdot q^n$ имеет рациональную производящую функцию, а потом просто сложить в сумму.

Индукция по степени многочлена:

(а) База: $\deg = 0$, $a_n = q^n$ производящая функция $\frac{1}{1-qz}$.

(б) Переход: $d - 1 \rightarrow d$.

Возьмём конкретный многочлен степени d : $\tilde{p}(n) = \frac{(n+d)(n+d-1)\dots(n+1)}{d!}$.

Для $b_n = \tilde{p}(n)q^n$ производящая функция $\frac{1}{(1-qz)^{d+1}}$.

Из $p(n)$ вычтем $c \cdot \tilde{p}(n)$ так, чтобы степень уменьшилась, тогда по предположению индукции – все работает.

□

Пример. Метод Дарбу

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в круге $|z| < R$.

Тогда при любом r , таком что $r < R$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ – сходится и $a_n r^n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n = o(r^{-n})$.

Пусть R – радиус сходимости $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, тогда мы знаем, что на границе круга сходимости есть особая точка.

Если особых точек конечное число и это полюсы (для простоты будем считать, что одна), то тогда возьмём эту точку и напишем главную часть ряда Лорана:

$h(z)$ = главная часть ряда Лорана для функции f в точке a .

Тогда $g(z) = f(z) - h(z)$ имеет устранимую особую точку a . Давайте устраним ее, тогда $g(z)$ голоморфна в точке a . Тогда скорее всего её радиус сходимости $\tilde{R} > R$.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \Rightarrow b_n = o((\tilde{R} - \varepsilon)^{-n})$$

$h(z) = \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_r}{(z-a)^r}$, где r – порядок полюса, у $h(z)$ можно явно выписать коэффициенты (самый быстрорастущий это последний).

$$\frac{1}{(z-a)^r} = \frac{1}{a^r (\frac{z-a}{a})^r} = \frac{(-1)^r}{a^r} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} \left(\frac{z-a}{a}\right)^n$$

Оценим биномиальный коэффициент: $\binom{n+r-1}{r-1} = \frac{(n+r-1)\dots(n+1)}{(r-1)!} \sim \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.

$$\text{Тогда } a_n \sim c_r \cdot \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} \cdot \frac{(-1)^r}{a^{n+r}}$$

Теорема 4.49. Пусть $f \in H(|z| < R)$, где $R > 1$ и $f(1) \neq 0$.

Пусть $\frac{f(z)}{(1-z)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, -1, -2 \dots$

Тогда $b_n \sim f(1) \cdot \binom{n+\alpha-1}{n} \sim f(1) \cdot \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

Доказательство. Возьмём $1 < r < R$ и разложим $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Ряд сходится в точке $z = r \Rightarrow a_n = o(r^{-n})$.

$$\frac{1}{(1-z)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+\alpha-1}{n}}_{=\frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots\alpha}{n!}} z^n.$$

Получаем:

$$\frac{f(z)}{(1-z)^\alpha} = \sum a_n z^n \cdot \sum \binom{n+\alpha-1}{n} z^n$$

$$b_n = a_n \binom{\alpha-1}{0} + a_{n-1} \binom{\alpha}{1} + \dots + a_0 \binom{n+\alpha-1}{n} = \binom{n+\alpha-1}{n} (a_0 + \frac{n}{n+\alpha-1} a_1 + \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} a_2 + \dots + (\dots) \cdot a_n),$$

где все коэффициенты при a_i стремятся к 1.

$$\begin{aligned} \text{Хотим сказать, что } b_n &\sim \binom{n+\alpha-1}{n} \cdot (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \sim \binom{n+\alpha-1}{n} \cdot f(1) = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} f(1) \rightarrow \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot f(1) - \text{последний переход из формулы Эйлера-Гаусса.} \end{aligned}$$

$$\text{Осталось понять, что } \Delta_n = (a_0 + \frac{n}{n+\alpha-1} a_1 + \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} a_2 + \dots + (\dots) \cdot a_n) - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \rightarrow 0.$$

Мы знаем, что $a_n = \mathcal{O}(r^{-n}) \Rightarrow |a_n| \leq \frac{C}{r^n}$.

$$\text{Тогда } |\Delta_n| \leq |a_1| \underbrace{\left| \frac{n}{n+\alpha-1} - 1 \right| + |a_2| \left| \frac{n(n-1)}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)} - 1 \right| + \dots + |a_m| |(\dots) - 1| +}_{\text{конечное число слагаемых} \rightarrow 0} + \left(\frac{C}{r^{m+1}} + \frac{C}{r^{m+2}} + \dots \right)$$

Подберём так m чтобы $\sum \frac{C}{r^{m+i}} \leq \varepsilon$. И тогда всё выполнилось при больших n . \square

Пример. 1. $f(z) = \frac{\sqrt{2-z}}{(1-z)^2}$

Здесь круг сходимости $|z| < 1$, особая точка $z = 1$ – полюс второго порядка.

Главная часть ряда Лорана: $\frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2}$.

$$\text{Здесь } b = \sqrt{2-1} = 1, a = \text{res}_{z=1} = ((1-z)^2 f(z))' \Big|_{z=1} = (\sqrt{2-z})' \Big|_{z=1} = \frac{-1}{2\sqrt{2-z}} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

$g(z) = f(z) - \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z}$ – голоморфна в $z = 1$, тогда $g \in H(|z| < 2)$.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $b_n = o\left(\frac{1}{(2-\varepsilon)^n}\right)$

$$a_n = b_n - \frac{1}{2} + n + 1 = n + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{(2-\varepsilon)^n}\right)$$

2. $f(z) = \frac{e^z}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, круг сходимости $|z| < 1$, но $z = 1$ не полюс, а точка ветвления.

$$g(z) = \frac{e^z}{\sqrt{1-z}} - \frac{e}{\sqrt{1-z}} = \frac{e}{\sqrt{1-z}} (e^{z-1} - 1) = \frac{e}{\sqrt{1-z}} (1-z) \underbrace{\frac{e^{z-1}-1}{1-z}}_{=h(z), \text{ голоморфна в } 1} = e\sqrt{1-z} h(z), \text{ где на}$$

самом деле $h(z) = \frac{1+(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2}+\dots}{1-z} \in H(\mathbb{C})$.

$$g(z) = \sum b_n z^n, \text{ из теоремы имеем } b_n \sim h(1) \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\frac{1}{\sqrt{\pi n} \sqrt{n}}$$

$$e\sqrt{1-z} = e \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

$$\text{Тогда } a_n = e \cdot c_n + b_n = \underbrace{\frac{e \cdot \binom{2n}{n}}{4^n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} + b_n = e \cdot \underbrace{\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n - \text{с одной из прошлой лекции. Тогда } \sqrt{1-z} = \sum \binom{2n}{n} \frac{z^n}{4^n}.$$

$$\text{И тогда } a_n = e \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} + b_n = e \cdot \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Пример. Метод Лапласа

Есть $2k$ -значный номер, интересуемся количеством таких номеров, что сумма первых k знаков равна сумме последних k (счастливые билеты).

Пусть a_k = количество $2k$ значных счастливых билетов.

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \mathcal{A}(z) \mathcal{A}\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}$$

$$\mathcal{A}(z) = (1 + z + z^2 + \dots + z^9)^k = \left(\frac{1-z^{10}}{1-z}\right)^k$$

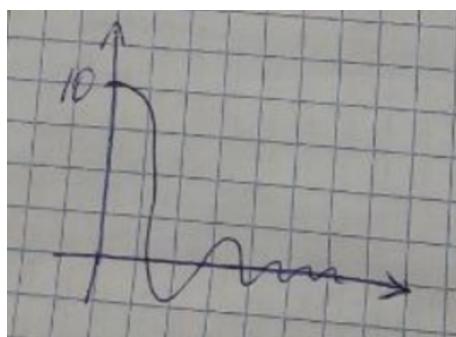
$$\text{Тогда } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{(1-z^{10})(1-z^{-10})}{(1-z)(1-\frac{1}{z})}\right)^k \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(\frac{2-z^{10}-z^{-10}}{2-z-\frac{1}{z}}\right)^k \frac{dz}{z} = (*)$$

Делаем замену: $z = e^{it}$, $dz = i \cdot e^{it} dt$.

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-e^{10it}-e^{-10it}}{2-e^{it}-e^{-it}}\right)^k \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-2\cos(10t)}{2-2\cos t}\right)^k dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\sin^2(5t)}{2\sin^2 \frac{t}{2}}\right)^k dt = \\ &\text{Делаем доп. замену: } s = \frac{t}{2}, \quad 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2 \left(\frac{\sin(10s)}{\sin s}\right)^{2k} ds \quad \underbrace{=} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x}\right)^{2k} dx. \end{aligned}$$

т.е. симметрия отн. $\frac{\pi}{2}$

Можно выловить скорость роста интеграла: поведение определено точкой максимума у $\frac{\sin(10x)}{\sin x}$.



1. В нуле максимум равен 10
2. В окрестности нуля разложим по Тейлору
3. Остальное просто оценим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x}\right)^k dx = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$$

1. Посмотрим на окрестность нуля.

Раскладываем по Тейлору:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(10x)}{\sin x} &= \frac{10x - \frac{(10x)^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)}{x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)} = 10 \cdot \frac{1 - \frac{100x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)} = \\ &= 10(1 - \frac{100}{6}x^2 + \mathcal{O}(x^4))(1 + \frac{x^2}{6} + \mathcal{O}(x^4)) = 10(1 - \frac{33}{2}x^2 + O(x^4)) \end{aligned}$$

Под интегралами у нас это степенная функция, поэтому распишем логарифм от нашего выражения:

$$\ln \frac{\sin(10x)}{\sin x} = \ln \left(10 \left(1 - \frac{33}{2} x^2 + O(x^4) \right) \right)$$

$$\left(\frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} = e^{2k \ln(10(1 - \frac{33}{2} x^2 + O(x^4)))} = 10^{2k} \cdot e^{-33kx^2} \cdot e^{\mathcal{O}(2kx^4)}$$

Подставим это в интеграл с ε :

$$k\varepsilon^4 \rightarrow 0,$$

$$\int_0^\varepsilon 10^{2k} e^{-33kx^2} \underbrace{e^{\mathcal{O}(kx^4)}}_{=e^{\mathcal{O}(k\varepsilon^4)}, \text{ выберем } \varepsilon \text{ так, что } =1+\mathcal{O}(k\varepsilon^4)} dx = 10^{2k} (1 + \mathcal{O}(k\varepsilon^4)) \int_0^\varepsilon e^{-33kx^2} dx = (')$$

Делаем замену: $y = \sqrt{33k}x$.

$$(') = 10^{2k} (1 + \mathcal{O}(k\varepsilon^4)) \int_0^{\varepsilon\sqrt{33k}} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{33k}} dy \sim 10^{2k} \frac{1}{\sqrt{33k}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = (")$$

Хотим, чтобы $\varepsilon\sqrt{33} \rightarrow +\infty$, тогда $(") \rightarrow \int_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Для этого подойдет $\varepsilon = \sqrt{1}k^{\frac{1}{3}}$.

2. Посмотрим на остальное.

$$\int_{\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} dx \leq \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{длина отрезка} \leq \text{этого}} \left(\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{10})} \right)^{2k}$$

если $\frac{\pi}{10}$ не подойдет, то немного подвинуть.

Смотрим на вторую часть:

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{\sin(10x)}{\sin x} \right)^{2k} \underbrace{\leq}_{\text{т.к. функция убывает}} \frac{\pi}{10} \left(\frac{\sin(10\varepsilon)}{\sin \varepsilon} \right)^{2k} \underbrace{=}_{\text{считали в предыдущем пункте}} \frac{\pi}{10} 10^{2k} \underbrace{e^{-33k\varepsilon^2}}_{\text{быстро убывает}} \underbrace{e^{\mathcal{O}(k\varepsilon^4)}}_{\sim 1}$$

Метод работает в случае $\int_a^b (f(x))^n$ и $n \rightarrow \infty$.

5. Ряды Фурье

5.1. Пространства Лебега

Определение 5.1. μ – мера, $p \geq 1$.

$L^p(E, \mu) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ - измеримые, т.ч. } \int_E |f|^p d\mu < \infty\}$ – векторное пр-во.

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Нер-во треугольника – нер-во Минковского: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
2. Неотрицательность: $\|f\|_p \geq 0$.
3. Константа выносится: $\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$.
4. Но в нуле не всегда значение равно нулю: $\|f\|_p = 0 \Rightarrow$ интеграл от неотрицательной функции $|f|^p$ равен нулю $\Rightarrow f = 0$ **почти везде**.

Рассматриваем не функции, а классы эквивалентности с точностью до совпадения почти везде.

Проблема: нет значения функции в точке.

Определение 5.2. Существенный супремум (esssup или rraisup)

a – существенный супремум функции $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

если $a = \inf\{c \in \mathbb{R} : f(x) \leq c \text{ при почти всех } x \in E\}$.

Свойства. 1. $\text{esssup } f \leq \sup f$

2. $f(x) \leq \text{esssup } f$ при почти всех x

Доказательство. $a := \text{esssup } f \implies \exists e_n : \mu e_n = 0$ (т.е. существует мн-во e_n нулевой меры), т.ч. $f(x) \leq a + \frac{1}{n}, \forall x \in E \setminus e_n$

$$e = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n, \mu e = 0 \text{ и } f(x) = a + \frac{1}{n}, \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq a \quad \forall x \in E \setminus e. \quad \square$$

Определение 5.3. $L^\infty(E, \mu) := \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ - измеримые, т.ч. } \text{esssup}_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$ – векторное пр-во.

Заведем норму для данного векторного пр-ва: $\|f\|_\infty := \text{esssup}_{x \in E} |f(x)|$.

1. Константа выносится
2. Нер-во треугольника есть
3. Функция 0 почти везде, но все же не везде

Рассмотрим классы эквивалентности...

Важный частный случай ($X = \mathbb{N}$)

$X = \mathbb{N}$, μ -считающая мера, тогда:

1. $l^p = \{(x_1, x_2, \dots) \text{ - последовательность} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\}$

Норма в данном случае: $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

2. $l^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) : \sup |x_k| < +\infty\}$

Норма в данном случае: $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$

Теорема 5.1. Вложение пространств Лебега

Пусть $\mu E < +\infty$ и $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

Тогда $L^q(E, \mu) \subset L^p(E, \mu)$ и $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot (\mu E)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$

Доказательство. Пусть $q < +\infty$.

Напишем неравенство Гёльдера:

$$\int_E |f|^p \cdot 1 \, d\mu \leq \left(\int_E (|f|^p)^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int 1^{r'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{r'}} = (*)$$

$$\text{Здесь } \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad r = \frac{q}{p} \Rightarrow \frac{1}{r'} = \frac{q-p}{q}.$$

Тогда $(*) = (\|f\|_q)^p \cdot (\mu E)^{\frac{q-p}{q}}$ \Rightarrow извлекаем корень p -ой степени слева и справа $\|f\|_p \leq \|f\|_q (\mu E)^{\frac{q-p}{pq}}$

Пусть $q = +\infty$, тогда $\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\mu \leq \int_E \|f\|_\infty^p \, d\mu = \mu E \|f\|_\infty^p$

Замечание. Для $\mu E = +\infty$ вложений нет

□

Теорема 5.2. $L^p(E, \mu)$ - полное, где $1 \leq p \leq +\infty$

Доказательство. только для $p < +\infty$

Пусть f_n - фундаментальная последовательность функций. Мы знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n \geq N : \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$

Берём $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n_1 = N$ для этого ε , далее берём $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ и $n_2 = N$ для этого ε и так далее.

Получилось, что $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. А ещё $\|f_{n_k} - f_n\| < \frac{1}{2^k}$ при $n \geq n_k$, в частности $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}$ - так строили подпоследовательность.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < 1$.

Заведём $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(t)|$. $S : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $S_n(t)$ - частичная сумма.

$\|S_n\| \leq \|f_{n_1} - f_{n_2}\| + \|f_{n_2} - f_{n_3}\| + \dots + \|f_{n_m} - f_{n_{m+1}}\| < 1$ - норма суммы меньше суммы норм.

$$\|S\|^p = \int_E |S(t)|^p \, dt = \int_E \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(t)|^p \, dt}_{\text{л. Фату}} = \lim \|S_n\|^p \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_E |S(t)|^p \, dt < +\infty \Rightarrow S(t) < +\infty \text{ при почти всех } t.$$

А тогда $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k}(t) + f_{n_{k+1}}(t))$ абсолютно сходится при почти всех $t \Rightarrow$ сходится при почти всех t .

Пусть $S(t)$ - его сумма. Но $f_{n_k}(t)$ - частичная сумма этого ряда. Тогда $\lim f_{n_k}(t) = f(t)$ при почти всех t . Проверим, что $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

$$\text{Возьмём } n \geq n_k, \text{ тогда } \|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| \leq \frac{1}{2^k}$$

$f_{n_k} - f \rightarrow 0$ почти везде, $\lim \int_E |f_{n_k} - f|^p \, d\mu = \int E \lim |f_{n_k} - f|^p \, d\mu$, а под интегралом почти везде 0. Осталось понять, почему есть суммируемая мажорантна.

$f(t) = f_{n_k} + \sum_{j=k}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$. А тогда $|f(t) - f_{n_k}| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq S(t)$. Тогда S^p - суммируемая мажоранта. □

Определение 5.4. (X, ρ) - метрическое пространство и $A \subset X$. A **всюду плотно** в X (или **плотно** в X), если $ClA = X$.

Пример. $X = \mathbb{R}$ и $A = \mathbb{Q}$.

Определение 5.5. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если она измерима и у неё конечное число значений.

Лемма. $1 \leq p < +\infty$, φ ступенчатая $\in L^p(E, \mu)$

Тогда $\mu E\{\varphi \neq 0\} < +\infty$

Доказательство. $|\varphi|$ - рассмотрим положительные значения, их конечное число, значит среди них есть наименьшее. Тогда на множестве $E\{\varphi \neq 0\}$, $|\varphi| \geq m$

Тогда $\int_E |\varphi|^p d\mu = \int_{E\{\varphi \neq 0\}} |\varphi|^p d\mu \geq \int_{E\{\varphi \neq 0\}} m^p d\mu = m^p \mu E\{\varphi \neq 0\}$ \square

Теорема 5.3. $1 \leq p \leq +\infty$

Тогда множество ступенчатых функций из $L^p(E, \mu)$ плотно в $L^p(E, \mu)$.

Доказательство. 1. $p = +\infty$. Возьмём $f \in L^\infty(E, \mu)$, $f \geq 0$. Эта функция ограничена. Тогда существует возрастающая последовательность $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$, таких, что $\varphi_n \rightharpoonup f$ - теорема из теории меры.

Тогда $\|\varphi_n - f\|_\infty = \sup_{t \in E} |f(t) - \varphi_n(t)| \rightarrow 0$ из равномерной сходимости.

Если f произвольная, то $f = f_+ - f_-$.

Здесь $\|\varphi_n - f_+\|_\infty \rightarrow 0$ и $\|\psi_n - f_-\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|(f_+ - f_-) - (\varphi_n - \psi_n)\|_\infty \rightarrow 0$

2. $p < +\infty$. Возьмём $f \in L^p(E, \mu)$, $f \geq 0 \Rightarrow$ существуют ступенчатые $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots$, такие, что $\lim \varphi_n = f$.

$\|f - \varphi_n\|_p^p = \int_E |f(t) - \varphi_n(t)|^p dt \rightarrow \int_E \lim |f(t) - \varphi_n(t)|^p dt = 0$. Опять же нужна суммируемая мажорантна, но она есть, потому что $0 \leq \varphi_n \leq f$. Тогда $|f - \varphi_n|^p \leq f^p$

Для произвольной опять f_+ и f_- \square

Определение 5.6. f - финитная функция, если она тождественно равна нулю вне некоторого компакта.

Пример. индикаторная функция отрезка

Теорема 5.4. $1 \leq p < +\infty$ и $E \in \mathbb{R}^d$ измеримо.

Тогда множество финитных бесконечно дифференцируемых функций плотно в $L^p(E, \lambda)$

Доказательство. Для приближения непрерывными финитными функциями.

f приближается ступенчатыми функциями, поэтому достаточно научиться приближать только их, то есть достаточно научится приближать функции $\mathbf{1}_A$, где A - измеримое и конечной меры.

Рассмотрим $\mathbf{1}_A$, найдётся K - компакт и G - открытое, такие, что $K \subset A \subset G$ и $\lambda(G \setminus K) < \varepsilon$.
 $\varphi(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^d \setminus G)}{d(x, K) + d(x, \mathbb{R}^d \setminus G)}$.

По определению $d(x, B) = \inf_{y \in B} \rho(x, y)$.

$\varphi(x) = 0$, если $x \notin G$ и $\varphi(x) = 1$, если $x \in K$ и в целом $\varphi \in [0, 1]$

Тогда $\|\varphi - \mathbf{1}_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) - \mathbf{1}_A(x)|^p dx = \int_{G \setminus K} \underbrace{|\varphi(x) - \mathbf{1}_A(x)|^p}_{\leq 1} dx \leq \lambda(G \setminus K) < \varepsilon$ \square

Определение 5.7. $h \in \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда f_h - сдвиг f , если $f_h(x) = f(x + h)$

Теорема 5.5. о непрерывности сдвига

1. Если f равномерно непрерывна на \mathbb{R}^d , то $\|f_h - f\|_\infty \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$
2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $1 \leq p < +\infty$, то $\|f_h - f\|_p \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$
3. Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и 2π периодична, то $\|f_h - f\|_\infty \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$

Доказательство. 1. 1 и 3 пункт - определение равномерной непрерывности

$$\|f_h - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x + h) - f(x)|$$

2. Возьмём $\varepsilon > 0$ и g финитную непрерывную функцию, что $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

$$\|f_h - f\|_p \leq \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|g_h - g\|_p.$$

$$\|g_h - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |g_h(x) - g(x)|^p dx = (*). g \text{ нулится вне } B_R(0). \text{ Тогда } (*) = \int_{B_{R+1}(0)} |g(x + h) - g(x)|^p dx \leq \lambda B_{R+1}(0) \cdot \underbrace{\sup_{\|g_h - g\|_\infty \rightarrow 0} |g(x + h) - g(x)|}_{\|g_h - g\|_\infty \rightarrow 0}$$

□