Л Е М М А 3. *Если существует предел*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \overset{\circ}{U}(x_0)\cap X}} f(x)=a \tag{5.56}$$

и функция f определена в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f\left(x_0\right)=a$.

Доказательство. Если функция f непрерывна в точке x_0, т. е. выполняется условие (5.13), то в силу очевидного включения $\overset{\circ}{U}\left(x_0\right)\cap X\subset X$ и того, что из существования предела по множеству следует существование предела и по любому подмножеству, имеем

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \overset{\circ}{U}(x_0)\cap X}} f(x)=f\left(x_0\right). \tag{5.57}$$

Из (5.56) и (5.57) следует, что $f\left(x_0\right)=a$.

Пусть теперь, наоборот, выполняется условие $f\left(x_0\right)=a$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \overset{\circ}{U}(x_0)\cap X}} f(x)\underset{(5.56)}{=}f\left(x_0\right).$$

Отсюда имеем, что для любой окрестности $U\left(f\left(x_0\right)\right)$ точки $f\left(x_0\right)$ существует такая окрестность $U\left(x_0\right)$ точки x_0, что

$$f\left(\overset{\circ}{U}\left(x_0\right)\cap X\right)\subset U\left(f\left(x_0\right)\right). \tag{5.58}$$

Но, очевидно, $f\left(x_0\right)\in U\left(f\left(x_0\right)\right)$, поэтому в левой части включения (5.58) можно проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}\left(x_0\right)$ заменить обычной окрестностью $U\left(x_0\right)$:

$$f\left(U\left(x_0\right)\cap X\right)\subset U\left(f\left(x_0\right)\right).$$

Это и означает, что функция f непрерывна в точке x_0 . □

П р и м е р ы. 1. Функция $f(x)=c$, где $c-$ постоянная, непрерывна на всей числовой прямой.

В самом деле, для любого $x_0\in \boldsymbol{R}$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} c=c=f\left(x_0\right).\square$$

2. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0\neq 0$.

В самом деле,

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=-\frac{\Delta x_0}{\left(x_0+\Delta x\right)x_0},$$