Л Е М М А 3. *Если существует предел*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X}} f(x)=a$$

и функция f определена в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0)=a$.

Доказательство. Если функция f непрерывна в точке x_0, т. е. выполняется условие (5.13), то в силу очевидного включения $\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X\subset X$ и того, что из существования предела по множеству следует существование предела и по любому подмножеству, имеем

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X}} f(x)=f(x_0)\,.$$

Из (5.56) и (5.57) следует, что $f(x_0)=a$. Пусть теперь, наоборот, выполняется условие $f(x_0)=a$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X}} f(x)\underset{(5.56)}{=}f(x_0)\,.$$

Отсюда имеем, что для любой окрестности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$f\left(\overset{\circ}{U}(x_0)\cap X\right)\subset U(f(x_0))\,.$$

Но, очевидно, $f(x_0)\in U(f(x_0))$, поэтому в левой части включения (5.58) можно проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$ заменить обычной окрестностью $U(x_0)$:

$$f(U(x_0)\cap X)\subset U(f(x_0))\,.$$

Это и означает, что функция f непрерывна в точке x_0 . □

П р и м е р ы. 1. Функция $f(x)=c$, где $c-$ постоянная, непрерывна на всей числовой прямой. В самом деле, для любого $x_0\in\boldsymbol{R}$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} c=c=f(x_0)\,.\square$$

2. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x_0\neq 0$. В самом деле,

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=-\frac{\Delta x_0}{(x_0+\Delta x)\,x_0},$$