

Содержание

I	3 семестр. Основы теории групп.	2
1	Основные классы алгебраических систем	2
2	Группа	2
3	Подгруппа	4
4	Отношения эквивалентности и смежные классы и все-все-все	5
5	Циклические группы	9
6	Подстановки	10
7	Прямое произведение	12
8	Справочник.	15
9	Вопросы к коллоквиуму	16

Часть I

3 семестр. Основы теории групп.

1 Основные классы алгебраических систем

Группоид = множество + бинарная операция

Полугруппа = Группоид + свойство ассоциативности $((x * y) * z = x * (y * z))$

Моноид = Полугруппа + нейтральный элемент $((e * x = x * e = x); (0 + x = x + 0 = x))$

2 Группа

Группа = Моноид + существование обратного элемента (противоположный)

Свойства групп:

1. Единственность нейтрального элемента
2. Единственность обратного элемента
3. $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
4. $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}, n \in \mathbb{N}$
5. $x^n * x^m = x^{n+m}, m \in \mathbb{Z}$
6. Уравнение $ax = b$ имеет единственное решение $x = a^{-1}b$ ($xa = b \Rightarrow x = ba^{-1}$)
7. $xy = e \Rightarrow y = x^{-1}$

Коммутативная группа = абелева группа (группа, в которой выполняется свойство коммутативности $\forall x, y \in G \Rightarrow xy = yx$)

Порядок группы $(|G|)$ - число элементов в группе

Порядок элемента $(|x|) = \min\{n \in \mathbb{N} : x^n = e\}$ (т.е. минимальная

натуральная степень, в которую нужно возвести элемент, что бы он превратился в "единицу")

3 Подгруппа

$H \leq G$; $G : H$ является группой относительно той же операции. (Подмножество H группы G называется **подгруппой** этой группы, если оно само является группой относительно той же операции)

Тривиальные подгруппы- это e и G

Если $H \leq G$ и $H \neq G$, то будем писать $H < G$.

Т. о равенстве единичных элементов в группе и подгруппе

$$H < G \Rightarrow e_H = e_G$$

Док-во: $h \in H \rightarrow he_H = h; he_G = h \Rightarrow e_G g^{-1} h e_H = h^{-1} h = e_G e_H \Rightarrow e_H = e_G$

Т. о равенстве обратных элементов $H < G, h \in H \Rightarrow h_H^{-1} = h_G^{-1}$

Критерий подгруппы: $\neg H < G$ и $H < G \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} H \neq \emptyset \\ x \in H \\ y \in H \end{cases}$$

, то $xy \in H$

$\neg G$ -конечная группа

Пусть $H < G \Rightarrow$

$$\begin{cases} H \neq \emptyset \\ x, y \in H, xy \in H \end{cases}$$

$x \in H \Rightarrow x^k \in H, \forall k \in \mathbb{N}$, т.к. $|G| < \infty \Rightarrow \exists l, m : x^l = x^m \Rightarrow x^{l-m} = e \Rightarrow e \in H$

Если G - коммутативная группа, то $xH = Hx$, то $G/H = H \backslash G$. Можем ввести операцию в G/H $(xH)(yH) = (xy)H$

4 Отношения эквивалентности и смежные классы и все-все-все

Отношения на множестве M : $T \leq M * M = \{(a, b) : a, b \in M\}$

aTb -если пара $(a, b) \in T$

Примеры:

1. $T = \emptyset$
2. $T = M * M$
3. $M = R, aTb \Leftrightarrow a \leq b$
4. $M = R, aTb \Leftrightarrow b = a^2$

T называется **отношением эквивалентности**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. aTa (рефлексивность)
2. $aTb \rightarrow bTa$ (симметричность)
3. $aTb, bTc \rightarrow aTc$ (транзитивность)

Будем иметь ввиду вместо $aTb = a \sim b$, $T_a = \{b \in M : a \sim b\}$

Теорема:

1. $a \in T_a$
2. $\bigcup_{a \in M} T_a = M$
3. $T_a \cap T_b \neq \emptyset \rightarrow T_a = T_b$

Итак: M разбито на непересекающиеся подмножества $M \rightarrow M / \sim$ (факторизация)

Пример: $H < G, x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow \exists h \in H : x^{-1}y = h \Leftrightarrow y = xh, h \in H$; таким образом $T_x = \{y : x \sim y\} = \{y : y = xh\} = xH$;

Определение: $xH = \{xh, h \in H\}$

$T_x = xH \rightarrow$ **левым смежным классом** по подгруппе H

Аналогично, если $x \sim y$ ввести по формуле $yx^{-1} \in H \rightarrow T_x = Hx$ -**правый смежный класс**.

$T_a = \{b : a \sim b\}$

Если $(Z, +)$ и $(nZ, +)$, то $a \rightarrow a + nZ$

Вместо $a \rightarrow a + nZ$ будем писать $[a]_n$ или \bar{a}_n или \bar{a} или (like a pro) a
 $Z/\sim = Z/nZ = Z_n$

Кольцо $(A, *, +)$ \oplus -коммутативность \odot -дистрибутивность

Бывают кольца коммутативные ($ab = ba$) и с единицей ($ea = ae = a$)

Подкольцо-это кольцо относительно тех же операций

Поле-коммутативное ассоциативное кольцо с единицей $e \neq 0$. Кроме того, $\forall x \neq 0 \exists x^{-1} (xx^{-1} = x^{-1}x = e)$

$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n \text{ и } [a]_n [b]_n = [ab]_n$$

Пара необходимых теорем о отношениях эквивалентности:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left. \begin{array}{l} a \sim a' \\ b \sim b' \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [a' + b'] = [a + b] \\ [a'b'] = [ab] \end{array} \right. \\ & \blacktriangleleft a' = a + nl; b' = b + nk \\ & a' + b' = a + b + n(l + k) \rightarrow [a' + b'] = [a + b] \\ & a'b' = ab + n(ak + bl + nlk) \rightarrow [a'b'] = [ab] \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$2. \quad H < G, \cdot$$

$$|T_x| = |T_z| = |H|$$

$$\blacktriangleleft xh_1 = xh_2 \rightarrow h_1 = h_2 \blacktriangleright$$

$$H < G \quad x \sim y \quad x^{-1}y \in H \leftrightarrow y \in xH \text{ (Левый смежный класс)}$$

$$yx^{-1} \in H \leftrightarrow y \in Hx \text{ (Правый смежный класс)}$$

Если G -коммутативна, то $xH = Hx$

Множество левых смежных классов обозначается G/H

Множество правых смежных классов обозначается $H \backslash G$

$$|G/H| = |H \backslash G| = \text{индекс подгруппы}$$

Теорема Лагранжа Если $|G| = n < \infty \rightarrow |G| : |H|$, что равносильно определению $|G| = |H| \cdot |G/H|$ где группа G -конечная группа

Следствия из теоремы Лагранжа:

$$1. \quad |G| : |x|$$

$$\blacktriangleleft x \Rightarrow H = \langle x \rangle, |H| = |x| \blacktriangleright$$

$$2. \quad |H| \mid |G|$$

$$3. \quad x \in G \rightarrow |x| \mid |G|$$

4. $|G| = p$ – простое число $\rightarrow G$ циклическая группа, причем если $g \neq e \rightarrow G = \langle g \rangle$

5. $|G| = n$
 $g \in G \rightarrow g^n = e$

Малая теорема Ферма 6. $a^p \equiv a \pmod{p}$

Функция Эйлера 7. Функция Эйлера $(\phi(n))$ -функция, равная количеству натуральных чисел, меньших и взаимно простых с ним.

Т. Вильсона 8. $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p} \leftrightarrow p$ – простое

Пусть $H < G$, где $G = \forall$

Пытаемся ввести операцию $(xH)(yH) = (xy)H$. Когда она корректна?

Когда $\begin{cases} x \sim x' \\ y \sim y' \end{cases} \rightarrow xy \sim x'y' \quad xy \sim x'y' = xh_1yh_2$

$xy = xh_1yh_2h_3 \quad \Big| \cdot x^{-1}$

$y = h_1yh_4$

$e = y^{-1}h_1yh_4$

$y^{-1}h_1y = h_5 \rightarrow \boxed{y^{-1}Hy \leq H \quad \forall y \in G(1)}$

Из (1) $\rightarrow H \leq yHy^{-1} \quad \forall y \rightarrow H \leq y^{-1}Hy \leftrightarrow \boxed{y^{-1}Hy = H \quad \forall y \in G(2)}$ \leftrightarrow

$\boxed{Hy = yH \quad \forall y \in G(3)}$

$H < G$ называется **нормальной**, если выполнено любое из 3 равносильных условий.

В этом случае пишут $H \triangleleft G$

$]H \triangleleft \rightarrow G/H$ -группа относительно $(xH)(yH) = xyH$

Группа G/H называется **фактор-группой** группы G по нормальной подгруппе H .

Гомоморфизм $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ -если $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

Мономорфизм = инъективный гомоморфизм

Эпиморфизм = сюръективный гомоморфизм.

Эндоморфизм - если $G_1 = G_2$

Автоморфизм - изоморфизм+эндоморфизм

$\text{Ker} \phi = \{x \in G_1 : \phi(x) = e_2\} \quad (= \phi^{-1}(e_2))$ -Ядро гомоморфизма

$\text{Im} \phi = \{z \in G_2; \exists x \in G_1 : \phi(x) = z\} = \{\phi(x), x \in G_1\} = \phi(G_1)$ -Образ гомоморфизма

Свойства гомоморфизма:

1. $\phi(e_1) = e_2$ или $e_G \rightarrow e_H$
2. $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}$ или $x \rightarrow y$ то $x^{-1} \rightarrow y^{-1}$
3. $|\phi(x)| \mid |x|$
4. $Im\phi < H$ $Im\phi = \{\phi(x), x \in G\}$
5. $Ker\phi < G$ $Ker\phi = \{\phi^{-1}(e_H)\}$
6. $Ker\phi \triangleleft G$
7. $\phi(x_1) = \phi(x_2) \leftrightarrow x_1 \equiv x_2 (mod Ker\phi)$
8. ϕ – мономорфизм $\leftrightarrow Ker\phi = \{e\}$
9. $\phi : G \rightarrow H, \psi : H \rightarrow K$ – гоморфизм $\rightarrow \psi \cdot \phi : G \rightarrow K$ – гоморфизм
10. $\phi : G \rightarrow H$ – изомрфизм $\rightarrow \phi^{-1}$ – изомрфизм
11. ϕ -изоморфизм, то $|\phi(x)| = |x|$

Док-во 6-го св-ва: $x_1, x_2 \in Ker\phi \rightarrow x_1x_2 \in Ker\phi$
 $\phi(x_1) = e$
 $\phi(x_2) = e$
 $\phi(x_1x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2) = e \cdot e = e$

5 Циклические группы

Циклическая группа G -если $\exists a \in G : G = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$ (можно так же сказать, что циклическая подгруппа состоит из всех степеней элемента)

Циклическая группа называется **конечной**, если $|G| < \infty; |G| = n \Rightarrow G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}, a^n = e$

Циклическая группа называется **бесконечной**, если $|G| = \infty \Rightarrow G = \{e, a, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \dots, a^k, a^{-k}, \dots\}$

Необходимые формулы и утверждения о циклических группах:

$$1. |x^k| = \frac{|x|}{(|x|, k)}$$

$$2. x^n x^m = x^{n+m}; (x^n)^m = x^{nm}; x^0 = e \text{ при } n, m \in \mathbb{Z}$$

$$3. G, x \quad \langle x \rangle = \{x^n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}\} \text{ -циклическая подгруппа группы } G$$

$$\text{Если } |x| = n < \infty \rightarrow \langle x \rangle = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

$$\text{Если } |x| = \infty \rightarrow \langle x \rangle = \{e, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, \dots\}$$

$$\langle x \rangle_n, \text{ т.е. } |\langle x \rangle_n| = |x| = n$$

$$\langle x \rangle_\infty \text{ т.е. } |\langle x \rangle_\infty| = |x| = \infty \text{ См. семинар для св-в (Кострикин)}$$

$$G \text{ -циклическая группа, если } \exists x \in G : G = \langle x \rangle$$

Теоремы о циклических группах:

Теорема. У циклической группы все подгруппы циклические, т.е. G -циклическая группа. ($H < G \Rightarrow H$ -циклическая группа)

Теорема. G -циклическая группа, пусть $|G| = n$ и $n:k \Rightarrow \exists! H < G : |H| = k$

Теорема 1 \mathbb{Z}_n -поле $\leftrightarrow n$ -простое

Теорема 2 \mathbb{Z}_n k -обратим в $\mathbb{Z}_n \leftrightarrow n$ и k -взаимно просты $\{(n, k) = 1\}$

$$\phi : G_1 \rightarrow G_2 \text{ называется изоморфизмом, если } \begin{cases} \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \\ \phi \text{ -биекция} \end{cases}$$

Теорема 3 $\neg G = \langle x \rangle, \cdot$

-Если $|G| = \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}, +$ ($\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$) ($G_1 \cong G_2$), то группы называются изоморфными.

-Если $|G| = n < \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}_n, +$

6 Подстановки

Функция Эйлера $\{\varphi(n)\}$ равна количеству натуральных чисел, меньших чем n и взаимно простых с n .

Теорема Эйлера $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Свойства $\varphi(n)$:

1. $\varphi(p) = p - 1, p - \text{простое}$
2. $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}, p - \text{простое}$
3. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n), \quad (m, n) = 1$

S_n -группа подстановок (так же называют симметричной группой)

$x = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, S_n -мн-во биективных функций $\varphi: X \rightarrow X$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \varphi(4) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

Примеры: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 3, \varphi(4) = 1$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi\phi)(1) = \varphi(\phi(1)) = \varphi(4) = 1$$

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = e$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_n\text{-группа} \quad |S_n| = n!$$

Цикл

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (124)(3) = (3)(124)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34) = (34)(12)$$

Независимые циклы-называются такие циклы, у которых числа входят в один цикл, но не входят во второй цикл.

Циклом длины два называется **транспозиция**.

Теоремы:

1. Независимые циклы коммутируют друг с другом (или α, β -независимые циклы $\rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$)
2. Если $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ -цикл длины $k \rightarrow |\alpha| = k$
3. Пусть $\varphi = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ - произведение независимых циклов.
 $\alpha_1 = (i_1, i_2, \dots, i_k)$
 $\alpha_2 = (j_1, j_2, \dots, j_l) \rightarrow |\varphi| = \text{НОК}(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_m|)$

Теорема 4 $|G| = \text{НОК}(k_1, k_2, \dots, k_m)$

Инверсия ij -если $i > j$, но i левее j

Подстановка $G = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ называется четной, если сумма инверсий в верхней и нижней строках четная. Иначе- нечетная.

Знак подстановки $\text{sgn}G = (-1)^{[l_1 l_2 \dots l_n] + [k_1 k_2 \dots k_n]}$

G -четная, если $\text{sgn}G = 1$

-нечетная, если $\text{sgn}G = -1$

$|\alpha| = k \rightarrow \text{sgn}\alpha = (-1)^{k-1} \quad (= (-1)^{k+1})$

$\alpha = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$ -нечет

Теорема 5 $G = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ -произведение независимых циклов.
 $\text{sgn}G = (-1)^{n-m} \quad (= (-1)^{n+m})$

7 Прямое произведение

Определение 1 *Прямое произведение групп*

G_1, G_2, \dots, G_n – группы (\cdot) $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) : g_i \in G_i, i = 1, \dots, n\}$

Введем операцию $(g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot (g'_1, g'_2, \dots, g'_n) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2, \dots, g_n g'_n)$

Внешнее прямое произведение: $G = G_1 \times G_2 \times \dots$ (\cdot) $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus \dots \oplus G_n$ $(+)$

Свойства внешнего прямого произведения:

1. G -группа
2. $\tilde{G}_i = \{(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \in G\} = \{e_1\} \times \{e_2\} \times \dots \times \{e_{i-1}\} \times G_i \times \{e_{i+1}\} \times \dots \times \{e_n\}$
3. $\tilde{G}_1 \cong G_i$ $(\phi_i : G_i \rightarrow \tilde{G}_i \phi_i(g_i)) = (e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$ – Изоморфизм
4. $\tilde{G}_i \triangleleft G$
5. $\forall g \in G \exists \tilde{g}_1 \in \tilde{G}_1, \dots, \tilde{g}_n \in \tilde{G}_n : g = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \tilde{g}_3 \dots \tilde{g}_n$
6. $\forall g \in G \exists! \tilde{g}_1 \in \tilde{G}_1, \dots, \tilde{g}_n \in \tilde{G}_n : g = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \tilde{g}_3 \dots \tilde{g}_n$
7. $\tilde{G}_i \cap \tilde{G}_j = \{e\}$ $(i \neq j)$
8. $\tilde{g}_1 \in \tilde{G}_i, \tilde{g}_j \in \tilde{G}_j \rightarrow \tilde{g}_i \tilde{g}_j \rightarrow \tilde{g}_j \tilde{g}_i$
9. $|G| = |G_1| |G_2| \dots |G_n|$
10. $|(g_1, g_2, \dots, g_n)| = \text{НОК}(|g_1|, |g_2|, \dots, |g_n|)$
11. $[G_1 = \langle g_1 \rangle_{k_1}, \dots, G_n = \langle g_n \rangle_{k_n}]$ G -циклическая группа \Leftrightarrow uk_1, \dots, k_n нет общих делителей \triangleleft на дом \triangleright
Пример: $C_2 \times C_3 \cong C_6$ (\cdot)
 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ $(+)$

Теорема 6 $G, G_1, G_2, \dots, G_n < G$

1. $(6 \Rightarrow 5)$

2. $6 \Rightarrow 7$, то если $\forall g \in G \exists! g_1 \in G_1, \dots, g_n \in G_n : g = g_1 g_2 \dots g_n \Rightarrow G_i \cap G_j = \{e\} \quad (i \neq j)$
 \triangleleft От противного. Пусть $g \in G_i \cap G_j \Rightarrow g = ee \dots g \dots e \dots e = ee \dots e \dots g \dots e \Rightarrow g = e \Rightarrow G_i \cap G_j = \{e\} \triangleright$
3. $\frac{4}{7} \Rightarrow 8$ т.е. если $G_i \triangleleft G_j \quad G_j \triangleleft G_i, G_i \cap G_j = \{e\} \Rightarrow g_i g_j = g_j g_i (\Leftrightarrow g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = e)$

Определение 2 Внутренне прямое произведение:

$G, \quad G_i, \dots, G_n < G$

G – внутренне прямое произведение этих подгрупп, если

1. $\forall g \in G \exists! g_1, \dots, g_n : g = g_1 g_2 \dots g_n$
2. $G_i \triangleleft G_j; i = 1, \dots, n$

Теорема G изоморфно $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$

(т.е. внутреннее прямое произведение изоморфно внешнему)

$\triangleleft \phi : G_1 \times \dots \times G_n \rightarrow G$

$\phi((g_1, g_2, \dots, g_n)) = g_1 g_2 \dots g_n$

ϕ -гомоморфизм $\phi((g_1, \dots, g_n)(h_1, \dots, h_n)) = \phi(g_1 h_1, g_2 h_2, \dots, g_n h_n) =$

$g_1 h_1 g_2 h_2 \dots g_n h_n$

$\phi\phi((g_1, \dots, g_n)(h_1, \dots, h_n)) = g_1 g_2 \dots g_n h_1 h_2 \dots h_n$ Сие выражение выходит из предыдущей строки благодаря свойству 8

ϕ -эпиморфизм. Пусть $g \in G \rightarrow \exists g_1, \dots, g_n : g = g_1 \dots g_n \rightarrow \phi((g_1, \dots, g_n)) = g_1 \dots g_n = g$

ϕ -мономорфизм $\text{Ker} \phi = \{((g_1, \dots, g_n) : g_1 g_2 \dots g_n = e)\} \rightarrow g_1 = g_2 = \dots = g_n = e$

Теорема 7 $** \begin{cases} \forall g! = g_1 \dots g_n & (1) \\ g_i g_j = g_j g_i & (2) \end{cases} \Leftrightarrow * \begin{cases} \forall g! = g_1 \dots g_n & (1) \\ G_i \triangleleft G & (2) \end{cases}$

где g_i -элемент i -ой группы, g_j -элемент j -ой группы

$\triangleleft \rightarrow (1) ** \rightarrow (1) *$

$(1) ** \rightarrow G_i \cap G_j = \{e\} \quad] g \in G_i \cap G_j \rightarrow g = e \cdot e \dots e \cdot g \cdot e \dots e = e \dots e g e \dots e \rightarrow g = e$

$g g_i g^{-1} = g_1' g_2' \dots g_n' g_i' (g_n')^{-1} \dots (g_1')^{-1} = g_i' g_i (g_i')^{-1} \in G_i \rightarrow G_i \triangleleft G \triangleright$

$$\triangleleft \leftarrow (1)* \rightarrow (1)** \rightarrow G_i \cap G_j = \{e\} \quad G_i \triangleleft G$$

Требуется доказать: $g_i g_j = g_j g_i$, т.е. $g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = e$

G-внутреннее прямое произведение, если выполнена (*) (\Leftrightarrow Выполнена (**))

Примеры:

1. $G = \mathbb{Z}, +$ не раскладывается в внутренние прямые суммы
 $G_n = n\mathbb{Z}$ -других подгрупп нет На дом: продумать и записать доказательство.

$$nm \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \rightarrow n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \neq \{0\}$$

2. $G = \mathbb{C}^*, \cdot$

$$G_1 = \mathbb{R}_{>0} = \{x > 0, x \in \mathbb{R}\}$$

$$G_2 = U = \mathbb{T} = \{z : |z| = 1\} = \{z = e^{i\phi}\}$$

$$G = G_1 \times G_2? \quad G\text{-коммутативна}$$

$$z \in G \rightarrow z = |z|e^{i\phi} \quad (|z| > 0 \quad e^{i\phi \in U})$$

$$|z = x_1 u_1 = x_2 u_2 \rightarrow? \begin{cases} x_1 = x_2 \\ u_2 = u_2 \end{cases} \quad x_1 x_2^{-1} = u_1^{-1} u_2 \rightarrow \begin{cases} x_1 x_2^{-1} = 1 \\ u_1^{-1} u_2 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ u_2 = u_2 \end{cases}$$

Теорема 8 $(G_1 \times G_2)/G_1 \cong G_2$

$$\triangleleft \phi : G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$$

$$\phi((g_1 g_2)) = g_2$$

$$\phi\text{-гомоморфизм?} \quad \phi((g_1, g_2)(g_1', g_2')) = \phi((g_1 g_1', g_2 g_2')) = g_2 g_2'$$

$$\phi((g_1, g_2)) \cdot \phi((g_1', g_2')) = g_2 g_2' \rightarrow \phi((g_1, g_2)(g_1', g_2'))$$

$$\text{Ker } \phi = \{(g_1, g_2) : \phi(g_1, g_2) = e\} \rightarrow \text{Ker } \phi = \{(g_1, e)\} = G_1$$

$$\text{Im } \phi = \{\phi((g_1, g_2))\} = \{g_2\} = G_2 \rightarrow G_1 \times G_2 / G_1 \cong G_2$$

Следствия. Если $G_1 \triangleleft G, G/G_1 \not\cong G_2 \rightarrow G \not\cong G_1 \times G_2$

ACHTUNG $G/G_1 \cong G_2 \not\rightarrow G = G_1 \times G_2$

$$\text{Пример } C_4 = \{e, a, a^2, a^3\} \quad C_2 = \{e, a^2\} \triangleleft C_4$$

$$C_4/C_2 = C_2, \text{ но } C_4 \neq C_2 \times C_2$$

т. Кэлли \forall конечная группа $G, |G| = n$ изоморфна подгруппе S_n

$$\triangleleft |G| = n \Rightarrow G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$$

$S(G)$ -все биективные функции на множестве $G \rightarrow S(G) = S_n \quad \phi : G \rightarrow$

$S_n \quad \phi_g : G \rightarrow G \quad g\text{-фиксированный элемент} \in G$

$$\phi_g(x) = g\lambda \quad \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ \dots & & & \\ g_i g_1 & g_i g_2 & \dots & g_i g_n \end{pmatrix}$$

8 Справочник.

9 Вопросы к коллоквиуму

1. Группоид, Полугруппа, Моноид, Группа.
2. Свойства групп
3. Порядок группы ($|G|$), Порядок элемента ($|x|$)
4. Циклическая группа, Конечность и Бесконечность циклической группы.
5. Необходимые формулы и утверждения о циклической группе
6. Теоремы и циклической группе
7. Определение подгруппы, теоремы о равенствах единичных элементов и обратных элементов, критерий подгруппы
8. Отношение эквивалентности
9. Левый и Правый смежные классы и их Эквивалентность
10. Теорема Лагранжа
11. Следствия из теоремы Лагранжа (в том числе Малая теорема Ферма, функция Эйлера, т. Вильсона)
12. Нормальность группы, фактор-группа
13. Гомоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм, эндоморфизм, автоморфизм, ядро и образ гомоморфизма.
14. Свойства гомоморфизма
15. Внешнее прямое произведение групп
16. Свойства внешнего произведения групп
17. Внутреннее прямое произведение групп
18. Свойства внутреннего произведения групп
19. т. Кэли

- 20. Изоморфизм внутреннего и внешнего произведений
- 21. Формула Эйлера, т. Эйлера, свойства ф. Эйлера, группа подстановок
- 22. Цикл, независимые циклы, транспозиция
- 23. Теоремы о циклах