$\phi : G_1 \to G_2$ называется изоморфизмом, если $\begin{cases} \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \\ \phi\text{-биекция} \end{cases}$

Теорема 1 $\urcorner G = < x >, \cdot$
-Если $|G| = \infty \to G \cong \mathbb{Z}, + \quad (\mathbb{Z} = < 1 >)(G_1 \cong G_2)$*, то группы называются изоморфными.*
-Если $|G| = n < \infty \to G \cong \mathbb{Z}_n, +$

Повторение подстановок.

Теорема 2 $|G| = HOK(k_1, k_2, \dots, k_m)$

Инверсия ij-если $i > j$, но i левее j

Подстановка $G = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ называется четной, если сумма инверсий в верхней и нижней строках четная. Иначе- нечетная.

Знак подстановки $sgnG = (-1)^{[l_1 l_2 \dots l_n] + [k_1 k_2 \dots k_n]}$

G-четная, если$sgnG = 1$

-нечетная, если$sgnG = -1$

$|\alpha| = k \to sgn\alpha = (-1)^{k-1} \quad (= (-1)^{k+1})$

$\alpha = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$-нечет

Теорема 3 $G = \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$*-произведение независимых циклов.*
$sgnG = (-1)^{n-m} \quad (= (-1)^{n+m})$

Возвращение к классам смежности.

$H < G \quad x \sim y \quad x^{-1} y \in H \leftrightarrow y \in xH$(Левый смежный класс)

$yx^{-1} \in H \leftrightarrow y \in Hx$(Правый смежный класс)

Если G-коммутативна, то $xH = Hx$

Множество левых смежных классов обозначается $_G\diagup^H$

Множество правых смежных классов обозначается $_H\diagdown^G$

12 октября

$|_G\diagup^H| = |_H\diagdown^G|$ =индекс подгруппы

Теорема 4 *Т. Лагранжа* $|G| = |H| \cdot |_G\diagup^H|$
Группа G*-конечная группа*

Следствие из Т4 1 $|H| \Big| |G|$

Следствие из Т4 2 $x \in G \to |x| \Big| |G|$

Следствие из Т4 3 $|G| = p-$*простое число* $\to G$*циклическая группа, причем если* $g \neq e \to G =< g >$

Следствие из Т4 4 $|G| = n$
$g \in G \to g^n = e$

Следствие из Т4 5 (Малая теорема Ферма) $a^p \equiv a(mod\, p)$

Следствие из Т4 6 (Функция Эйлера $(\phi(n))$**)** *Функция Эйлера-функция, равная количеству натуральных чисел, меньших и взаимно простых с ним.*

Теорема 5 (Теорема Эйлера) $a^{\phi(n)} \equiv 1(mod\, n)$

Свойство $\phi(n)$ **1** $\phi(p) = p - 1, p -$ *простое*

Свойство $\phi(n)$ **2** $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}, p -$ *простое*

Свойство $\phi(n)$ **3** $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n), \qquad (m, n) = 1$

Следствие из Т4 7 (Т. Вильсона) $(p-1)! + 1 \vdots p \leftrightarrow p -$ *простое*

19 октября

1. Если G- коммутативная группа, то $xH = Hx$, то $G/H = H\backslash G$. Можем ввести операцию в $G/H \qquad (xH)(yH) = (xy)H$

2. Пусть $H < G$, где $G - \forall$

   Пытаемся ввести операцию $(xH)(yH) = (xy)H$. Когда она корректна?

   Когда $\begin{cases} x \sim x' \\ y \sim y' \end{cases} \to xy \sim x'y'$ $xy \sim x'y' = xh_1yh_2$
   $xy = xh_1yh_2h_3 \qquad \Big| \cdot x^{-1}$
   $y = h_1yh_4$
   $e = y^{-1}h_1yh_4$
   $y^{-1}h_1y = h_5 \to \boxed{y^{-1}Hy \leq H \quad \forall y \in G(1)}$
   Из (1) $\to H \leq yHy^1 \quad \forall y \to H \leq y^{-1}Hy \leftrightarrow \boxed{y^{-1}Hy = H \quad \forall y \in G(2)} \leftrightarrow$
   $\boxed{Hy = yH \quad \forall y \in G(3)}$

Определение 1 *$H < G$ называется нормальной, если выполнено любое из 3 равносильных условий.*
В этом случае пишут $H \lhd G$

Теорема 6 *$\rceil H \lhd \to G/H$-группа относительно $(xH)(yH) = xyH$*

Группа G/H называется фактор-группой группы G по нормальной подгруппе H.

Гомоморфизм $\phi : G_1 \to G_2$ -если $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

Мономорфизм = инъективный гоморфизм

Эпиморфизм = сюръективный гомомрфизм.

Эндоморфизм - если $G_1 = G_2$

Автоморфизм - изоморфизм+эндоморфизм

$Ker\phi = \{x \in G_1 : \phi(x) = e_2\} \qquad (= \phi^{-1}(e_2))$ -Ядро гомоморфизма

$Im\phi = \{z \in G_2; \exists x \in G_1 : \phi(x) = z\} = \{\phi(x), x \in G_1\} = \phi(G_1)$-Образ гоморфизма

Теорема 7

1. $\phi(e_1) = e_2$

2. $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}$

3. $|\phi(x)| \,\big|\, |x|$

4. ϕ-изоморфизм, то $|\phi(x)| = |x|$

26.10

Свойства гомоморфизма:

1. $\phi(e_1) = e_2 \qquad$ или $e_G \to e_H$
2. $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1} \qquad$ или $x \to y$ то $x^{-1} \to y^{-1}$
3. $|\phi(x)| \,\big|\, |x|$
4. $Im\phi < H \qquad Im\phi = \{\phi(x), x \in G\}$
5. $Ker\phi < G \qquad Ker\phi = \{\phi^{-1}(e_H)\}$
6. $Ker\phi \lhd G$
7. $\phi(x_1) = \phi(x_2) \leftrightarrow x_1 \equiv x_2 (mod\, Ker\phi)$

8. ϕ − мономорфизм $\leftrightarrow Ker\phi = \{e\}$

9. $\phi : G \to H, \psi : H \to K$ − гоморфизм $\to \psi \cdot \phi : G \to K$ − гоморфизм

10. $\phi : G \to H$ − изомрфизм $\to \phi^{-1}$ − изомрфизм

11. ϕ-изоморфизм, то $|\phi(x)| = |x|$

Док-во 6-го св-ва:$\rceil x_1, x_2 \in Ker\phi \to x_1 x_2 \in Ker\phi$
$\phi(x_1) = e$
$\phi(x_2) = e$
$\phi(x_1 x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2) = e \cdot e = e$
Док-во ?-го св-ва:$\phi(e_G) = e_H \to e_G \in Ker\phi$
$\rceil x \in Ker\phi \to x^{-1} \in Ker\phi$
$\phi(x) = e$
$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = e^{-1} = e \to Ker\phi < G$
$\rceil k \in Ker\phi \to \phi(x^{-1}kx) = \phi(x^{-1})\phi(k)\phi(x) = \phi(x)^{-1}e\phi(x) = e \to$
$x^{-1}kx \in Ker\phi$

Определение 2 *Прямое произведение групп*
$G_1, G_2, \ldots, G_n$ − группы $(\cdot)$ $\quad G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n = \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) : g_i \in G_i, i = 1, \ldots, n\}$
Введем операцию $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \cdot (g'_1, g'_2, \ldots, g'_n) = (g_1 g'_1, g_2, g'_2, \ldots, g_n g'_n)$

Теорема 8 (G-группа)

Св-ва прямого произведения:

1. $\tilde{G}_1 = \{(g_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)\}$−подгруппа, причем $\tilde{G}_1 \equiv G_1$TO BE CONTUNIED
   Аналогично $G\tilde{G}_2 = \{(e_1, g_2, e_3, \ldots, e_n)\} \equiv G_2, \ldots, \tilde{G}_2 \equiv G_n$

2. $\rceil |G| = m_1, \ldots \qquad |G_n| = m_n \to |G| = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$

3. $\tilde{G}_i \lhd G$
   $(g_1, g_2, \ldots, g_n)^{-1}(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g'_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(g_1, g_2, \ldots, g_n) =$
   $(g_1^{-1}e_1 g_1, g_2^{-1}e_2 g_2, \ldots, g_{i-1}^{-1}e_{i-1}g_{i-1}, g_i^{-1}e_i g_i, g_{i+1}^{-1}e_{i+1}g_{i+1}, \ldots, g_n^{-1}e_n, g_n)$
   $\in \tilde{G}_1 \to \tilde{G}_i \lhd G$

4. $\rceil |g| = k_i \to |(g_1, g_2, \ldots, g_n)| = \text{НОК}(|g_1|, |g_2|, \ldots, |g_n|)$

5. Если $|g_1|, |g_2|, \ldots, |g_n|$−нет общих делителей, то$|(g_1 g_2 \ldots g_n)| = |g_1||g_2| \ldots |g_n|$

6. $\rceil G_i =< g >_{k_i}$ и у $|g_1|, \dots, |g_n|$нет общих делителей $\to G =< (g_1, g_2, \dots, g_n) >$

2.11 Внешнее прямое произведение

Внешнее прямое произведение: $G = G_1 \times G_2 \times \dots$ $(\cdot)$ $\quad G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus \dots \oplus G_n$ $(+)$

Св-ва:

1. G-группа
2. $\tilde{G}_i = \{(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \dots, e_n) < G\} \qquad = \{e_1\} \times \{e_2\} \times \dots \times \{e_{i-1}\} \times G_i \times \{e_{i+1}\} \dots \{e_n\}$
3. $\tilde{G}_1 \cong G_i \quad (\phi_i : G_i \to \tilde{G}_i \ \phi_i(g_i)) = (e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \dots e_n)$ – Изоморфизм
4. $\tilde{G}_i \lhd G$
5. $\forall g \in G \, \exists \tilde{g}_1 \in \tilde{G}_1, \dots, \ \tilde{g}_n \in \tilde{G}_n : g = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \tilde{g}_3 \dots \tilde{g}_n$
6. $\forall g \in G \exists! \tilde{g}_1 \in \tilde{G}_1, \dots, \ \tilde{g}_n \in \tilde{G}_n : g = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \tilde{g}_3 \dots \tilde{g}_n$
7. $\tilde{G}_i \cap \tilde{G}_j = \{e\} \quad (i \neq j)$
8. $\tilde{g}_1 \in \tilde{G}_i, \tilde{g}_j \in \tilde{G}_j \to \tilde{g}_i \tilde{g}_j \to \tilde{g}_j \tilde{g}_i$
   $\lhd \ \tilde{g}_i \tilde{g}_j = (e_1, \dots, g_i, \dots, e_n)(e_1, \dots, g_j)$оно было
9. $|G| = |G_1||G_2| \dots |G_n|$
10. $|(g_1, g_2, \dots, g_n)| = \text{НОК}(|g_1|, |g_2|, \dots, |g_n|)$
11. $\rceil G_1 =< g_1 >_{k_1}, \dots, G_n =< g_n >_{k_n}$ $\qquad$ G-циклическая группа $\leftrightarrow$ у$k_1, \dots, k_n$нет общих делителей $\quad \lhd$ на дом$\rhd$
    Пример: $C_2 \times C_3 \cong C_6 \, (\cdot)$
    $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6 \, (+)$

Теорема 9 G, $G_1, G_2, \dots, G_n < G$

1. $(6 \to 5)$
2. $6 \to 7,$то если$\forall g \in G \exists! g_1 \in G_1, \dots, g_n \in G_n : g = g_1 g_2 \dots g_n \to G_i \cap G_j = \{e\} \quad (i \neq j)$
   $\lhd$ От противного. Пусть $g \in G_i \cap G_j \to g = ee \dots g \dots e \dots e = ee \dots e \dots g \dots e \to g = e \to G_i \cap G_j = \{e\} \rhd$

3. $\left.\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\right\} \to 8$ т.е. если $G_i \lhd G_j \quad G_j \lhd G_i, G_i \cap G_j = \{e\} \to g_i g_j = g_j g_i (\leftrightarrow g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = e)$

Определение 3 *Внутренне прямое произведение*
$G, \quad G_i, \ldots, G_n < G$
G *– внутренне прямое произведение этих подгрупп*

1. $\forall g \in G \exists! g_1, \ldots, g_n : g = g_1 g_2 \ldots g_n$
2. $G_i \lhd G_i; i = 1, \ldots n$

Теорема 10 *G изоморфно $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$(т.е. внутренне прямое произведние изоморфно в*

$\lhd \phi : G_1 \times \cdots \times G_n \to G$
$\phi((g_1, g_2, \ldots, g_n)) = g_1 g_2 \ldots g_n$
ϕ-гомоморфизм $?\phi((g_1 \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n) = \phi(g_1 h_1, g_2 h_2, \ldots, g_n h_n) = g_1 h_1 g_2 h_2 \ldots g_n h_n$
$\phi\phi((g_1 \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n) = g_1 g_2 \ldots g_n h_1 h_2 \ldots h_n$Сие выражение выходит из предыдущей строки благодаря свойству 8
ϕ-эпиморфизм. ПУсть$g \in G \to \exists g_1, \ldots g_n : g = g_1 \ldots g_n \to \phi((g_1, \ldots, g_n)) = g_1 \ldots g_n = g$
ϕ-мономорфизм $\quad Ker\phi = \{((g_1, \ldots, g_n) : g_1 g_2 \ldots g_n = e)\} \to g_1 = g_2 = \cdots = g_n = e$

9.10 Продолжение прямого произведения групп

$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$-внешнее прямое произведение групп

1. G – это группа
2. $\tilde{G}_i \lhd G$
3. $\tilde{g}_i \tilde{g}_j = \tilde{g}_j \tilde{g}_i$
4. $\forall g = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \ldots \tilde{g}_n$
5. $\forall g! = \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \ldots \tilde{g}_n$
6. $\tilde{G}_i \cap \tilde{G}_j = \{e\} \quad (i \neq j)$
7. $|G| < \infty \to |G| = |G_1||G_2| \ldots |G_n|$

Внутреннее прямое произведение $G, G_1, \ldots, G_n < G$

Теорема 11 $** \begin{cases} \forall g! = g_1 \ldots g_n & (1) \\ g_i g_j = g_j g_i & (2) \end{cases} \leftrightarrow * \begin{cases} \forall g! = g_1 \ldots g_n & (1) \\ G_i \lhd G & (2) \end{cases}$
гдеg_i-элемент i-ой группы, аg_j-элемент j-ой группы

$\lhd \to (1) ** \to (1) *$
$(1) ** \to G_i \cap G_j = \{e\} \qquad \rceil g \in G_i \cap G_j \to g = e \cdot e \ldots e \cdot g \cdot e \ldots e = e \ldots ege \ldots e \to g = e$
$g g_i g^{-1} = g_1‘ g_2‘ \ldots g_n‘ g_i‘ (g_n‘)^{-1} \ldots (g_1‘)^{-1} = g_i‘ g_i (g_1‘)^{-1} \in G_i \to G_i \lhd G \rhd$
$\lhd \leftarrow (1)* \to (1) ** \to G_i \cap G_j = \{e\} \qquad G_i \lhd G$
Требуется доказать:$g_i g_j = g_j g_i$, т.е.$g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = e$

G-внутреннее прямое произведение, если выполнена (*) ($\leftrightarrow$ Выполнена (**))

Примеры:

1. $G = \mathbb{Z}, +$ не раскладывается в внутренние прямые суммы
   $G_n = n\mathbb{Z}$-других подгупп нет На дом: продумать и записать доказательство.
   $nm \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \to n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \neq \{0\}$

2. $G = \mathbb{C}^*, \cdot$
   $G_1 = \mathbb{R}_{>0} = \{x > 0, x \in R\}$
   $G_2 = U = \mathbb{T} = \{z : |z| = 1\} = \{z = e^{i\phi}\}$
   $G = G_1 \times G_2$? G-коммутативна
   $z \in G \to z = |z| e^{i\phi} \qquad (|z| > 0 \quad e^{i\phi \in U})$
   $\rceil z = x_1 u_1 = x_2 u_2 \to ? \begin{cases} x_1 = x_2 \\ u_2 = u_2 \end{cases} \qquad x_1 x_2^{-1} = u_1^{-1} u_2 \to \begin{cases} x_1 x_2^{-1} = 1 \\ u_1^{-1} u_2 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_2 \\ u_2 = u_2 \end{cases}$

Теорема 12 $(G_1 \times G_2)/G_1 \cong G_2$

$\lhd \quad \phi : G_1 \times G_2 \to G_2$
$\phi((g_1 g_2)) = g_2$
ϕ-гомоморфизм ? $\quad \phi((g_1, g_2)(g_1‘, g_2‘)) = \phi((g_1 g_1‘, g_2 g_2‘)) = g_2 g_2‘$
$\phi((g_1, g_2)) \cdot \phi((g_1‘, g_2‘)) = g_2 g_2‘ \to \phi((g_1, g_2)(g_1‘, g_2‘)$
$Ker\phi = \{(g_1, g_2) : \phi(g_1, g_2) = e\} \to Ker\phi = \{(g_1, e)\} = G_1$

$Im\phi = \{\phi((g_1, g_2))\} = \{g_2\} = G_2 \to G_1 \times G_2 / G_1 \cong G_2$
Следствия. Если $G_1 \lhd G, G/G_1 \ncong G_2 \to G \ncong G_1 \times G_2$

ACHTUNG $G/G_1 \cong G_2 \not\to G = G_1 \times G_2$

Пример $C_4 = \{e, a, a^2, a^3\} \qquad C_2 = \{e, a^2\} \lhd C_4$
$C_4/C_2 = C_2 \qquad$,но $C_4 \neq C_2 \times C_2$

Теорема 13 (т. Кэлли) $\forall$ *конечная группа* $G, |G| = n$ *изоморфна подгруппе* S_n

$\lhd |G| = n \to G = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n\}$
$S(G)$-все биектифные функции на множестве G $\to S(G) = S_n \quad \phi : G \to S_n \qquad \phi_g = G \to G \quad g$-фиксированный элемент $\in G \quad \phi_g(x) = g\lambda \begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ \dots & & & \\ g_i g_1 & g_i g_2 & \dots & g_i g_n \end{Bmatrix}$