1 07.09

Группоид= мн-во + бинарная операция

Полугруппа= Группоид+св-во ассицоативности $((x*y)*z = x*(y*z))$

Моноид = Полугруппа + неутральный элемент $((e * x = x * e = x); (0 + x = x + 0 = x))$

Группа = Моноид + каждый элемент имеет обратный (противоположный) $((x * x^{-1} = x^{-1} * x = e); (x + (-x) = (-x) + x = 0))$

Простейшие теоремы:

1. Единственность нейтрального элемента
2. Единственность обратного элемента
3. $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
4. $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}, n \in \mathbb{N}$
5. $x^n * x^m = x^{n+m} n, m \in \mathbb{Z}$

2 14.09

Дополнительные свойства $\mathbb{G}$

1. Уравнение $ax = b$ имеет единственное решение $x = a^{-1}b$ $(xa = b \to x = ba^{-1})$
2. $xy = e \to y = x^{-1}$

Коммутативная группа = абелева группа (группа, в которой выполняется свойство коммутативности $\forall x, y \in \mathbb{G} \to xy = yx$)

Порядок группы $(|\mathbb{G}|)$ -число элементов в группе

Порядок элемента $(|\mathbb{X}|) = min\{n \in \mathbb{N} : x^n = e\}$ (т.е. минимальная натуральная степень, в которую нужно возвести элемент, что бы он превратился в "единицу")

Циклическая группа $\mathbb{G}$ -если $\exists a \in \mathbb{G} : \mathbb{G} = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$ (можно так же сказать, что циклическая подгруппа состоит из всех степеней элемента)

Циклическая группа называется конечной, если $|\mathbb{G}| < \infty; |\mathbb{G}| = n \to \mathbb{G} = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}, a^n = e$

Циклическая группа называется бесконечной, если $|\mathbb{G}| = \infty \to \mathbb{G} = \{e, a, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \dots, a^k, a^{-k}, \dots\}$

$\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$; $\mathbb{G} : \mathbb{H}$ является группой относительно той же операции. (Подмножество H группы G называется подгруппой этой группы, если оно само является группой относительно той же операции)

Тривиальные подгруппы- это e и $\mathbb{G}$

Если $\mathbb{H} \leq \mathbb{G}$ и $\mathbb{H} \neq \mathbb{G}$, то будем писать $\mathbb{H} < \mathbb{G}$.

T1. $H < G \to e_H = e_G$

Док-во: $h \in \mathbb{H} \to he_H = h; he_G = h \to e_G g^{-1} he_H = h^{-1}h = e_G e_H \to e_H = e_G$

T2. $H < G, h \in H \to h_H^{-1} = h_G^{-1}$

Критерий подгруппы: $\urcorner H < G$ и $H < G \leftrightarrow$

$$\begin{cases} H \neq \varnothing \\ x \in H \\ y \in H \end{cases}$$

, то $xy = H$

$\urcorner G$ -конечная группа

Пусть $H < G \to$

$$\begin{cases} H \neq \varnothing \\ x, y \in H, xy \in H \end{cases}$$

$x \in H \to x^k < H, \forall k \in N$, т.к. $|G| < \infty \to El, m : x^l = x^m \to x^{l-m} \to= e \to e \in H$

Задачи

1.

Отношения на мн-ве M: $T \leq M * M = \{(a, b) : a, b \in M\}$

aTb-если $(a, b) \in T$

Примеры:

1. $T = \varnothing$
2. $T = M * M$
3. $M = R, aTb \leftrightarrow a <= b$
4. $M = R, aTb \leftrightarrow b = a^2$

T называется отношением эквивалентности, если оно:

1. aTa (рефлексивность)
2. $aTb \to bTa$ (симметричность)
3. $aTb, bTc \to aTc$ (транзитивность)

Будем иметь ввиду вместо $aTb = a \sim b$, $T_a = \{b \in M : a \sim b\}$
Теорема:

1. $a \in T_a$
2. $\bigcup_{a \in M} T_a = M$
3. $T_a \bigcap T_b \neq \varnothing \to T_a = T_b$

Итак: M разбито на непересекающиеся подмножества $M \to M/\sim$ (факторизация)
Пример: $H < Gx \sim y \leftrightarrow x^{-1}y \in H \leftrightarrow \exists h \in H : x^{-1}y = h \leftrightarrow y = xh, h \in H$; таким образом $T_x = \{y : x \sim y\} = \{y : y = xh\} = xH$;
Определение: $xH = \{xh, h \in H\}$
$T_x = xH \to$ левым смежным классом по подгруппе H
Аналогично, если $x \sim y$ ввести по формуле $yx^{-1} \in H \to T_x = Hx$-правый смежный класс.

3 22.09

Необходимые понятия:подгруппа, |G|, |x|, отношение эквивалентности (рефликсивность, симметричность, транзитивность)
$T_a = \{b : a \sim b\}$
Тут что-то было..
Если $(Z, +)$ и $(nZ, +)$, то $a \to a + nZ$
Вместо $a \to a + nZ$ будем писать $[a]_n$ или $\bar{a_n}$ или $\bar{a}$ или(like a pro) a
$Z/_{\sim} = Z/_{nZ} = Z_n$
Кольцо$(A, *, +)$ $\bigoplus$-коммутативность $\bigodot$-дистрибутивность
Бывают кольца коммутативные$(ab = ba)$ и с единицей$(ea = ae = a)$
Подкольцо-это кольцо относительно тех же операций
Поле-коммутативное ассоциативное кольцо с единицей $e \neq 0$.Кроме того, $\forall x \neq 0 \exists x^{-1}(xx^{-1} = x^{-1}x = e)$

$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$ и $[a]_n[b]_n = [ab]_n$

Циклические группы.

Из семинара: $|x^k| = |x|/(|x|, k)$

$x^n x^m = x^{n+m}; (x^n)^m = x^{nm}; x^0 = e$ при $n, m \in Z$

$G, x < x >= \{x^n$, где $n \in Z\}$-циклическая подгруппа группы G

Если $|x| = n < \infty \to < x >= \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$

Если $|x| = \infty \to < x >= \{e, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, \dots\}$

$< x >_n$,т.е. $| < x >_n | = |x| = n$

$< x >_\infty$ т.е. $| < x >_\infty | = |x| = \infty$ См. семинар для св-в (Кострикин)

G-циклическая группа, если $\exists x \in G : G =< x >$

Теорема. У циклической группы все подгруппы циклические, т.е. G-циклическая группа.($H < G \to H$-циклическая группа)

Док-во: Оно было, но его украли

Теорема(Ахтунг, требуется в типовике) G-циклическая группа, $|G| = n, n \vdots k \to \exists! H < G : |H| = k$

Док-во: to be continued