Основные источники:

1. http://elisey-ka.ru/matan/index.htm
2. Высшая математика Шипачев В.С. 2005 -479с
3. http://us.chem.msu.su/Lection/Math1/index.htm

1 Билет. Понятие предела последовательности. Основные теоремы о пределах

Число а называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного числа ϵ существует номер N такой, что при n>N выполняется неравенство $|x_n - a| < \epsilon$

Основные теоремы о пределах:

1. Предел постоянной величины равен ей самой.
2. Сходящаяся последовательность имеет только один предел
3. Сходящаяся последовательность ограничена
4. Сумма(разность) двух сходящихся последовательностей x_n и y_n есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме(разности) пределов последовательностей x_n и y_n.
5. Произведение сходящихся последовательностей x_n и y_n есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов послдеовательностей x_n и y_n.
6. Частное двух сходящихся последовательностей x_n и y_n при условии, что предел y_n отличен от нуля, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей x_n и y_n.

2 Билет. Существовование предела в монотонной ограниченной последовательности. Число е.

3 Билет. Лемма о вложенных отрезках.Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема о вложенных отрезках:Для любой последовательности вложенных отрезков существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.
Теорема Больцано-Вейерштрасса:Из всякой ограниченной последовательности точек пространства R^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

4 Билет. Последовательность Коши(Фундаментальная последовательность).Критерий Коши.

Фундаментальная последовательность (последовательность Коши, сходящаяся в себе последовательность) – последовательность xn, удовлетворяющая следующему условию Коши: Для любого $\epsilon > 0$ существует такое n, что для всех $n > N, m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \epsilon$.
Коши критерий сходимости последовательности Пусть задана числовая последовательность x_n. Эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда для любого числа $\epsilon > 0$ существует номер N такой, что при всех $n > N$ и любых натуральных m выполняется неравенство $|x_{n+m} - x_n| < \epsilon$ (т.е. расстояние между членами последовательности с номерами n и $n + m$ меньше ϵ)

5 Билет. Предел функции. Эквивалентность определений. Предел функции через сходящиеся последовательности. Предел по Гейне/Коши.

Число A называется пределом функции f(x) в точке $x = x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность значений функции

Рис. 1: 7 билет.Критерий Коши

сходится к числу А.(Гейне)

Число А называется пределом функции f(x) в точке $x = x_0$,если для любого числа $\epsilon > 0$ существует число $\sigma > 0$ такое, что для всех $x \in X, x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \sigma$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \epsilon$.(Коши)

6 Билет. Основные свойства предела функции.

1. Предел суммы равен сумме пределов, если каждый из них существует
2. Предел разности равен разности пределов, если каждый из них существует
3. Предел постоянной величины равен самой постоянной величине
4. Предел произведения функции на постоянную величину.Постоянный коэффициэнт можно выносить за знак предела
5. Предел произведения равен произведению пределов, если каждый из них существует
6. Предел частного равен частному пределов, если каждый из них существует и знаменатель не обращается в нуль
7. Первый и второй зам. пределы.

7 Билет. Критерий Коши о существовании предела функции.

Изображение снизу.

8 Непрерывные функции.Свойства непрерывных функций на отрезке.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и её значение в этой точке равны.
Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \sigma$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

1. **Первая теорема Вейерштрасса.**Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

2. Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция является ограниченной на этом отрезке.

3. **Вторая теорема Больцано-Коши.** Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$ и принимает на концах этого отрезка неравные между собой значения, то есть $f(a) = a_0, f(b) = b_0$, то на этом отрезке функция принимает и все промежуточные значения между a_0 и b_0 .

4. **Первая теорема Больцано-Коши.**Если функция $y = f(x)$, которая непрерывна на некотором отрезке $[a; b]$, принимает на концах отрезка значения разных знаков, то существует такая точка $c \in [a; b]$ такая, что $f(c) = 0$.

9 Билет. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора(Кантора-Гейне?).

10 Билет. Открытое и замкнутое множество. Граница и замыкание множества. Композиция множеств.

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Если множество не имеет ни одной предельной точки, то его тоже принято считать замкнутым. Кроме своих предельных точек, замкнутое множество может также содержать изолированные точки. Множество называется открытым, если каждая его точка является для него внутренней.

?????

11 Билет. Точки разрыва и их классификация.

Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной.

Разрыв 1-го рода.Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода функции $f(x)$,если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы.

Разрыв 2-го рода.Точка x_0 называется точкой разрыва 2-го рода функции $f(x)$,если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

12 Билет. Производная, её геометрический и механический смысл.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \Rightarrow 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента(при условии, что этот предел существует).

геометрический-касательная, физический- скорость, путь и прочее.

13 Билет. Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости. Райский билет :)

Если функция дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в этой точке.

14 Билет. Арифметические действия с производными.

1. Производная от константы равна нулю.

2. Константу можно вынести за знак производной.

3. Производная суммы любого числа функций равна сумме производных этих функций.

4. Производная произведения двух функций равна
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

5. Производная частного двух функций равна $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

6. Пусть $y = f(u)$, где $u = j(x)$, тогда $y' = f'(u)j'(x)$

15 Билет. Таблица производных.

16 Билет. Производные сложной и обратной функции.

Производная сложной функции: $(u(v))' = u'(v) * v'$

Пусть функция $x = f(y)$ монотонна и дифференцируема в некотором интервале (a, b) и имеет в точке y этого интервала производную $f'(y)$, не равную нулю. Тогда в соответствующей точке x обратная функция $y = f^{-1}(x)$ имеет производную $[f^{-1}(x)]'$, причем $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$ или $y'_x = \frac{1}{x'_y}$

17 Билет. Дифференциал, его связь с производной, геометрический смысл, инвариантность.

Дифференциал — линейная часть приращения функции. $dy = f'(x)\Delta x$

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению ординаты касательной , проведенной к графику этой функции при изменении аргумента на Δx.

Пусть существует сложная функция $z = f(g(x))$, и существует ее производная:$z'_x = z'_y y'_x$. Считая y независимой переменной, получим формулу дифференциала:$dz = z'_y dy$. Теперь, если считать y зависимой от x, получим:$dz = z'_y y'_x dx = z'_y dy$, т.к.$dy = y'_x dx$. То есть получается, что формула дифференциала не зависит от типа переменной.

Не взирая на то, является ли переменная х зависимой или нет, для вычисления дифференциала используется единая формула - инвариантность формул.

18 Билет. Теорема Ролля, её геометрический смысл.

Теорема Ролля. (О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения)

Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2. дифференцируема на интервале $(a; b)$;
3. на концах отрезка $[a; b]$ принимает равные значения $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале $(a; b)$ найдется, по крайней мере, одна точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля:Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

19 Билет. Теорема Лагранжа, её геометрический смысл. Теорема Коши.

Теорема Лагранжа:Пусть функция $y = f(x)$

1. непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2. дифференцируема на интервале $(a; b)$.

Тогда на интервале $(a; b)$ найдется по крайней мере одна точка x_0 , такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

Теорема Коши:Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1. непрерывны на отрезке $[a; b]$;
2. дифференцируемы на интервале $(a; b)$;
3. производная $g'(x) \neq 0$ на интервале $(a; b)$,

тогда на этом интервале найдется по крайней мере одна точка x_0 , такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

20 Билет. Правило Лопиталя.

Теорема Лопиталя. Если:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ или ∞
2. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности a
3. $g'(x) \neq 0$ в окрестности a
4. существует $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

то существует $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

21 Билет. Многочлен Тейлора, формула Тейлора

Общий вид формулы Тейлора:$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, где
$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} * (x - x_0)^k$ - многочлен Тейлора. Для того, чтобы написать многочлен Тейлора степени n, необходимо наличие n производных в точке x_0.$R_n(x)$ - остаточный член Тейлора. Остаточный член имеет различный вид в зависимости от требований.

22 Билет. Остаточный член формулы Тейлора в формах Пеано и Лагранжа.

Форма Лагранжа:$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} * (x - x_0)^{n+1}$

Форма пеано:$R_n(x) =?((x - x_0)^n), x \to x_0$

23 Билет. Локальный экстремум функции одного переменного. Необходимое и достаточное условия экстремума.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности точки x_0, где $\delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0, если для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Если для всех точек $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 является точкой строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$,то точка x_0 является точкой локального максимума.
Аналогичено определяется локальный минимум функции $f(x)$.В этом случае для всех точек $x \neq x_0$ из δ-окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.Соответственно строгий локальный минимум описывается строги неравенством $f(x) > f(x_0)$

Необходимое условие:Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке либо производная равна нулю, либо не существует. Другими словами, экстремумы функции содержатся среди ее критических точек.

Достаточные условия:

1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, в которой, однако, функция непрерывна. Тогда:
   Если производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0, (слева направо), то точка x_0 является точкой строгого минимума. Другими словами, в этом случае существует число $\delta > 0$, такое, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$.

   Если производная $f'(x)$, наоборот, меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то точка x_0 является точкой строгого максимума. Иначе говоря, существует число $\delta > 0$, такое, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) < 0$.

2. Пусть в точке x_0 первая производная равна нулю: $f(x_0) = 0$, т.е. точка x_0 является стационарной точкой функции $f(x)$. Пусть также в этой точке существует вторая производная $f''(x_0)$. Тогда: Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 является точкой строгого минимума функции $f(x)$; Если $f''(x0) < 0$, то x_0 является точкой строгого максимума функции $f(x)$.

3. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно. Тогда, если $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 f^(n)(x_0) \neq 0$, то при четном n точка x_0 является
   точкой строгого минимума, если $f^(n)(x_0) > 0$, и
   точкой строгого максимума, если $f^(n)(x_0) > 0$.
   При нечетном n экстремума в точке x0 не существует.

   Ясно, что при $n = 2$ в качестве частного случая мы получаем рассмотренное выше второе достаточное условие экстремума. Чтобы исключить такой переход, в третьем признаке полагают, что $n > 2$.

24 Билет. Геометрический смысл второй производной. Точки перегиба.

25 Билет. Ассиптоты графика функции. Существование наклонной ассимптоты.

26 Билет. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференциал.

27 Билет. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.

28 Билет. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума.