1. **Базисная подматрица** У м. A mxn квадратная подматрица порядка r наз-ся базисной, если она невырождена, а все квадр. подм. большего размера если они ∃, вырождены.

2. **Теорема о базисном миноре**

   ∀ столбец м. A раскладывается по столбцам, в к-ых расположена базисная подм.

   ∀ строка м. A раскладывается по стр., в к-ых расположена базисная подм.

3. **Теорема Кронекера-Капелли**

   Прибавление столбца b к м. A не меняет ее RgA тогда и только тогда, когда столбец b есть лин. комбинация столбцов м. A

   Прибавление строки к м. A не меняет ее RgA тогда и только тогда, когда эта строка является лин. комбинацией строк м. A

4. **Упрощенная матрица** М. A mxn наз-ся упрощенной (имеет упрощенный вид), если она содержит первые r столбцов единичной м. В случае если m>r, то послед m-r стр. нулевые.

5. **Совместная система, однородная** Система наз-ся совместной, если хотя бы 1 решение; несовместной, если решений нет; однородной, если b=0.

6. **Теорема о существовании единственного решения** Пусть дана система из n уравнений с n неизвестными. Если $detA \neq 0$, то система имеет решение, и при том единственное.

7. **Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы** Сист. лин. уравн. совместна тогда и только тогда, когда Rg м. сист. = Rg расширенной м. $RgA = Rg(A|b)$.

8. **Фундаметнальная м. однородной системы** М. F, состоящая из столб. высоты n, наз-ся фунмамент. м. для однородной сист. с м. A mxn, если верно:

   1) AF=0 2) столбцы м. F лин. независимы

   3) ∀ решение x сист. Ax=0 раскладывается по столб. м. F

9. **Теорема о существовании фундаментальной м. и кол-ве столбцов в ней**

   Если Rg м. однородной системы r < числа неизвестных n, то у системы ∃ фунд. м., состоящая из (n-r) столбцов.

10. **Линейное пространство** Мн-во L наз-ся л. пр-вом, а его элементы – векторами, если:

    а) задан закон (операция сложения), к-ый $\forall x, y \in L$ сопоставляет некоторый эл-т из L (x+y – сумма)

    б) задан закон (операция умножение на число), по к-ому $\forall x \in L, \forall \alpha$ сопоставляется некоторый эл-т из L

    в) $\forall x, y, z \in L, \forall \alpha, \beta$ выполняются аксиомы:

    1) $x + y = y + x$ коммутативность слож.

    2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ ассоциат. слож.

    3) $x + 0 = x$ ∃ нулевой эл-т

4) $x+(-x)=0$ $\exists$ противоположный

5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ дистрибутивность * на число отн. слож. в.

6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\alpha y$ дистрибутивность * на число отн. слож. чисел

7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ ассоциативность умнож. чисел

8) $1\cdot x=x$

11. **Свойства линейного пространства** $\exists!0, \exists!(-x)$

    1) если для x $\exists a: a+x=a$, то $x=0$

    2) $\forall x\in L: 0\cdot x=0$

    3) $\forall x\in L: (-1)\cdot x=-x$

    4) $\forall\alpha: \alpha\cdot 0=0$

    5) $\alpha x=0\rightarrow\alpha=0$ или $x=0$

12. **Линейная (не)зависимость векторов** Система векторов в лин. пр-ве наз-ся лин. независимой, если нулевой в. раскладывается ! образом по соотв. в. (= если разложение нулевого в. по этой системе в. тривиально)

    лин. зависима, если $\exists$ нетривиальное разложение нулевого в. по этой системе в.

13. **Базис линейного пр-ва**

    Базисом в лин. пр-ве наз-ся *упорядоченная* конечная система в., если данные в. лин. независимы и $\forall$ в. пр-ва раскладывается по этим в.

14. **Координаты вектора в базисе** – коэфф. разложения в. по в. данного базиса.

15. **Теорема о размерности лин. пр-ва**

    Если в лин. пр-ве $\exists$ базис из n в., то $\forall$ система из $m>n$ в. лин. зависима. Если в лин. пр-ве $\exists$ базис из n в., то такое пространство наз-ся n-мерным, а число n – размерностью пр-ва.

16. **Изоморфные лин. пр-ва** Два произвольные лин. вещественные пр-ва наз-ся изоморфными, если м/у эл-тами данных пр-в можно установить взаимно-однозначное соотв. так, что $x+y$ отвечает $x'+y'$, $\alpha x\rightarrow\alpha x'$, переводит операции в одном пр-ве в соотв. операции в др. (сохраняет операции)

17. **Теорема об изоморфности лин. пр-в** 2 вещ. (комплекс.) лин. пр-ва изоморфны $\equiv$ их размерности равны.

18. **Лин. подпр-во** Непустое мн-во L' лин. пр-ва L наз-ся лин. подпр-вом, если 1) $\forall x,y\in L':\ x+y\in L'$, 2) $x\in L', \forall\alpha:\alpha x\in L'$

19. **Линейная оболочка** L – лин. пр-во, P – нек-ое мн-во в.

    Лин. оболочка L' мн-ва P – совокупность мн-ва всех конечных лин. комбинаций в. из P (это подпр-во).

20. **Теорема о размерности подпространства** Пусть L' – подпр-во n-мерного лин. пр-ва L, Тогда L' - конечномерно и $dimL'\leqslant n$. Если $dimL'=n$, то $L'=L$.

21. **Сумма подпространств** L, L' – подпр-во, обозначаемое $L + L'$, к-ое явл. лин. оболочкой $L' \cup L$

22. **Пересечение подпространств** L, L' – подпр-во $L' \cap L$, состоящее из в., принадлежащих обоим подпр-вам.

23. **Прямая сумма подпр-в**

    Сумма подпр-в наз-ся прямой, если размерность суммы = сумме размерностей подпр-в, т.е. принимает наиб. возможное знач.

24. **Теорема о прямой сумме подпр-в**

    Для того, чтобы сумма $M = L_1 + \ldots + L_s$ была прямой суммой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере 1 из 4 условий:

    1) $\forall$ система из $m \leqslant s$ ненулевых в., одновременно принадлежащие различным L_i линейно независимы

    2) каждый в. $x \in M$ раскладывается в сумму $x = x_1 + \ldots + x_s$, где $x_i \in L_i$, однозначно

    3) Пересечение каждого L_i с суммой остальных подпр-в есть нулевое подпр-во

    4) Объединение базисов L_i дает базис M

25. **Теорема о размерности суммы 2 подпр-в**

    Размерность сумм двух подпр-в = сумме размерностей минус сумма их пересечения.

26. **Линейное отображение. Линейное преобразование**

    $L, \bar{L}$ –вещ./комплекс. лин. пр-ва, $\forall x \in L : A(x) \in \bar{L}, A : L \to \bar{L}$

    Отображение А линейн., если $\forall x, y \in L, \forall \alpha$ верно: $A(x + y) = A(x) + A(y), A(\alpha x) = \alpha A(x)$

    Если $L = \bar{L}$, то лин. отображение называют лин. оператором или лин. преобразованием.

27. **Следствия лин. отобр.** $A : L \to \bar{L}, L' \in L$ переходит в лин. подпр-во $A(L') \in \bar{L}$

28. **Ранг** – $dimImA$

29. **Ядро** – мн-во всех в. из L: $A(x) = 0 \in \bar{L}$, $(KerA)$

30. **Лемма об инъективности отобр.** Лин. отобр. инъективно $\equiv KerA$ нулевое.

31. **Матрица лин. отобр.** $A : L \to \bar{L}$ в фикс. базисах e, f наз-ся м., столбцы к-ой, взятые в естественном порядке, сопадают со столбцами в базисе f.

32. **Теорема о сумме размерности ядра и образа** $dimKerA + dimImA = dimL$

33. **Обратное лин. отобр.**

    $A : L \to L', B : \bar{L} \to L$ B наз-ся обратным для отобр. А, если $BA = E, AB = \bar{E}$, где $E, \bar{E}$ – тождественные операторы в $L, \bar{L}$

    $x \in L : B(A(x)) = x, y \in \bar{L} : A(B(y)) = y$

34. **Теорема о существовании лин. отобр.** Для лин. отобр. $\exists$ обратное $\equiv$ это отобр. – изоморфизм.

35. **Лин. оператор** Лин. оператор – лин. отображение лин. пр-ва самого в себя. $A : L \to L$