

**Вопросы к экзамену по курсу “Линейная алгебра и аналитическая геометрия” для групп БПМ 181,182,183,184,185  
( 4 модуль 2018/2019 уч. г.)**

1. Теорема о ранге матрицы.
2. Теорема о базисном миноре. Правило вычисления ранга матрицы.
3. Теорема Кронекера-Капелли.
4. Ранг произведения матриц.
5. Теорема о приведении матрицы к упрощенному виду с помощью элементарных преобразований. Нахождение ранга матрицы.
6. Системы линейных уравнений. Постановка задачи и простейшие свойства.
7. Условие совместности системы линейных уравнений. Нахождение решений методом Гаусса.
8. Свойства решений однородных систем. Фундаментальная матрица. Фундаментальная система решений однородной системы. Структура общего решения однородной системы.
9. Существование фундаментальной матрицы. Теорема о количестве столбцов фундаментальной матрицы.
10. Структура общего решения неоднородной системы линейных уравнений.
11. Определение линейного пространства. Примеры.
12. Некоторые свойства линейных пространств.
13. Линейная зависимость векторов линейного пространства. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.
14. Базис и координаты в линейном пространстве.
15. Размерность линейного пространства.
16. Изоморфизм линейных пространств.
17. Замена базиса в линейном пространстве. Преобразование координат при замене базиса.
18. Определение линейного подпространства. Примеры.
19. Линейная оболочка. Теорема о монотонности размерности.
20. Подпространства и системы линейных уравнений.
21. Сумма и пересечение подпространств.
22. Прямая сумма подпространств. Необходимые и достаточные условия разложимости в прямую сумму.
23. Теорема о размерности суммы двух подпространств.
24. Определение линейного отображения. Примеры.
25. Свойства линейных отображений. Ядро и образ отображения. Ранг отображения.
26. Матрица линейного отображения. Совпадение ранга матрицы с рангом отображения.
27. Теорема о сумме размерностей ядра и образа линейного отображения.
28. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Канонический вид матрицы линейного отображения.

29. Сумма и произведение отображений.
30. Линейные операторы. Инварианты. Умножение линейных операторов.
31. Инвариантные подпространства. Необходимые и достаточные условия, при которых матрица линейного оператора клеточно-треугольная или клеточно-диагональная.
32. Собственные подпространства. Собственные векторы и собственные значения.
33. Характеристическое уравнение. Характеристический многочлен и его свойства.
34. Свойства собственных подпространств.
35. Приведение матрицы оператора к диагональному виду. Критерии и достаточное условие диагонализуемости.
36. Приведение матрицы оператора к треугольному виду.
37. Теорема Кэли-Гамильтона.
38. Корневые подпространства. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
39. Свойства корневых подпространств.
40. Циклические подпространства. Разложение корневого подпространства в прямую сумму циклических подпространств.
41. Жорданова форма матрицы. Теорема Жордана.
42. Операторы в вещественном пространстве. Существование у оператора или одномерного, или двумерного инвариантного подпространства.
43. Определение евклидова пространства. Примеры.
44. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Длина и угол в евклидовом пространстве. Теорема Пифагора.
45. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей. Матрица Грама.
46. Ортогональное дополнение подпространства. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
47. Расстояние между векторами. Расстояние от вектора до подпространства.
48. Метод наименьших квадратов для систем линейных уравнений.
49. Ортогональный и ортонормированный базисы. Линейная независимость ненулевых ортогональных векторов.
50. Существование ортогонального базиса в евклидовом пространстве. Метод ортогонализации Грама-Шмидта.
51. Изоморфизм евклидовых пространств.
52. Ортогональные матрицы. QR-разложение.
53. Объем  $n$ -мерного параллелепипеда.
54. Унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.
55. Свойства унитарных пространств. Теорема Шура.
56. Сопряженный оператор. Существование, единственность и свойства сопряженного оператора.
57. Сопряженная матрица. Условие ортогональности собственных векторов оператора и сопряженного оператора.

- 58. Теорема Фредгольма.
- 59. Самосопряженный оператор и его свойства. Вещественность корней характеристического многочлена самосопряженного оператора.
- 60. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора.
- 61. Ортогональный оператор и его свойства.
- 62. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно ортогонального оператора.
- 63. Нормальный оператор и его свойства.
- 64. Связь нормальных операторов с самосопряженными и унитарными операторами.
- 65. Билинейные формы. Матрица билинейной формы.
- 66. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к диагональному виду. Канонический вид квадратичной формы.
- 67. Ранг, отрицательный и положительный индексы квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм.
- 68. Метод Якоби.
- 69. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.
- 70. Оператор, присоединенный билинейной форме. Его существование и единственность.
- 71. Существование ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.
- 72. Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду.
- 73. Классификация поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве.
- 74. Инварианты поверхностей второго порядка.

Лектор

Перескоков А.В.