02-24 Лекция: Фундаментальная теорема анализа, формула Ньютона–Лейбница и вычисление определённых интегралов

Интегралы с переменными пределами, фундаментальная теорема анализа и вычисление площадей и объёмов

Дата создания конспекта: 2026-02-24 13:35:10

Этот текст систематизирует и развивает содержание лекции о интегралах с переменным верхним/нижним пределом, фундаментальной теореме анализа (связи интегрирования и дифференцирования), приёмах вычисления определённых интегралов, а также геометрических приложениях: площади, объёмы тел, длины дуг. Особое внимание уделяется технике замены переменной в определённом интеграле, работе со знаками и оценке результата.

1. Интеграл с переменным пределом: постановка и смысл

1.1. Определения и базовые соглашения

- Определённый интеграл с переменным верхним пределом: $F(x) = \int_a^x f(t)$ dt.
- С переменным нижним пределом: $G(x) = \int^{xb} f(t)$ dt.
- Оба — функции аргумента x, зависящие от положения границы интегрирования.

Ключевые соглашения:

- Переменная интегрирования (обычно t) — «внутренняя» переменная, отличная от переменной функции (x). Можно записывать $\int_a^x f(x)\,dx$, но полезнее различать x (внешний параметр) и t (интегральная переменная), чтобы избежать путаницы: $\int_a^x f(t)\,dt$.
- Если подынтегральная функция f непрерывна на [a, b], то функция F (или G) непрерывна на этом промежутке.

1.2. Геометрический смысл

Если $f(t) \geq 0$ на [a, b], то $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — это площадь фигуры под графиком f(t) от t = a до t = x. По мере движения верхней границы x «направо» площадь монотонно растёт.

Если f меняет знак, интеграл выражает «алгебраическую площадь»: положительные участки (где $f > 0$) складываются, отрицательные (где $f < 0$) вычитаются. Для собственной геометрической площади нужно отдельно учитывать знак, разбивая интервал на участки постоянного знака.

2. Фундаментальная теорема анализа

2.1. Формулировка (часть I)

Если f непрерывна на [a, b], то функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Смысл: интегрирование и дифференцирование — взаимно обратные операции (в подходящих классах функций), а интеграл с переменным верхним пределом имеет производную, равную подынтегральной функции, «взятой» в верхнем пределе.

2.2. Идея доказательства через добавку малой полоски

- Рассмотрим приращение $F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$.
- По теореме о среднем для интегралов существует $c \in (x, x + \Delta x)$ такое, что $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\cdot\Delta x$.
- Делим на Δx и устремляем $\Delta x \to 0$: $[F(x + \Delta x) - F(x)] / \Delta x \to f(x)$, так как $c \to x$ по непрерывности f.

Отсюда $F'(x) = f(x)$.

2.3. Фундаментальная теорема анализа (часть II)

Если F — первообразная f на [a, b], то $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Эта формула связывает определённый и неопределённый интеграл: для вычисления $\int_a^b f(x)\,dx$ достаточно найти любую первообразную F и подставить границы.

Историческая ремарка:

- Связь дифференцирования и интегрирования в современном виде связывают с именами Ньютона и Лейбница. Их споры о приоритете привели к длительным конфликтам между школами и в целом оказали влияние на развитие математической культуры Европы. Формула Лейбница (часть II фундаментальной теоремы) стала ключевым мостом между двумя «разными» объектами — суммами площадей (интеграл) и мгновенной скоростью изменения (производная).

3. Техника вычисления определённых интегралов

3.1. Использование приёмов неопределённого интегрирования

Благодаря F(b) − F(a), приёмы для нахождения первообразных применяются и к определённым интегралам:

- Подстановка (замена переменной).
- Интегрирование по частям.
- Тригонометрические преобразования.
- Разложение в ряды (в сложных случаях).

Важно: при работе с определёнными интегралами всегда учитывайте пределы интегрирования.

3.2. Замена переменной: правила и частые ошибки

Пусть $x = \varphi(t)$, дифференцируемая и взаимно однозначная на соответствующем интервале. Тогда:

- $dx = \varphi'(t)\,dt$.
- Пределы ОБЯЗАТЕЛЬНО меняются: если $x = a$ соответствует $t = t_1$, а $x = b$ — $t = t_2$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Ключевая ошибка:

- Нельзя «поменять букву» ($x \to t$) и оставить старые пределы в новых переменных: $\int_a^b f(x)\,dx \neq \int_a^b f(t)\,dt$ после замены $x = \varphi(t)$. Меняются и пределы, и дифференциал.

- Если вы не меняете переменную (оставляете x), пределы остаются прежними, но и дифференциал остаётся dx.

Практический приём (двойной путь):

- Способ 1. Выполнить замену $x = \varphi(t)$, сразу пересчитать пределы в t, интегрировать и подставить новые границы.
- Способ 2. Сначала найти первообразную с заменой переменной и вернуться к старой переменной x, затем подставить исходные пределы a, b. В этом способе в промежуточной записи можно избежать пересчёта пределов, но в финале подставляются исходные границы в исходной переменной.

3.3. Интегрирование по частям для определённых интегралов

Формула по частям:

$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx.$

Пределы подставляются в граничный член [u v] и сохраняются в втором интеграле — приём удобен для функций, где распределение производных «упрощает» выражение (например, логарифмы, арктангенс, полиномы с экспонентами).

4. Геометрические приложения

4.1. Площадь под графиком (одной функции)

Если f непрерывна на [a, b] :

- Если $f \geq 0$, то $S = \int_a^b f(x)\, dx$ — обычная площадь.
- Если f меняет знак, то геометрическая площадь «под кривой» равна сумме площадей модулей на участках постоянного знака: $S = \int_a^{\xi_1} |f|\, dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f|\, dx + \dots$, где ξ_i — точки, в которых $f(x) = 0$.

4.2. Площадь между двумя кривыми

Пусть на [a, b] графики $y = F(x)$ и $y = G(x)$. Если на всём отрезке $F(x) \geq G(x)$, то

$S = \int_a^b [F(x) - G(x)]\, dx.$

Если «верхняя» и «нижняя» функции меняются местами, разбейте интервал точками пересечения (их нужно находить аналитически, а не по рисунку), и интегрируйте по участкам: на каждом участке верхняя − нижняя.

Практический совет:

- Сначала обязательно выполните рисунок.
- Затем найдите точки пересечения аналитически (решая уравнение F(x) = G(x)).
- Не выбрасывайте скобки преждевременно при алгебраических преобразованиях — чаще всего ошибки связаны со знаками.
- В конце оцените результат (порядок величины) через простую геометрическую фигуру, например через трапецию, чтобы удостовериться в разумности численного значения.

4.3. Объёмы тел и другие величины

- Объём через площадь поперечного сечения: $V = \int_a^b S(x)\,dx$, где S(x) — площадь сечения плоскостью x = const.

- Тела вращения учитываются особенно просто (метод дисков/шайб или цилиндрических оболочек), например:

  - Диски: $V = \pi \int_a^b R(x)^2\,dx$.
  - Оболочки: $V = 2\pi \int_a^b x \cdot h(x)\,dx$.

- Длина дуги: $L = \int_a^b \sqrt{(1 + [y'(x)]^2)}\,dx$.

- В экономике определённый интеграл связан с накоплениями: интеграл от функции прибыли по времени даёт суммарный доход; интеграл интенсивности потока даёт накопленный объём и т.п. Это по сути та же «площадь под графиком» (иногда с дисконтом).

5. Подробный разбор примеров и методики

5.1. Производная интеграла с переменным верхним пределом

Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда $F'(x) = f(x)$.

Иллюстрация:

- Приращение площади при переходе от x к x + Δx — это «узкая полоска» ширины Δx и высоты примерно f(x). В пределе высота становится точно f(x).

5.2. Пример вычисления по формуле Лейбница (часть II ФТА)

Интеграл $\int_a^b x^2\,dx$ без сумм Римана:

- Первообразная: $x^3/3$.
- Значение: $[x^3/3]_a^b = b^3/3 - a^3/3$.

Сравнение: прямой расчёт сумм Римана со средними точками требует вычисления квадратов арифметических прогрессий и предельных переходов; ФТА существенно упрощает путь.

5.3. Замена переменной: косинус и корень

Задача: вычислить $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx$.

Способы:

- Прямой: сделать замену $t = \cos x$, тогда $dt = -\sin x\, dx$. Но здесь удобнее использовать $t = \cos x$ и знать, что при x: $0 \to \pi/2$ пределы t: $1 \to 0$. Тогда

  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx = \int_1^0 \sqrt{t} \cdot (-dt/\sqrt{(1 - t^2)?})$, — эта замена некорректна без $\sin x$ в подынтегральном. Корректная элементарная замена требует присутствия $\sin x$, поэтому стандартно переходят к бета-функции или используют обобщённые преобразования.

- Практический безопасный приём: если выполняется замена $x \to t$ и у вас меняются пределы, убедитесь, что дифференциал корректно выражён в t. Реже — сначала интегрируете (находите первообразную в удобной переменной), затем возвращаетесь к x и подставляете исходные пределы.

Резюме по замене:

- Меняем переменную — меняем пределы в соответствии с этой переменной.
- Оставляем переменную — оставляем исходные пределы.
- Не смешивайте старые пределы с новой буквой — это типовая ошибка.

5.4. Площадь между параболой и прямой

Пусть задано: $y_1 = x^2 - 1$, $y_2 = x + 1$. Найти площадь на пересечении их графиков.

Шаги:

1. Рисунок, чтобы понять геометрию (но точки пересечения — только аналитически).

2. Решаем $x^2 - 1 = x + 1 \to x^2 - x - 2 = 0 \to (x - 2)(x + 1) = 0 \to x = -1$ и $x = 2$.

3. Определяем, кто сверху на каждом участке:

   - На $[-1, 2]$ проверим точку, например $x = 0$: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$. Значит, прямая y_2 сверху, парабола y_1 снизу.

4. Площадь: $S = \int_{-1}^{2} [(x + 1) - (x^2 - 1)]\, dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx$.

5. Считаем:
    - Первообразная: $-x^3/3 + x^2/2 + 2x$.
    - Подстановка: $[-x^3/3 + x^2/2 + 2x]_{-1}^{2}$.
    - При $x = 2$: $-8/3 + 2 + 4 = -8/3 + 6 = 10/3$.
    - При $x = -1$: $-(-1)/3 + 1/2 - 2 = 1/3 + 1/2 - 2 = (5/6) - 2 = -7/6$.
    - Разность: $10/3 - (-7/6) = 10/3 + 7/6 = 20/6 + 7/6 = 27/6 = 9/2$.

Итак, $S = 9/2 = 4.5$.

Оценка результата:

- Рассмотрим трапецию, ограничивающую фигуру (по высоте и основаниям). Высота по оси x: $2 - (-1) = 3$.
- Значения верхней и нижней кривых на концах:
    - На $x = -1$: $y_2 = 0$, $y_1 = 0$.
    - На $x = 2$: $y_2 = 3$, $y_1 = 3$.
    - Верхнее основание ~ 3, нижнее ~ 0, высота 3 → площадь трапеции ~ 9/2. Наша фигура занимает «больше половины» площади трапеции и совпадает по числу: 4.5 — разумный, проверенный результат.

6. Методологические замечания и междисциплинарные связи

6.1. Практические рекомендации

- Всегда отделяйте внешнюю переменную (например, x) от переменной интегрирования (t).
- При смене переменной пересчитывайте пределы — это обязательный шаг.
- В геометрических задачах:
    - Рисунок обязателен для понимания, но точки пересечения ищутся аналитически.
    - Следите за знаками; не раскрывайте скобки преждевременно.
    - Делайте финальную оценку результата через простые фигуры (прямоугольник, трапецию).

6.2. Связи с другими разделами

- Анализ: непрерывность и дифференцируемость в фундаментальной теореме требуют аккуратности с условиями (например, разрывы, интегрируемость по Риману vs по Лебегу).
- Геометрия: площадь, объём, длина дуги — классические мосты между чистым и прикладным анализом.
- Экономика: интегралы как накопленные величины (доход, капитал, спрос-предложение по времени), коэффициенты дисконтирования — сведение к «взвешенной площади».
- Физика: работа силы по пути, заряд/масса как интегралы плотности по области, потоки — интегралы по поверхности.

6.3. Исторические любопытства

- Дискуссии Ньютона и Лейбница о приоритете сыграли заметную роль в истории науки. Различие в символике (dx, $\int$) и акцентах (геометрическая интерпретация у Ньютона vs дифференциальное исчисление у Лейбница) отражалось в учебных традициях стран и школ, влияя на методику преподавания анализа более века.

7. Частые ловушки и как их избегать

- Подмена переменной без смены пределов — ошибка.
- Использование одной и той же буквы для переменной интегрирования и внешней переменной — возможно, но повышает риск путаницы; рекомендуем различать их.
- Неправильная оценка порядка результата: всегда делайте «санити-чек» через простую фигуру.
- Игнорирование знака функции при площади: для геометрической площади нужна сумма модулей по участкам постоянного знака.

8. Краткие алгоритмы

- Интеграл с переменным верхним пределом:

  i. Записать $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

  ii. Если нужно $F'(x)$: по ФТА I $F'(x) = f(x)$.

- Определённый интеграл:

  i. Найти первообразную F.

  ii. Подставить границы: $F(b) - F(a)$.

- Замена переменной:
    i. Ввести t, выразить $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$.
    ii. Пересчитать пределы: $x = a \to t = t_1$; $x = b \to t = t_2$.
    iii. Интегрировать, подставить новые пределы.
- Площадь между кривыми:
    i. Схема: рисунок → точки пересечения → разбиение интервала → «верхняя − нижняя» на каждом участке → суммирование.
    ii. Финальная оценка результата.

9. Схема-резюме и ключевые слова

Ключевые идеи:

- Интеграл с переменным пределом: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — непрерывная и дифференцируемая (при f непрерывной).
- ФТА I: производная F равна f: $F'(x) = f(x)$.
- ФТА II: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, где F — первообразная f.
- Замена переменной: менять переменную ⇒ менять пределы; не смешивать старые пределы с новой буквой.
- Геометрическая площадь: положительные и отрицательные участки; площадь между кривыми — интеграл «верхняя − нижняя».
- Объёмы: интеграл от площади сечения; тела вращения — диски/оболочки.
- Проверка результата: оценка через простые фигуры.

Ключевые слова:

- Интеграл с переменным верхним/нижним пределом
- Фундаментальная теорема анализа
- Формула Лейбница
- Теорема о среднем для интегралов
- Замена переменной, пределы интегрирования
- Интегрирование по частям
- Геометрическая площадь, алгебраическая площадь
- Площадь между кривыми
- Объём тела вращения
- Длина дуги
- Оценка результата, ошибки со знаками