

MODI – projekt 2, zadanie 22

Dzmitry Kuksik

Zadanie 1

MNK

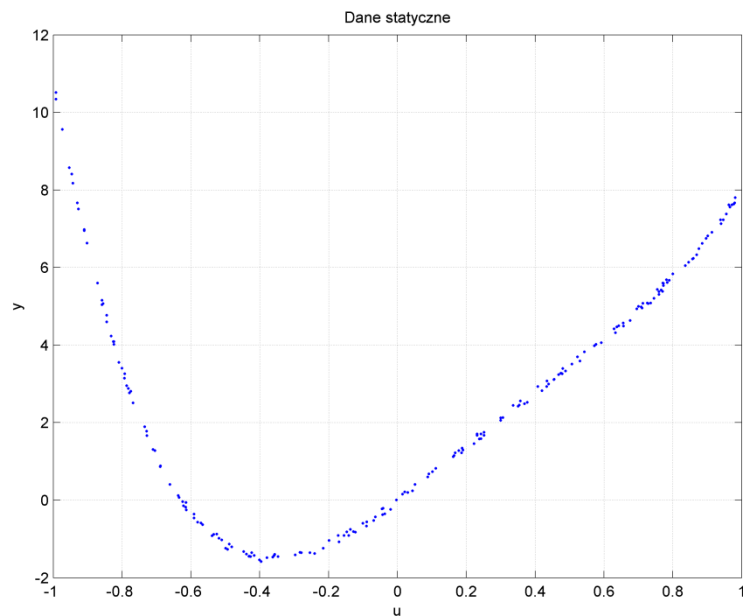
Metoda najmniejszych kwadratów – standardowa metoda przybliżania rozwiązań układów nadokreślonych, tzn. zestawu równań, w którym jest ich więcej niż zmiennych.

$$\min E = \sum_{i=1}^P (y_i - y_i^{mod})^2$$

$$E = ||Y^{mod} - Y||^2 = ||Mw - Y||^2$$

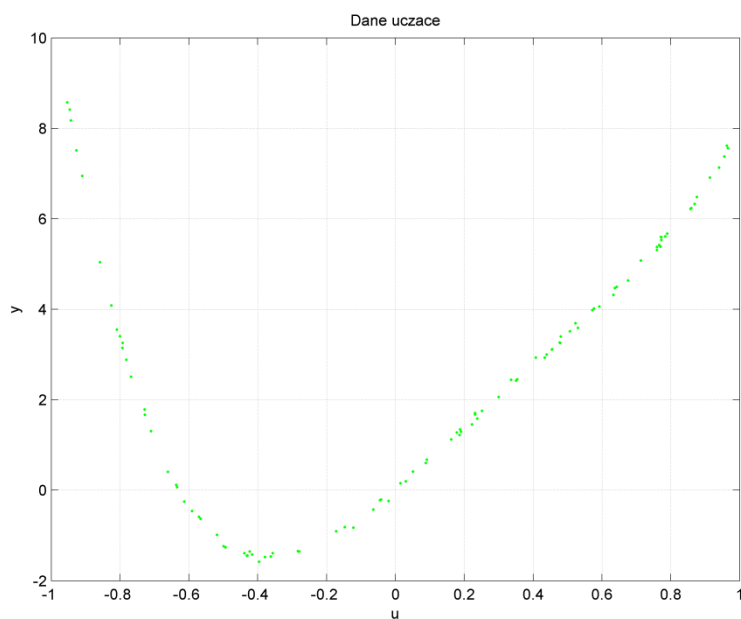
$$w = (M^T M)^{-1} M^T Y$$

a) Dane statyczne :

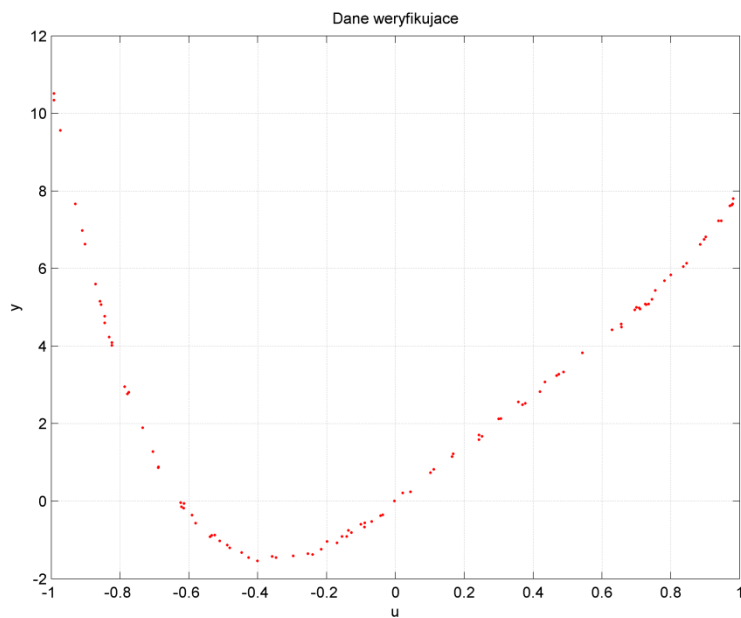


b) Podzielone dane :

Dane uczące



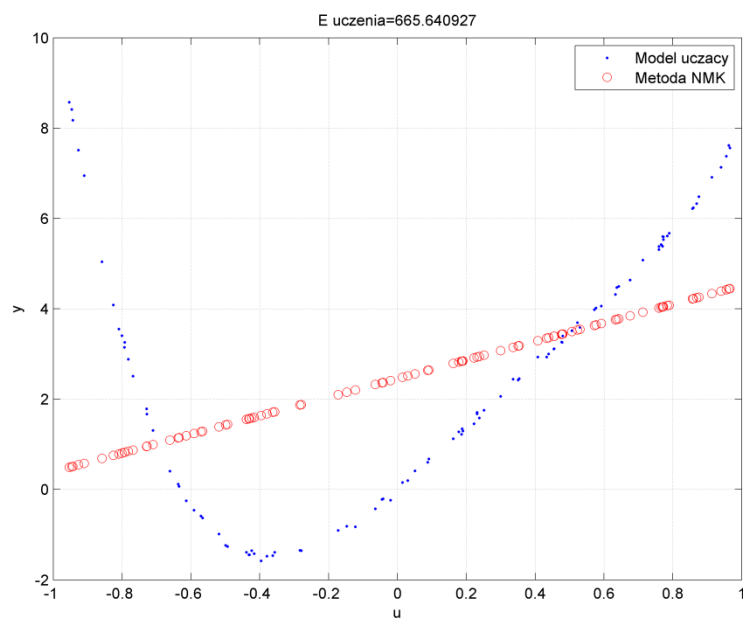
Dane weryfikujące



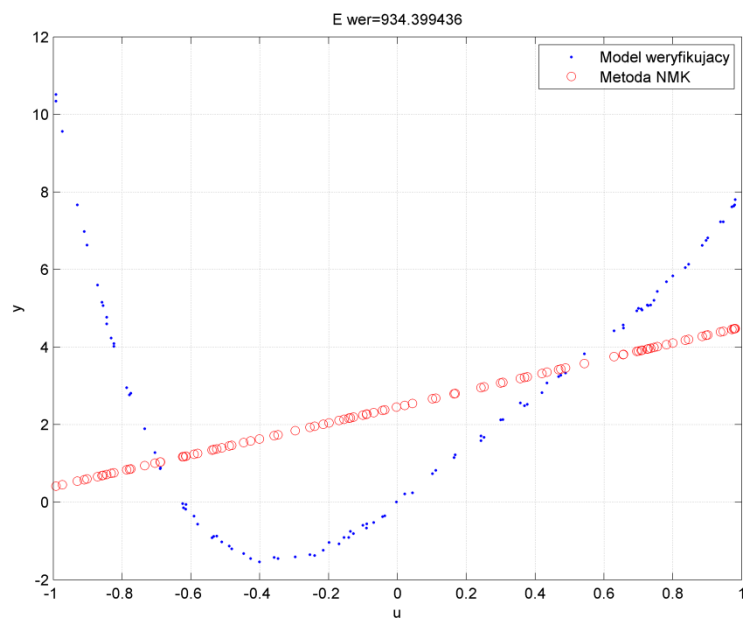
c) Statyczny model liniowy postaci $y(u) = a_0 + a_1 u$ wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów :

$$a_1 = 2.0597 \quad a_0 = 2.4564$$

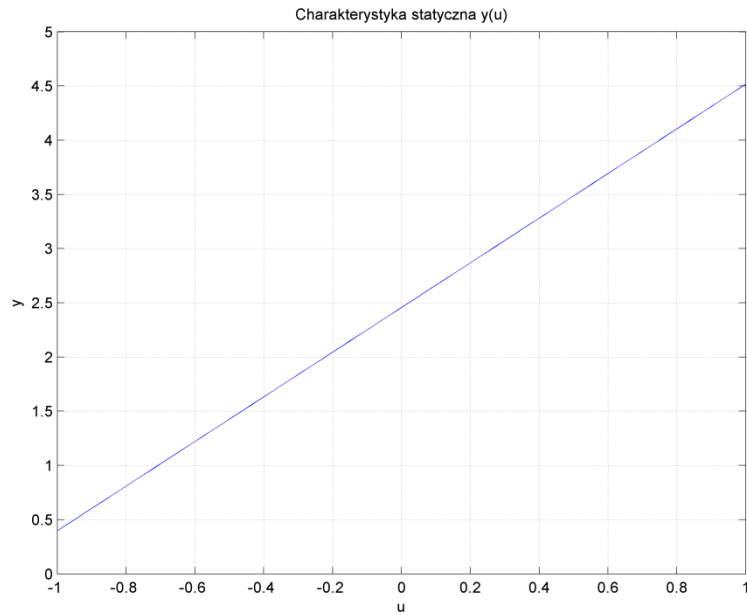
Wyjście modelu na tle danych uczących



Wyjście modelu na tle danych weryfikujących



Charakterystyka statyczna $y(u)$



Błąd modelu dla zbioru uczącego wynosi $E_{ucz} = 665.6409$, wówczas dla zbioru weryfikującego $E_{wer} = 934.3994$.

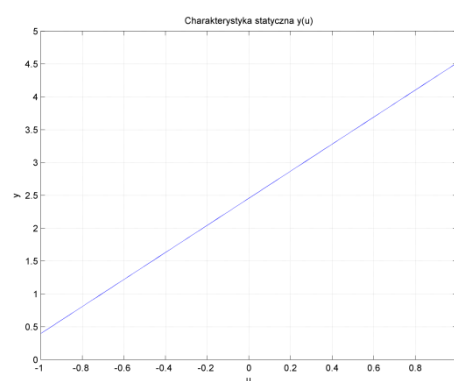
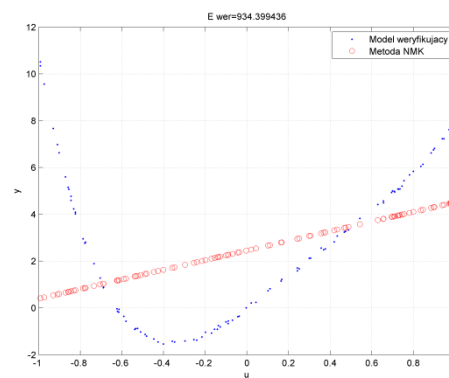
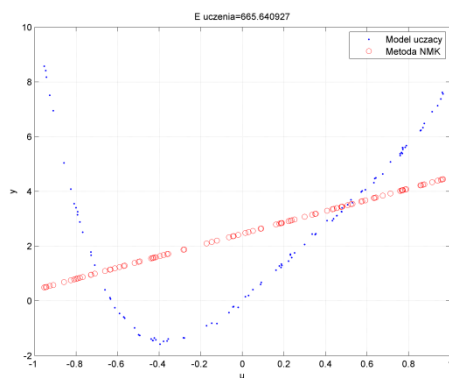
d) MNK dla statycznych modelei nieliniowych postaci :

$$y(k) = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i u^i$$

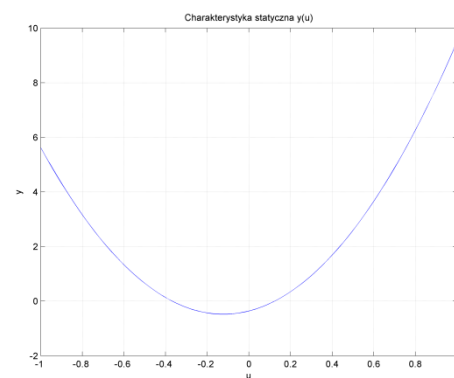
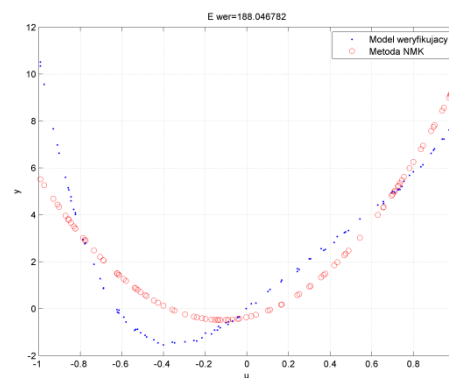
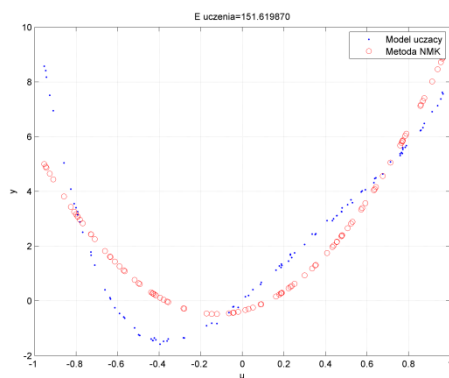
Błąd modeli

Stopień wielomianu N	E_{ucz}	E_{wer}
1	665.6409	934.3994
2	151.6199	188.0468
3	21.3758	28.0949
4	0.3607	0.4421
5	0.3598	0.4420
6	0.3589	0.4420

Dla $N=1$
(dane uczące, dane weryfikujące, ch-ka statyczna)

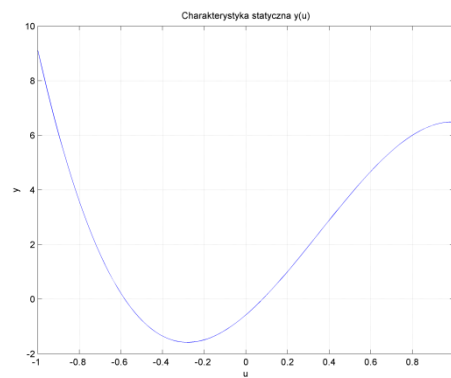
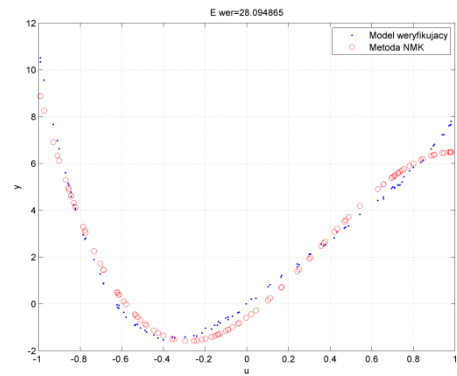
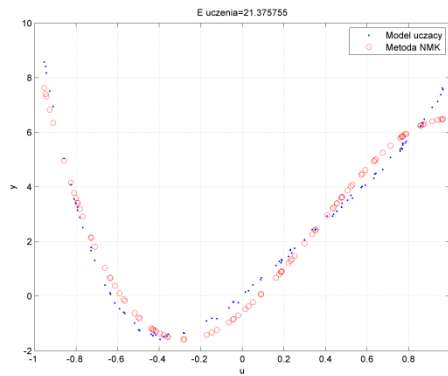


Dla $N=2$
(dane uczące, dane weryfikujące, ch-ka statyczna)



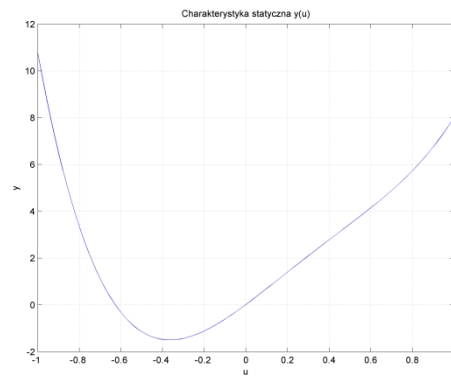
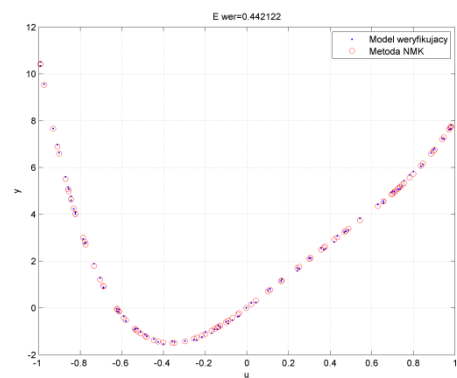
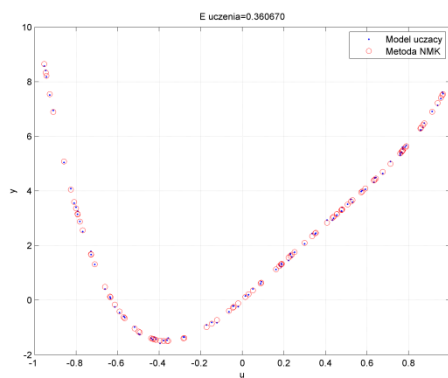
Dla $N=3$

(dane uczące, dane weryfikujące, ch-ka statyczna)



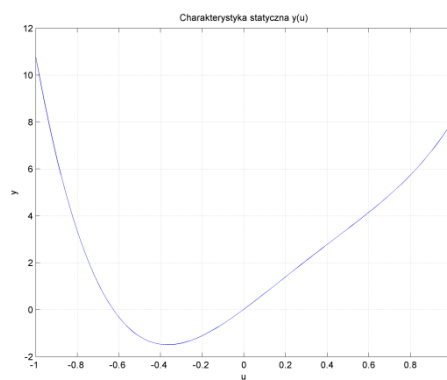
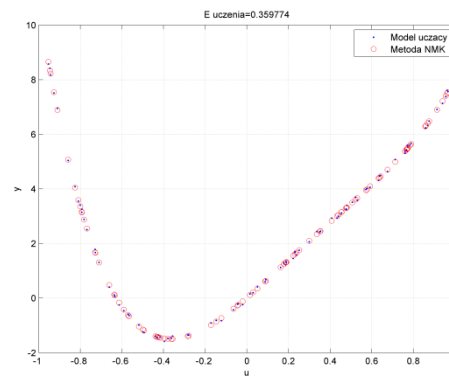
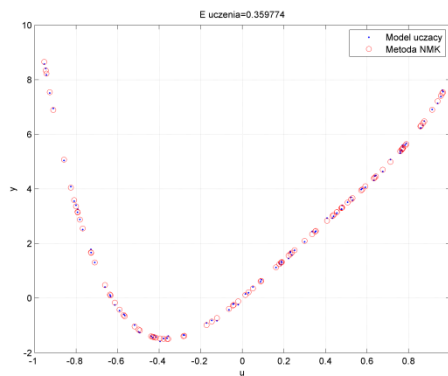
Dla $N=4$

(dane uczące, dane weryfikujące, ch-ka statyczna)



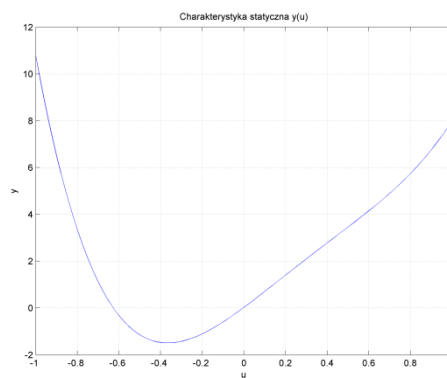
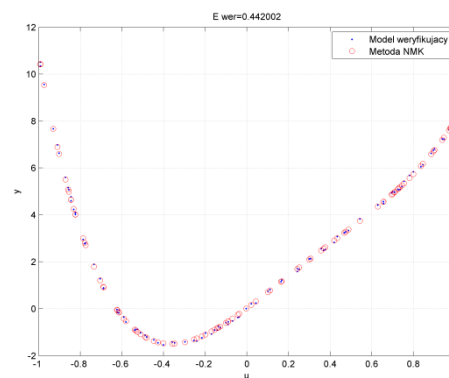
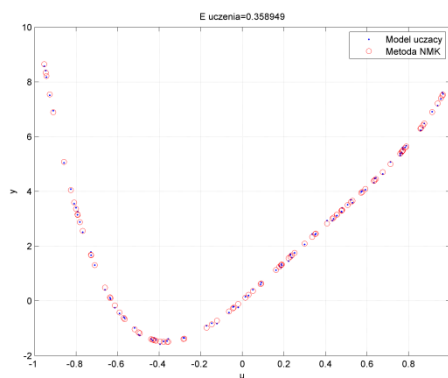
Dla $N=5$

(dane uczące, dane weryfikujące, ch-ka statyczna)



Dla $N=6$

(dane uczące, dane weryfikujące, ch-ka statyczna)



- e) Najlepszy model wybieramy na podstawie otrzymanych błędów dla zbioru weryfikującego. Najmniejszy błąd modeli jest przy stopniu wielomianu $N=5$ oraz $N=6$, ale **optymalnym rozwiązaniem jest stopień wielomianu $N=4$** ze względu na ilość parametrów oraz prawie taki samy mały błąd jak dla stopniu $N=5$.

Zadanie 2

ARX(AutoRegressive)

Metoda “*jeden krok do przodu*” (bez rekurencji) ma postać np.

$$y(k) = w_1 u(k-1) + w_2 u(k-2) + w_3 y(k-1) + w_4 y(k-2)$$

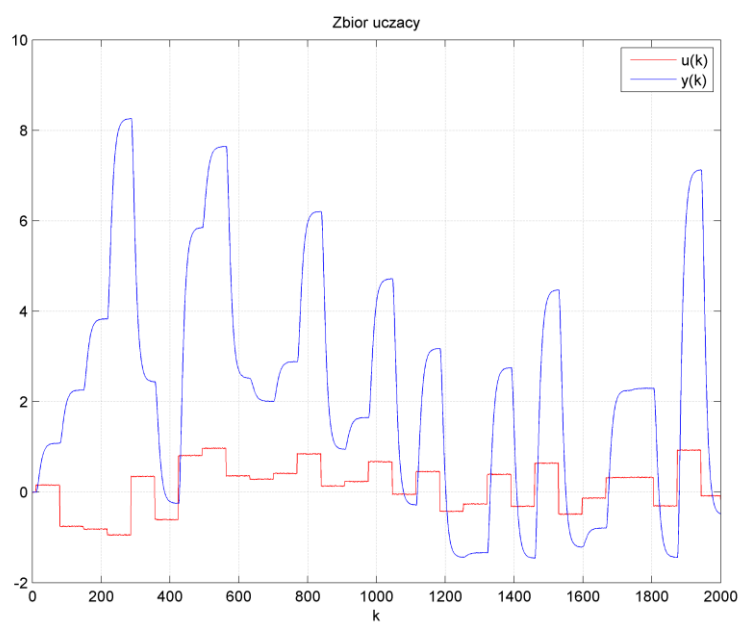
OE(Output-Error)

Metoda z rekurencją ma postać np.

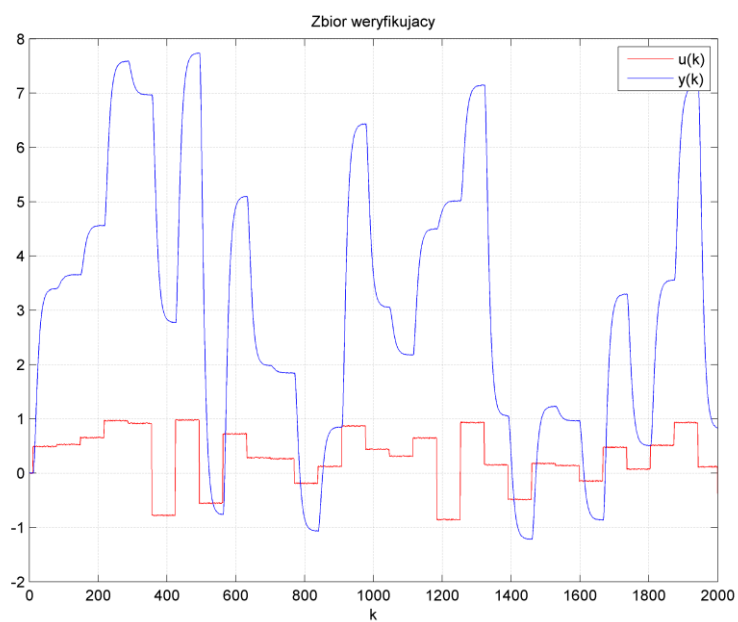
$$y^{mod}(k) = w_1 u(k-1) + w_2 u(k-2) + w_3 y^{mod}(k-1) + w_4 y^{mod}(k-2)$$

a) Dane dynamiczne

Zbiór uczący



Zbiór weryfikujący



b) Dynamiczne modele liniowe postaci

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N_B} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{N_A} a_i y(k-i)$$

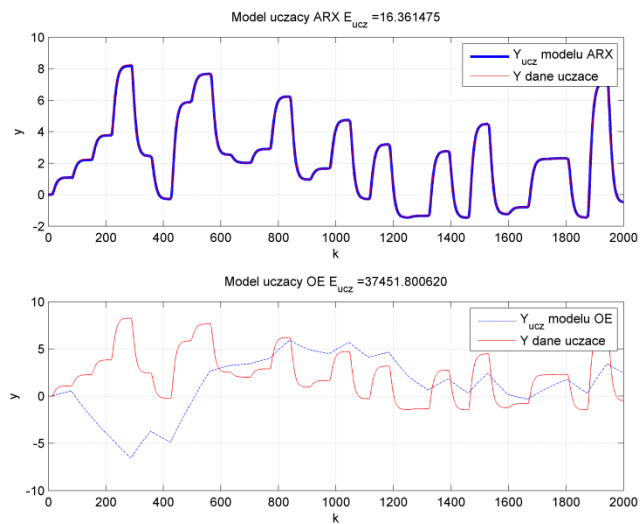
wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów.

Błąd modeli

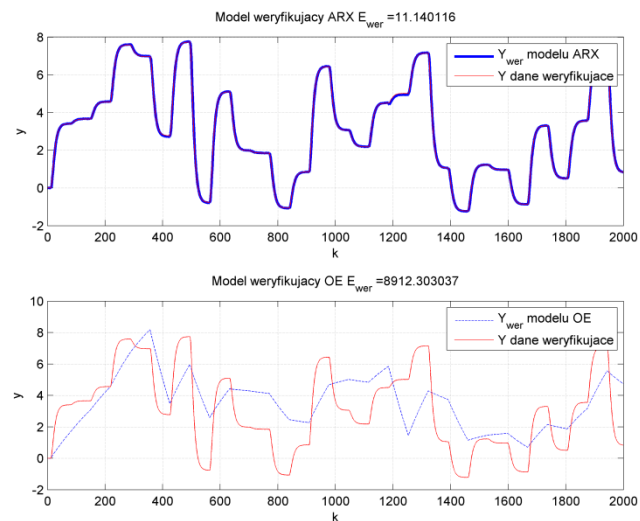
Rząd dynamiki	Dane uczące ARX	Dane weryfikujące ARX	Dane uczące OE	Dane weryfikujące OE
1	16.3615	11.1401	37451.8	8912.3
2	0.5432	0.4493	24731.68	22458.47
3	0.4395	0.3788	18895.99	18372.1336

Dla $N_A=N_B=1$

Zbiór uczący

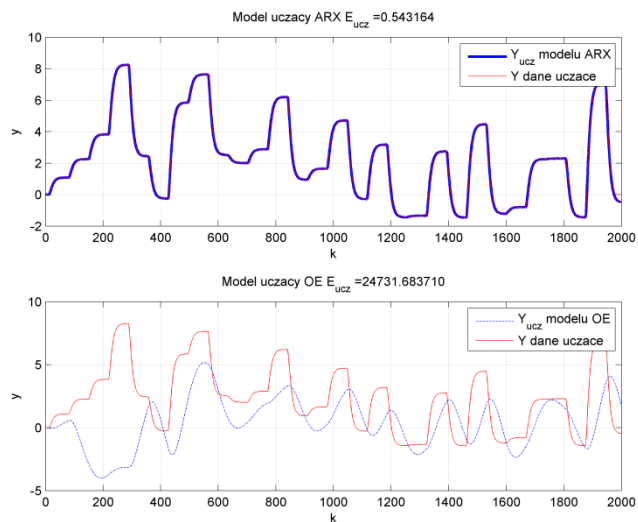


Zbiór weryfikujący

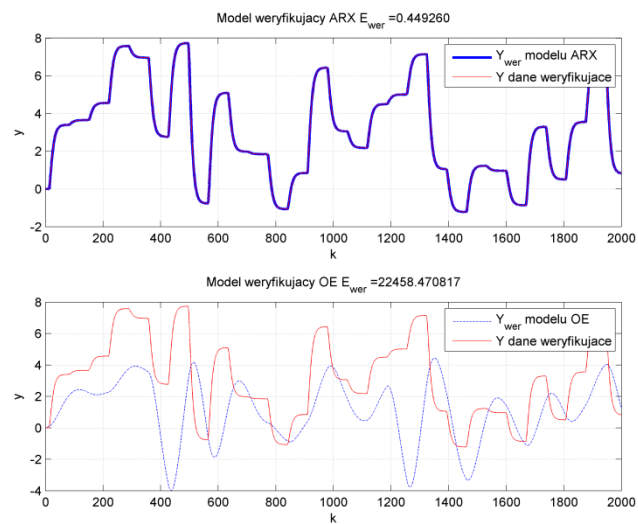


Dla $Na=Nb=2$

Zbiór uczący

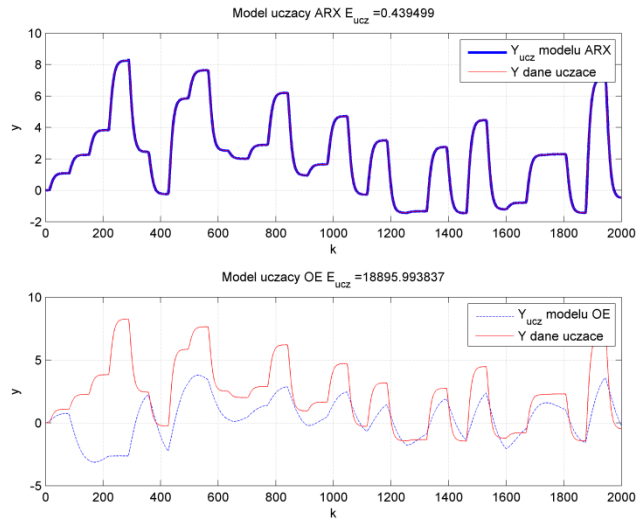


Zbiór weryfikujący

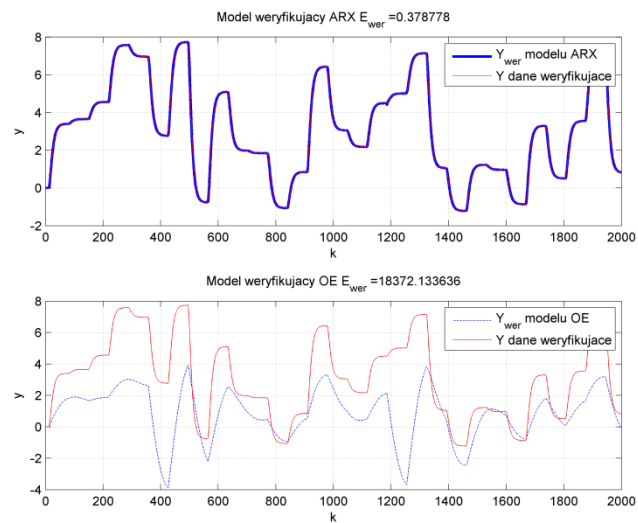


Dla $Na=Nb=3$

Zbiór uczący



Zbiór weryfikujący



Ze względu na błąd najlepiej się dopasował model rekurencyjny dla pierwszego rzędu dynamiki, ale jest to sytuacja wyjątkowa, ponieważ przy innych danych weryfikujących model może się nie dopasować. Natomiast jeżeli nie uwzględniać sytuacji wyjątkową, najlepszy model liniowy z punktu widzenia dokładności w trybie rekurencyjnym jest $Na=Nb=3$.

d) Modele o różnym rzędzie dynamiki i strukturze liniowości postaci

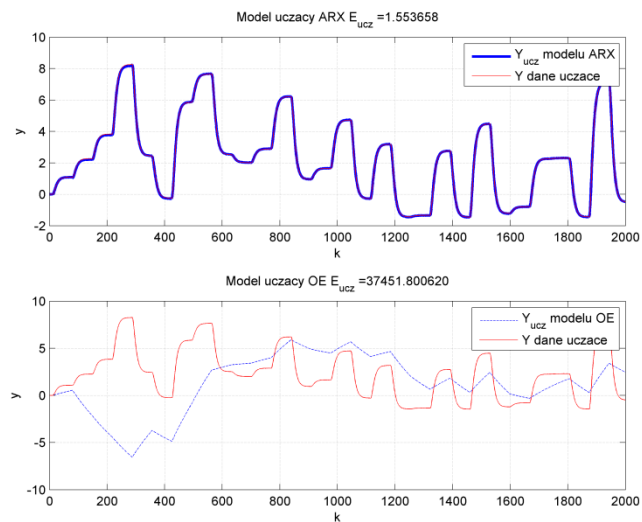
$$y(k) = w_1 u(k-1) + w_2 u(k-1)^2 + \dots + w_N u(k-1)^N + w_{N+1} y(k-1) + w_{N+2} y(k-1)^2 + \dots + w_{2N} y(k-1)^N$$

Błąd modeli o rzędzie dynamiki 1

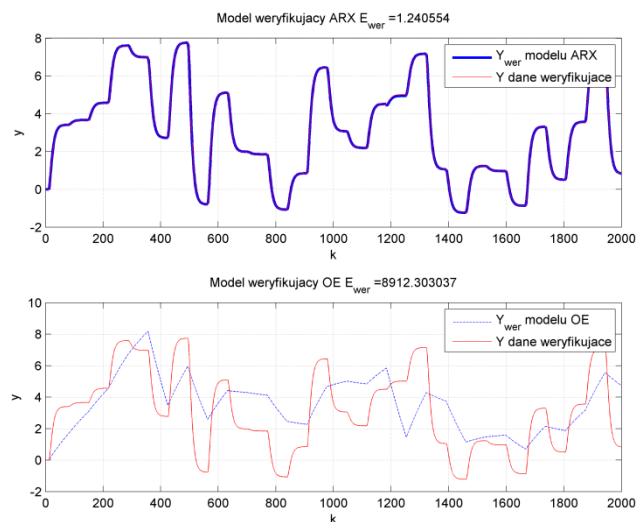
Stopień wielomianu	Dane uczące ARX	Dane weryfikujące ARX	Dane uczące OE	Dane weryfikujące OE
1	16.3615	11.1401	37451.8	8912.3
2	8.0017	7.4958	3596.94	2351.18
3	12.9585	10.2760	662.5804	NaN
4	13.7896	10.7325	219.2853	184.4559
5	13.8042	18.1919	218.9550	9138.90

Dla $N=1$

Zbiór uczący

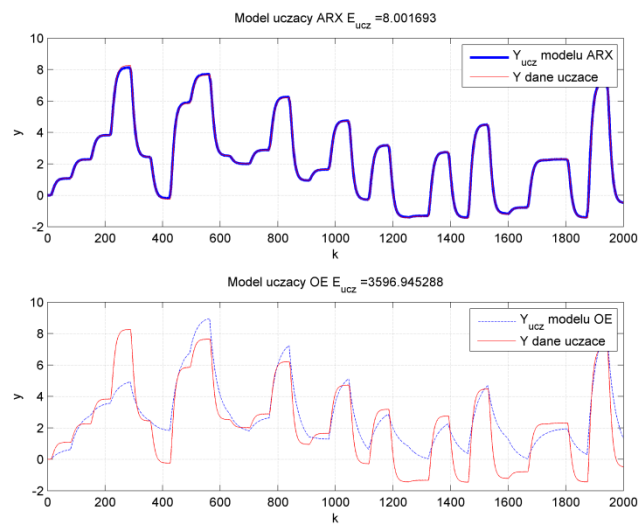


Zbiór weryfikujący

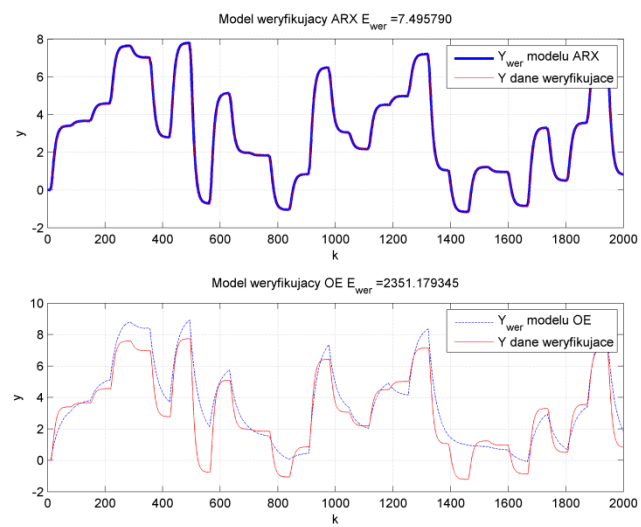


Dla $N=2$

Zbiór uczący

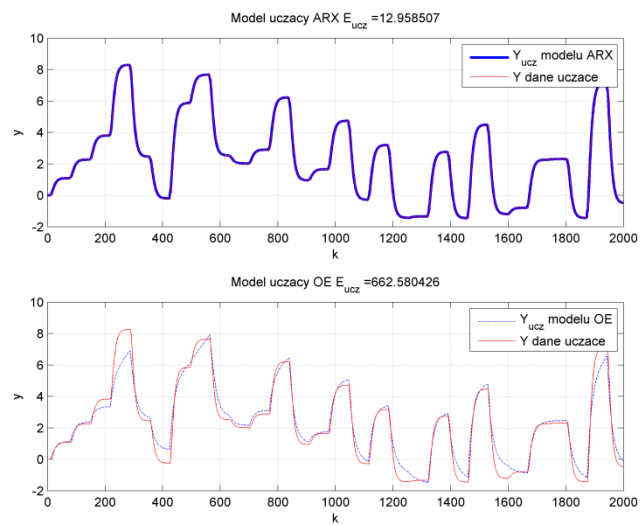


Zbiór weryfikujący

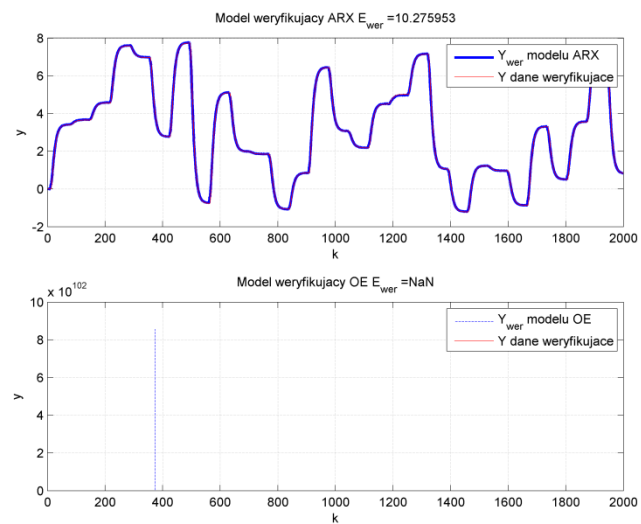


Dla $N=3$

Zbiór uczący

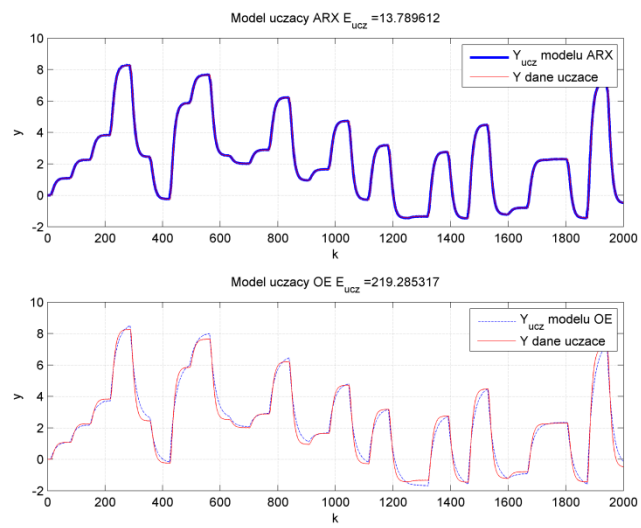


Zbiór weryfikujący

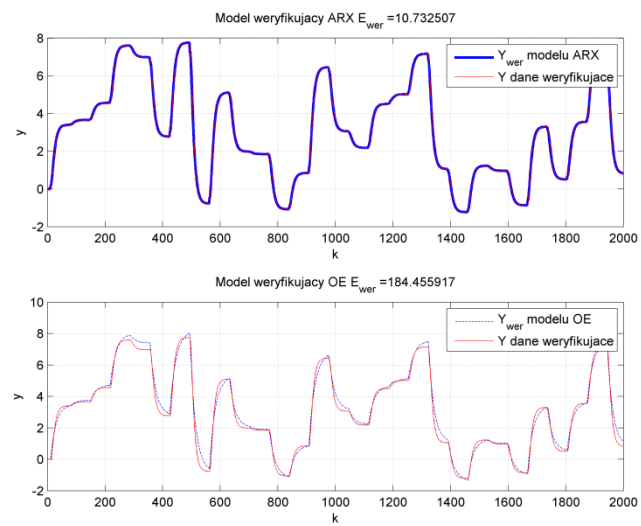


Dla $N=4$

Zbiór uczący

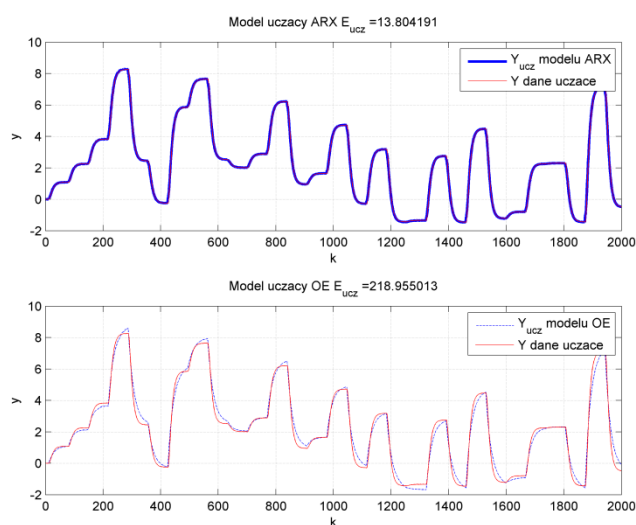


Zbiór weryfikujący

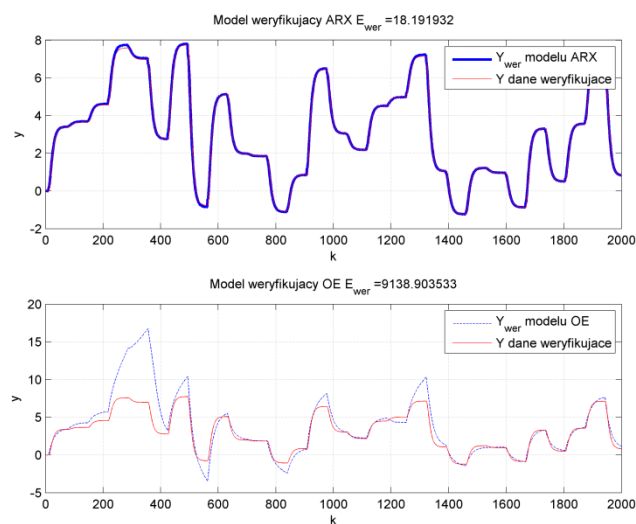


Dla $N=5$

Zbiór uczący



Zbiór weryfikujący



W tym podpunkcie wyraźnie widać, że model z wielomianem 4 stopnia jest najlepszy, zapewnia ten model stosunkową niewielką liczbę parametrów oraz mały błąd w porównaniu do innych modeli. Ciekawe zjawisko występuje przy stopniu wielomiana równym 3. Zjawisko to pokazuje dlaczego warto sprawdzać otrzymane modele na zbiorach innych niż uczących.

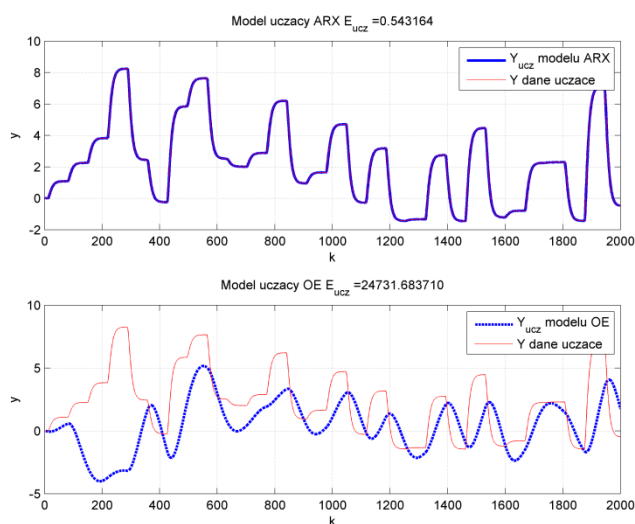
Modele o dynamice 2 rzędu oraz różnym stopniu wielomianów postaci $y(k) = w_1 u(k-1) + w_2 u(k-1)^2 + w_3 u(k-2) + w_4 u(k-2)^2 + w_5 y(k-1) + w_6 y(k-1)^2 + w_7 y(k-2) + w_8 y(k-2)^2$ i t.d.

Błąd modeli o rzędzie dynamiki 2

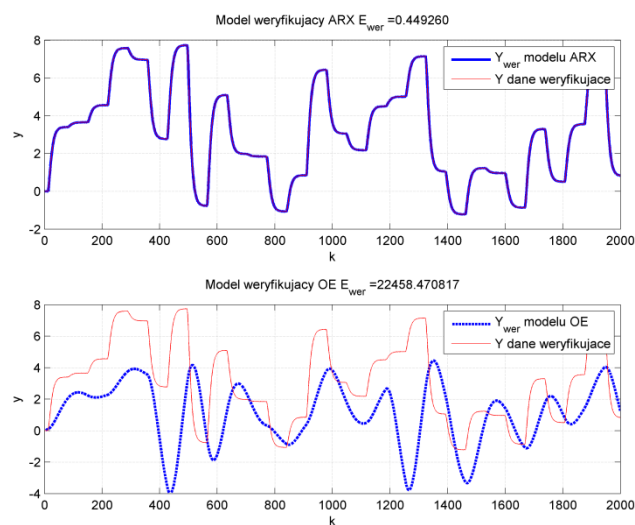
Stopień wielomianu	Dane uczące ARX	Dane weryfikujące ARX	Dane uczące OE	Dane weryfikujące OE
1	0.5432	0.4493	24731.68	22458.47
2	0.4402	0.3309	2473.19	1316.18
3	0.2276	0.2250	306.8758	325.2728
4	0.1546	0.1468	1.5373	1.3980

Dla $N=1$

Zbiór uczący

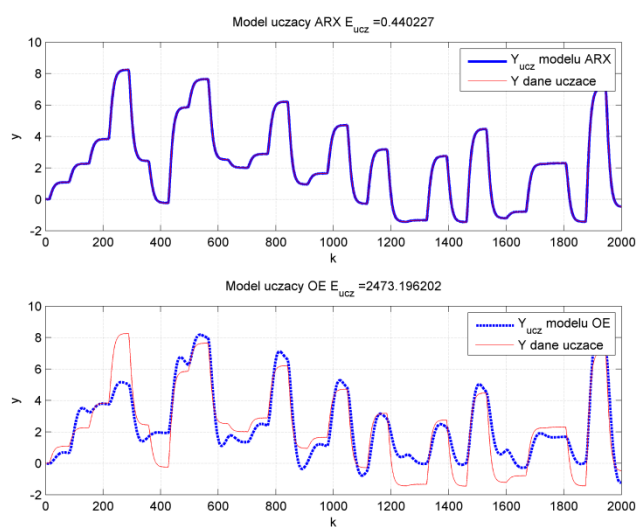


Zbiór weryfikujący

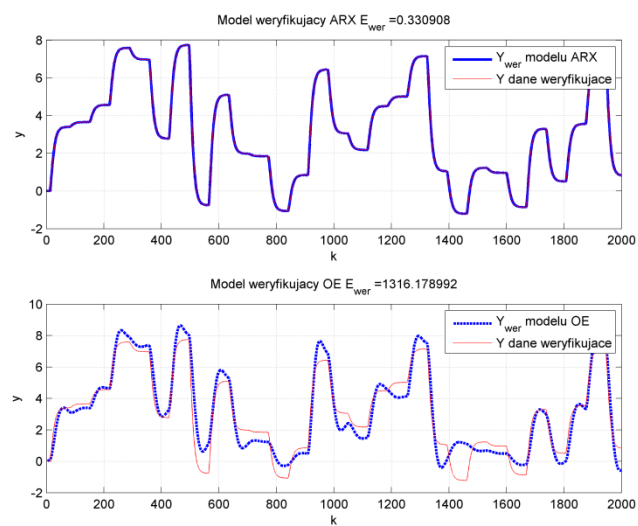


Dla $N=2$

Zbiór uczący

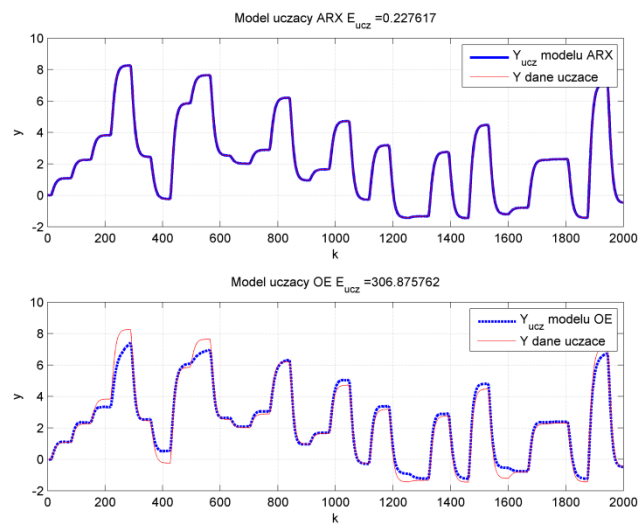


Zbiór weryfikujący

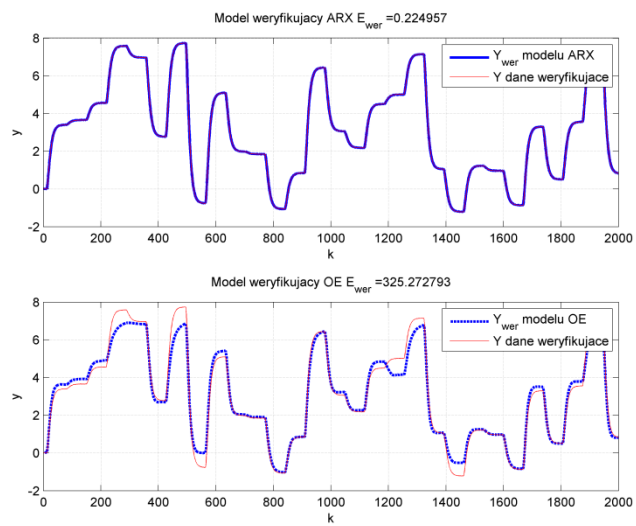


Dla $N=3$

Zbiór uczący

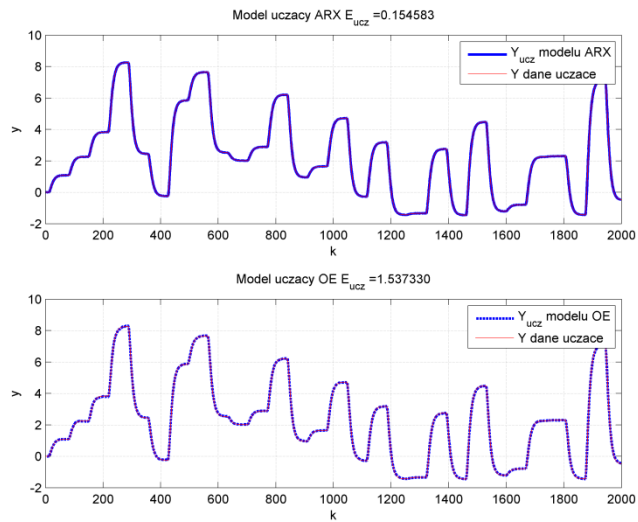


Zbiór weryfikujący

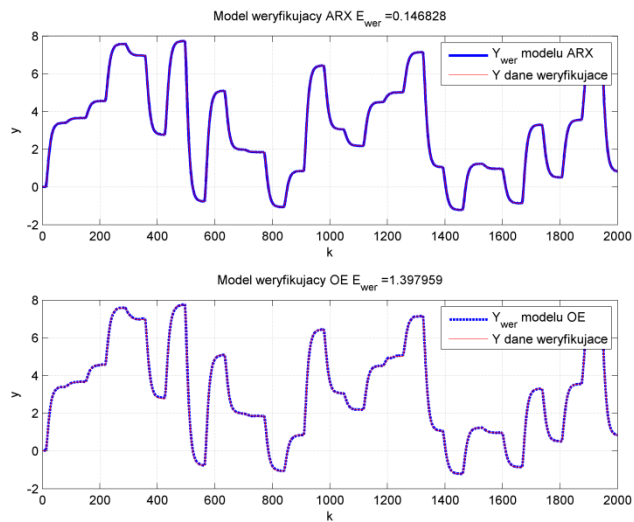


Dla $N=4$

Zbiór uczący



Zbiór weryfikujący



- e) Najlepszy model ze względu na dokładność jest model o 2 rzędzie dynamiki oraz 4 stopniu wielomianu. Jedyną wadą tego modelu jest stosunkowo duża ilość parametrów (16), co powoduje nakład obliczeń. Dlatego optymalny model spośród wszystkich jest model o 1 rzędzie dynamiki oraz 4 stopień wielomianu. Zapewnia ten model stosunkowo

mały błąd, w porównaniu do innych modeli, oraz stosunkowo małą liczbę parametrów (8).

f) Charakterystyka $y(u)$ na podstawie modelu uznanym w poprzednim punkcie za najlepszy :

$$y(u) = w_1 u + w_2 u^2 + w_3 u^3 + w_4 u^4 + w_1 y + w_2 y^2 + w_3 y^3 + w_4 y^4,$$

Gdzie $w_1 = 0.3578$, $w_2 = 0.1731$, $w_3 = -0.4301$, $w_4 = 0.3262$,

$$w_5 = 0.9501, w_6 = -0.0029, w_7 = 0.0007, w_8 = 0.0000$$

