

Теория вероятностей и математическая  
статистика  
*pre- $\alpha$  version*

И. А. Лимар  
ivan.limar95@gmail.com

Санкт-Петербург  
2022-2023

# Оглавление

Предисловие к <i>pre-<math>\alpha</math> version</i>	vi
Введение	viii
<b>1 Введение в теорию вероятностей</b>	<b>1</b>
1.1 Вероятностное пространство . . . . .	1
1.1.1 Вероятностное пространство в широком смысле . . . . .	3
1.1.2 Об области определения вероятности* . . . . .	5
1.2 Примеры вероятностных пространств . . . . .	5
1.2.1 Классическая вероятность . . . . .	5
1.2.2 Геометрическая вероятность . . . . .	10
1.3 Свойства вероятности . . . . .	11
1.4 Условная вероятность. Независимые события . . . . .	15
1.4.1 Формула полной вероятности. Теорема Байеса . . . . .	17
1.5 Схема независимых испытаний Бернулли . . . . .	18
1.6 Предельные теоремы, связанные со схемой Бернулли . . . . .	20
1.6.1 Закон больших чисел . . . . .	20
1.6.2 Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа . . . . .	21
1.6.3 Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа . . . . .	22
1.6.4 Теорема Пуассона . . . . .	23
1.6.5 О погрешностях в предельных теоремах . . . . .	24
1.7 Упражнения . . . . .	25
1.7.1 Модель классической вероятности . . . . .	25
1.7.2 Модель геометрической вероятности . . . . .	30
1.7.3 Условная вероятность. Независимость. Формула полной вероятности и теорема Байеса . . . . .	33
1.7.4 Схема Бернулли и связанные с ней предельные теоремы . . . . .	36
<b>2 Случайные величины и их числовые характеристики</b>	<b>40</b>
2.1 Случайные величины и их распределения. Функция распреде- ления случайной величины . . . . .	40

2.2	Типы случайных величин и распределений . . . . .	44
2.2.1	Дискретные случайные величины и распределения . . . . .	44
2.2.2	Абсолютно непрерывные случайные величины и распределения . . . . .	46
2.2.3	Сингулярные случайные величины и распределения . . . . .	50
2.3	Случайные векторы и многомерные распределения . . . . .	51
2.4	Независимые случайные величины и векторы . . . . .	55
2.4.1	Суммы независимых случайных величин . . . . .	57
2.5	Моделирование случайных величин и распределений . . . . .	60
2.6	Вероятностные интегралы . . . . .	63
2.7	Математическое ожидание и дисперсия . . . . .	65
2.7.1	Математическое ожидание . . . . .	65
2.7.2	Дисперсия . . . . .	67
2.7.3	Вычисление математических ожиданий и дисперсий для некоторых распределений . . . . .	69
2.8	Другие числовые характеристики . . . . .	71
2.8.1	Моменты высших порядков и связанные с ним характеристики . . . . .	71
2.8.2	Квантиль. Медиана . . . . .	72
2.8.3	Мода . . . . .	73
2.9	Вероятностные неравенства . . . . .	74
2.10	Числовые характеристики случайных векторов . . . . .	74
2.10.1	Ковариация и коэффициент корреляции . . . . .	75
2.10.2	Характеристики случайных векторов . . . . .	76
2.11	Условные распределения . . . . .	78
2.11.1	Условные математическое ожидание и дисперсия . . . . .	78
2.12	Упражнения . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Предельные методы теории вероятностей</b>	<b>88</b>
3.1	Вероятностные сходимости . . . . .	88
3.2	Предельные теоремы теории вероятностей . . . . .	91
3.2.1	Закон больших чисел . . . . .	91
3.2.2	Центральная предельная теорема . . . . .	91
3.3	Упражнения . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Введение в математическую статистику. Описательная статистика</b>	<b>94</b>
4.1	Выборка. Эмпирическая функция распределения и гистограмма. Их свойства. Способы визуализации выборки . . . . .	94
4.1.1	Гистограмма . . . . .	97
4.1.2	Box-plot . . . . .	98

4.2	Выборочные моменты и их свойства . . . . .	98
4.2.1	Свойства выборочных моментов . . . . .	99
4.2.2	Прочие выборочные характеристики . . . . .	99
4.2.3	Выборочный моменты для двух выборок . . . . .	100
4.3	Порядковые статистики . . . . .	101
4.3.1	Вариационный ряд. Выборочная квантиль . . . . .	101
4.3.2	Распределение порядковых статистик . . . . .	102
4.3.3	Асимптотические свойства . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Оценивание параметров</b>	<b>103</b>
5.1	Постановка задачи точечного оценивания параметров . . . . .	103
5.2	Свойства точечных оценок . . . . .	104
5.2.1	Несмещенность . . . . .	104
5.2.2	Состоятельность . . . . .	104
5.2.3	Эффективность . . . . .	105
5.2.4	Асимптотическая нормальность . . . . .	105
5.3	Метод моментов . . . . .	106
5.4	Метод максимального правдоподобия . . . . .	106
5.5	Информация Фишера . . . . .	107
5.6	Неравенство Рао-Крамера . . . . .	108
5.7	Доверительные интервалы . . . . .	108
5.8	Асимптотические доверительные интервалы . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Проверка статистических гипотез</b>	<b>114</b>
6.1	Постановка задачи проверки статистической гипотезы . . . . .	114
6.1.1	Статистический критерий . . . . .	114
6.2	Гипотеза о виде распределения. Критерий согласия . . . . .	115
6.3	Проверка гипотез и доверительные интервалы . . . . .	116
6.4	Критерии однородности . . . . .	118
6.4.1	Критерий Смирнова . . . . .	118
6.4.2	Хи-квадрат . . . . .	118
6.4.3	Критерий квантилей . . . . .	119
6.4.4	Критерий знаков . . . . .	119
6.4.5	Критерии Вилкоксона и Манна-Уитни . . . . .	119
6.4.6	Критерий Спирмена . . . . .	119
6.5	Критерии независимости . . . . .	120
6.5.1	Хи-квадрат . . . . .	120
6.6	Критерий отношения правдоподобия . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Линейные статистические модели</b>	<b>124</b>
7.1	Модель линейной регрессии . . . . .	124

<b>Предметный указатель</b>	<b>128</b>
<b>Список литературы</b>	<b>130</b>

# Предисловие к *pre- $\alpha$ version*

Летом 2022 года возникла идея сделать расширенную версию конспекта лекций, рассказываемые мной студентам. Прежде всего хотелось все записи собрать в одном месте. Помимо ввиду недостаточности времени доказательства некоторых теорем и утверждений привожу лишь кратко или не затрагиваю вовсе, но все равно хочется их отразить в записях. Плюс некоторые темы при первом знакомстве могут быть сложными для студентов, поэтому некоторой *абстрактностью* приходится жертвовать, но, как правило, найдется хотя бы два-три студента, которым это было бы интересно, поэтому хочется это отразить (например, сейчас в пункте **”Об области определения вероятности\*”** говорится о контр-примере, иллюстрирующем необходимость рассмотрения сигма-алгебр; к примеру, на мой взгляд, рассказывать *условные распределения* в первый раз в самом общем виде – не всегда лучшая идея). С другой стороны, есть желание записи сделать максимально подробными и снабдить как, чтобы всем желающим записи были полезны.

До текущего момента удалось сделать почти все достаточные для *скелета* задуманные содержательные моменты, хотя еще нужно доработать все главы, особенно **”Предельные методы теории вероятностей”** и **”Линейные статистические модели”**: добавить содержательные комментарии, перепроверить и доработать определения, добавить больше примеров и упражнений, записать более подробно доказательства, привести все к единому стилю, добавить больше источников (задачи можно перечислять долго). Надеюсь, существенная часть этого будет уже в  *$\alpha$ -версии*.

Всего отмеченного выше не получилось бы без добровольцев и помощников, которых считаю нужным отметить. Выражаю благодарность **Матвею Колесову** и **Денису Карпову**, любезно согласившиеся предоставить электронные рукописи, на основе которых набиралась существенная часть текста; **Тимофею Иванову** и **Чулкову Алексею** – за предоставление своих *TeX*-исходников, которые тоже были и будут полезными при работе с текстом. Также хочется поблагодарить **Максима Шехунова**, **Георгия Каданцева** и особенно **Полину Деревницкую**, **Дарью Фирсову** и **Юлию Сандракову**, которые непосредственно помогали набирать текст и без которых работа

существенно затянулась бы.  
21 июля 2023 года.

# Введение

Тут будет введение.



# Глава 1

## Введение в теорию вероятностей

### 1.1 Вероятностное пространство

В любом разделе математики сначала вводятся фундаментальные понятия, на основе которых строится вся дальнейшая теория: в математическом анализе прежде всего вводится понятие вещественного числа, в линейной алгебре – векторное пространство, в теоретической информатике – модель вычислений. В теории вероятностей фундаментальным понятием является *вероятностное пространство*.

Непосредственно перед определением вероятностного пространства нам понадобятся понятия *алгебры* и *сигма-алгебры* системы множеств.

**Определение 1.1.** Пусть  $\Omega$  – множество,  $\mathbf{F}$  – система подмножеств множества  $\Omega$ . Система множеств  $\mathbf{F}$  называется **алгеброй**, если выполняются следующие условия:

- $\Omega \in \mathbf{F}$ ,
- $\forall A, B \in \mathbf{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathbf{F}$ ,
- $\forall A \in \mathbf{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathbf{F}$ , где  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ .

Другими словами система подмножеств  $\Omega$  называется *алгеброй*, если оно содержит само  $\Omega$  и замкнуто относительно объединения и дополнения. Отметим также несложные соображения в виде замечания.

**Замечание.** Алгебра замкнута относительно пересечения, так как  $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ . Также алгебра замкнута относительно конечного числа пересечений, объединений и дополнений.

Далее нам понадобится понятие *сигма-алгебры*.

**Определение 1.2.** Пусть  $\mathcal{F}$  алгебра множеств.  $\mathcal{F}$  называется **сигма-алгеброй**, если она замкнута относительно объединения счётного числа множеств.

Алгебру, как правило, мы будем обозначать в виде жирных заглавных латинских букв  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ , а **сигма-алгебра** – в виде прописных заглавных латинских букв  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ .

Теперь мы готовы сформулировать определение **вероятностного пространства**.

**Определение 1.3.** Тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где  $\mathcal{F}$  – сигма-алгебра подмножеств  $\Omega$ , и  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:

- $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) \geq 0$ ,
- $P(\Omega) = 1$ ,
- $\forall \{A_j\}_{j=1}^{\infty} : A_j \in \mathcal{F}, \forall i, j \in \mathbb{N} \ A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$ ,

называется **вероятностным пространством**.

Множество  $\Omega$  мы будем интерпретировать как *множество элементарных событий*. В определении на него мы не наложили никаких ограничений, так что у него может быть совершенно произвольная структура: оно может быть конечным, счётным или континуальным, оно может состоять из объектов любого типа.

Сигма-алгебру  $\mathcal{F}$  мы будем трактовать как *сигма-алгебру событий*, а его элементы мы будем называть *событиями*. Кроме того, часто вместо термина объединение событий мы будем писать *сумма событий* и на математическом языке писать  $A + B$ , а пересечение событий – *произведение событий*, которое кратко часто будем обозначать как  $AB$ .

Функцию  $P$  мы будем называть *вероятностью*, которая является неотрицательной, *нормированной* и *счетно-аддитивной* функцией.

**Замечание.** Знакомый с теорией меры читатель заметит, что *вероятность* – *нормированная мера*. Желающие более детально познакомиться с теорией меры могут посмотреть, например, в учебник по вещественному анализу [5] или в монографию [3], где в вводном разделе *вероятность определена как мера*.

Событие  $\emptyset$  будем называть *невозможным*, а  $\Omega$  – *лостоверным*. Также мы для обозначения специальных событий или их групп часто будем пользоваться специфическими терминами, которые в дальнейшем изложении будут важны, так что мы оформим их в виде определений.

**Определение 1.4.** События  $A$  и  $B$  называются **несовместными**, если  $AB = \emptyset$ .

**Определение 1.5.** События  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , называются **несовместными**, если любые два события из набора несовместны.

Кроме того, иногда, чтобы подчеркнуть, что мы рассматриваем вероятность суммы несовместных событий, мы вместо знака  $\cup$  будем использовать символ  $\sqcup$  и обозначать термином *дизъюнктивное объединение*.

### 1.1.1 Вероятностное пространство в широком смысле

Для того, чтобы задать *вероятностное пространство*, нам нужно задать *сигма-алгебру* событий, что не далеко не всегда является тривиальной задачей, если решать её напрямую. В данном подпункте мы введем *вероятностное пространство в широком смысле*, которое можно расширить до обычного вероятностного пространства.

**Определение 1.6.** Тройка  $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ , где  $\mathbf{F}$  – алгебра событий, и  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  – функция, удовлетворяющая следующим аксиомам:

- $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) \geq 0$ ,
- $P(\Omega) = 1$ ,
- $\forall \{A_j\}_{j=1}^{\infty} : A_j \in \mathbf{F}, \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathbf{F} \Rightarrow P\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$ ,

называется **вероятностным пространством в широком смысле**.

Определение вероятностного пространства в широком смысле очень похоже на определение вероятностного пространства, но здесь мы определяем *вероятность* на *алгебре* событий и требуем, чтобы *дизъюнктивное объединение* событий принадлежало *алгебре*, в то время как определение *сигма-алгебры* требует, чтобы объединение принадлежало *сигма-алгебре*.

Далее пусть  $F$  – набор событий. Рассмотрим все возможные *сигма-алгебры* событий  $\mathcal{F}$ , которые содержат все события из  $F$  (такие *сигма-алгебры* существуют, например, множество всех подмножеств  $\Omega$ ), и возьмём их пересечение. Оно тоже будет являться *сигма-алгеброй* событий, которую мы будем называть *минимальной сигма-алгеброй*, содержащей  $\mathbf{F}$ , и обозначать как  $\sigma(\mathbf{F})$ . Произвольная *алгебра* или *сигма-алгебра*, содержащая множества из  $F$ , называется *порожденной* набором  $F$  (простейший пример – замыкание относительно дополнения, пересечения и счётного объединения). Более подробно

познакомиться с минимальными сигма-алгебрами, в частности с условиями минимальности, можно в книге Ширяева [9].

Введем борелевскую сигма-алгебру, которая будет играть большую роль в дальнейшем изложении.

**Определение 1.7.** Пусть  $\Omega = E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $F$  – все возможные открытые интервалы вида  $(a, b)$  (может быть, с бесконечными концами), содержащиеся в  $E$ . Тогда  $\mathcal{B} = \sigma(F)$  называется **борелевской сигма-алгеброй**.

**Замечание.** Борелевская сигма-алгебра  $\mathcal{B}^n$  в  $n$ -мерном пространстве определяется аналогично. В данном случае в качестве  $F$  можно взять открытые параллелепипеды.

**Замечание.** Замкнутые интервалы принадлежат борелевской сигма-алгебре. Кроме того,

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right), \quad (a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right),$$

так что одноточечные множества и полуоткрытые интервалы тоже принадлежат борелевской сигма-алгебре.

В заключение данного пункта сформулируем теорему о продолжении меры (Каотеродори), которая показывает, что достаточно задать вероятностное пространство в широком смысле, а соответствующее ему вероятностное пространство получается с помощью продолжения меры. В частности, для того, чтобы задать вероятность на  $\mathbb{R}$ , достаточно определить вероятность на открытых интервалах.

**Теорема 1.1.** Пусть  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathcal{Q})$  – вероятностное пространство в широком смысле. Тогда существует единственная вероятностная мера  $P : \sigma(F) \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что для любых  $A \in \mathbf{F}$

$$P(A) = \mathcal{Q}(A).$$

Тем самым вероятностное пространство в широком смысле  $(\Omega, \mathbf{F}, \mathcal{Q})$  автоматически определяет вероятностное пространство  $(\Omega, \sigma(\mathbf{F}), P)$ .

Доказательство теоремы мы приводить здесь не будем, желающие ознакомиться с ним могут обратиться к [1], [4] или [8].

### 1.1.2 Об области определения вероятности\*

Этот пункт помечен звездочкой, так что он для любознательных.

В предыдущем пункте мы затронули *минимальные сигма-алгебры*, однако не проще ли задать *вероятность* на всех подмножествах  $\Omega$  естественным образом. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. И данный пункт посвящен обоснованию этого утверждения.

Покажем, что невозможно задать меру  $\mu$  на всех ограниченных множествах, которая удовлетворяет следующим условиям:

- $\mu[0, 1] = 1$ .
- Если  $B = A + c = \{a + c : a \in A\}$ , то  $\mu B = \mu A$ .
- Мера  $\mu$  счётно-аддитивна.

Пусть  $A \subset [-1/2, 1/2]$  – неизмеримое по Лебегу множество (процесс его построения можно посмотреть в [6]),  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  – последовательность рациональных чисел на интервале  $[-1; 1]$  (рациональные числа счётны, то есть их можно занумеровать). Далее положим  $A_0 = A$ ,  $A_k = A + r_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда имеем

$$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \subset \bigsqcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

Если мера  $\mu$  с указанными свойствами существует, то  $\mu[-1/2, 1/2] = 1$ ,  $\mu A_k = \Delta$ ,  $k \in \{0, 1, \dots\}$ ,  $\mu[-3/2, 3/2] = m < \infty$ . Тогда мы получим, что

$$1 < \Delta + \Delta + \dots + \Delta + \dots < m,$$

что невозможно для любых неотрицательных  $\Delta$ .

Таким образом, нельзя при  $\Omega = [0; 1]$  вероятность определить как длину промежутка в привычном нам смысле и при этом задать её на всех  $A \subset [0; 1]$ .

## 1.2 Примеры вероятностных пространств

В данном параграфе мы рассмотрим примеры вероятностных пространств.

### 1.2.1 Классическая вероятность

Прежде всего рассмотрим модель классической вероятности, с которой читатель знаком ещё со школьных времен. Пусть  $\Omega$  – конечный набор из  $N$

элементов  $\omega_1, \dots, \omega_N$ . В качестве сигма-алгебры событий возьмем  $2^\Omega$  – множество всех подмножеств  $\Omega$ , которое очевидно является сигма-алгеброй. Положим  $P(\omega_i) = 1/N, i \in \{1, \dots, N\}$ . Тогда вероятность произвольного события  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\}$  вычисляется по формуле

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\}) = M P(\omega_1) = \frac{M}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

которая известна как отношение числа благоприятных исходов к количеству всех исходов. Числа  $M, N$  вычисляются, как правило, комбинаторными способами, которые мы рассмотрим далее.

### Некоторые сведения из комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, посвящённый задачам, связанным с выбором, расположением, перебором элементов, как правило, конечного множества. Чаще всего нам нужно будет находить число элементов того или иного множества. Обычно это удастся сделать с помощью двух основных принципов комбинаторики – правил суммы и пересечения.

Часто всего интересующее нас множество удаётся разбить на несколько взаимно не пересекающихся подмножеств. Тогда общее число элементов искомого множества есть сумма элементов каждого из подмножеств. Этот принцип и называется *правилом суммы*. Можно его сформулировать несколько иначе: если некоторый объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами, объект  $B$  –  $n$  способами, то выбрать "либо  $A$ , либо  $B$ " можно  $m + n$  способами. Здесь нужно внимательно следить за тем, чтобы данные классы не пересекались. Если разбить искомое множество не получается, тогда стоит применить принцип включений-исключений, который будет разобран ниже.

Часто при составлении комбинации из двух элементов известно, что первый можно выбрать  $m$  способами, второй –  $n$  способами, причём число независимо от выбранного первого элемента число возможных вариантов для второго неизменно. Тогда пару элементов можно составить  $mn$  способами. Этот принцип и есть *Правило произведения*. Другими словами: если объект  $A$  можно выбрать  $m$  способами и если после каждого такого выбора объект  $B$  можно выбрать  $n$  способами, то пару  $(A, B)$  можно выбрать  $mn$  способами.

Далее введем фундаментальные для комбинаторики понятия: *перестановку, размещение и сочетание*.

**Определение 1.8.** *Перестановкой (без повторений)  $n$  элементного множества называется упорядоченный набор  $\{1, \dots, n\}$ .*

Общее число перестановок  $n$  элементного множества равняется

$$P_n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

что можно вычислить, например, с помощью принципа произведения.

**Определение 1.9.** *Размещением (без повторений) из  $n$  по  $k$ ,  $k \leq n$ , множества называется упорядоченный набор из  $k$  различных элементов множества  $\{1, \dots, n\}$ .*

Общее число размещений из  $n$  по  $k$  равняется

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

что также легко выводится с помощью принципа произведения.

**Определение 1.10.** *Сочетанием (без повторений) из  $n$  по  $k$ ,  $k \leq n$ , множества называется неупорядоченный набор из  $k$  различных элементов множества  $\{1, \dots, n\}$ .*

Общее число сочетаний из  $n$  по  $k$  равняется

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad (1.1)$$

которое в англоязычной литературе традиционно обозначается как  $\binom{n}{k}$ . Коэффициент  $C_n^k$  называется *биномиальным*. Для доказательства формулы (1.1) достаточно заметить, что для подсчета общего числа сочетаний (без повторений) из  $n$  по  $k$  нужно общее число размещений (без повторений)  $A_n^k$  разделить на число перестановок (без повторений) длины  $k$ , которое равняется  $k!$ . Отметим, что наборы  $(1, 2)$  и  $(2, 1)$  – разные размещения, но с точки зрения сочетаний они представляют один и тот же объект.

Далее рассмотрим перестановки, размещения и сочетания с повторениями.

**Определение 1.11.** *Перестановкой (с повторениями) длины  $n = n_1 + \dots + n_m$  множества  $\{1, \dots, m\}$  называется упорядоченный набор, в котором единица встречается  $n_1$  раз, двойка –  $n_2$  раз,  $\dots$ , число  $m$  –  $n_m$  раз.*

Общее число перестановок (с повторениями) длины  $n = n_1 + \dots + n_m$  множества  $\{1, \dots, m\}$  равняется

$$P(n, n_1, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_m!}, \quad (1.2)$$

который называется *мультиномиальным* (или *полиномиальным*) коэффициентом. Формулу (1.2) можно вывести и другим способом. Ввиду важности рассуждений при выводе оформим её виде леммы.

**Лемма 1.1.**

$$P(n, n_1, \dots, n_m) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n_m}^{n_m}.$$

*Доказательство.* Нам нужно посчитать общее число упорядоченных наборов длины  $n = n_1 + \dots + n_m$ , в котором единица встречается  $n_1$  раз, двойка —  $n_2$  раз,  $\dots$ , число  $m$  —  $n_m$  раз. Сначала выберем позиции в наборе, на которых будут располагаться единицы. Это можно сделать  $C_n^{n_1}$  способами. Далее нужно выбрать  $n_2$  позиций для двоек среди оставшихся  $n - n_1$  позиций. Это осуществляется  $C_{n-n_1}^{n_2}$  способами. В конце нам останется среди оставшихся  $n - n_1 - \dots - n_{m-1} = n_m$  позиций выбрать  $n_m$  позиций, что можно сделать  $C_{n_m}^{n_m}$  (одним) способом. Искомая формула получается с помощью принципа произведения. Также заметим, что

$$\begin{aligned} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n_m}^{n_m} &= \frac{n!(n-n_1)! \cdot \dots \cdot n_m!}{n_1!(n-n_1)!n_2!(n-n_1-n_2)! \cdot \dots \cdot n_{m-1}!n_m!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_m!}. \end{aligned}$$

□

**Определение 1.12.** *Размещением (с повторением) из  $n$  по  $k$  называется упорядоченный набор из  $k$  (необязательно одинаковых) элементов множества  $\{1, \dots, n\}$ .*

Ввиду правила произведения очевидно, что общее число размещений (с повторениями) равняется  $n^k$ .

**Определение 1.13.** *Сочетанием (с повторением) из  $n$  по  $k$  называется неупорядоченный набор из  $k$  (необязательно одинаковых) элементов множества  $\{1, \dots, n\}$ .*

Так вывод формулы подсчёта числа сочетаний (с повторениями) также ценен, то оформим это в виде леммы.

**Лемма 1.2.** *Общее число сочетаний (с повторениями) из  $n$  по  $k$  равняется  $C_{n+k-1}^k$  (очевидно это же можно записать как  $C_{n+k-1}^{n-1}$ ).*

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение  $x_1 + \dots + x_n = k$  относительно целых неотрицательных переменных  $x_1, \dots, x_n$ , при этом  $x_j$  мы интерпретируем как количество чисел  $j$  в наборе. Общее число решений данного уравнения и есть число сочетаний (с повторениями) из  $n$  по  $k$ . Каждому решению данного уравнения сопоставим последовательность из  $k$  шаров и  $n - 1$  перегородки.



Также слева поставим перегородку, которая будет иметь номер ноль, а справа – с номером  $n$ . Тогда если между перегородками с номерами  $j$  и  $j + 1$ ,  $j \in \{0, \dots, n - 1\}$ , расположены  $i$  шаров,  $i \in \{0, \dots, n\}$  (перегородки могут стоять на соседних позициях), то  $x_{j+1} = i$ . Всего таких расстановок можно осуществить  $C_{n+k-1}^{m-1}$  способами.  $\square$

Далее, если речь идёт о комбинаторных объектах без повторений, мы будем просто писать перестановка, размещение или размещения; комбинаторные объекты с повторениями мы будем писать как перестановка с повторениями, размещение с повторениями или сочетание с повторениями.

Желающие более детально разобраться в комбинаторике могут обратиться к книге [2], содержащей множество примеров.

Далее в качестве примера рассмотрим задачу, которая известна как *парадокс дней рождения*.

**Пример 1.1.** *Парадокс дней рождения.* Покажем, что в группе, состоящей из 23 или более человек, вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух людей больше 50%, что не всегда согласуется с нашей интуицией. Так, вероятность совпадения дней рождения у двух людей равна  $1/365 \approx 0,27\%$ , а при умножении этого числа на 23 получится приблизительно 6,7%.

Пусть  $P_n$  – искомая вероятность для группы из  $n$  человек. Очевидно, что при  $n > 365$  (мы предполагаем, что в году 365 дней)  $P_n = 1$ . Для вычисления искомой вероятности найдём вероятность противоположного события (в группе нет людей с совпадающими днями рождения). Обозначим её  $\bar{P}_n$ . В числителе дроби у нас будет число размещений из 365 по  $n$ , а в знаменателе – количество размещений с повторениями из 365 по  $n$ , то есть

$$\begin{aligned}\bar{P}_n &= \frac{365!}{(365 - n)!365^n} = \frac{365 \cdot 364 \dots (365 - n + 1)}{365^n} \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right), \quad n \in \{0, 1, \dots, 365\}.\end{aligned}$$

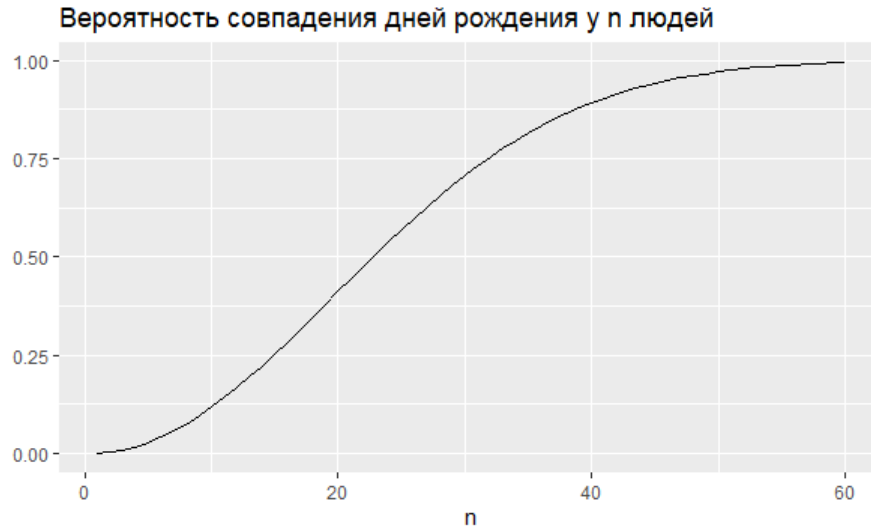
Для нахождения искомой вероятности от единицы нужно отнять вероятность противоположного события (хоть и простое, но важное соображение, ниже будет сформулировано)

$$P_n = 1 - \bar{P}_n = 1 - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right), \quad n \in \{0, 1, \dots, 365\}.$$

Приведем таблицу, в которой численно вычислены  $P_n$  для различных  $n$ :

$n$	2	5	10	20	22	23	30	50	100	366
$P_n, \%$	0,27	3	12	41	48	51	71	97	99,999	1

Также график, иллюстрирующий зависимость, имеет вид



### 1.2.2 Геометрическая вероятность

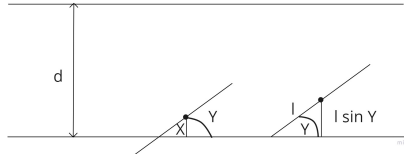
Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – множество с конечной мерой  $\mu$  (например, мера Лебега),  $\mathcal{F}$  – измеримые подмножества  $\Omega$ . Тогда вероятность измеримого множества  $A$  определим как

$$P(A) = \frac{\mu A}{\mu \Omega},$$

которую мы будем именовать *геометрической вероятностью*. Другими словами, мы задали *равномерное распределение* на  $\Omega$ .

Рассмотрим пример, известный как *задача Бюффона о бросании иглы*.

**Пример 1.2.** Имеются разливочный стол, у которого расстояние между линиями равняется  $d$ , и игла длины  $2l < d$ . Найти вероятность пересечения иглой какой-нибудь линии после случайного броска.



Пусть  $X$  – расстояние от центра иглы до ближайшего стола,  $Y$  – угол между линией и иглой, причем он отсчитывается от линии до иглы против часовой стрелки. Эти величины изменяются в пределах  $[0; d/2]$ ,  $[0, \pi]$  соответственно. Таким образом, возможному исходу сопоставляется случайная точка  $(X, Y)$  в квадрате  $S = [0; d/2] \times [0, \pi]$ . Пересечению линии иглой соответствует множество

$$A = \{(x, y) : x \leq l \sin y\}.$$

Искомую вероятность найдём как отношение площадей

$$p = \frac{\mu A}{\mu S} = \frac{2 \int_0^{\pi} l \sin y \, dy}{\pi d} = \frac{4l}{\pi d}.$$

Пока на этом остановимся, но, как мы увидим ниже, про этот пример можно будет сказать многое интересное.

### 1.3 Свойства вероятности

В данном параграфе мы сформулируем и докажем свойства *вероятности*, которые будут полезны при решении задач. Так, в задаче о парадоксах дней рождения мы уже вычислили искомую величину через вероятность противоположное событие.

Простейшие свойства сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.2.** *Справедливы следующие свойства:*

1.  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ .
2.  $P(A) \leq 1$  для всех событий  $A$ .
3.  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$  для всех событий  $A$ .
4.  $P(\emptyset) = 0$ .
5.  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$  для всех событий  $A, B$ .

6.  $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$  для всех событий  $A, B$ .

7.  $P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \leq \sum_{k=1}^N P(A_k)$  для произвольного набора событий  $(A_k)_{k=1}^N$ ,  
 $2 \leq N \leq \infty$ .

*Доказательство.*

1.  $A \subseteq B$ , поэтому  $B = A + (B \setminus A)$ . Имеем  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$ .

2. Следует из предыдущего, так как  $A \subseteq \Omega$  и  $P(\Omega) = 1$ .

3. Следует из представления  $\Omega = A + \bar{A}$ .

4. Следует из предыдущего.

5. Следует из представлений  $A + B = A + (B \setminus AB)$ ,  $B = (B \setminus AB) + AB$ .

6. Следует из предыдущего и неотрицательности вероятности.

7. Следует из первого свойства, счётной аддитивности вероятности и представления

$$\bigcup_{k=1}^N A_k = \bigcup_{k=1}^N A_k B_k, \quad \text{где } B_1 = A_1, B_k = \Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right), k \geq 2.$$

□

Далее мы сформулируем и докажем свойства, которые равносильны счётной аддитивности вероятности

**Теорема 1.3.** *Следующие свойства равносильны счётной аддитивности вероятности:*

- Вероятность конечно-аддитивна и для набора событий  $(B_n)_{n=1}^\infty$  таких, что  $B_{n+1} \subset B_n$  и  $B = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$ , справедливо  $P(B_n) \rightarrow P(B)$ .
- Вероятность конечно-аддитивна и для набора событий  $(A_n)_{n=1}^\infty$  таких, что  $A_n \subset A_{n+1}$  и  $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ , справедливо  $P(A_n) \rightarrow P(A)$ .

Вторые части первого и второго утверждений мы будем называть непрерывностью снизу и сверху соответственно.

*Доказательство.* Заметим, что утверждения в формулировке равносильны вследствие законов де Моргана. В самом деле, пусть справедлива непрерывность сверху, то есть набора событий  $(B_n)_{n=1}^{\infty}$  таких, что  $B_{n+1} \subset B_n$  и  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , верно  $P(B_n) \rightarrow P(B)$ . Положим  $A_n = \overline{B_n}$ ,  $A = \overline{B}$ . Тогда  $A_n \subset A_{n+1}$

$$A = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$P(A_n) = P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n) \rightarrow 1 - P(B) = P(\overline{B}) = P(A).$$

Аналогичным образом доказывается импликация в другую сторону.

Далее покажем равносильность счётной аддитивности и конечной аддитивности вместе с непрерывностью снизу.

Пусть вероятность счётно-аддитивна. Предположим, что нам дана последовательность событий  $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ , для которых  $B_{n+1} \subset B_n$  и  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ . Положим  $C_k = B_k \setminus \overline{B_{k+1}}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда события  $B, C_1, C_2, \dots$  несовместны,  $B_n = B \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$  и мы можем заключить, что

$$P(B_n) = P(B) + \sum_{k=n}^{\infty} P(C_k).$$

В правой части стоит сходящийся ряд, поэтому, перейдя к пределу, имеем  $P(B_n) \rightarrow P(B)$ .

Предположим обратное: конечную аддитивность и непрерывность снизу. Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  – набор несовместных событий. Тогда

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right).$$

Кроме того, имеет место

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы как раз и воспользовались непрерывностью снизу.  $\square$

**Замечание 1.1.** В формулировке и доказательстве мы работали с сигма-алгеброй событий, однако можно модифицировать рассуждения и для алгебры событий: только везде нужно отдельно требовать, чтобы счётное объединение и пересечение принадлежало алгебре.

Далее мы сформулируем и докажем принцип включений-исключений.

**Теорема 1.4.** Справедлива формула для вычисления вероятности суммы

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

*Доказательство.* Будем доказывать индукцией по  $n$ . База индукции уже сформулирована и доказана ранее. Предположим, что формула верна при  $n$  и докажем справедливость формулы для  $n+1$ .

$$\begin{aligned} P(A_1 + \dots + A_n) &= P(A_1 + \dots + A_{n-1}) + P(A_n) - P((A_1 + \dots + A_{n-1})A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n-1} P(A_{k_1} A_{k_2}) + \dots + (-1)^n P(A_1 \dots A_{n-1}) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k A_n) + \dots + (-1)^n (P(A_1 \dots A_{n-2} A_n) + \dots + P(A_2 \dots A_n)) (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n). \end{aligned}$$

□

Приведем пример, известный как задача о письмах

**Пример 1.3.** Имеются  $n$  писем и  $n$  конвертов. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт?

Пусть  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , – событие, заключающееся в том, что  $i$ -е письмо попало в свой конверт. Тогда  $A = A_1 + \dots + A_n$  – искомое событие и согласно формуле включений-исключений имеем

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2}) \\ &\quad + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n) \\ &= C_n^1 \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + (-1)^{n+1} C_n^n \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

## 1.4 Условная вероятность. Независимые события

Рассмотрим пример, подводящий к *условной вероятности* – одному из фундаментальных понятий теории вероятностей. Пусть имеется классическая модель, в которой всего  $N$  элементарных исходов, и  $A, B$  – события, состоящее из  $k, l$  элементарных событий соответственно, при этом событие  $AB$  состоит из  $m$  элементарных исходов. Найдём вероятность события  $A$ , если известно, что  $B$  точно произошло. Обозначим эту вероятность  $P(A|B)$ . Тогда имеем

$$P(A|B) = \frac{m}{l} = \frac{m/N}{l/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1.3)$$

Полученное соотношение можно обобщить на произвольные вероятностные модели и сформулировать определение *условной вероятности*.

**Определение 1.14.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство и  $B \in \mathcal{F}$  – событие с ненулевой вероятностью. Тогда **условную вероятность** при событии  $B$  (вероятность при условии  $B$ ), которую будем обозначать как  $P(\cdot|B)$  и  $P_B$ , согласно соотношению (1.3).

**Замечание.** Условная вероятность  $P_B$  удовлетворяет аксиомам, что проверяется непосредственным образом, и тем самым тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$  тоже является вероятностным пространством.

Сформулируем и докажем свойство, которое называется *формулой произведения* и будет полезна при решении задач.

**Теорема 1.5.** Пусть  $P(A_1 \dots A_n) > 0$ . Тогда справедлива формула

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

*Доказательство.* Для доказательства достаточно последовательно воспользоваться определением условной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A_1 \dots A_n) &= P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) P(A_1 \dots A_{n-1}) \\ &= P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) P(A_{n-1}|A_1 \dots A_{n-2}) P(A_1 \dots A_{n-2}) \\ &= \dots = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) \end{aligned}$$

□

Далее рассмотрим другое фундаментальное понятие теории вероятностей – *независимости*.

**Определение 1.15.** События  $A_1, A_2$  называются **независимыми**, если

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2).$$

События  $A_1, \dots, A_n$  называются **независимыми** (независимыми в совокупности), если для любого поднабора  $A_{j_1}, \dots, A_{j_m}$

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_m}) = P(A_{j_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{j_m}).$$

**Замечание.** Если  $P(A_2) > 0$ , то независимость событий  $A_1, A_2$  равносильна соотношению

$$P(A_1|A_2) = P(A_1),$$

что может служить альтернативным определением независимости.

В определении для независимости набора событий мы требовали, чтобы вероятность произведения событий из любого поднабора равнялась произведению вероятностей, но может независимости любой пары событий (попарной независимости) достаточно? Как мы увидим из следующего примера – нет.

**Пример 1.4.** Пусть имеется правильный тетраэдр, при броске которого вероятность выпадения каждой грани одинакова. Три грани раскрашены в красный, жёлтый и зелёный цвета соответственно, а четвёртая разделена на три части, каждая из которых покрашена в эти цвета.

Формально опишем эту задачу:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ , где  $\omega_k$  соответствует выпадению  $k$ -ой грани, и  $P(\omega_k) = 1/4$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Пусть события  $R = \{\omega_1, \omega_4\}$ ,  $Y = \{\omega_2, \omega_4\}$ ,  $G = \{\omega_3, \omega_4\}$  означают, что на грани появился красный, жёлтый или зелёный цвет соответственно. Несложно заметить, что

$$P(R) = P(Y) = P(G) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность события  $RY$  равняется

$$P(RY) = \frac{1}{4} = P(R) P(Y).$$

Аналогично можно расписать и для  $RG$ ,  $YG$ , поэтому события  $RY$ ,  $RG$ ,  $YG$  попарно независимы, но

$$P(RYG) = \frac{1}{4} \neq P(R) P(Y) P(G),$$

то есть события  $R, Y, G$  не являются независимыми.



### 1.4.1 Формула полной вероятности. Теорема Байеса

Далее рассмотрим два простых, но играющих существенную роль в теории вероятностей и приложениях, утверждения – *формулу полной вероятности* и теорему Байеса.

**Теорема 1.6.** Пусть  $A \subset \bigsqcup B_k$  и  $P(B_k) > 0$ . Тогда справедлива следующая формула

$$P(A) = \sum P(A|B_k) P(B_k).$$

*Доказательство.*

$$P(A) = P\left(A \cap \bigsqcup B_k\right) = \sum P(AB_k) = \sum P(A|B_k) P(B_k).$$

□

Как правило,  $\Omega = \bigsqcup B_k$ , поэтому набор событий  $\{B_k\}$  называют полной группой несовместных событий.

**Теорема 1.7.** Пусть  $A \subset \bigsqcup B_k$  и  $P(B_k) > 0$ . Тогда справедлива следующая формула

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) P(B_k)}{\sum_j P(A|B_j) P(B_j)}.$$

*Доказательство.*

$$P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) P(B_k)}{\sum_j P(A|B_j) P(B_j)}.$$

□

Вероятность события  $B_k$  называется *априорной*, а вероятность  $B_k$  при условии  $A$  – *апостериорной*.

Давайте рассмотрим один пример, который даст противоречащие интуиции результаты.

**Пример 1.5.** Пусть имеются заболевание с долей распространения среди населения 0,001 и метод диагностики, который с вероятностью 0,9 выявляет больного, но с вероятностью 0,01 даёт ложноположительный результат (англ. *false positive*) – “выявление болезни у здорового”. Найти вероятность того, что человек здоров, если диагностика показала положительный результат.

Пусть  $H$  – человек здоров,  $I$  – болен,  $T$  – результат диагностики положительный,  $F$  – результат диагностики отрицательный. Из условия, что  $P(H) = 0,999$ ,  $P(I) = 0,001$ ,  $P(T|I) = 0,9$ ,  $P(F|I) = 0,1$ ,  $P(F|H) = 0,99$ ,  $P(T|H) = 0,01$ . Найдём искомую вероятность

$$P(H|T) = \frac{P(T|H)P(H)}{P(T|H)P(H) + P(T|I)P(I)} = \frac{0,01 \cdot 0,999}{0,01 \cdot 0,999 + 0,9 \cdot 0,001} \approx 0,917.$$

Полученный результат может быть протеричив интуиции, ведь казалось бы вероятность ложноположительной диагностики мала. Можно рассмотреть популяцию в 1000 человек. Тогда 1 болен, но плюс-минус у 10 человек будет положительный результат, хотя 9 из них здоровы.

Раз получились такие результаты, то имеет смысл провести вторую проверку, независимую от первой. Давайте посмотрим вероятность того, что человек здоров, если он получил два положительных результата

$$\begin{aligned} P(H|T_1T_2) &= \frac{P(T_1T_2|H)P(H)}{P(T_1T_2)} = \frac{P(T_1|H)P(T_2|H)P(H)}{P(T_1|H)P(T_2|H)P(H) + P(T_1|I)P(T_2|I)P(I)} \\ &= \frac{0,01^2 \cdot 0,999}{0,01^2 \cdot 0,999 + 0,9^2 \cdot 0,001} \approx 0,11. \end{aligned}$$

## 1.5 Схема независимых испытаний Бернулли

Прежде чем описать схему независимых испытаний Бернулли, или как кратко мы её будем называть *схемой Бернулли*, необходимо формализовать независимые испытания.

**Определение 1.16.** Пусть два испытания описываются вероятностными пространствами  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ . Будем называть пару данных испытаний **независимыми**, если пара испытаний описывается вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$  и для любых  $A_1 \in \mathcal{F}_1$ ,  $A_2 \in \mathcal{F}_2$

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2).$$

Большее число независимых испытаний можно определить индукционным методом. Так, для серии из  $n$  независимых испытаний при любых  $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$  имеем

$$P(A_1 \times \dots \times A_n) = P_1(A_1) \cdot \dots \cdot P_n(A_n).$$

**Замечание.** На самом деле выше мы задали вероятностное пространство в широком смысле, так как  $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_2$  не обязательно является сигма-алгеброй.

Кроме того, знакомый с теорией меры читатель заметил, что приведенная выше конструкция похожа на произведение мер, о котором подробно можно почитать, например, в [5].

Теперь мы готовы сформулировать определение схемы Бернулли.

**Определение 1.17.** *Схемой из  $n$  испытаний Бернулли будем называть  $n$  независимых испытаний, каждое из которых описывается вероятностным пространством  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где*

$$\Omega = \{\omega_s, \omega_u\}, \quad \mathcal{F} = 2^\Omega, \\ P(\omega_s) = p \in [0, 1], \quad P(\omega_u) = q = 1 - p.$$

$\omega_s$  мы будем трактовать как успех в одном испытании,  $\omega_u$  – неудачу. При этом каждой реализации испытаний Бернулли сопоставляется вектор  $\omega$  из  $\omega_s$  и  $\omega_u$ . Тогда, если в векторе  $\omega$   $k$  компонент равняется  $\omega_s$  (в  $n$  испытаниях было  $k$  успехов),

$$P(\omega) = p^k q^{n-k}.$$

Кроме того, если  $S_n$  – число успехов в  $n$  испытаниях Бернулли, то имеем

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Далее сформулируем и докажем теорему о наиболее вероятном числе успехов.

**Теорема 1.8.** *Пусть имеется схема Бернулли из  $n$  испытаний. Тогда наиболее вероятное число успехов вычисляется как*

$$k_* = \begin{cases} (n+1)p - 1 \text{ и } (n+1)p, & \text{если } (n+1)p - \text{целое,} \\ \lfloor (n+1)p \rfloor, & \text{иначе.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Зафиксируем  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . Заметим, что

$$\frac{P(S_n = k+1)}{P(S_n = k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}.$$

Сравним эту дробь с единицей

$$\frac{(n-k)p}{(k+1)q} \vee 1, \quad (n-k)p \vee k+1 - kp - p, \quad (n+1)p - 1 \vee k,$$

то есть мы получили, что  $P(S_n = k+1) > P(S_n = k)$  при  $k < (n+1)p - 1$  и  $P(S_n = k+1) < P(S_n = k)$  при  $k > (n+1)p - 1$  и справедливо искомое соотношение.  $\square$

## 1.6 Пределные теоремы, связанные со схемой Бернулли

### 1.6.1 Закон больших чисел

Скорее всего, читатель ранее слышал, что при большом числе испытаний доля успехов приблизительно равняется вероятности успеха. Это действительно имеет место при определённых предположениях, в частности, для схемы Бернулли. Это утверждения, точнее утверждения, носят название *законов больших чисел*. Приведём их формулировки для схемы Бернулли, а доказывать их мы будем уже ниже в более общих предположениях. Начнём со *слабого закона больших чисел*.

**Теорема 1.9.** Пусть, как и прежде,  $S_n$  – число успехов в  $n$  испытаниях Бернулли и вероятность успеха равняется  $p$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Приведём формулировку *усиленного закона больших чисел*

**Теорема 1.10.**

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = p\right) = 1.$$

Вернёмся к примеру, в котором мы вычислили вероятность пересечения иглы и разлинованного стола при случайном броске. Напомним, что

$$p = \frac{4l}{\pi d},$$

где  $d$  – расстояние между линиями,  $2l < d$  – длина иглы. Далее рассмотрим уже  $n$  независимых бросков иглы на разлинованный стол. Мы можем данную задачу формализовать в рамках схемы Бернулли с указанной нами вероятностью успеха. Благодаря *законам больших чисел*, мы имеем право приравнять долю успехов к вероятности успеха при больших  $n$

$$\frac{S_n}{n} \approx \frac{4l}{\pi d},$$

что можно использовать для приближенного вычисления числа  $\pi$ , так как величины  $S_n$ ,  $n$ ,  $l$  и  $d$  мы можем непосредственно измерить. Это из первых решений, иллюстрирующий *метод Монте-Карло*. Он заключается в том, что для приближенного вычисления той или иной величины, запускается многократная симуляция (в нашем примере – бросание иглы), и затем с помощью предельных теорем, в частности *законов больших чисел*, мы получаем соотношения, из которых рассчитывается интересующий показатель.

### 1.6.2 Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

При больших  $n$  вычислить вероятность  $P(S_n = k)$  бывает не всегда просто с вычислительной точки зрения. Да, условный Wolfram сможет вычислить, но реализовать напрямую вычисление этой вероятности в популярных языках программирования не всегда получится, поэтому приходится прибегать к аппроксимациям. Одной из таких аппроксимаций является локальная предельная теорема Муавра-Лапласа.

Начнём со вспомогательных лемм.

**Лемма 1.3.** Пусть  $p \in (0, 1)$  и положим:

$$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1 - x) \ln \frac{1 - x}{1 - p}, \quad p^* = \frac{k}{n}.$$

Тогда при  $k \rightarrow \infty$ ,  $n - k \rightarrow \infty$  (как следствие,  $n \rightarrow \infty$ )

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np^*(1 - p^*)}} \exp\{-nH(p^*)\}.$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулой Стирлинга, в силу которой  $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \frac{n!}{(n - k)!k!} p^k (1 - p)^{n - k} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n - k)}} \frac{n^n}{k^k (n - k)^{n - k}} p^k (1 - p)^{n - k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi p^*(1 - p)^*}} \exp \left\{ -k \ln \frac{k}{n} - (n - k) \ln \frac{n - k}{n} + k \ln p + (n - k) \ln(1 - p) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi p^*(1 - p)^*}} \exp \{-nH(p^*)\}. \end{aligned}$$

□

Теперь мы уже готовы сформулировать саму локальную предельную теорему Муавра-Лапласа.

**Теорема 1.11.** Пусть помимо условий леммы  $k - np = o(n^{2/3})$ . Тогда

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{(k - np)^2}{npq} \right\}.$$

*Доказательство.* Заметим, что функция  $H(x)$  является аналитической на  $(0, 1)$  и

$$\begin{aligned} H'(x) &= \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1 - x}{1 - p}, \quad H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}, \\ H(p) &= H'(p) = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, так как  $k - np = o(n^{2/3})$ , то  $p^* - p = o(n^{-1/3})$ . Тогда

$$\begin{aligned} H(p^*) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) (p - p^*)^2 + O((p - p^*)^3) \\ &= \frac{(p - p^*)^2}{2pq} + o(n^{-1}). \end{aligned}$$

В итоге мы получим, что

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{(k - np)^2}{2npq} \right\}.$$

□

**Замечание.** Введём функцию  $\phi(x)$ , которая задаётся следующим образом:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}.$$

Также заметим, что

$$P(S_n = k) = P \left( \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \right).$$

Немного забежим вперёд:  $np$  и  $\sqrt{npq}$  – математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения. Положим  $x = (k - np)/\sqrt{npq}$ . Тогда полученный результат можно переписать как

$$P \left( \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x \right) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x). \quad (1.4)$$

### 1.6.3 Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа

Рассмотрим сумму вида

$$P_n(a, b) = \sum_{k=1}^m P \left( \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x_k \right),$$

и предположим, что  $x_1 = a$ ,  $x_m = b$ . По локальной теореме Муавра-Лапласа и соотношению (1.4) заменим каждое слагаемое аппроксимацией

$$P_n(a, b) \approx \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x_k),$$

и заметим, что  $x_{k+1} - x_k = 1/\sqrt{npq}$ . Тогда правая часть по сути есть интегральная сумма и правдоподобным является соотношение

$$P_n(a, b) \approx \int_a^b \phi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где  $\Phi(x)$  определяется как

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt.$$

Забегая вперёд,  $\Phi(x)$ ,  $\phi(x)$  – функция распределения и плотность *стандартного нормального закона* соответственно.

Сформулируем интегральную теорему Муавра-Лапласа, но её доказывать не будем, так как в дальнейшем мы разберём более общую теорему.

**Теорема 1.12.** *Справедливо соотношение*

$$\sup_{-\infty \leq a < b \leq +\infty} \left| P \left( a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) - (\Phi(b) - \Phi(a)) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Замечание.** Из теоремы следует, что при  $-\infty A < B \leq +\infty$

$$P(A < S_n \leq B) - \left( \Phi \left( \frac{B - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left( \frac{A - np}{\sqrt{npq}} \right) \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

### 1.6.4 Теорема Пуассона

**Теорема 1.13.** Пусть в схеме Бернулли из  $n$  независимых испытаний  $p_n = \lambda/n + o(1/n)$  и положим

$$P_n(k) = \begin{cases} C_n^k p_n^k q_n^{n-k}, & k \in \{0, \dots, n\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

*Доказательство.* Заметим, что при  $k \in \{0, \dots, n\}$  имеет место

$$\begin{aligned} P_n(k) &= C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{n \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}{k!} \left( \lambda/n + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k \left( 1 - \lambda/n + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n-k} \\ &= \frac{n \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \lambda^k}{n^k k!} (1 + o(1))^k \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

### 1.6.5 О погрешностях в предельных теоремах

Как видно из формулировки и доказательства локальной теоремы Муавра-Лапласа, её имеет смысл применять при "больших"  $n$  и  $k$ , отстоящих "недалеко" от  $np$ . Кроме того, при маленьких  $p$  для приемлемой аппроксимации естественно, чтобы  $n$  было "очень большим" (более детально о погрешности в локальной предельной теореме можно почитать в [1]).

Далее определим  $F_n(x)$  следующим образом:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \mathbf{1}(x \leq k),$$

где  $\mathbf{1}(\cdot)$  – предикаторная функция, возвращающая единицу при истинности её аргумента и ноль – в противном случае. Функция  $F_n(x)$  называется *функцией распределения*. Имеем место оценки Берри-Эссена

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}},$$

которая позволяет оценить погрешность в интегральной теореме Муавра-Лапласа. Кроме того, порядок  $1/\sqrt{n}$  нельзя улучшить. Видим, что для приемлемой аппроксимации  $n$  должно быть "большим", а при маленьких  $p$  "ещё больше".

Как раз при малых  $p$  имеет смысл использовать теорему Пуассона. Действительно, имеет место оценка Прохорова для соответствующего большинству задач случая  $\lambda = np$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} P(S_n = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq 2p \min(2, np),$$

откуда видно, что пуассоновская аппроксимация будет хорошо работать при маленьких  $p$  и  $np$ .

Таким образом, можно сформулировать "эвристику": при маленьких  $p$  и  $np$  (меньше 10) использовать теорему Пуассона, при больших  $np$  (больше сотни) и близких к  $1/2$   $p$  – нормальную аппроксимацию. В "промежуточных" случаях обе теоремы плюс-минус работают одинаково, но тут все зависит от конкретной задачи. За большим числом примеров можно обратиться, например, к [7].



## 1.7 Упражнения

### 1.7.1 Модель классической вероятности

1. Колода из 36 карт хорошо перемешали (т.е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности событий:  $A$  =четыре туза расположены рядом  $B$  =места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7
2. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом)
3. Брошены три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:  
 $A$  =первая монета выпала "гербом"вверх  
 $B$  =выпало ровно два "герба"  
 $C$  =выпало не больше двух "гербов" .
4. Из множества всех последовательностей длины  $n$ , состоящих из цифр 0,1,2, случайно выбирается одна. Найти вероятности событий:  
 $A$  =последовательность начинается с 0,  
 $B$  =последовательность содержит ровно  $m + 2$  нуля, причем 2 из них находятся на концах последовательности,  
 $C$  =последовательность содержит ровно  $m$  единиц,  
 $D$  =в последовательности ровно  $m_0$  нулей,  $m_1$  единиц,  $m_2$  двоек
5. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе:
  - (a) имеет все цифры разные;
  - (b) имеет только одинаковые цифры;
  - (c) имеет две пары одинаковых цифр;
  - (d) имеет только три одинаковые цифры;
  - (e) имеет все цифры одинаковые?
6. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны:
  - (a) не выпало ни одной "6";
  - (b) выпало ровно три "6";

- (с) выпала хотя бы одна "6";
- (d) выпало хотя бы две "6";
7. Из множества  $0, \dots, N$  по схеме равновероятного выбора с возвращением извлекаются числа  $X_1, \dots, X_m$ . Пусть  $b_k, N(m) = P X_1 + \dots + X_m = k, \quad 0 \leq k \leq mN$ .
- (a) Доказать, что  $b_k, N(m) = b_k, N(m) \sim k, N$ ;
- (b) Доказать, что  $\sum_{k=0}^{mN} b_k, N(m) Z^k = \frac{1}{(N+1)^m} \left( \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \right)^m$ ;
- т.е. что  $\sum_{k=0}^{mN} b_k, N(m) Z^k = \frac{1}{(N+1)^m} \sum_{j=0}^{[k/(N+1)]} (-1)^j C_{k-j}^{m-1} (N+1) + m - 1 C_m^{\zeta}$   
 $k = 0, 1, \dots, mN$
8. Найти вероятность того, что в номере случайно выбранного в большом городе автомобиля сумма первых двух цифр равна сумме двух последних.
9. Некоторые москвичи считают трамвайный, троллейбусный или автобусный билет "счастливым" если сумма первых трех цифр его шестизначного номера совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить «счастливый» билет.
10. Из карточек разрезной азбуки составлено слово "СТАТИСТИКА". Затем из этих 10 карточек по схеме случайного выбора без возвращения отобрано 5 карточек. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово «ТАКСИ».
11. Из 30 чисел  $(1, 2, \dots, 29, 30)$  случайно отбирается 10 различных чисел. Найти вероятности событий:  
 $A$  = все числа нечетные,  
 $B$  = ровно 5 чисел делится на 3,  
 $C$  = 5 чисел четных и 5 нечетных, причем ровно одно число делится на 10.
12. Из урны, содержащей  $M_1$  шаров с номером 1,  $M_2$  шаров с номером 2,  $\dots$ ,  $M_N$  шаров с номером  $N$ , случайно без возвращения выбирается  $n$  шаров. Найти вероятности событий:
- (a) появилось  $m_1$  шаров с номером 1,  $m_2$  шаров с номером 2,  $\dots$ ,  $m_N$  шаров с номером  $N$ ;
- (b) каждый из  $N$  номеров появился хотя бы один раз;

13. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись 3 папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.
14. За круглый стол рассаживаются в случайном порядке  $2n$  гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разбить на  $n$  непересекающихся пар так, чтобы каждая пара состояла из сидящих рядом мужчины и женщины?
15. В первом ряду кинотеатра, состоящем из  $N$  кресел, сидит  $n$  человек. Предполагая, что все возможные размещения этих  $n$  человек в первом ряду равновероятны, найти вероятности следующих событий:
- (а)  $A_{n,N}$ —никакие 2 человека не сидят рядом;
  - (б)  $B_{n,N}$ —каждый из  $n$  человек имеет ровно одного соседа;
  - (с)  $C_{n,N}$ —из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно.
16. В зале кинотеатра в первых двух рядах, каждый из которых состоит из  $N$  кресел, сидит  $n$  человек. Найти вероятности следующих событий:
- (а) в первом ряду никакие 2 человека не сидят рядом;
  - (б) во втором ряду каждый человек имеет ровно одного соседа;
  - (с) в первом ряду из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно.
17. Из всех отображений множества  $1, 2, \dots, n$  в себя случайно выбирается отображение. Найти вероятности событий:
- (а) выбранное отображение каждый из  $n$  элементов переводит в 1;
  - (б) элемент  $i$  имеет ровно  $k$  прообразов;
  - (с) элемент  $i$  переводится в  $j$ ;
  - (д) выбранное отображение элементы  $i_1, i_2, \dots, i_k (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$  переводит элементы  $j_1, j_2, \dots, j_k$  соответственно;
18. Из множества  $S_n$  случайно выбирается подстановка. Найти вероятности событий:
- а) выбрана тождественная подстановка  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ ;
  - (а) выбранная подстановка элементы  $i_1, i_2, \dots, i_k (i_1 < i_2 < \dots < i_k)$  переводит в элементы  $j_1, j_2, \dots, j_k$  соответственно;

- (b) элемент  $i$  в выбранной подстановке образует единичный цикл, т.е.  $i \rightarrow j$ ;
  - (c) элементы 1,2,3 образуют цикл длины 3:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  или  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
  - (d) все элементы образуют один цикл.
19. Найти вероятность  $P_n$  того, что в случайно выбранной подстановке степени  $n$  найдется хотя бы один цикл единичной длины. Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ .
20. Имеются  $z + t$  билетов, из которых  $n$  выигрышных. Одновременно приобретаются  $k$  билетов. Определить вероятность того, что среди них  $s$  выигрышных.
21. В генуэзской лотерее разыгрываются девяносто номеров, из которых выигрывают пять. По условию можно ставить на любой из девяноста номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров, причем для получения выигрыша должны выиграть все выбранные номера. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?
22. Для уменьшения общего количества игр  $2n$  команд спортсменов по жребью разбиваются на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся:
- (a) в равных подгруппах;
  - (b) в одной подгруппе.
23. В зале, насчитывающем  $n+k$  мест, случайным образом занимают места  $n$  человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные  $m \leq n$  мест.
24. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз:
- (a) независимо от порядка извлечения карт без возвращения;
  - (b) в указанном порядке при извлечении карт без возвращения;
  - (c) в указанном порядке с возвращением каждой карты в колоду.
25. (Задача о беспорядках.) Пусть  $(i_1, \dots, i_n)$  — случайная перестановка (с вероятностью  $1/n!$ ) чисел  $1, \dots, n$ . Показать, что:
- (a) вероятность  $P_{(m)}$  того, что при перестановках чисел  $1, \dots, n$  в точности  $m$  чисел останутся на своих местах (частичный беспорядок);

- (b) вероятность  $P_{(\geq 1)}$  того, что в результате перестановок по крайней мере одно из чисел  $1, \dots, n$  останется на своем месте;
- (c) вероятность полного беспорядка (когда ни одно из чисел не остается на своем месте).
26. (Задача о совпадениях.) Пусть имеется  $n$  писем и  $m$  конвертов. Письма по конвертам раскладываются «случайным образом», иначе говоря, предполагается, что приписывание соответствующих вероятностей осуществляется в соответствии с «классическим» способом задания вероятностей. Пусть  $P_{(m)}$  - вероятность того, что в точности  $m$  писем попадут в «свои» конверты. Как данную вероятность можно приближенно посчитать при фиксированном  $m$  и достаточно большом  $n$ ?
27. Уходя из детского сада, каждый из  $n$  детей «случайным образом» берет один левый и один правый ботинок. Показать, что
- (a) вероятность того, что все они уйдут не в своих парах ботинок;
- (b) вероятность того, что каждый из них возьмет не свой левый и не свой правый ботинок;
28. (Задача о супружеских парах.) Сколькими способами  $n$  супружеских пар ( $n \geq 3$ ) можно разместить за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались, но супруги не сидели рядом?
29. В урне  $K$  красных,  $L$  белых и  $M$  черных шаров. Из урны с возвращением (без возвращения) извлекается  $n$  шаров. Найти вероятность того, что в выборке будет  $k$  красных,  $l$  белых и  $m$  черных шаров.
30. 30 шаров размещаются по 8 ящикам так, что для каждого шара одинаково возможно попадание в любой ящик. Найти вероятность размещения, при котором будет 3 пустых ящика, 2 ящика - с тремя, 2 ящика - с шестью и 1 ящик - с двенадцатью шарами.
31. Дни рождения. Считаем, что в году 365 дней, люди рождаются в любой день с равными вероятностями, в группе нет близнецов и т.п.
- (a) С какой вероятностью в группе из  $n$  человек найдутся хотя бы двое, у которых совпадают дни рождения?
- (b) Найти вероятность, что в группе из  $n$  человека для фиксированного индивида найдется одноклассник, у которого тот же день рождения.

- (с) Численно вычислите данные вероятности при разных  $n$ , в частности, при  $n = 23$ .
32. Имеются  $n$  подписанных конвертов и  $n$  открыток, то есть у каждой открытки есть свой конверт. Открытки случайно раскладываются по конвертам (1 конверт – 1 открытка). С какой вероятностью хотя бы одна открытка попала в свой конверт?
33. В урне  $R$  красных,  $W$  белых и  $B$  черных шаров. Из урны с возвращением извлекают  $n$  шаров. Найти вероятность того, что будут вытащены  $r$  красных,  $w$  белых и  $b$  черных шаров,  $r + w + b = n$ . Тот же вопрос, но при извлечении без возвращений.
34. В зале, насчитывающем  $n + k$  мест, случайным образом занимают места  $n$  человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные  $m \leq n$  мест.
35. Из урны, содержащей  $N_1$  белых шаров,  $N_2$  чёрных и  $N_3$  красных, последовательно без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится красный шар. Найти вероятности следующих событий:
- (а) вынуто  $n_1$  белых шаров и  $n_2$  чёрных;
  - (б) не появилось ни одного белого шара;
  - (с) всего вынуто  $k$  шаров.

### 1.7.2 Модель геометрической вероятности

1. В точке  $C$ , положение которой на телефонной линии  $AB$  длины  $L$  равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка  $C$  удалена от точки  $A$  на расстояние, не меньшее  $l$ .
2. Параллельно оси абсцисс проведены две линии, ординаты которых равны 8 и 9,5. Определить вероятность того, что круг радиуса 2,5 не будет пересечен осью абсцисс и ни одной из двух параллельных линий, если положение центра круга равновозможно на оси ординат в интервале от 0 до 9,5.
3. Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно  $kr$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Круг радиуса  $r$  и два кольца с внешними радиусами  $3r$  и  $5r$  заштрихованы. В круге радиуса  $5r$  поставлена точка, положение которой равновозможно в этом круге. Определить вероятность попадания данной точки:

- (a) в круг радиуса  $2r$ ;
- (b) в заштрихованную область.

item На отрезке  $AB$  длиной  $i$  независимо одна от другой поставлены две точки  $L$  и  $M$ , положение каждой из которых равновозможно на  $AB$ . Найти вероятность того, что точка  $L$  ближе к точке  $M$ , чем к точке  $A$ .

4. На отрезке длиной  $l$  независимо одна от другой поставлены две точки, положение каждой из которых равновозможно на этом отрезке. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей одного отрезка можно построить треугольник.
5. К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии  $A$  и через каждые шесть минут - автобус линии  $B$ . Интервал времени между моментами прихода автобуса линии  $A$  и ближайшего следующего автобуса линии  $B$  равновозможен в пределах от нуля до четырех минут. Определить вероятность того, что:
  - (a) первый подошедший автобус окажется автобусом линии  $A$ ;
  - (b) автобус какой-либо линии подойдет в течение двух минут
6. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго - два часа.
7. Стержень длиной  $l = 200$  мм ломается на части, причем положение каждой точки излома не зависит от положения других точек излома и равновозможно по всей длине стержня. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть стержня между точками излома будет не более 10 мм, если точек излома:
  - (a) две;
  - (b) три.
8. Определить вероятность того, что корни:
  - (a) квадратного  $x^2 + 2a + b = 0$ ;
  - (b) кубического  $x^3 + ax + 2b = 0$  уравнений вещественны, если равновозможны значения коэффициентов в прямоугольнике  $|a| < n, |b| < m$ .

Какова вероятность, что при указанных условиях корни квадратного уравнения будут положительными?

9. Случайная точка  $A$  имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:
  - (а) расстояние от точки  $A$  до фиксированной стороны квадрата не превосходит  $x$ ;
  - (б) расстояние от точки  $A$  до ближайшей стороны квадрата не превосходит  $x$ ;
  - (с) расстояние от точки  $A$  до центра квадрата не превосходит  $x$ ;
  - (д) расстояние от точки  $A$  до фиксированной вершины квадрата не превосходит  $x$ ;
10. Случайная точка  $A$  имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий:
  - (а) расстояние от  $A$  до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит  $x$ ;
  - (б) расстояние от  $A$  до любой стороны прямоугольника не превосходит  $x$ ;
  - (с) расстояние от  $A$  до диагоналей прямоугольника не превосходит  $x$ ;
11. Случайная точка  $A$  имеет равномерное распределение в квадрате со стороной  $a$ . Найти вероятность того, что расстояние от  $A$  до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от  $A$  до ближайшей диагонали квадрата.
12. Случайная точка  $X$  равномерно распределена в правильном треугольнике с вершинами  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, a\sqrt{3})$ . Найти вероятность того, что квадрат с центром  $X$  и сторонами длины  $b$ , параллельными осям координат, целиком содержится в этом треугольнике.
13. В круге радиуса  $R$  случайно проводится хорда. Обозначим  $\xi$  ее длину. Найти вероятность  $Q_x = \{\xi > x\}$ , если середина хорды равномерно распределена в круге. Вычислить вероятности  $Q_R$  и  $Q_{R\sqrt{3}}$ , того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника и треугольника соответственно. Результат зависит от того, как понимать слово «случайно».
14. Решить предыдущую задачу, если направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению.



15. Решить предыдущую задачу, если один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.
16. Отрезок длины  $a_1 + a_2$ , поделен на две части длины  $a_1$ , и  $a_2$  соответственно.  $n$  точек последовательно бросаются наудачу на отрезок. Найти вероятность того, что ровно  $m$  из  $n$  точек попадут на часть отрезка длины  $a_1$ .
17. В единичный квадрат наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка будет удалена от центра квадрата на расстояние меньше, чем  $1/3$ , если известно, что от каждой из сторон квадрата она удалена больше, чем на  $1/6$ ?

### 1.7.3 Условная вероятность. Независимость. Формула полной вероятности и теорема Байеса

1. Брошено две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.
2. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:
  - (а) первый студент взял «хороший» билет;
  - (б) второй студент взял «хороший» билет;
  - (с) оба студента взяли «хорошие» билеты.
3. Из урны, содержащей 3 белых шара, 5 черных и 2 красных, два игрока поочередно извлекают по одному шару без возвращения.. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Пусть  $A_1 = \{\text{выигрывает игрок, начавший игру}\}$ ,  $A_2 = \{\text{выигрывает второй участник}\}$ ,  $B = \{\text{игра закончилась вничью}\}$ . Найти  $P(A_1)$ ,  $P(A_2)$ ,  $P(B)$ .
4. Случайная точка  $(\xi_1, \xi_2)$  имеет равномерное распределение в квадрате  $\{(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$  При каких значениях  $r$  независимы события  $A_r = \{|\xi_1 - \xi_2| \geq r\}$  и  $B_r = \{|\xi_1 + \xi_2| \leq 3r\}$ ?
5. События  $A$  и  $B$  независимы. Являются ли независимыми события:
  - (а)  $A$  и  $\bar{B}$ ;

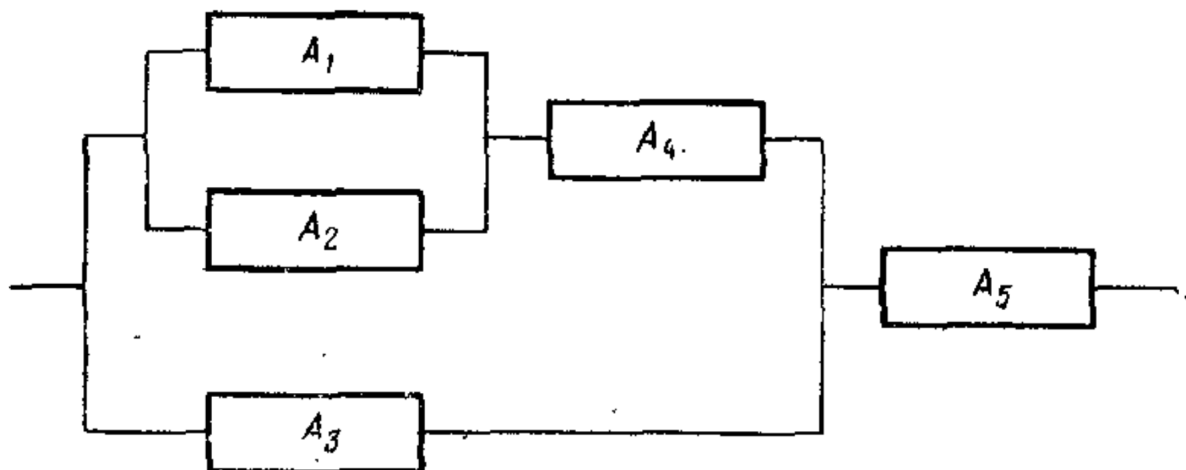
(b)  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

6. Упрощенная система контроля изделий состоит из двух независимых проверок. В результате  $k$ -й проверки ( $k = 1, 2$ ) изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью  $\beta_k$ , а бракованное изделие принимается с вероятностью  $\alpha_k$ . Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найдите вероятности событий:

(a) бракованное изделие будет принято;

(b) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

7. Электрическая цепь составлена из элементов  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ , по схеме, приведенной на рисунке. При выходе из строя любого элемента цепь



в месте его включения разрывается. Вероятность выхода из строя за данный период элемента  $A_k$  равна  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ . Предполагается, что элементы выходят или не выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность события  $C = \{\text{за рассматриваемый период по цепи может проходить ток}\}$ .

8. В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй - 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

9. В пункте проката имеется 10 телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна 0,90, и 5 телевизоров с аналогичной вероятностью, равной 0,95. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.
10. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна  $1 - \beta$ . Вероятность принять здорового человека за больного равна  $\alpha$ . Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна  $\gamma$ .
  - (а) Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.
  - (б) Вычислить найденную условную вероятность при следующих числовых значениях:  $1 - \beta = 0,9$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\gamma = 0,001$ .
11. Отдел технического контроля (ОТК) проводит сортировку выпускаемых заводом приборов. Каждый прибор независимо от остальных имеет дефекты с вероятностью  $p$ . При проверке в ОТК наличие дефектов обнаруживается с вероятностью  $\alpha$ ; кроме того, с вероятностью  $\beta$  исправный прибор при проверке может вести себя как дефектный. Все приборы, у которых при проверке обнаружены отклонения от стандарта, бракуются. Найти вероятность  $q_0$  того, что незабракованный прибор имеет дефекты, и вероятность  $q_1$  того, что забракованный прибор имеет дефекты. При каких условиях  $q_0 > q_1$ ?
12. Имеется  $n$  урн одинакового состава:  $N$  белых и  $M$  черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй урны в третью перекладывается один шар и т. д. Из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.
13. Урна содержит один шар, про который известно, что он либо белый, либо черный с одинаковыми вероятностями. В урну кладут один белый шар и затем наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность, что оставшийся в урне шар - белый?
14. Брошено три игральных кости. Найти вероятность того, что на всех костях выпала шестерка, если известно, что
  - (а) на одной кости выпало 6 очков;
  - (б) на первой кости выпало 6 очков;
  - (с) на двух костях выпали «шестерки»;

- (d) по крайней мере на двух костях выпало одинаковое число очков;
  - (e) на всех костях выпало одинаковое число очков;
  - (f) по крайней мере на одной кости выпало 6 очков.
15. Группа студентов, сдающая экзамен, состоит из 5 отличников, 10 хороших студентов и 15 слабых студентов; отличник всегда получает оценку «отлично», хороший студент - «отлично» и «хорошо» с равными вероятностями, слабый студент - «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно» с равными вероятностями. Какова вероятность, что наугад вызванный студент получит оценку
- (a) "отлично";
  - (b) "хорошо"?

#### 1.7.4 Схема Бернулли и связанные с ней предельные теоремы

1. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна  $1/10$ . Каковы вероятности того, что сообщение из 10 знаков:
  - (a) не будет искажено;
  - (b) содержит ровно 3 искажения;
  - (c) содержит не более трех искажений?
2. Найти вероятность того, что в  $2n$  испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха  $p$  и неудачи  $q = 1 - p$  появится  $m + n$  успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.
3. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набирал 6 очков (выигрыш - 1 очко, проигрыш и ничья - 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает  $k$  очков,  $k = 0, 1, \dots, 5$ .
4. Обработываемые на станке детали сортируются по размерам на две группы. Каждая очередная деталь независимо от предыдущих с равными вероятностями попадает в первую или вторую группу. Пусть в начале смены для каждой группы деталей приготовлено по ящику емкости  $r$ . Какова вероятность того, что в момент, когда очередную деталь будет некуда класть, в другом ящике будет  $m$  деталей?

5. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.
  6. В таблице случайных чисел цифры сгруппированы по две. Найти приближенное значение вероятности того, что среди 100 пар пара 09 встретится не менее двух раз.
  7. Найти приближенное значение вероятности того, что число «девяток» среди 10000 случайных чисел заключено между 940 и 1060.
  8. Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 3, до тех пор, пока не наберется 1025 таких чисел. Найти приближенное значение вероятности того, что потребуется таблица, содержащая не меньше 2500 чисел.
  9. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая:
    - (a) зрители приходят парами;
    - (b) зрители приходят поодиночке.
- Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.
10. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).
  11. Пусть  $\eta_N$  - суммарное число появлений «5» в «6» в  $N$  бросаниях игральной кости. При  $N = 1800$  найти вероятность того, что  $\eta_N \geq 620$
  12. Две монеты подбрасывают 4800 раз. Найти приближенное значение вероятности того, что событие «герб - герб» появится меньше 1140 раз.
  13. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,01. Найти приближенное значение вероятности того, что при 100 выстрелах будет не больше трех попаданий.

14. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти приближенное значение вероятности того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.
15. На одной странице 2400 знаков. При типографском наборе вероятность искажения одного знака равна  $1/800$ . Найти приближенное значение вероятности того, что на странице не менее двух опечаток.
16. При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью  $p_1$ , полностью ломается с вероятностью  $p_2$ , получает серьезное повреждение с вероятностью  $p_3$  ( $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ). Два серьезных повреждения приводят к полной поломке. Найти вероятность того, что при прохождении  $n$  порогов байдарка не будет полностью сломана.
17. Сообщения, передаваемые по каналу связи, состояются из трех знаков  $A, B, C$ . Из-за помех каждый знак принимается правильно с вероятностью 0,6 и принимается ошибочно за любой из двух других знаков с вероятностью 0,2. Для увеличения вероятности правильного приема каждый знак передается 5 раз. За переданный знак принимается знак, который чаще всего встречается в принятой пятерке знаков. Если наиболее частых знака два, то из них выбирается равновероятно один. Найти вероятность правильного приема знака при указанном способе передачи.
18. Испытания в полиномиальной схеме с исходами 1, 2, 3, имеющими вероятности  $p_1, p_2, p_3$  соответственно, заканчиваются, когда впервые не появится исход 3. Найти вероятность того, что испытания закончатся исходом 1.
19. Пункт  $A$  нужно связать с 10 абонентами пункта  $B$ . Вероятность того, что в любой фиксированный момент времени абоненту потребуется линия связи, равна 0,2, причем эта потребность не зависит от потребностей других абонентов. Какое минимальное количество каналов необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью 0,99 обслужить всех абонентов?
20. Определить число  $n$  повторных независимых испытаний, которое нужно произвести для того, чтобы вероятнейшее число появлений события равнялось 20, если вероятность появления этого события при каждом испытании равна 0,8.
21. Определить вероятность необходимости повторного голосования при выборе  $l$  человек, если голосуют  $n$  человек; вероятность быть вычеркнутым

для каждого из  $k$  кандидатов одинакова и равна  $p$ , а для выбора кандидата необходимо получить большинство голосов. Повторное голосование не производится, если больше половины голосов получает каждый из  $l$  кандидатов, а любой из оставшихся  $k - 1$  кандидатов - не более половины голосов из  $n$ .

22. В электропоезд, состоящий из шести вагонов, садится двенадцать человек, причем выбор каждым пассажиром вагона равновозможен. Определить вероятность того, что:
- (а) в каждый вагон вошло по два человека;
  - (б) в один вагон никто не вошел, в другой - вошел один человек, в два вагона - по два человека, а в оставшиеся два вагона соответственно три и четыре человека.
23. Урна содержит  $l$  белых,  $m$  черных и  $n$  красных шаров. Производится  $l_1 + m_1 + n_1$  извлечений шаров по одному с возвращением каждого извлеченного шара. Определить вероятность того, что будет извлечено:
- (а) сначала  $l_1$  белых, затем  $m_1$  черных и, наконец,  $n_1$  красных шаров;
  - (б)  $l_1$  белых,  $m_1$  черных и  $n_1$  красных шаров, причем все шары одного цвета появляются подряд, но последовательность цветов может быть любой;
  - (с)  $l_1$  белых,  $m_1$  черных и  $n_1$  красных шаров в любой последовательности.
24. Определить вероятность того, что при  $n$  бросаниях монет герб появится нечетное число раз.

## Глава 2

# Случайные величины и их числовые характеристики

### 2.1 Случайные величины и их распределения. Функция распределения случайной величины

В определении *вероятностного пространства* мы не накладывали никаких ограничений на природу *множества элементарных событий*  $\Omega$ , однако удобно каждому элементарному событию сопоставлять число (практические все явления в том или ином виде описываются с помощью чисел, в программировании мы в некотором смысле все кодируем в виде чисел). Это сопоставление и есть *случайная величина*. Формализуем это понятие.

**Определение 2.1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  – множество элементарных событий и сигма-алгебра событий соответственно. **Случайная величина**  $X$  – измеримая функция из  $(\Omega, \mathcal{F})$  в  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , то есть для всякого  $B \in \mathcal{B}$   $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  ( $X^{-1}(B)$  – прообраз множества  $B$ ).

Случайные величины обозначаются последними заглавными латинскими буквами  $U, V, W, X, Y, Z$  или греческими  $\xi, \eta, \nu$ . Мы будем, как правило, использовать заглавные латинские буквы.

При сопоставлении элементарного события и числа естественным образом переносится вероятность, то есть если числу  $x$  соответствует элементарное событие  $\omega$ , вероятность которого равняется  $p$ , то вероятность "выпадения" числа  $x$  тоже равняется  $p$ . Набор таких вероятностей есть *распределение случайной величины*. Так же формализуем данное понятие.



**Определение 2.2.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  – множество элементарных событий и сигма-алгебра событий соответственно и  $X$  – случайная величина. **Распределением случайной величины** называется вероятность  $P_X$ , заданная на  $\mathcal{B}$  и определяемая как

$$P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}).$$

Последнее равенство мы часто будем кратко писать как  $P(X \in B)$ .

Таким образом, распределение случайной величины – вероятность на  $\mathbb{R}$ , для достаточно задать её на борелевских множествах (все возможные интервалы), но это оказывается не всегда комфортно. Для устранения данного неудобства оказывается удобным *функция распределения случайной величины*

**Определение 2.3.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F})$  – множество элементарных событий и сигма-алгебра событий соответственно и  $X$  – случайная величина. **Функцией распределения случайной величины** называется функция вещественной переменной  $F_X$ , которая определяется для каждого  $x \in \mathbb{R}$  как

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]).$$

Последнюю вероятность мы будем обозначать как  $P(X \leq x)$ .

Сформулируем и докажем свойства функции распределения.

**Теорема 2.1.** Пусть  $X$  – случайная величина и  $F$  – её функция распределения. Справедливы следующие свойства:

1.  $F(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $F(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ .
2.  $F$  монотонно возрастает (не убывает).
3.  $F$  непрерывна справа, то есть  $F(x) \rightarrow F(x_0)$  при  $x \rightarrow x_0 + 0$ .

*Доказательство.* Доказательство будет опираться на изученные нами ранее свойства вероятности (см. теорему 1.2). Пусть  $A_n = (-\infty, -x_n]$ ,  $\{x_n\}$  монотонно неограниченно возрастает. Заметим, что  $A_{n+1} \subset A_n$  и  $\bigcap_n A_n = \emptyset$ . Тогда имеем согласно непрерывности сверху

$$F(-x_n) = P_X(A_n) \rightarrow P_X(\emptyset) = 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Положим  $B_n = (-\infty, x_n]$ . Очевидно, что  $B_n \subset B_{n+1}$  и  $\bigcup_n B_n = \mathbb{R}$  и в следствие непрерывности снизу имеем

$$F(x_n) = P_X(B_n) \rightarrow P_X(\mathbb{R}) = 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Неубывание следует из монотонности вероятности. Действительно, при  $x_1 \leq x_2$

$$F(x_1) = P_X((-\infty, x_1]) \leq P_X((-\infty, x_2]) = F(x_2).$$

Покажем непрерывность справа. Пусть  $\{x_n\}$  монотонно убывает и  $x_n \rightarrow x_0 + 0$  и  $C_n = (-\infty, x_n]$ . Ясно, что  $\bigcap_n C_n = (-\infty, x_0]$ . Тогда имеем

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0), \quad x_n \rightarrow x_0 + 0.$$

□

**Замечание.** При нашем определении функция распределения не является непрерывной слева. Действительно, пусть  $x_n$  монотонно возрастает и стремится к  $x_0$

$$\begin{aligned} F(x_0) - F(x_n) &= P_X((-\infty, x_0]) - P_X((-\infty, x_n]) \\ &= P_X((-\infty, x_n]) - P_X((-\infty, x_n]) + P_X((x_n, x_0]) = P_X((x_n, x_0]) \rightarrow P(X = x_0). \end{aligned}$$

**Замечание.** Кроме того, как видно  $P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$ .

**Замечание.** Иногда функция распределения определяется как  $F(x) = P(X < x)$ . В этом случае непрерывность справа изменяется на непрерывность слева.

Сформулируем и докажем еще одно свойство функции распределения.

**Теорема 2.2.** Пусть  $F$  – функция, удовлетворяющая сформулированным в предыдущей теореме. Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и заданная на нём случайная величина  $X$  такая, что  $F_X = F$ .

*Доказательство.* Сначала построим требуемое вероятностное пространство. Положим  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ . Осталось задать вероятность. Как мы знаем согласно теореме о продолжении меры достаточно определить вероятность на алгебре  $\mathbf{B}$  такой, что  $\sigma(\mathbf{B}) = \mathcal{B}$ . В нашем случае  $\mathbf{B}$  – алгебра, порождённая интервалами вида  $(a, b]$ . Произвольный элемент данной алгебры представим в виде конечного объединения непересекающихся интервалов вида  $(a, b]$ . Тогда зададим вероятность как

$$P(B) = \sum_{j=1}^n F(b_j) - F(a_j), \quad B = \bigsqcup_{j=1}^n (a_j, b_j],$$

где  $a_j \leq b_j$  (числа  $a_j, b_j$  могут быть бесконечны).

Неотрицательность, конечная аддитивность и нормированность вероятности  $P$  следует немедленно из определения и условия теоремы. Осталось доказать счётную аддитивность, непрерывность снизу или непрерывность сверху. Мы покажем непрерывность сверху, то есть из  $B_{n+1} \subset B_n$  и  $B = \bigcap_n B_n$  должно следовать  $P(B_n) \rightarrow P(B)$  или, что равносильно,  $P(B_n \bar{B}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Действительно,

$$P(B_n) = P(B_n B) + P(B_n \bar{B}) = P(B) + P(B_n \bar{B}).$$

Поэтому, не умаляя общности, будем полагать, что  $\bigcap_n B_n = \emptyset$ . Сначала предположим, что все множества  $B_n$  принадлежат замкнутому интервалу  $[-N, N]$ . Поскольку  $B_n$  состоят из конечного числа сумм непересекающихся интервалов вида  $(a, b]$  и в силу непрерывности функции  $F$  справа

$$P((a', b]) = F(b) - F(a') \rightarrow F(b) - F(a) = P((a, b]), \quad a' \rightarrow a + 0,$$

то для каждого  $B_n$  найдётся  $A_n \in \mathbf{B}$  такое, что его замыкание  $\text{cl } A_n \subset B_n$  (*замыкание* – множество всех предельных точек) и

$$P(B_n) - P(A_n) = P(B_n \setminus A_n) \leq \varepsilon 2^{-n},$$

где  $\varepsilon$  – произвольная положительная константа.

Так как  $\bigcap_n B_n = \emptyset$ , то  $\bigcap_n \text{cl } A_n = \emptyset$ . Кроме того, имеет место

$$\bigcup_n \{[-N, N] \setminus \text{cl } A_n\} = [-N, N] \setminus \bigcap_n \text{cl } A_n = [-N, N],$$

то есть набор множеств  $\{[-N, N] \setminus \text{cl } A_n\}$  – открытое покрытие множества  $[-N, N]$  (*открытое* множество – дополнение замкнутого, *замкнутое* множество – совпадающее со своим замыканием множество). Тогда существует  $n_0$  такое, что

$$\bigcup_{n=1}^{n_0} \{[-N, N] \setminus \text{cl } A_n\} = [-N, N],$$

что влечёт  $\bigcap_{n=1}^{n_0} \text{cl } A_n = \emptyset$  (это можно обосновать леммой Гейне-Бореля или тем, что множество  $[-N, N]$  – компакт). Далее вследствие вложенности множеств  $B_n$  и полученных ранее соотношений имеем

$$\begin{aligned} P(B_{n_0}) &= P\left(B_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} A_k\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} A_k\right) = P\left(B_{n_0} \setminus \bigcap_{k=1}^{n_0} A_k\right) \\ &\leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n_0} B_k \setminus A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n_0} P(B_k \setminus A_k) \leq \sum_{k=1}^{n_0} 2^{-k} \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon$  заключаем, что  $P(B_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Далее откажемся от предположения ограниченности множеств  $B_n$ . В силу поведения функции  $F$  на бесконечности и её неубывания для произвольного положительного  $\varepsilon$  можно выбрать  $N > 0$  такое, что

$$P([-N, N]) > 1 - \varepsilon/2.$$

Далее заметим, что

$$P(B_n) = P(B_n \cap [-N, N]) + P(B_n \cap \overline{[-N, N]}) \leq P(B_n \cap [-N, N]) + \varepsilon/2,$$

а случай  $B_n \cap [-N, N]$  уже разобран выше, что и завершает теорему.  $\square$

Подытожим сказанное. Во-первых, *функция распределения* по сути задаётся *распределением*. Во-вторых, как правило, *случайная величина* нам интересна не природой соответствия между множеством элементарных событий  $\Omega$  и  $\mathbb{R}$ , а её *распределением*, поэтому доказанная нами теорема позволяет утверждать, что *функция распределения* задаёт *распределение* и для описания *распределения* достаточно предъявить *функцию распределения*. То, что случайная величина  $X$  имеет распределение  $P_X$  и функцию распределения  $F_X$ , мы будем обозначать как  $X \sim P$  и  $X \sim F_X$ .

## 2.2 Типы случайных величин и распределений

В этом параграфе мы рассмотрим типы случайных величин и распределений. Также затронем некоторые семейства распределений. Запись  $X \sim D$  означает, что случайная величина  $X$  имеет некоторое распределение из семейства  $D$ .

### 2.2.1 Дискретные случайные величины и распределения

**Определение 2.4.** Случайная величина  $X$  (распределение случайной величины) называется **дискретной**, если существует такое не более чем счётное множество  $E$ , что  $P_X(E) = P(X \in E) = 1$ .

Соответствующее распределение  $P_X$  случайной величины  $X$  будем называть **дискретным**.

По сути написанное выше означает, что случайная величина  $X$  принимает значения  $\{x_i\}_{i=1}^N$ ,  $N \leq \infty$ , (считаем, что  $x_1 < x_2 < \dots$ ) с соответствующими вероятностями  $\{p_i\}_{i=1}^N$ , то есть  $P(X = x_i) = p_i$ .

Также несложно заметить, что функция распределения дискретного закона кусочно-постоянна и имеет скачки в точках  $x_i$ , равные  $p_i$ . Более конкретно имеем

$$F(t) = \sum_k p_k \mathbb{1}(x_k \leq t) = \begin{cases} 0, & t < x_1, \\ p_1, & x_1 \leq t < x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq t < x_3, \\ \dots, & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_i, & x_i \leq t < x_{i+1}, \\ \dots & \end{cases},$$

где  $\mathbb{1}(A) = 1$ , если условие  $A$  истина,  $\mathbb{1}(A) = 0$  в противном случае.

Рассмотрим несколько важных дискретных распределений.

**Пример 2.1. Вырожденное распределение в точке  $c$ :** Случайная величина  $X$  принимает только одно значение  $c$ , то есть  $P(X = c) = 1$ . Будем обозначать  $I(c)$  или  $I_c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Следующие два распределения встречались в схеме Бернулли.

**Пример 2.2. Распределение Бернулли.** Случайная величина  $X$  принимает значения 1 и 0 с вероятностями  $p$  и  $q = 1 - p$  соответственно, то есть  $P(X = 1) = p$ ,  $P(X = 0) = q$ . Обозначение:  $\text{Bern}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ .

**Пример 2.3. Биномиальное распределение.**  $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Обозначение:  $\text{Bin}(n; p)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0, 1)$ .

Соответственно распределение Бернулли описывает одно независимое испытание с вероятностью успеха  $p$ , а биномиальное –  $n$  независимых испытаний с вероятностью успеха  $p$ . Далее рассмотрим еще два распределения, связанных со схемой бернуллиевских испытаний.

**Пример 2.4. Отрицательное биномиальное распределение.** Пусть  $k + r$  – номер испытания, в котором случился  $r$ -ый успех,  $r \in \mathbb{N}$ . Тогда соответствующая случайная величина  $X$  равняется  $k$ . Более формально  $X = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = r\} - r$  (здесь  $S_n$  – количество успехов в  $n$  испытаниях). Напишем вероятность:

$$P(X = k) = p C_{k+r-1}^{r-1} p^{r-1} q^{k+r-1-(r-1)} = C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k = \frac{\Gamma(k+r)}{k! \Gamma(r)} p^r q^k,$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция. Мы провели рассуждения для натуральных  $r$ , но с помощью гамма функции мы можем рассматривать распределение и при неотрицательном  $r$ . Будем обозначать  $\text{NB}(r, p)$ ,  $r > 0$ ,  $p \in (0, 1)$ .

**Пример 2.5. Геометрическое распределение.** Частный случай при  $r = 1$  отрицательного биномиального распределения будем называть геометрическим и обозначать  $\text{Geom}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ . Соответствующую случайную величину мы можем интерпретировать как количество неудач до первого успеха.

**Замечание.** Возможна и другая интерпретация для геометрического распределения: номер первого успеха, то есть  $P(X = k) = pq^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Если не оговорено иное, то мы будем придерживаться первой интерпретации.

Следующее распределение встречалось нам в теореме Пуассона. Оно важно в теории массового обслуживания и в теории случайных процессов пуассоновские процессы также существенны. (вставить ссылки на учебники/монографии)

**Пример 2.6. Распределение Пуассона.**  $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots\}$ . Обозначение:  $\text{Pois}(\lambda)$ .

## 2.2.2 Абсолютно непрерывные случайные величины и распределения

Следующий важный класс распределений – абсолютно непрерывные. Сформулируем определение.

**Определение 2.5.** Случайная величина  $X$  (распределение случайной величины) называется **абсолютно непрерывной**, если существует  $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  и интегрируемая на  $\mathbb{R}$  (относительно меры Лебега), для которой  $P(X \in B) = \int_B p(x) dx$ . Функцию  $p$  будем называть **плотностью**.

Отметим простейшие свойства, которые вытекают непосредственно из определения, ввиду их важности в виде теоремы.

**Теорема 2.3.** Справедливы следующие соотношения:

- $F(t) = \int_{-\infty}^t p(x) dx$ .
- $F$  – непрерывная.
- $P(X = c) = 0$ .
- $F'(x) = p(x)$  почти всюду.

**Замечание.** Об аналогии между функции вероятностей в дискретном случае и плотностью.

В дискретном случае мы задавали функцию вида  $P(X = x_k) = p_k$ , а в абсолютно непрерывном случае задаем плотность. Рассмотрим вероятность  $P(X \in [x_0, x_0 + h])$ :

$$P(X \in [x_0, x_0 + h]) = F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + o(h) = p(x_0)h + o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

То есть вероятность того, что случайная величина  $X$  принимает значения из окрестности точки  $x_0$  примерно равняется  $p(x_0)h$ , то есть плотность можно рассматривать как аналог функции вероятности, хоть она формально может быть больше единицы, главное чтобы  $\int_{\mathbb{R}} p(x) dx = 1$ .

**Замечание.** О значениях, которые принимает случайная величина.

В дискретном случае всё просто: случайная величина принимает значения  $x_1, x_2, \dots$ . В непрерывном случае дело обстоит несколько иначе. Пусть  $E$  – множество, на котором плотность строго больше нуля. Тогда несложно заметить, что

$$1 = \int_E p(x) dx + \int_{\bar{E}} p(x) dx = \int_E p(x) dx + \int_{\bar{E}} 0 dx = \int_E p(x) dx,$$

то есть видим, что случайная величина принимает только значения из множества  $E$  и заведомо не может принимать значения к дополнению к нему.

Далее рассмотрим важнейшие примеры абсолютно непрерывных распределений.

**Пример 2.7. Непрерывное равномерное распределение.** Будем обозначать  $U[a, b]$ ,  $a < b$ . Плотность имеет вид

$$p(t) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}(t \in [a, b]),$$

то есть вся вероятностная масса сосредоточена на  $[a, b]$  равномерно и  $a, b$  – левая и правая границы диапазона значений соответственно. Тогда функция распределения имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ \frac{t-a}{b-a}, & t \in [a, b], \\ 1, & t > b. \end{cases}$$

Пусть  $X \sim U[a, b]$ ,  $Y = cX + d$ . Найдём распределение  $Y$ . Для определенности будем считать, что  $c > 0$ . Напишем функцию распределения для  $Y$ . Имеем

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(cX + d \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-d}{c}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{t-d}{c} < a, \\ \frac{\frac{t-d}{c} - a}{b-a}, & \frac{t-d}{c} \in [a, b], \\ 1, & \frac{t-d}{c} > b, \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < ca + d, \\ \frac{t-d-ca}{cb-ca}, & t \in [ac + d, cb + d], \\ 1, & t > cb + d. \end{cases} \end{aligned}$$

Видим, что получившаяся функция соответствует равномерному на  $[ac + d, cb + d]$  распределению, то есть  $Y \sim U[ac + d, cb + d]$ . Случай  $c < 0$  рассматривается аналогично. В частности, если  $W \sim U[0, 1]$ , то  $(b-a)W + a \sim U[a, b]$ .

Далее рассмотрим фундаментальное распределение, с которым мы встретились в теоремах Муавра-Лапласа, – нормальным.

**Пример 2.8. Нормальное распределение.** Плотность нормального распределения  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  с параметром сдвига  $\mu \in \mathbb{R}$  и масштабирующим параметром  $\sigma^2 > 0$  (их вероятностный смысл выясним в дальнейшем) имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, 1)$  будем называть стандартным, его плотность и функция распределения имеют вид

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(x) dx,$$

функция  $\Phi$  табулирована в литературе и в вероятностно-статистических программах и пакетах имеется её численная реализация.

Пусть  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  и  $Y = aX + b$ . Для определенности будем считать, что  $a > 0$ . Найдём функцию распределения для  $Y$ . Имеем

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(aX + b \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{t-b}{a}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \left[ \begin{array}{l} x = \frac{y-b}{a} \\ y \in (-\infty, t] \\ dx = \frac{dy}{a} \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right\} dy. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что получили функцию распределения нормального закона с параметром сдвига  $a\mu + b$  и масштабирующим параметром  $a^2\sigma^2$ , то



есть  $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ . В частности, если  $U \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , то случайная величина  $\frac{U-\mu}{\sigma}$  будет иметь стандартное нормальное распределение, и наоборот, если  $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\sigma W + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

**Замечание.** Мы используем для нормального распределения параметризацию вида  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , то есть в качестве второго параметра указываем именно  $\sigma^2$ , однако в литературе и ПО может использоваться и иная параметризация: вместо  $\sigma^2$  в качестве второго параметра указывается  $\sigma$ .

**Пример 2.9. Распределение Коши:**  $\text{Cauchy}(x_0, \gamma)$ , где  $x_0$  – параметр сдвига,  $\gamma > 0$  – масштабирующий параметр. Плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\pi\gamma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2}.$$

Тогда для функции распределения имеем

$$F(t) = \frac{1}{\pi\gamma} \int_{-\infty}^t \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2} = \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{t-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

**Экспоненциальное распределение:**  $\text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Плотность имеет вид

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}(x \geq 0),$$

и функция распределения

$$F(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}(t \geq 0).$$

**Пример 2.10. Гамма-распределение:**  $\Gamma(k, \lambda)$ . Сначала для  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > 0$ .

$$p(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}(x \geq 0)$$

Так же как и с отрицательным биномиальным распределением первый параметр можем сделать неотрицательным с учетом того, что  $(k-1)! = \Gamma k$ .

**Замечание.** В экспоненциальном и гамма-распределении вместо  $\lambda$ , которое интерпретируется в приложениях как интенсивность (англ. rate), можно использовать в качестве параметра  $\lambda^{-1}$ , интерпретируемое как масштабирующий параметр (англ. scale).

Стоит отметить, что мы затронули далеко не все абсолютно непрерывные случайные величины, однако для первого знакомства ограничимся этим.

В заключении данного пункта сформулируем и докажем теорему, которая в некоторых случаях может быть полезной для нахождения плотности преобразования случайной величины.

**Теорема 2.4.** Пусть  $X$  – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью  $p_X$ ,  $Y = g(X)$ , где  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$  и  $g$  – строго монотонна. Тогда плотность  $p_Y$  может быть вычислена по формулам

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d(g^{-1}(y))}{dy} \right| = p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{1}{d(g(x))/(dx)} \right|_{x=g^{-1}(y)}.$$

Третье равенство получено из второго с помощью теоремы о производной обратной функции.

*Доказательство.* Сначала пусть  $g$  строго возрастает. Тогда для функции распределения  $Y$  ввиду обратимости функции  $g$  имеем

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \\ &= P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} p_X(t) dt. \end{aligned}$$

Для нахождения плотности продифференцируем полученное выражение

$$\frac{d(F_Y(y))}{dy} = p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \frac{d(g^{-1}(y))}{dy}.$$

Случай строго убывания рассматривается аналогично, нужно лишь учесть, что при переходе к  $g^{-1}$  внутри выражения под вероятностью поменяется знак неравенства и пределы интегрирования будут от  $g^{-1}(y)$  до  $+\infty$ . С учетом этого получится точно такое же выражение, только со знаком минус. Вспоминая, что производная строго возрастающей функции положительна, а строго убывающей – отрицательна, получаем единообразное выражение для двух случаев.  $\square$

### 2.2.3 Сингулярные случайные величины и распределения

**Определение 2.6.** Функцию распределения  $F$  (и соответствующую ей распределение и случайную) величину будем называть **сингулярной**, если  $F \in C(\mathbb{R})$  и мера (Лебега) точек роста равняется нулю.

$x_0$  – точка роста функции распределения  $F$ , если  $F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon) > 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

В качестве примера сингулярной функции распределения можно привести лестницу Кантора.

Также сформулируем термин, который будет по сути означать множество значений, которые может принимать случайная величина  $X$ .

**Определение 2.7.** *Носителем распределения* будем называть наименьшее по включению замкнутое множество  $E$ , для которого  $P(X \in E) = 1$ .

Таким образом, для дискретных распределений носителем является множество вида  $\{x_k\}_{k=1}^N$ , а для абсолютно непрерывных распределений множество, где плотность строго больше нуля (вместе с границами данного множества).

**Замечание.** *Внимательный и любознательный читатель заметит, что выше мы сформулировали понятие носителя меры и для абсолютно непрерывного случая носитель вероятностной меры и носитель (как функции) плотности совпадают.*

В заключении параграфа приведем вероятностный вариант теоремы Лебега о разложении функций распределений.

**Теорема 2.5.** *Пусть  $F(x)$  – функция распределения. Тогда  $\exists! c_1, c_2, c_3 \in [0, 1]$ , для которых  $c_1 + c_2 + c_3 = 1$  и*

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x),$$

где  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$  – функции распределения дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярных случайных величин.

Таким образом, у произвольной функции распределения есть дискретная составляющая, абсолютно непрерывная и сингулярная.

Далее для краткости мы будем *абсолютно непрерывные* случайные величины и распределения называть просто *непрерывными*, так как в дальнейшем изложении сингулярные величины максимум будут только упоминаться.

## 2.3 Случайные векторы и многомерные распределения

В этом параграфе мы рассмотрим случайные векторы и многомерные распределения.

**Определение 2.8.** *Случайным вектором* называется  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ , если каждая компонента  $X_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  является случайной величиной.

**Определение 2.9.** *Распределением вектора  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  называется величина  $P_X(B_1, \dots, B_n) = P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)$ .*

**Замечание.** *Также используется термин совместное распределение случайных величин  $X_1, \dots, X_n$ , которое по сути означает то же самое.*

Аналогично одномерному случаю обобщается и функция распределения

**Определение 2.10.** *Функцией распределения случайного вектора  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  называется функция  $F(t_1, \dots, t_n) = P(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n)$ .*

Рассмотрим функцию распределения случайного вектора несколько более подробно. В одномерном случае мы показали, что  $P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$ . Посмотрим, что будет в многомерном случае. Рассмотрим векторы  $a, b$ , для которых  $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$  (в данном параграфе будем кратко писать  $a \leq b$ ). Введем разностный оператор  $\Delta_{a_i, b_i}$ , действующий следующим образом:

$$\Delta_{a_i, b_i} F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, x_n).$$

Для простоты (в  $n$ -мерном случае выкладки будут такими же, только более громоздкими) рассмотрим вероятность попадания двумерного случайного вектора  $X = (X_1, X_2)^T$  в множество  $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ . Имеем

$$\begin{aligned} P(X_1 \in (a_1, b_1], X_2 \in (a_2, b_2]) &= P(X_1 \in (a_1, b_1], X_2 \leq b_2) - P(X_1 \in (a_1, b_1], X_2 \leq a_2) \\ &= P(X_1 \leq b_1, X_2 \leq b_2) - P(X_1 \leq a_1, X_2 \leq b_2) - P(X_1 \leq b_1, X_2 \leq a_2) + P(X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2) \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \Delta_{a_2, b_2} F(b_1, x_2) - \Delta_{a_2, b_2} F(a_1, x_2) \\ &= \Delta_{a_2, b_2} (F(b_1, x_2) - F(a_1, x_2)) = \Delta_{a_1, b_1} \Delta_{a_2, b_2} F(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Соответственно в общем случае имеем

$$P(X_1 \in (a_1, b_1], \dots, X_n \in (a_n, b_n]) = \Delta_{a_1, b_1} \dots \Delta_{a_n, b_n} F(x_1, \dots, x_n).$$

Для функции распределения случайного вектора справедливы свойства, аналогичные одномерному случаю. Сформулируем их в виде теорем.

**Теорема 2.6.** *Пусть  $F(x_1, \dots, x_n)$  – функция распределения случайного вектора  $X$ . Тогда*

1. Если  $a \leq b$ , то  $\Delta_{a_1, b_1} \dots \Delta_{a_n, b_n} F(x_1, \dots, x_n) \geq 0$
2.  $F(+\infty, \dots, +\infty) = 1$ ,  $F(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \hat{y}$ , если хотя бы одна компонента  $\hat{y}$  равняется  $-\infty$ .
3.  $F$  непрерывна справа.

**Теорема 2.7.** Пусть  $F$  – функция, удовлетворяющая свойствам, перечисленным в предыдущей теореме. Тогда существует вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  и случайный вектор  $X$ , для которого  $F$  является его функцией распределения.

Идея доказательств сформулированных выше теорем такая же, как и в одномерном случае, поэтому доказательства мы опустим.

Как и в одномерном случае мы рассматривали разные типы распределений, в многомерном случае мы так же рассмотрим дискретные и непрерывные распределения. Начнем с дискретных

**Определение 2.11.** Случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)$  и соответствующее ему распределение называются **дискретными**, если существует не более чем счетное множество  $E$ , для которого  $P(X \in E) = 1$ .

Рассмотрим пример, связанный с независимыми испытаниями

**Пример 2.11. Полиномиальное распределение.** Пусть проведены  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых возможны  $m$  исходов с вероятностями  $p_1, \dots, p_m$  соответственно ( $\sum p_i = 1$ ). Пусть  $S_{n,i}$  – количество исходов типа  $i$  в  $n$  испытаниях. Тогда несложно заметить, что

$$P(S_{n,1} = n_1, \dots, S_{n,m} = n_m) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m},$$

$$n_1 + \dots + n_m = n.$$

Таким образом, мы описали полиномиальное распределение вектора  $S_n = (S_{n,1}, \dots, S_{n,m})^T$ . Будем использовать обозначение  $\text{Poly}(n, p)$ .

Продолжим с абсолютно непрерывных.

**Определение 2.12.** Случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  и соответствующее ему распределение будем называть **абсолютно непрерывными**, если существует  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  интегрируемая (по Лебегу) и для которой

$$P(X \in B) = \int_B p(x) dx,$$

,  $B$  – борелевское множество в  $\mathbb{R}^n$ .

Как и в одномерном случае, для краткости абсолютно непрерывные распределения будем называть просто **непрерывными**.

Далее рассмотрим многомерное нормальное распределение.

**Пример 2.12. Многомерное нормальное распределение.**

1. Вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)$  будем называть **стандартным гауссовским**, если его плотность имеет вид

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{x^T x}{2} \right\}.$$

В этом случае будем писать  $X \sim \mathcal{N}(0, E_n)$ , где  $0$  –  $n$ -мерный нулевой вектор,  $E_n$  – единичная матрица.

2. Пусть  $Y = AX + b$ , где  $X$  – стандартный гауссовский вектор,  $A$  – матрица  $m \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . В этом случае будем писать  $Y \sim \mathcal{N}(b, AA^T)$ .
3. Рассмотрим общий случай. Пусть  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , где  $\Sigma = \Sigma^T$  и  $\Sigma > 0$ , то есть  $x^T \Sigma x \geq 0$  для всякого  $x \in \mathbb{R}^M$  (неотрицательная неопределенность матрицы  $\Sigma$ ).

Запишем для матрицы  $\Sigma$  спектральное разложение (мы это можем сделать, так как  $\Sigma = \Sigma^T$ ):

$$\Sigma = U \Lambda U^T,$$

где  $\Lambda$  – матрица, на диагонали которой расположены собственные числа матрицы  $\Sigma$ , а на остальных позициях – нули;  $U$  – матрица из ортонормированных собственных векторов (поэтому  $U^T = U^{-1}$ ). Пусть  $\sqrt{\Lambda}$  – матрица, у которой на диагонали стоят корни из собственных чисел (они неотрицательные, так как  $\Sigma \geq 0$ ), а на остальных местах – нули (несложно проверить, что  $\sqrt{\Lambda}^2 = \Lambda$ ). Тогда перепишем полученное равенство следующим образом:

$$\Sigma = (U \sqrt{\Lambda} U^T)(U \sqrt{\Lambda} U^T).$$

Далее пусть  $X \sim \mathcal{N}(0, E_n)$ . Тогда  $Y = (U \sqrt{\Lambda} U^T)X + \mu$ . Действительно,

$$(U \sqrt{\Lambda} U^T)(U \sqrt{\Lambda} U^T)^T = U \sqrt{\Lambda} U^T U \sqrt{\Lambda} U^T = U \Lambda U^T = \Sigma,$$

то есть полученное согласуется с написанным выше.

4. Пусть теперь  $\Sigma > 0$ . Тогда существует плотность, имеющая вид

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}.$$

В заключение пункта приведем формулировку теоремы о плотности функции от непрерывного случайного вектора.

**Теорема 2.8.** Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  случайный вектор с плотностью  $p_X(t_1, \dots, t_n)$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y = g(X)$ , причем  $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  и обратима. Тогда плотность  $p_Y$  случайного вектора  $Y$  имеет вид

$$p_Y(y_1, \dots, y_n) = p_X(g^{-1}(y)) |\det Dg^{-1}(y)| = p_X(g^{-1}(y)) |\det Dg(x)|_{x=g^{-1}(y)}^{-1}.$$

где  $D(\cdot)$  – матрица Якоби.

## 2.4 Независимые случайные величины и векторы

Вспомним, что события  $A_1, \dots, A_n$  независимы, если для любого поднабора  $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_m}).$$

Очень похожее определение имеет место и случайных величин

**Определение 2.13.** Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  - **независимые**, если для любых  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$

$$P(X_1 \in B_1 \dots X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in B_n).$$

Случайные величины  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  независимы, если для любого  $n \in \mathbb{N}$  случайные величины являются независимыми.

**Замечание.** Напомним, что  $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{B}$  являются, поэтому на самом деле сформулированное определение не противоречит определению независимых событий.

Определение независимых случайных векторов практически точно такое же, только там  $B_1, \dots, B_n$  уже  $n$ -мерные борелевские множества.

Сформулируем критерий независимости в терминах функций распределения.

**Теорема 2.9.**  $X_1, \dots, X_n$  - независимые  $\Leftrightarrow F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t_i) \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

Далее рассмотрим критерий независимости дискретных случайных величин.

**Теорема 2.10.** Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – дискретные.

$X_1, \dots, X_n$  – независимые  $\Leftrightarrow P(X_1 = x_{1,i_1}, X_2 = x_{2,i_2}, \dots, X_n = x_{n,i_n}) = \prod_{j=1}^n P(X_j = x_{j,i_j}) \forall x_{i,k}$ , где  $x_{i,k}$  – значение случайной величины  $X_i$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Очевидно из определения, так как одноточечные множества являются борелевскими

$\Leftarrow$

Заметим, что

$$\begin{aligned} P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) &= P(X_1 \in \{x_{1,i_1}\}, \dots, X_n \in \{x_{n,i_n}\}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} P(X_1 = x_{1,i_1}, \dots, X_n = x_{n,i_n}) = \sum_{i_1, \dots, i_n} P(X_1 = x_{1,i_1}) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_{n,i_n}) \\ &= P(X_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in B_n). \end{aligned}$$

□

Также рассмотрим критерий независимости непрерывных величин.

**Теорема 2.11.**  $X_1, \dots, X_n$  – абсолютно непрерывные. Тогда случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы тогда и только тогда, когда их совместная плотность  $p(x_1, \dots, x_n)$  равняется произведению одномерных плотностей  $p_i(x_i)$ , то есть

$$p(x_1, \dots, x_n) = p_1(x_1) \cdot \dots \cdot p_n(x_n).$$

*Доказательство.* : Необходимость. Пусть нам известно, что величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы. Тогда их совместная функция распределения равняется произведению одномерных функций распределений. Запишем их сразу как интеграл от плотности.

$$\int_{t_1 \leq x_1, \dots, t_n \leq x_n} p(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n = \int_{-\infty}^{x_1} p_1(t_1) dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_n(t_n) dt_n.$$

Дифференцируя обе части по  $x_1, x_2, \dots, x_n$  получаем требуемое. Для доказательства достаточности нужно обе части проинтегрировать по  $x_1, \dots, x_n$  по промежуткам. □

**Замечание.** Мы стандартный гауссовский вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  определили через плотность. Заметим, что она имеет вид

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{x^T x}{2}} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_j^2}{2}},$$

откуда следует, что компоненты стандартного гауссовского вектора независимы и распределены согласно стандартному нормальному закону.



## 2.4.1 Суммы независимых случайных величин

В теории вероятностей и её приложениях часто встречаются суммы независимых случайных величин, поэтому мы рассмотрим некоторое количество примеров, связанных с ними.

**Пример 2.13.** Бернуллиевское и биномиальное распределения.

Пусть  $X_1, X_2 \sim \text{Bern}(p)$  и  $S_2 = X_1 + X_2$ . Очевидно, что  $S_2$  может равняться нулю, единице или двойке. Напишем вероятности для них

$$\begin{aligned} P(S_2 = 0) &= P(X_1 = 0, X_2 = 0) = (1 - p)^2, \\ P(S_2 = 1) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 2p(1 - p), \\ P(S_2 = 2) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1) = p^2. \end{aligned}$$

Видим, что  $S_2 \sim \text{Bin}(2, p)$ .

Покажем теперь, что  $S_n = X_1 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ , где  $X_i \sim \text{Bern}(p)$  и они независимы. Будем показывать по индукции. База очевидна. Далее предположим, что  $S_{n-1} \sim \text{Bin}(n-1, p)$  и покажем, что  $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$ . Для этого заметим, что  $S_n = S_{n-1} + X_n$ . Распишем вероятности  $S_n = 0$  и  $S_n = n$  с учетом независимости  $S_{n-1}$  и  $X_n$ :

$$\begin{aligned} P(S_n = 0) &= P(S_{n-1} = 0, X_n = 0) = (1 - p)^n, \\ P(S_n = n) &= P(S_{n-1} = n-1, X_n = 1) = p^n. \end{aligned}$$

При  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  для  $P(S_n = k)$  имеем

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= P(S_{n-1} = k-1, X_n = 1) + P(S_{n-1} = k, X_n = 0) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} p + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} p^k (1-p)^{n-1-k} (1-p) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \left( \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

то есть действительно  $S_n \sim \text{Bern}(p)$ .

**Пример 2.14.** Суммирование независимых пуассоновских случайных величин.

Пусть  $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$ ,  $X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$  и они независимы. Несложно, заметить что сумма принимает целые неотрицательные значения. Найдём распределение суммы. Для  $k \in \{0, 1, \dots\}$  имеем по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 = k | X_2 = j) P(X_2 = j) = \sum_{j=0}^k P(X_1 = k-j) P(X_2 = j) \\ &= \sum_{j=0}^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^j}{j!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} \lambda_1^{k-j} \lambda_2^j = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}, \end{aligned}$$

получаем, что  $X_1 + X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$

**Пример 2.15.** Суммирование независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение.

Пусть  $X_1, X_2 \sim \text{Geom}(p)$  и они независимы. Для распределения суммы независимых случайных величин  $X_1 + X_2$  имеем

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = k) &= \sum_{j=0}^k P(X_1 = k - j) P(X_2 = j) = \sum_{j=0}^k (1 - p)^{k-j} p (1 - p)^j p \\ &= (k + 1)(1 - p)^k p^2 = C_{k+2-1}^{2-1} p^2 (1 - p)^k, \end{aligned}$$

то есть получили, что  $X_1 + X_2 \sim \text{NB}(2, p)$ .

В общем случае можно показать (это мы сделаем несколько ниже), что сумма  $n$  величин имеет  $\text{NB}(n, p)$ .

**Пример 2.16.** Суммирование непрерывных независимых случайных величин.

Пусть  $X_1, X_2$  независимы и имеют плотности соответственно  $p_1$  и  $p_2$ . Найдём функцию распределения суммы  $X_1 + X_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} F_{X_1+X_2}(t) &= P(X_1 + X_2 \leq t) = \iint_{x_1+x_2 \leq t} p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x_1) \left( \int_{-\infty}^{t-x_1} p_2(x_2) dx_2 \right) dx_1. \end{aligned}$$

Найдём плотность суммы

$$p_{X_1+X_2}(t) = F'_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) p_2(t - x) dx.$$

Также заметим, что у нас получилась формула, похожая на дискретный случай. Действительно, если  $X_1$  и  $X_2$  независимы и целочисленны, то

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_j P(X_1 = j) P(X_2 = k - j)$$

Полученные формулы называются свёртками.

На основе полученной формулы рассмотрим еще два примера.

**Пример 2.17.** Суммирование независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение.

Пусть  $X, Y$  – независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda > 0$ . Тогда плотность  $p$  суммы  $X + Y$  имеет вид

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)p_2(t-x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda(t-x)} \mathbb{1}(t-x \geq 0) dx \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t dx = \frac{\lambda^2 t}{1!} e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

То есть получили, что  $X_1 + X_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$ . В случае  $n$  слагаемых получится  $\Gamma(n, \lambda)$  или распределение Эрланга порядка  $n$ .

**Пример 2.18.** Пусть  $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$  и они независимы. Найдём плотность суммы

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(t-x-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right\} dx \\ &= \left[ \begin{matrix} u = x - \mu_x, \\ du = dx \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u^2}{\sigma_x^2} + \frac{(t-u-\mu_x-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right\} du. \end{aligned}$$

Введём обозначение  $q = t - \mu_x - \mu_y$  и рассмотрим несколько подробнее выражение внутри экспоненты:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y^2 u^2 + \sigma_x^2 (q-u)^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} &= \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)u^2 - 2\sigma_x^2 q u + \sigma_x^2 q^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \\ &= \frac{\left( \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} u - \frac{\sigma_x^2 q}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right)^2 + \sigma_x^2 q^2 - \frac{\sigma_x^4 q^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \\ &= \frac{\left( \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} u - \frac{\sigma_x^2 q}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \right)^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} + \frac{q^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \end{aligned}$$

Далее в интеграле положим  $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} u = w$ . Следовательно,  $du = (\sigma_x^2 +$

$\sigma_y^2)^{-1/2}dw$  и, возвращаясь к исходным обозначениям, мы имеем

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu_x-\mu_y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(w-\frac{\sigma_x^2 q}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\right)^2}{2\sigma_x^2\sigma_y^2}\right\} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu_x-\mu_y)^2}{2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}\right\}. \end{aligned}$$

Итого получили, что  $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ .

$$\begin{aligned} (X_1, \dots, X_n)\text{-стандартный гауссовский вектор} &\Leftrightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{2})^n} \cdot \exp(-\frac{1}{2} \sum x_i^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{2}} \\ X, Y \text{ -независимые } X, Y &\sim N(0, 1) P_{x,y}(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2} - \frac{(t-x)^2}{2}) dx = \\ &= \frac{2}{s\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(2x^2 - 2tx + t^2)) dx = (2(x^2 - tx + \frac{t^2}{2})) = \\ &= 2x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}tx + \frac{t^2}{4} + \frac{t^2}{4} = 2(x - \frac{t}{2})^2 + \frac{t^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{1}{2}(2y^2 + \frac{t^2}{2})) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{s\sqrt{2}i}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{i}\cdot\frac{1}{2}}} dy = N(0, 2) \\ X \sim N(\mu_1, \delta_1^2) Y \sim (\mu_2, \delta_2^2) \text{ - независимые} &\rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \delta_1^2 + \delta_2^2) \end{aligned}$$

## 2.5 Моделирование случайных величин и распределений

Как правило в высокоуровневых языках программирования функции типа **random** генерируют независимые случайные величины из равномерного распределения (на самом деле генерируется псевдослучайная величина, то есть на самом деле она детерминирована, но поведение функции похоже на "случайную" и даже может пройти соответствующие статистические тесты). Поэтому будем считать, что мы умеем генерировать независимые случайные величины из равномерного на  $[0; 1]$  распределения. Будем обозначать вызов данной функции **random**.

**Пример 2.19.** Генерация бернуллиевской случайной величины.

**bern(p):** если **random**  $< p$  генерируем **единицу**, иначе – **ноль**.

**Пример 2.20.** Генерация случайной величины, имеющей биномиальное распределение.

**bin(n, p):**  $\sum_{j=1}^n \text{bern}(p)$ .

**Пример 2.21.** Генерация случайной величины, имеющей геометрическое распределение.

$\mathit{geom}(p): i = 0$ ; пока  $\mathit{bern}(p) = 0$   $\{i = i + 1\}$ ; вернуть  $i$ .

**Пример 2.22.** Генерация случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение.

$\mathit{exponential} \equiv \mathit{exponential}(1): -\ln \mathit{random}$ .

$\mathit{exponential}(\lambda): \mathit{exponential}/\lambda$ .

**Пример 2.23.** Генерация пуассоновской случайной величины.

Пусть  $X = \max\{n : \sum_{j=1}^n \mathit{exponential} \leq \lambda\}$ . Тогда  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ . Чтобы это доказать, нужно заметить, что события  $\{X < m\}$  и  $\{\sum_{j=1}^m \mathit{exponential} > \lambda\}$  эквивалентны (их вероятности равны) и вспомнить, что  $\sum_{j=1}^m \mathit{exponential} \sim \Gamma(m, 1)$ .

**Пример 2.24.** Генерация случайной величины с конечным дискретным распределением.

Пусть задана функция распределения  $F$ . Напомним, что она кусочно постоянна и имеет вид

$$F(t) = \sum_{j=1}^n p_j \mathbf{1}(x_j \leq t) = \begin{cases} 0, & t < x_1, \\ p_1, & x_1 \leq t < x_2, \\ \dots, & \\ 1, & t \geq x_n. \end{cases}$$

Вызываем функцию **random**. Если ее значение от 0 до  $p_1$ , то возвращаем  $x_1$ , от  $p_1$  до  $p_1 + p_2 - x_2$ , ..., от  $p_1 + \dots + p_{n-1}$  до  $1 - x_n$ . Также заметим, что для ускорения алгоритма можно применить бинарный поиск.

**Пример 2.25.** Генерация вектора, имеющего полиномиальное распределение.

Чтобы сгенерировать вектор из  $\text{Poly}(1, p)$ , можно применить схему из предыдущего примера, то есть если результат вызова функции **random** от 0 до  $p_1$ , то возвращаем  $(1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $p_1$  до  $p_1 + p_2 - (0, 1, \dots, 0)^T$ , от  $p_1 + \dots + p_{m-1}$  до  $1 - (0, 0, \dots, 1)^T$ .

$\mathit{poly}(n, p) : \sum_{j=1}^n \mathit{poly}(1, p)$ .

**Пример 2.26.** Генерация непрерывного распределения, для которой аналитически выражается обратная к функции распределения  $F^{-1}$  (или у нее несложная численная реализация).

$\mathit{inverse\_generation}: F^{-1} \mathit{random}$ .

**Пример 2.27.** Генерация нормально распределенных случайных величин. В первых, можно использовать аппроксимацию с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа (или более общую центральную предельную теорему), а именно аппроксимация будет выглядеть так:

$$\frac{\text{bin}(n, p) - np}{\sqrt{npq}}.$$

Кроме того, пусть  $x = \text{random}$  и  $y = \text{random}$ . Тогда величины

$$u = \sqrt{2|\ln x|} \cos(2\pi y),$$

$$w = \sqrt{2|\ln x|} \sin(2\pi y),$$

независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

В заключение параграфа проведем еще один алгоритм.

**Пример 2.28.** *Rejection sampling.*

Пусть  $y$  искомого распределения плотность  $p$ . Также пусть имеется плотность  $f$ , для которой  $p(x) \leq Mf(x)$  для любого  $x$  и случайную величину, которой соответствует плотность  $f$  легко генерировать. Тогда процедура выглядит следующим образом: генерировать пары  $(u, y)$ , где  $u = \text{random}$ , а  $y$  сгенерирована из распределения с плотностью  $f$  пока  $u \geq \frac{p(y)}{Mf(y)}$ , вернуть  $y$ .

Поясним, почему данный алгоритм корректен. Пусть  $U \sim U[0; 1]$ ,  $Y$  имеет распределение с плотностью  $f$  и они независимы. Рассмотрим следующую условную вероятность:

$$P\left(Y \leq t | U \leq \frac{p(Y)}{Mf(Y)}\right) = \frac{P(Y \leq t, U \leq p(Y)/Mf(Y))}{P(U \leq p(Y)/Mf(Y))}.$$

В числителе имеем

$$\begin{aligned} P(Y \leq t, U \leq p(Y)/Mf(Y)) &= \iint_{y \leq t, u \leq p(y)/Mf(y)} f(y) \, du \, dy \\ &= \int_{y \leq t} \frac{p(y)}{Mf(y)} f(y) \, dy = \frac{1}{M} F_Y(t). \end{aligned}$$

Здесь  $F_Y$  – функция распределения для  $Y$ . Осталось рассмотреть знаменатель

$$P(U \leq p(Y)/Mf(Y)) = \iint_{u \leq p(y)/Mf(y)} f(y) \, du \, dy = \frac{1}{M} \int p(y) \, dy = \frac{1}{M}.$$

Таким образом, получаем, что

$$P\left(Y \leq t | U \leq \frac{p(Y)}{Mf(Y)}\right) = F_Y(t)$$

## 2.6 Вероятностные интегралы

В дальнейшем нам понадобятся вероятностные интегралы. В данном параграфе мы не будем заниматься их строгим построением, а рассмотрим их в достаточной для дальнейшего изложения степени.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – вероятностное пространство,  $X$  – случайный вектор,  $g$  – неотрицательная борелевская функция (прообраз борелевского множества тоже борелевский). Мы специально не пишем  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  и  $g(x_1, \dots, x_n)$ , так как написанное ниже будет справедливым для любой натуральной размерности. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) P(d\omega).$$

Этот интеграл мы перепишем иначе (*перейдем от меры  $P$  к мере  $P_X$* )

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(dx).$$

Если  $X$  и его распределение дискретны, то под интегралом будем понимать сумму

$$\sum g(x_k) P(X = x_k),$$

в непрерывном случае, то есть наличии плотности  $p$  интеграл есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) p(x) dx.$$

Заметим, что интеграл  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(dx)$  от неотрицательной функции  $g$  существует, если сходится соответствующий ряд или интеграл. Если ряд или интеграл расходятся, то будем говорить, что данный интеграл не существует.

**Замечание.** В данном случае еще можно условиться, что  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(dx) = +\infty$ .

Пусть теперь  $g$  – произвольная борелевская функция. Тогда представим  $g$  в виде разности неотрицательных функций

$$g = g_+ - g_-, \\ g_+ = \max(0, g), \quad g_- = -\min(0, g),$$

то есть  $g_+$  – положительная часть функции  $g$ ,  $g_-$  – отрицательная со знаком "минус". Тогда интеграл  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(dx)$  от произвольной функции  $g$  представим в виде разности интегралов от неотрицательных функций

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} g_+(x) P_X(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} g_-(x) P_X(dx).$$

Возможны следующие ситуации:

- Оба интеграла конечны. Тогда искомый интеграл есть разность интегралов.
- Если один из интегралов бесконечен, то искомый интеграл не существует.

**Замечание.** Второй пункт предыдущего списка можно уточнить:

- Если интеграл от  $g_+$  равен  $+\infty$ , от  $g_-$  – конечен, то искомый интеграл равен  $+\infty$ .
- Если интеграл от  $g_+$  конечен, от  $g_-$  есть  $+\infty$ , то искомый интеграл полагается равным  $-\infty$ .
- Если оба интеграла от  $g_+$  и  $g_-$  бесконечны, то искомый интеграл не существует.

Отдельно рассмотрим для размерности  $n = 1$  интеграл Стильеса  $\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$ , где  $F$  – функция распределения. Он определяется как предел следующих интегральных сумм:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) = \lim_{\max(x_{j+1} - x_j) \rightarrow 0} \sum_j g(x_j^*) (F(x_{j+1}) - F(x_j)), \quad x_j^* \in [x_j, x_{j+1}].$$

В дискретном случае функция распределения  $F$  кусочно-постоянна и имеет разрывы в точках  $x_j$ , для которых  $P(X = x_j) = p_j > 0$ , причем величина данного скачка равняется  $p_j$ , поэтому интеграл Стильеса превращается в сумму:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) = \sum_j g(x_j) p_j.$$



В непрерывном случае  $F' = p$  почти всюду. Поэтому имеем (*вывод не совсем формальный*):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) &= \lim_{\max(x_{j+1}-x_j) \rightarrow 0} \sum_j g(x_j^*) \frac{(F(x_{j+1}) - F(x_j))}{x_{j+1} - x_j} (x_{j+1} - x_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) p(x) dx.\end{aligned}$$

В одномерном случае как вероятностный интеграл, так и интеграл Стильеса.

Отметим простейшие свойства интеграла:

1. Линейность, то есть  $\int af + bg = a \int f + b \int g$ .
2. Аддитивность по множеству, то есть если  $A = B \sqcup C$ , то  $\int_A = \int_B + \int_C$ .
3.  $P(X \in B) = \int_B P_X(dx)$ , в одномерном случае также  $P(X \in B) = \int_B dF(x)$ .

В заключение параграфа приведем вероятностную интерпретацию теоремы Фубини и её применение к нахождению функции распределения суммы независимых случайных величин.

**Теорема 2.12.** Фубини (б/д)  $X, Y$ -независимые случайные величины  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ -измер.  $\Rightarrow \iint g(x, y) P(dx, dy) = \int [\int g(x, y) dF_x] dF_y(y) = \int [\int g(x, y) dF_y(y)] dF_x(x)$

**Пример 2.29.**  $X, Y$ -независимые  $F(t) = P(X+Y \leq t) = \iint_{x+y \leq t} P_X(dx) P_Y(dy) = \int [\int_{y \leq t-x} P_Y(dy)] dF_X(x) = \int F_Y(t-x) dF_X(x)$ -свертка распределений.

## 2.7 Математическое ожидание и дисперсия

### 2.7.1 Математическое ожидание

**Определение 2.14.** Пусть  $X$  – случайная величина. **Математическим ожиданием** случайной величины  $X$  будем называть величину  $EX = \int_{\mathbb{R}} x dF(x)$  (если данный интеграл существует).

**Замечание.** В дискретном случае математическое ожидание есть сумма:

$$EX = \sum_j x_j P(X = x_j).$$

В непрерывном случае – интеграл:

$$E X = \int_{\mathbb{R}} x p(x) dx,$$

где  $p$  – плотность.

Также в русскоязычной литературе часто используется обозначение  $MX$ . Мы будем использовать обозначение  $E$  (англ. *expected value*).

Если нам важно указать, относительно какого распределения берется мат. ожидания мы будем использовать обозначения  $E_{P_X}$ ,  $E_{P(X)}$ .

Математическое ожидание также часто называют средним значением случайной величины, это будет видно ниже из одного примера. Сформулируем в виде теоремы свойства математического ожидания.

**Теорема 2.13.** Для математического ожидания справедливы следующие свойства (предполагается, что все мат. ожидания существуют):

1. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – случайные величины и  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – борелевская функция. Тогда

$$E g(X_1, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) P_{X_1, \dots, X_n}(dx_1, \dots, dx_n) = \int_{\mathbb{R}} y dF_{g(X_1, \dots, X_n)}(y).$$

Здесь по сути сделана замена переменной. В качестве упражнения можно отдельно расписать для дискретного и непрерывного случаев в одномерном случае.

2.  $E(c_1 X_1 + c_2 X_2) = c_1 E X_1 + c_2 E X_2$ . Следует из линейности интеграла и того, что  $\iint g(x) P_{X,Y}(dx, dy) = \int g(x) P_X(dx)$
3. Пусть  $X, Y$  – независимы. Тогда  $E XY = E X \cdot E Y$ . Немедленно следует из теоремы Фубини. **Обратное неверно.**
4. Пусть  $X \geq 0$  (то есть  $P(X \geq 0) = 1$ ), тогда  $E X \geq 0$ . Следует из того, что интегрируем по положительной полуоси.
5.  $X \geq 0$  и  $E X = 0$ . Тогда  $X = 0$  ( $P(X = 0) = 1$ ). Для доказательства воспользуемся тем, что  $P(X \geq c) \leq E X / c = 0$  для любой положительной константы (это мы докажем в следующей теореме), то есть  $P(X \geq c) = 0$ . Действительно

$$1 = P(X \geq 0) = P(X < c) + P(X \geq c) = P(X \leq c),$$

то есть получили, что с вероятностью 1 выполняется соотношение  $0 \leq X < c$  для любой положительной константы. По непрерывности вероятностной меры получаем, что  $P(X = 0) = 1$ .

Сформулируем и докажем важное неравенство, названное в честь Маркова.

**Теорема 2.14. Неравенство Маркова.**

Пусть  $X \geq 0$  и существует  $EX$ . Тогда для любой положительной константы  $c$

$$P(X \geq c) \leq \frac{EX}{c}.$$

*Доказательство.* Вспомним, что  $P(X \in B) = \int_B dF(x)$  и воспользуемся свойствами интеграла

$$P(X \geq c) = \int_{x \geq c} dF(x) \leq \int_{x \geq c} \frac{x}{c} dF(x) \leq \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \frac{EX}{c}.$$

□

## 2.7.2 Дисперсия

**Определение 2.15.** Дисперсией случайной величины  $X$  будем называть число  $\text{Var } X = E(X - EX)^2$ .

**Стандартное отклонение** (среднеквадратическое отклонение) – корень из дисперсии. Часто обозначается буквой  $\sigma$ .

**Замечание.** В русскоязычной литературе также используется обозначение  $D$ . Мы же будем использовать  $\text{Var}$  (англ. *variance*).

Дисперсия является мерой отклонения случайной величины от её математического ожидания, что можно увидеть из определения и будет наглядно показано ниже. Сформулируем и докажем свойства дисперсии.

**Теорема 2.15. Свойства дисперсии**

1.  $\text{Var } X \geq 0$ .
2.  $\text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$ .
3.  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var } X$ .
4.  $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y \pm 2(E(XY) - EX \cdot EY)$ . В частности, если  $X, Y$  – независимы, то  $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y$ .
5.  $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{j=1}^n \text{Var } X_j + 2 \sum_{k < j} (E(X_k X_j) - EX_k \cdot EX_j)$ .

6. Если  $\text{Var } X = 0$ , то  $P(X = c) = 1$  для некоторой  $c$ .
7.  $\text{Var } X$  есть минимум функции  $f(a) = E(X - a)^2$ , причем минимум достигается при  $a = EX$ .

*Доказательство.* 1. Немедленно вытекает из определения и свойств математического ожидания.

2. Действительно, имеем

$$E(X - EX)^2 = E(X^2 - XEX + (EX)^2) = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2.$$

3. В самом деле

$$\text{Var}(aX + b) = E(aX + b - E(aX + b))^2 = E(aX - aEX)^2 = a^2 \text{Var } X.$$

4. Распишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \text{Var}(X \pm Y) &= E(X \pm Y)^2 - (E(X \pm Y))^2 \\ &= EX^2 \pm 2EXY + EY^2 - [(EX)^2 \pm 2EXEY + (EY)^2] \\ &= \text{Var } X + \text{Var } Y \pm 2(EXY - EXEY) \end{aligned}$$

Если  $X, Y$  – независимы, то  $E(XY) = EX \cdot EY$ , откуда и получается, что дисперсия суммы/разности независимых случайных величин равняется сумме дисперсий.

5. Можно доказать индукцией с помощью предыдущих выкладок и свойств мат. ожидания.
6. Применить соответствующее свойство мат. ожидания.
7.  $f(a) = a^2 - 2aEX + (EX)^2$  – парабола с направленными вверх ветвями, у нее точка минимума  $a_* = -\frac{-2EX}{2} = EX$ . Если подставить  $a = a_*$ , то получится в точности дисперсия.

□

Также сформулируем и докажем очень важное неравенство, которое мы будем не раз вспоминать по ходу изложения.

**Теорема 2.16. Неравенство Чебышёва**

*X-случайная величина. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство*

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var } X}{\varepsilon^2}$$

*Доказательство.* Возведем выражение внутри вероятности в квадрат и применим к полученному неравенство Маркова

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P(|X - EX|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var } X}{\varepsilon^2}.$$

□

Рассмотрим два важных следствия.

**Следствие 2.1. О стандартном отклонении**

В неравенстве Чебышёва положим  $\varepsilon = k\sigma$ . Тогда получим

$$P(|X - EX| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

В частности, если  $k = 3$ , то оценкой сверху является  $1/9$  и по сути на этом основывается правило "трёх сигм". Однако это всего лишь оценка сверху и в некоторых случаях она может быть груба, в чем мы убедимся ниже.

**Следствие 2.2. Закон больших чисел**

Пусть  $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$  — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с математическим ожиданием  $EX_1$  и дисперсией  $\text{Var } X_1$ . Пусть  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - EX_1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

*Доказательство.* Заметим, что  $ES_n/n = EX_1$  и  $\text{Var } S_n/n = \text{Var } X_1/n$ . Тогда искомое получается из неравенства Чебышёва. □

**Замечание.** Закон больших чисел справедлив и без предположения о существовании дисперсии, в чем мы тоже убедимся ниже.

### 2.7.3 Вычисление математических ожиданий и дисперсий для некоторых распределений

**Пример 2.30.** Вырожденное распределение  $I_c$ . Здесь очевидно  $EX = c$ ,  $\text{Var } X = 0$ .

**Пример 2.31.**  $\text{Bern}(p)$ . Здесь имеем

$$\begin{aligned} EX &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \\ EX^2 &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p, \\ \text{Var } X &= EX^2 - (EX)^2 = p - p^2 = p(1 - p). \end{aligned}$$

1.  $Ic : P(X = C) = 1; EX = CVarX = 0$
2.  $Bern(p) : EX = 1 \cdot p + C \cdot (1 - p) = p; VarX = EX^2 - (EX)^2 = (1^2p + e^2(1 - p)) - p^2 = p(1 - p) = pq$
3.  $Bin(n, p) : S_n \sim Bin(n, p) X_1, \dots, X_n \text{-i.i.d } Bern(p)$   
 $X_1 + \dots + X_n \sim Bin(n, p) \Rightarrow ES_n = \sum_i EX_i = np; VarS_n = npq$
4.  $Pois(\lambda) : EX = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$   
 $EX(X - 1) = EX^2 - EX = EX^2 - (EX)^2 + (EX)^2 - EX = VarX + (EX)^2 - EX$   
 $EX(x - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1) \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} \cdot e^{-\lambda}}{(k-2)!} = x^2 \Rightarrow VarX = \lambda$
5.  $Geom(p) : \mathbb{Z}_+$ -носитель;  $EX = \sum_{n=1}^{\infty} p(x \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^k = \frac{1-p}{p}$   
 $\mathbb{N}$ -носитель:  $Y = X + 1 \Rightarrow EY = \frac{1-p}{p} + 1 = \frac{1}{p} Var(X + C) = Var(X) \Rightarrow VarX = VarY EX(X - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)(1 - p)^{k-2} p = (1 \cdot p)^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)(1 - p)^{k-2} = (1 - p)^2 \cdot p \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\delta(1-p)^k}{\delta p^2} = (1-p)^2 \cdot p \cdot \frac{\delta^2}{\delta p^2} (\sum_{k=2}^{\infty} (1-p)^k) = (1-p)^2 \cdot p \cdot (\frac{(1-p)^2}{p^2})'' = (1-p)^2 \cdot p \cdot 2 \cdot \frac{1}{p^3} = \frac{2(1-p)^2}{p^2} \Rightarrow \frac{2(1-p)^2}{p^2} = VarX + \frac{(1-p)^2}{p^2} - \frac{1-p}{p} \Rightarrow VarX = \frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} = \frac{1-2p+p^2+p-p^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$
6.  $U[a, b] : X \sim U[a, b], Y \sim U[0, 1] \Rightarrow X = (b - a)Y + a$   
 $EX = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} EY^2 = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3} VarY = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$   
 $EX = (\frac{b-a}{2}) + a = \frac{b+a}{2} VarX = \frac{(b-a)^2}{12}$
7.  $N(\mu, \delta^2) : Y \sim N(0, 1), X \sim N(\mu, \delta^2) \Rightarrow X = \delta Y + y EY = \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0 VarY = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} = \dots = 1$   
 $EX = y VarX = \delta^2$   
 $P(|X - EX| > 3\sqrt{VarX}) = P(|X - \mu| > 3\delta) = P(|\frac{X-\mu}{\delta}| > 3) = 1 - P(|\frac{x-\mu}{\delta}| < 3) = 1 - \Phi(3) + \Phi(-3) = 2(1 - \Phi(3)) \approx 0,0004 \Rightarrow \text{почти } 100$   
 Что генерится в  $(\mu - 3\delta, \mu + 3\delta)$

$$P(|X - EX| > \xi) \leq \frac{VarX}{\xi^2}$$

- $N(\mu, \delta^2), EX = \mu, Var X = \delta^2, P(|X - EX| < 3\delta) \approx 0,999$
- $Exp(\lambda)p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}(x \geq 0), EX = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$   
 $EX^2 = \int x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2} Var X = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X_1, \dots, X_n$ -i.i.d  $X_i \sim Exp(\lambda), S_n = X_1 + \dots + X_n \sim (n, \lambda)$   
 $ES_n = \frac{n}{\lambda}, Var S_n = \frac{n}{\lambda^2}$
- Cauchy  $(0, 1) EX = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} \Rightarrow \nexists EX$
- $X \sim N(0, 1), Y = X^2, X, Y$ - не независимые  
 $P(X \leq 1, Y \leq 1) = P(X \leq 1, -1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1$   
 $P(X \leq 1) = \Phi(1), P(Y \leq 1) = 2\Phi(1) - 1, (2\Phi(1) - 1) \cdot (2\Phi(1) - 1) \neq 2\Phi(1) - 1$   
 $EX = 0, EY = EX^2 = 1, EX \cdot Y = EX^3 = 0$

## 2.8 Другие числовые характеристики

### 2.8.1 Моменты высших порядков и связанные с ним характеристики

**Определение 2.16. Моменты**

*Начальным моментом  $k$ -го порядка будем называть величину  $EX^k$ .*

*Абсолютным начальным моментом  $k$ -го порядка –  $E|X|^k$ .*

*Центральным моментом  $k$ -го порядка –  $E(X - EX)^k$ .*

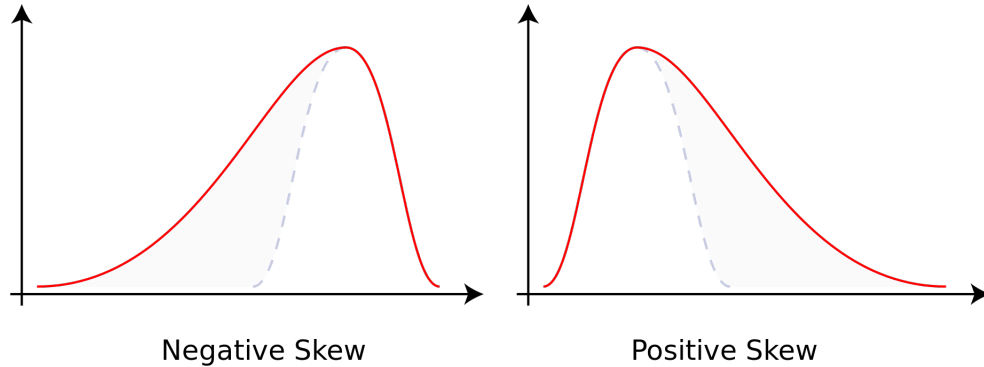
*Центральным абсолютным моментом  $k$ -го порядка –  $E|X - EX|^k$ .*

Далее рассмотрим связанные с моментами высших порядков характеристики

**Определение 2.17. Коэффициентом асимметрии** (англ. *skewness*) будем называть величину  $\frac{E(X - EX)^3}{\sigma^3}$

**Замечание.** В теории вероятностей и её приложениях используется жаргонизм – *хвост распределения*. Неформально – поведение распределения на бесконечности. В отдельных случаях различаются правый и левый хвост. Характеризуется длиной (например, у  $U[0, 1000]$  правый хвост длиннее чем у  $U[0, 1]$ ) и массой (у распределения Коши хвосты тяжелее чем у нормального)

**Замечание.** Если коэффициент асимметрии положительный, то "правый хвост" длиннее "левого". Если отрицательный, то "левый хвост" длиннее "правого".



**Определение 2.18.** Коэффициентом эксцесса будем называть величину  $\frac{E(X - EX)^4}{\sigma^4} - 3$ .

**Замечание.** "Минус три" добавлено, чтобы у  $\mathcal{N}(0, 1)$  было равным нулю. Если коэффициент эксцесса больше нуля, то "пик" у математического ожидания острый. Если отрицательный – пологий.

## 2.8.2 Квантиль. Медиана

**Определение 2.19.** Квантилем квантиль порядка  $\alpha \in [0, 1]$  распределения  $P_X$  будем называть число  $q_{P_X, \alpha}$  число, для которого

$$P(X \geq q_{P_X, \alpha}) \geq 1 - \alpha, \quad P(X \leq q_{P_X, \alpha}) \geq \alpha.$$

Как правило, распределение, относительно которого вычисляется квантиль, понятно из контекста, поэтому мы в основном будем просто писать  $q_\alpha$ .

**Замечание.** Если функция распределения строго монотонна, то квантиль однозначно определяется из уравнения  $F(q_\alpha) = \alpha$ .

В общем случае согласно сформулированному определению квантиль определяется неоднозначно, поэтому для устранения неопределенности вводится квантильная функция, которая может задавать одним из двух способов.

$$F_{\sup}^{-1}(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq \alpha\},$$

$$F_{\inf}^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

Далее рассмотрим один особый случай.



**Определение 2.20.** *Медианой* случайной величины  $X$  (и соответствующего распределения) называется квантиль порядка 0.5. Будем обозначать  $\text{med } X$

Интуитивно вероятность того, что случайное значение будет меньше медианы равняется 0.5, случайное значение больше медианы – тоже 0.5. Сформулируем и докажем теорему, характеризующую медиану.

**Теорема 2.17.** *Пусть существует абсолютный начальный первый момент. Тогда медиана случайной величины есть точка минимума функции  $f(a) = E|X - a|$*

*Доказательство.* Не умаляя общности, будем считать, что у случайной величины медиана равняется нулю, так как мы всегда можем рассмотреть случайную величину  $X' = X - \text{med } X$ , у которой очевидно медиана равняется нулю. Поэтому нам нужно показать, что  $E|X - c| \geq E|X|$  для любой константы  $c$ .

Сначала рассмотрим случай  $c > 0$ . Заметим, что

$$|X - c| - |X| = \begin{cases} -c, & X > c, \\ c - 2X, & 0 < X \leq c, \\ c, & X \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда, заключаем, что

$$\begin{aligned} E(|X - c| - |X|) &= E(|X - c| - |X|)\mathbf{1}(X > 0) + E(|X - c| - |X|)\mathbf{1}(X \leq 0) \\ &\geq -cE\mathbf{1}(X > 0) + cE\mathbf{1}(X \leq 0) = c(P(X \leq 0) - P(X > 0)) \\ &= c(2P(X \leq 0) - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Случай  $c < 0$  сводится к только что рассмотренному, если подложить  $\hat{c} = -c$  и  $\hat{X} = -X$ .  $\square$

**Пример 2.32.** Пусть  $X$  равномерно распределено на множестве  $\{x_1, \dots, x_n\}$  (считаем, что  $x_i$  упорядочены по возрастанию). Если  $n = 2k + 1$  нечетно, то  $\text{med } X = x_{k+1}$ , если  $n = 2k$ , то медианой является любое число между  $[x_k, x_{k+1}]$ . Кроме того, медиана будет минимизировать функцию

$$f(y) = \sum_{j=1}^n |y - x_j|.$$

### 2.8.3 Мода

**Определение 2.21.** Мы сформулируем определение **моды** отдельно для дискретного и непрерывного случая:

- дискретный: мода – наиболее вероятное значение, то есть  $x_*$  для которого  $P(X = x_*)$  наибольшая.
- непрерывный: мода – точка глобального максимума плотности.

**Замечание.** Есть понятия, схожие по морфологии с модой, но несколько отличающиеся: унимодальности, двумодальности и многомодальности. Неформально эти понятия означают, что у распределения один, два или больше "пиков" соответственно, в то время как мода только о глобальном максимуме.

## 2.9 Вероятностные неравенства

- Неравенство Маркова:  $X \geq 0, \exists EX \Rightarrow P(X \geq C) \leq \frac{EX}{C} \forall C > 0$
- Чебышёв:  $\exists Var X \Rightarrow P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{Var X}{\epsilon^2} \forall \epsilon > 0$
- $X_1, \dots, X_n$ -i.i.d;  $\mu, \delta^2; \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i P(|\bar{X} - \mu| \geq \xi) \leq \frac{Var \bar{X}}{\xi^2} = \frac{\delta^2}{n\xi^2}$ - слабый закон больших чисел
- $L_2 = X : EX^2 < +\infty$ ;  $(\cdot, \cdot) : L_2 X L_2 \rightarrow \mathbb{R} (X, Y) = EXY$   
 $|EXY|^2 \leq EX^2 \cdot EY^2 (X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) : Cov^2(X, Y) \leq Var X \cdot Var Y$

$$- \text{Гёльдера: } E|XY| \leq (E|x|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (E|y|^q)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$- \text{Минковского: } (E|X + Y|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (E|x|^p)^{\frac{1}{p}} + (E|Y|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$- g\text{-выпукла вниз} \Rightarrow gE(X) \leq E(gX)\text{-неравенство Йенсена}$$

$$- (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (E|X|^q)^{\frac{1}{q}} p < q \text{ - неравенство Ляпунова}$$

## 2.10 Числовые характеристики случайных векторов

В данном параграфе мы рассмотрим числовые характеристики случайных векторов.

### 2.10.1 Ковариация и коэффициент корреляции

**Определение 2.22.** Ковариацией случайных величин  $X, Y$  будем называть число

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X - E X)(Y - E Y)$$

**Теорема 2.18.** Свойства ковариации

1.  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E X \cdot E Y$
2.  $E(X, Y) = E(Y, X)$
3.  $E(X, X) = \text{Var } X$
4.  $\text{Cov}(c_1 X_1 + c_2 X_2, Y) = c_1 \text{Cov}(X_1, Y) + c_2 \text{Cov}(X_2, Y)$
5.  $\text{Cov}(X, c) = 0$ , в частности,  $\text{Cov}(X + c, Y) = \text{Cov}(X, Y)$
6.  $X, Y$ -независимые  $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

*Доказательство.* 1. Заметим, что

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E(X - E X)(Y - E Y) \\ &= E(XY - Y E X - X E Y + E X E Y) = E(XY) - E \cdot E Y.\end{aligned}$$

2. Очевидно из определения.
3. Очевидно из определений ковариации и дисперсии
4. Действительно, по линейности математического ожидания имеем

$$\begin{aligned}\text{Cov}(c_1 X_1 + c_2 X_2, Y) &= E(c_1 X_1 + c_2 X_2)Y - E(c_1 X_1 + c_2 X_2) E Y \\ &= c_1 E(X_1 Y) + c_2 E(X_2 Y) - c_1 E X_1 E Y - c_2 E X_2 E Y \\ &= c_1 \text{Cov}(X_1, Y) + c_2 \text{Cov}(X_2, Y).\end{aligned}$$

5. Очевидно из определения и только что доказанного свойства.
6. Следует из того, что для независимых случайных величин  $E X Y = E X \cdot E Y$ .

□

**Замечание.** Для дисперсии мы формулировали свойства, связанные с суммами. С учётом введенного понятия ковариации мы можем расписать эти свойства следующим образом:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X \pm Y) &= \text{Var } X + \text{Var } Y \pm 2 \text{Cov}(X, Y) \\ \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) &= \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} \text{Cov}(X_k, X_j).\end{aligned}$$

Далее рассмотрим нормированную ковариацию.

**Определение 2.23** (Коэффициент корреляции).  $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}}$

- $|\rho(x, y)| \leq 1$   
 $\rho(X, Y) = \dots = \text{Cov}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{\text{Var } X}}, \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\text{Var } Y}}\right)$   
 $E\tilde{X} = 0, \text{Var } \tilde{Y} = 1$   
 $\text{Var}(\tilde{X} + \tilde{Y}) = 2 + 2\rho(X, Y) \Rightarrow \rho(X, Y) \geq -1$   
 $\text{Var}(\tilde{X} - \tilde{Y}) = 2 - 2\rho(X, Y) \Rightarrow \rho(X, Y) \leq 1$
- $\rho(X, Y) = 1 : \text{Var}(\tilde{X} - \tilde{Y}) = 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \tilde{X} - \tilde{Y} = C$   
 $\tilde{Y} = \tilde{X} - C \Rightarrow \frac{Y - EY}{\sqrt{\text{Var } Y}} = \frac{X - EX}{\sqrt{\text{Var } X - C}}$
- $\rho(X, Y) = -1 : \text{Var}(\tilde{X} + \tilde{Y}) = 0 \Rightarrow \tilde{Y} = -\tilde{X} + C \Rightarrow (\rho(X, Y)) = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b, a \neq c$  при этом  
 $a > c \Leftrightarrow \rho(\dots) = 1$   
 $a < c \Leftrightarrow \rho(\dots) = -1$

## 2.10.2 Характеристики случайных векторов

$X = (X_1, \dots, X_n)$ -случайный вектор  
 $EX = (EX_1, \dots, EX_n)$ -вектор математических ожиданий  
 $EAX = AEX, A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$   
 $\text{Var } X = E(X - EX)(X - EX)^T = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j}$ -матрица ковариации  $\text{Var } X = (\text{Var } X)^T$   
 $\text{Var } X \geq 0$  (неотриц. полуопред.)  
 $t^T \text{Var } X t = t^T (E(X - EX)(X - EX)^T) t = E t^T (X - EX)(X - EX)^T t = E(t^T (X - EX))^2 \geq 0$   
 $\text{Var}(X + C) = \text{Var } X$   
 $X, Y$ -независимые  $\Rightarrow \text{Var}(X + Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y$   
 $i = j : \text{Cov}(X_i, X_i) + \text{Cov}(Y_i, Y_i) = \text{Var}(X_i) + \text{Var}(Y_i) = \text{Cov}(X_i + Y_i, X_i + Y_i) = \text{Cov}(X_i, X_j) + \text{Cov}(Y_i, Y_j) + \text{Cov}(X_i, Y_j) + \text{Cov}(Y_i, X_j) = \text{Cov}(X_i, X_j) + \text{Cov}(Y_i, Y_j)$

$$Poly(n, p) : p = (p_1, \dots, p_n) P(S_b(1) = k_1, \dots, S_n(m) = km) = p_1^{k_1}, \dots, p_m^{k_m} \cdot \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, X_i \text{-независимое}, X_i \sim Poly(1, p) ES_n = n \cdot EX_1 = np EX_1^{(j)} =$$

$$pVarS_n = n \cdot Var(X_i) Var(X_i) = (Cov(X_i^{(k)}, X_i^{(j)}))_{1 \leq k, j \leq m};$$

$$k = j : Var X_i^k = E(X_i^k)^2 - (E(X_i^k))^2 = p_k - p_k^2 = p_k q_k$$

$$k \neq j : Cov(X_i^{(k)}, X_i^{(j)}) = EX_i^{(k)} \cdot X_i^{(j)} - EX_i^{(k)} \cdot EX_i^{(j)} = -p_k p_j$$

**Многомерное нормальное распределение:**

- $X = (X_1, \dots, X_n), X_i \text{-независимое}, \sim N(0, 1) : p(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \exp(-\frac{\|x\|^2}{2})$

$$EX = \mathbb{E} Var X = I_n$$

- $Y = AX + M, A \in M_{m \times n}, \mu \in \mathbb{R}^m Y \sim N(\mu, AA^T)$

$$EY = \mu, VarY = VarAX = AI_n A^T = AA^T$$

- $U \sim N(\mu, \Sigma) \Sigma = \Sigma^T, \Sigma \geq 0 U = \sqrt{\Sigma} \cdot X + \mu \left( \begin{matrix} \Sigma = u \wedge u^T \\ \sqrt{\Sigma} u \sqrt{\Sigma}^T \end{matrix} \right)$

$$\Rightarrow \text{Утверждение: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X \sim N(\mu_1, \Sigma_{11}) Y \sim N(\mu_2, \Sigma_{22})$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}U_{12} \\ U_{21}U_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \wedge_1 0 \\ 0 \wedge_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11}^T U_{12}^T \\ U_{21}^T U_{22}^T \end{pmatrix}$$

$$UU^T = I$$

$$U^T U = I$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{11}U_{12} \\ U_{21}U_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\wedge_1} 0 \\ 0 \sqrt{\wedge_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11}^T U_{12}^T \\ U_{21}^T U_{22}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$X = \mu_1 + \begin{pmatrix} U_{11}\sqrt{\wedge_1} & U_{12}\sqrt{\wedge_2} \\ U_{21}\sqrt{\wedge_1} & U_{22}\sqrt{\wedge_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{11}^T \xi_1 & U_{12}^T \xi_2 \\ U_{21}^T \xi_1 & U_{22}^T \xi_2 \end{pmatrix} = \mu_1 + U_{11}\sqrt{\wedge_1} U_{11}^T \xi_1 +$$

$$U_{11}\sqrt{\wedge_1} \cdot U_{21}^T \xi_2 + U_{12}\sqrt{\wedge_2} \cdot U_{12}^T \xi_1 + U_{12}\sqrt{\wedge_2} \cdot U_{22}^T \xi_2$$

**Некоррелированность**  $\Leftrightarrow \rho(X, Y) = Cov(X, Y) = 0$  Независимость  $\Leftrightarrow$  Некоррелированность

**Утверждение:**

$$X = (X_1, \dots, X_n) \sim N(\mu, \Sigma) X_i, X_j \text{- независимые} \Leftrightarrow Cov(X_i, X_j) = 0$$

*Доказательство.* •  $\Rightarrow$  очевидно  $\Leftarrow \angle \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix} \sim$

$$N\left(\begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} \delta^2 x_i & 0 \\ 0 & \delta^2 x_j \end{pmatrix}$$

- $\delta_{xi} = \delta_{xj} = 0 \Rightarrow$ - вырождение и практически очевидная независимость

- $\delta_{x_i}, \delta_{x_j} > 0 : p(x_i, x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{x_i}\delta_{x_j}} \exp\left(-\frac{1}{2} + \begin{pmatrix} x_i - \mu_i \\ x_j - \mu_j \end{pmatrix}^\tau \cdot \begin{pmatrix} \delta_{x_i}^2 & 0 \\ 0 & \delta_{x_j}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i - \mu_i \\ x_j - \mu_j \end{pmatrix}\right) = p_{x_i}(x_i) \cdot p_{x_j}(x_j) \Rightarrow X_i, x_j$ - независимые
- $\delta_{x_i} = 0$  или  $\delta_{x_j} = 0$  тоже довольно очевидно

□

## 2.11 Условные распределения

### 2.11.1 Условные математическое ожидание и дисперсия

**Определение 2.24** (Условное распределение). •  $X_1, \dots, X_n$ -дискрет.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k | X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_n = x_n) = \frac{P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)}{P(X_{n+1}=x_{n+1}, \dots, X_n=x_n)}$$

- $X_1, \dots, X_n$ -абс. непрерыв.:  $p(x_1, \dots, x_k | X_{n+1}, \dots, X_n) = \frac{P(X_1, \dots, X_n)}{P(X_{n+1}, \dots, X_n)}$

**Пример 2.33.** 1.  $(X, Y)$ -дискр.  $P(X = k) = \sum P(X = k | Y = y_j) P(Y = y_j)$

2.  $(X, Y)$  - непрерыв.  $p_x(x) = \int p(x|y)p_y(y)dy$

**Определение 2.25** (Условное математическое ожидание). 1. диск.

$$E(X|Y) = \sum X_{\mathbb{R}} \cdot P(X = x_k | Y)$$

2. непрерыв.  $E(X|Y) = \int xp(x|y)dx$

**Определение 2.26** (обычное математическое ожидание).  $EX = \arg \min E(x - a)^2$   
 $E(X|Y) = \arg \min_{f(y) \in \mathbb{R}} E(X - f(y))^2$   $x \sim f(y)\mu = f(y) : Ef^2(y) < +\infty$

**Свойства:**

1.  $E(X|X) = X$

2.  $X, Y$ -независимые  $\Rightarrow E(X|Y) = EX$

3. Формула полной вероятности для математического ожидания:  
 $EX = E_y(E(X|Y))$

**Определение 2.27** (Условная дисперсия).  $Var(X|Y) = E((X - E(X|Y))^2|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$

**Утверждение:**  $VarY = EVar(X|Y) + VarE(X|Y)$

*Доказательство.*  $VarY = EY^2 - (EY)^2 = EVar(Y|X) + (EE^2(Y|X) - E^2E(Y|X))$   
 $EY^2 = E(E(Y^2|X)) = E(Var(Y|X) + (E(Y|X))^2)EY = EE(Y|X)$   $\square$

•

**Пример 2.34.**  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} VarXCov(X,Y) \\ Cov(X,YVarY) \end{pmatrix}\right) \Rightarrow E(Y|X) = \mu_2 + \frac{Cov(X,Y)}{VarX} \cdot (x - \mu_1)$

*Доказательство.*  $Cov(Y - \frac{Cov(X,Y)}{VarX}X, X) = Cov(X, Y) - Cov(X|Y) = 0$   
 $\Rightarrow Y - \frac{Cov(X,Y)}{VarX}X$   $X$ -независимое  
 $E(y|x) = E(Y - \frac{Cov(X,Y)}{VarX}X + \frac{Cov(X,Y)}{VarX}X|X) = E(U|X) + \frac{Cov(X,Y)}{VarX} \cdot x = E(Y - \frac{Cov(X,Y)}{VarX}X) + \frac{Cov(X,Y)}{VarX}X$  что надо  $\square$

## 2.12 Упражнения

1. Случайная точка  $B$  равномерно распределена на окружности  $x^2 + (y - a)^2 = r^2$  с центром в точке  $O = (0, a)$ . Пусть  $C = (\xi, 0)$  – точка пересечения прямой  $OB$  с осью абсцисс. Найти функцию распределения и плотность случайной величины  $\xi$ .
2. Пусть  $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ . Найти функции распределения и плотности случайных величин  $Y_1 = X^2/(1 + X^2)$ ,  $Y_2 = 1/(1 + X^2)$ ,  $Y_3 = 2X/(1 - X^2)$ ,  $Y_4 = 1/X$ .
3. Случайная величина  $X$  имеет непрерывную функцию распределения  $F(t) = P(X \leq t)$ . Показать, что  $Y = F(X)$  распределена равномерно на  $[0; 1]$ .

4. Пусть  $X \sim U[0; 1]$  и определим квантильную функцию следующим образом:

$$F^{-1}(y) = \sup\{x : F(x) \leq y\}, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

где  $F$  – функция распределения (необязательно непрерывная) некоторого вероятностного закона. Показать, что случайная величина  $Y = F^{-1}(X)$  имеет функцию распределения  $F$ .

5. Случайный вектор  $(X, Y)$  принимает значения  $(0; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(1; 2)$ , каждое с вероятностью  $1/6$ . Найти распределение случайной величины  $X+Y$ . Являются ли случайные величины  $X, Y$  независимыми?
6. Случайный вектор  $(X, Y)$  имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 0)$ . Найти распределение случайной величины  $(X + Y)/2$ .
7. Пусть  $\xi \sim \mathcal{N}(0; 1)$ . Найти распределение вектора  $\eta = (\ln |\xi|, \text{sign } \xi)$ .
8. Совместное распределение  $X, Y$  является равномерным в единичном круге. Найти  $P(|X| < 3/4, |Y| < 3/4)$ .
9. Пусть  $p(x, y) = c(x + y)\mathbf{1}((x, y) \in (0, 1)^2)$  – совместная плотность  $\xi, \eta$ . Найти константу  $c$  и плотность случайной величины  $\nu = \max(\xi, \eta)$ .
10. Неотрицательные случайные величины  $X_1, X_2$  независимы и имеют одну и ту же плотность  $p(t)$ . Найти плотность совместного распределения  $Y_1 = X_1 - X_2, Y_2 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ .  
*Подсказка:* тут можно применить формулу для вычисления плотности преобразования случайных величин, только для двумерного случая:
- $$p_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = p_{X_1, X_2}(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) |\det D(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2))|,$$
- где  $D(\cdot)$  – матрица Якоби.
11. К переговорному пункту с двумя кабинами подошли три клиента: первый и второй клиенты заняли кабины №1 и №2 соответственно, а третий остался ждать. Предполагая, что времена  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  разговоров клиентов независимы и одинаково распределены с экспоненциальным законом с параметром  $\lambda$ , найти вероятность того, что третий клиент закончит разговор раньше первого или второго.
12. Пусть  $X_1, X_2, X_3$  – независимые случайные величины, распределенные равномерно на множестве целых чисел от  $-n$  до  $n$ . Пусть  $A(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ , для которого  $A(-1) = X_1, A(0) = X_2, A(1) = X_3$ . Найти вероятность  $P_n$ , что числа  $a_0, a_1, a_2$  целые?



13. В  $N$  ячеек независимо бросают частицы: для каждой частицы вероятность попадания в  $i$ -ю ячейку равняется  $p_i = 1/N$ . Обозначим через  $\nu_1 < \dots < \nu_N$  номера бросков, при которых частицы попадают в пустые ячейки; положим  $\tau_1 = \nu_1 = 1$ ,  $\tau_k = \nu_k - \nu_{k-1}$  при  $k \geq 2$  и обозначим через  $\theta_k$  номер ячейки, в которую попадает частица при  $\nu_k$  бросании. Найти:

- совместное и одномерные распределения величин  $\tau_2, \tau_3$ ;
- совместное и одномерные распределения величин  $\tau_2, \dots, \tau_N$  (являются ли эти величины независимыми?);
- совместное распределение  $\theta_1, \dots, \theta_N$ .

14. Дана последовательность  $(X_n)_{n=1}^\infty$  независимых случайных величин, равномерно распределённых на  $[0; 1]$ . Положим

$$S_n = \sum_{i=2}^n |X_{i-1} - X_i|.$$

Найти  $ES_n$  и  $\text{Var}S_n$ .

15. По маршруту ходят  $N$  автобусов без кондуктора. В каждом автобусе имеется касса, в которой перед выходом в рейс было  $r$  билетов. Всего эти автобусы перевезли  $n$  пассажиров. Найти математическое ожидание числа  $X$  пассажиров, которым не досталось билетов, предполагая, что каждый пассажир независимо от остальных может сесть в любой из автобусов с вероятностью  $1/N$ .
16. На бесконечный лист клетчатой бумаги (сторона клеточки равняется единице) случайно бросается круг единичного радиуса. Считая, что центр круга равномерно распределен на том единичном квадрате, на который он попал, найти математическое ожидание числа  $U$  точек с целочисленными координатами, покрытых этим кругом.
17. Пусть случайные величины  $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и они независимы. Найти совместное распределение случайных величин  $Y_1 = aX_1 + bX_2$ ,  $Y_2 = aX_1 - bX_2$  при  $a, b \neq 0$ . Несколько слов о последней задаче с пары, так как мы с ней немного поспешили. Нам дано, что  $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  и они независимы. Найти  $p_{X|(X+Y=z)}(x)$ .
18. Найти  $E(X|X+Y)$  и  $\text{Var}(X|X+Y)$  в условиях предыдущей задачи.
19. Пусть  $X_1, \dots, X_N$  — независимы случайные величины, распределенные по Пуассону с параметром  $\lambda > 0$ . Найти  $E(X_1 + \dots + X_k = m | X_1 + \dots + X_N = n)$ .

20.  $X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и они независимы. Найти распределение случайной величины  $Y = \frac{X_1 + X_2 X_3}{\sqrt{1 + X_3^2}}$ .
21. В схеме Бернулли с вероятностями успеха  $p$  и неудачи  $q = 1 - p$  найти математическое ожидание числа испытаний до первого появления цепочки из трёх единиц. В частности, вычислить указанное математическое ожидание при  $p = 1/2$ .
22. Пусть точки  $A_1, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) независимы и имеют равномерное распределение на окружности радиуса  $r$ . Пусть  $A_{(1)} = A_1, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}$  — точки  $A_1, \dots, A_n$ , расположенные в том порядке, в котором они встречаются при обходе окружности по часовой стрелке. Пусть  $\xi_i$  — длина дуги  $A_{(i)}A_{(i+1)}$  ( $\xi_n$  — длина дуги  $A_{(n)}A_{(1)}$ ). Найти совместное распределение величин  $\xi_1, \dots, \xi_k$  при  $k \leq n$ .
23. Пусть  $X \sim U[0, 1]$ , то есть  $p_X(t) = \mathbf{1}(t \in [0, 1])$ , и  $Y = -\ln(1 - X)$ . Найти распределение случайной величины  $Y$ .
24. Случайный вектор  $(X, Y)$  имеет равномерное распределение на единичном круге, то есть плотность  $p_{(X,Y)}(x, y) = \pi^{-1} \mathbf{1}(x^2 + y^2 \leq 1)$ . Найти функцию распределения случайной величины  $X$  и  $P(|X| < 3/4, |Y| < 3/4)$ .
25. Неотрицательные случайные величины  $X, Y$  независимы и имеют одну и ту же плотность  $p(x) \mathbf{1}(x \geq 0)$ . Найти плотность совместного распределения  $U = X - Y, W = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .
26. Найти плотность распределения суммы  $n$  независимых случайных величин, каждая из которых имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda > 0$ .
27. Пусть  $X \sim U[0, 2\pi], U = \cos X, W = \sin X$ . Найти  $EU, EW, EUW$ . Являются ли случайные величины независимыми и почему?
28. Случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и нормально распределены с параметрами  $(0, 1)$ . Являются ли независимыми случайные величины  $Y_1 = X_1 + X_2$  и  $Y_2 = X_1 - X_2$ ?
29. В партии из  $n$  изделий, каждое из которых независимо от остальных удовлетворяет стандарту с вероятностью  $p$  и не удовлетворяет с вероятностью  $1 - p$ . Система контроля качества состоит из двух независимых проверок: на  $k$ -ой проверке изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью  $\beta_k$ , а бракованное изделие принимается в

вероятностью  $\alpha_k$ . Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. За каждое изделие, удовлетворяющее стандарту и прошедшее проверку, предприятие получает  $a$  рублей, за изделие, прошедшее проверку, но не удовлетворяющее стандарту, уплачивается штраф  $b$  рублей, за изделие, не прошедшее проверку, уплачивается штраф  $c$  рублей. Найти математическое ожидание прибыли за партию из  $n$  изделий.

30. Распределение случайной величины  $\xi$  определяется формулами  $P\{\xi = k\} = C/k(k+1), k = 1, 2, \dots$ . Найти:
  - (a) постоянную  $C$ ;
  - (b)  $P\{\xi \leq 3\}$ ;
  - (c)  $P\{n_1 \leq \xi \leq n_2\}$
31. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы. Найти  $P\{\xi = \eta\}$ , если:
  - (a)  $\xi$  и  $\eta$  имеют одно и то же дискретное распределение  $P\{\xi = x_k\} = P\{\eta = x_k\} = p_k, k = 0, 1, \dots$
  - (b) функция распределения  $\xi$  непрерывна.
32. Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы и распределены показатель-но с одинаковым параметром  $\alpha$ . Найти плотность распределения величин:
  - (a)  $\eta_1 = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$
  - (b)  $\eta_2 = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ .
33. Ввести на сфере в качестве координат широту и долготу, считая их изменяющимися в отрезках  $[-\pi/2, \pi/2]$  и  $[-\pi, \pi]$  соответственно. Найти плотность  $p_\eta(x)$  распределения широты  $\eta$  случайной точки, имеющей равномерное распределение на сфере.
34. Распределение дискретной случайной величины  $\xi$  определяется формулами  $P\{\xi = k\} = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}, k = 1, 2, \dots$ . Найти математическое ожидание случайной величины  $\xi$ .
35. Независимые случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  положительны и имеют одинаковое невырожденное распределение. Обозначим  $\eta_k = \frac{\eta_k}{\eta_1 + \dots + \eta_n}$ . Найти:
  - (a) математическое ожидание  $\eta_k$
  - (b) коэффициент корреляции  $\eta_k$  и  $\eta_l$ ;

(с) коэффициент корреляции  $\eta_1 + \dots + \eta_k$  и  $\eta_1 + \dots + \eta_l$

36. Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы;  $\text{Var } \xi_i = \sigma_i^2, i = 1, \dots, n$ . При каких  $c_1, \dots, c_n$ , удовлетворяющих условиям  $c_k \geq 0, c_1 + \dots + c_n = 1$ , случайная величина  $\eta_n = c_1 \xi_1 + \dots + c_n \xi_n$  имеет минимальную дисперсию? Найти минимальную дисперсию.
37. Случайная величина  $\xi$  имеет непрерывную функцию распределения  $F(x)$ , случайная величина  $X$  принимает только значения 0 и 1:  $P\{X = 1\} = a, P\{X = 0\} = 1 - a$ . Указать совместные распределения  $\xi$  и  $X$ , при которых достигаются экстремальные значения  $E\xi X$ , и найти эти экстремальные значения.
38. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют следующее распределение:

$$P(\xi = k) = P(\eta = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Найти:

- (a)  $P\{\xi = \eta\}$ ;
  - (b)  $P\{\xi > \eta\}$ ;
  - (c)  $P\{\xi < \eta\}$ ;
  - (d)  $P\{\xi = k | \xi > \eta\}$ ;
  - (e)  $P\{\xi = k | \xi < \eta\}$ ;
  - (f)  $P\{\xi = k | \xi = \eta\}$ ;
  - (g)  $P\{\xi = k | \xi + \eta = l\}$ ;
  - (h)  $E\{\xi | \xi + \eta = l\}, l \geq 2$ ;
39. Найти распределение целочисленной неотрицательной случайной величины  $\xi$ , если:
- (a)  $P\{0 < \xi < \infty\} = 1, P\{\xi = k + 1 | \xi > k\} = p, k = 0, 1, \dots$ ;
  - (b)  $P\{\xi \geq 0\} = 1, P\{\xi = k + 1 | \xi \in \{k, k + 1\}\} = c < 1/2, k = 0, 1, \dots$ ;
  - (c)  $P\{\xi \geq 0\} = 1, P\{\xi = k + 1 | \xi \in \{k, k + 1\}\} = \frac{r}{k+r+1}, r > 0, k = 0, 1, \dots$
40. Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием единичной дисперсией. Найти  $E\xi \cos \xi, E \frac{\xi}{1+\xi^2}, E \sin \xi$

41. Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Найти  $E \cos \xi$ ,  $\text{Var} \cos \xi$ .
42. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Найти

$$P\{|\xi - \eta| \leq 1\}.$$

43. Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  независимы и нормально распределены с параметрами (1, 1), (2, 5), (0, 7) соответственно. Найти:

- (a)  $P\{2\xi_1 - \xi_2 < 0\}$ ;  
 (b)  $P\{-3 < 2\xi_1 - \xi_2 < 5\}$ ;  
 (c)  $P\{1 < 2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 < 4\}$ .

44. Случайный вектор  $(\eta_1, \eta_2)$  имеет нормальное распределение с  $E \eta_1 = E \eta_2 = 0$  и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \gamma \\ \gamma & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Найти распределение вектора  $(c_1\eta_1, c_2\eta_2)$  при  $c_1, c_2 \neq 0$ .

45. Случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы и имеют нормальное распределение,  $E \xi_1 = E \xi_2 = 0$ ,  $\text{Var} \xi_1 = \text{Var} \xi_2 = 1$ . Доказать, что случайные величины  $\xi_1\xi_2$  и  $\frac{1}{2}(\xi_1^2(\sigma_1, \sigma_2 + \gamma) - \xi_2^2(\sigma_1\sigma_2 - \gamma))$  одинаково распределены.
46. Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  - независимые одинаково распределенные случайные величины,  $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2, i = 1, 2, \dots, n$ . Найти распределение случайной величины

$$\eta_n = \prod_{i=1}^n \xi_i.$$

47. Можно ли подобрать постоянную  $c$  так, чтобы функция  $cx^{-3}$  определяла плотность распределения вероятностей на:

- (a) луче  $[1, +\infty)$ ;  
 (b) луче  $[0, +\infty)$ ;  
 (c) отрезке  $[-2, -1]$ .

48. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 0 и 1 с вероятностью  $1/2$  каждое. Найти распределение случайной величины

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}$$

49. Пусть  $\xi$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1)$ , и  $\xi = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2^2} + \frac{\delta_3}{2^3} + \dots$ ,  $\delta_n = 0$  или  $1$  – двоичное разложение  $\xi$ . Доказать, что при любом натуральном  $n$

$$P(\delta_n = 0) = P(\delta_n = 1) = \frac{1}{2}$$

и случайные величины  $\delta_1, \delta_2, \dots$  взаимно независимы.

50. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\delta^2$ . Найти коэффициент корреляции случайных величин  $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$  и  $\eta_2 = \alpha\xi - \beta\eta$ .
51. Пусть совместное распределение случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  нормально, причем  $E\xi = E\eta = 0$ , а коэффициент корреляции  $\xi$  и  $\eta$  равен  $p$ . Найти коэффициент корреляции случайных величин  $\xi^2$  и  $\eta^2$ .
52. Доказать, что если каждая из независимых случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеет геометрическое распределение, то случайная величина  $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$  также имеет геометрическое распределение. Найти параметр этого распределения, если параметры распределений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  равны соответственно  $p_1$  и  $p_2$ .
53. Пусть  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение. Доказать, что случайные величины  $\xi_1 + \xi_2$  и  $\xi_1 - \xi_2$  независимы.
54. Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $\alpha$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Найти распределение случайной величины  $\text{sign } \xi$ .
55. Пусть  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих равномерное на отрезке  $[0, 1]$  распределение. Найти распределение случайной величины

$$\eta_n = \prod_{k=0}^n \xi_k$$

56. Имеется  $n$  шаров, среди которых  $k$  белых и  $n - k$  черных. Наудачу выбирается  $v$  шаров, где  $v$  - случайная величина, принимающая значения от 1 до  $n$  с равными вероятностями. Найти математическое ожидание числа белых шаров среди отобранных.

## Глава 3

# Предельные методы теории вероятностей

### 3.1 Вероятностные сходимости

**Определение 3.1.** (почти наверное)  $a(mostsurely)X_n, X$ -случайные величины, которые заданы на  $(\Omega, A, P) : X_n \xrightarrow{n_1\mu_1} X \Leftrightarrow P(\{w : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) = X(w)\}) = 1$   
 $P(\{w : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(w) \neq X(w)\}) = 0$

**Определение 3.2** (по вероятности:).  $X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 $\forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow p(|X_n - X| < \varepsilon) \rightarrow 1$

**Определение 3.3** (в среднем порядке  $p, Lp$ ):.  $X_n \xrightarrow{Lp} X \Leftrightarrow E|X_n - X|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Определение 3.4** (по распределению:).  $X_n : (\Omega_n, A_n, P_n), X : (\Omega, A, P)$   
 $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow Ef(X_n) \rightarrow Ef(x) \forall f$ -непрерывна и ограничена

**Теорема 3.1** (связь сходимостей:).  $P \rightarrow d : |E(f(X_n) - f(x))| \leq E|f(X_n) - f(x)| \mathbb{K}(|X_n - x| \geq \delta\varepsilon) + E|f(X_n) - f(x)| \mathbb{K}(X_n - x < \delta\varepsilon)$  (из непрерывности  $f$ )  
 $\leq 2 \cdot M \cdot P(|X_n - X| \geq \delta\varepsilon) + \varepsilon \cdot 1$

$Lp \rightarrow P : P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \rightarrow 0$

$a.s. \rightarrow P : 0 = \{w : X_n(w) \rightarrow X(w)\}, P(0) = 0$

$\varepsilon > 0 : A_n = U\{w : |X_m(w) - X(w)| > \varepsilon\} A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow P(A_n) \rightarrow P(A) = 0$

$w \in \bar{0}, N(\varepsilon, w) : n > N(\varepsilon, w) \Rightarrow |X_n(w) - X(w)| < \varepsilon$

$w \notin A_n \Rightarrow w \notin A \Rightarrow w \in \bar{A} : \bar{0} \subset \bar{A} \Rightarrow A \subset 0$

$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P(A_n)$

**Замечание:** Все другие возможные импликации неверны.



**Пример 3.1.**  $d \nrightarrow P : P(w_1) = P(w_2) = \frac{1}{2} \quad X(w_i) = (-1)^i, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots\}$   
 $X_n(w_i) = (-1)^{i+n} \quad n \in \mathbb{N} : Ef(X) = \frac{f(X(w_1)) + f(X(w_2))}{2} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = Ef(X_n)$   
 $P(|X_n(w_i) - X(w_i)| > \varepsilon) \neq 0$

$a.s. \nrightarrow Lp : ([0, 1], (B), U[0, 1]) \quad X(w) = 0 \quad X_n(w) = \begin{cases} e^n & w \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad X_n \xrightarrow{a_1 s_1}$   
 $X : E|X_n - X|^p = \frac{e^{np}}{n} \nrightarrow_{p>0} 0$

$P \nrightarrow a_1 s_1 : X_{2^n}(w) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & w \in [0, \frac{1}{2^n}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, m : \exists n 2^n < m < 2^{n+1} \rightarrow X_m =$   
 $\begin{cases} \frac{1}{2^n}, & w \in [\frac{n}{2^n}, \frac{n+1}{2^n}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad P(X_m(w) - X(w)) > \varepsilon \rightarrow 0$

$F_n(x) \Rightarrow F(x) \Leftrightarrow F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x \in C(F) = \{x : F(x) - \text{непрерывна в } x\}$   
 $F_n, F$ - функции распределения

**Теорема 3.2.**  $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n \Rightarrow F$

*Доказательство.*  $\Rightarrow X_0 \in C(F); f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \leq x_0 \\ 0, & t \geq x_0 + \varepsilon \end{cases}$   
 $F_n(X_0) = \int_{-\infty}^{x_0} dF_n(x) = \int_{-\infty}^{x_0} f_\varepsilon(t) dF_n(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t) dF_n(x) \rightarrow$   
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(t) dF(x) \leq F(x_0 + \varepsilon) \quad (f_\varepsilon(t) = t_\varepsilon(t + \varepsilon))$   
□

**Замечание:**

- $F_n(x) - F_n(y) \rightarrow F(x) - F(y), \forall x, y \in C(F)$
- $F \in C(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0$
- $F_n, F$ -дискретные  $\{x_0, \dots, x_n, \dots\}$ - носитель  $F, F_n; p_{n,k} \rightarrow p_k = P(X_n = X_k) \rightarrow P(X = X_k)$

**Теорема 3.3** (Свойства сходимости:). 1.  $X_n \xrightarrow{a_1 s_1} X, |X_n| \leq Y, EY < \infty \Rightarrow EX_n \rightarrow EX$

$$2. X_n \xrightarrow{P} X, f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(x)$$

$$3. (a) X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0, X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} X$$

$$(b) X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0 \quad Y_n \xrightarrow{d} Y \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} Y$$

$$4. X_n \xrightarrow{d} X, \quad Y_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$$

$$5. X_n \xrightarrow{d} C \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} C$$

$$6. X_n \xrightarrow{d} X \\ Y_n \xrightarrow{P} C \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + C \\ X_n Y_n \xrightarrow{d} X_c \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{x}{c}, c \neq 0$$

$$7. X_n \xrightarrow{P} X \\ Y_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \text{- арифметические операции сохранения сходимости по } P$$

$$[F_n(x) \rightarrow F(x) \forall x \in C(F)]$$

$$Ef(X_n) \rightarrow Ef(X), f\text{-непрерывна и ограничена}$$

$$f \in F \text{ - подмнож. непрерывно и ограничено}$$

$\mathbb{F}$ - множ. функция распределения

$\mathbb{G}$ - множ. функция,  $\nearrow$ , монотона, непрерывна справа,  $\mathbb{G}(+\infty) \leq 1$

$$\mathbb{G}(-\infty) \geq 0$$

$\rightarrow$ -сходится в любой точке непрерывности

**Теорема 3.4** (Хелли:).  $\{G_n\}, G_n \in \mathbb{G} : \exists G_{nk} \quad G_{nk} \rightarrow G \in \mathbb{G}$  **Следствие:**  
 $\forall G_{nk} \rightarrow G \Rightarrow G_n \rightarrow G$  (доказательство от против.)

Для  $\mathbb{F}$ -это неверно:  $P(X_n = n) = P(X = -n) = 1/2$   $F_n(t) =$

$$\begin{cases} 0, & t < -n \\ \frac{1}{2}, & -n \leq t < n \\ 1, & t \geq n \end{cases}$$

**Определение 3.5** (сложные распредел. послед.:).  $\inf_n P(-N < X_n \leq N) > 1 - \varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \dots$ )

**Определение 3.6** (класс, опред. распредел.:).  $\mathbb{L}$ -подмножество непрерывно и ограничено определяет распределение  $\Leftrightarrow \int f dG_{f \in \mathbb{F}} = \int_{G \in \mathbb{G}} f dF_{\forall f \in \mathbb{L}} \Rightarrow G = F$

## 3.2 Предельные теоремы теории вероятностей

### 3.2.1 Закон больших чисел

### 3.2.2 Центральная предельная теорема

## 3.3 Упражнения

1. Показать, что случайный вектор  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  является гауссовским тогда и только тогда, когда линейная комбинация его компонент  $c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$  имеет нормальное или вырожденное распределение.
2. Складывается  $10^4$  чисел, округленных с точностью до  $10^{-m}$ . Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале  $[-0,5 \cdot 10^{-m}, 0,5 \cdot 10^{-m}]$ , найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет лежать суммарная ошибка.
3. Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимы и одинаково распределены:

$$P\{\xi_i = 1,25\} = P\{\xi_i = 0,75\} = \frac{1}{2}, i \in \mathbb{N}.$$

и  $\eta_n = \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_n$ .

- (a) Найти  $E \eta_{1000}$ ,  $\text{Var } \eta_{1000}$ ,  $E \ln \eta_{1000}$ ,  $\text{Var } \ln \eta_{1000}$ ;
  - (b) Пользуясь асимптотической нормальностью  $\ln \eta_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , найти приближенные значения
    - $P\{\eta_{1000} \leq 10^{-20}\}$ ,
    - $P\{\eta_{1000} < 1,25^5 01 \cdot 0,75^4 99\}$ ,
    - $P\{\eta_{1000} \leq 1,25^5 01 \cdot 0,75^4 99\}$ ,  $P\{\eta_{1000} \leq 10^{-7}\}$ .
  - (c) Пользуясь формулой Стерлинга, найти
    - $P\{\eta_{1000} < 1,25^5 01 \cdot 0,75^4 99\}$ ,
    - $P\{\eta_{1000} \leq 1,25^5 01 \cdot 0,75^4 99\}$ .
4. Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$X_n^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2.$$

называется *распределением  $\chi^2$  (хи-квадрат) с  $n$  степенями свободы*

- (a) Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{X_n^2}{n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0$  при любом  $\varepsilon > 0$ ;

(b) Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_n^2 - M_{X_n^2}}{\sqrt{D_{X_n^2}}} \leq x \right\}, x \in \mathbb{R}.$

5. Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2/n}}$$

называется *распределением Стьюдента с  $n$  степенями свободы*. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\tau_n \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Случайная величина  $\xi_\lambda$  распределена по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ . Найти

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x \right\}$$

7. Имеется последовательность  $\{X_n\}$  независимых случайных величин, равномерно распределенных на  $[0, a]$ . Положим  $\xi_n = n \min(X_1, \dots, X_n)/a$  и  $\eta_n = n(1 - \max(X_1, \dots, X_n)/a)$ . Найти предельные распределения для  $\xi_n, \eta_n$  и показать, что они независимы.
8. (*метод Монте-Карло статистических испытаний*) Вычисление интеграла  $I = \int_0^1 f(x)dx$  можно описать следующим образом. Пусть случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда

$$E f(\xi) = \int_0^1 f(x)dx = I.$$

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  взаимно независимы и равномерно распределены на  $[0, 1]$ . Рассмотрим  $\bar{f}_n = \frac{1}{n} [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]$  и предположим, что  $\sigma^2 = D\bar{f}_n \leq C$ . Показать, что  $E\bar{f}_n = I$  и  $\bar{f}_n \xrightarrow{P} I, n \rightarrow \infty$ . Оценить  $P(|\bar{f}_n - I| < \varepsilon)$  для произвольного  $\varepsilon > 0$  с помощью центральной предельной теоремы.

9. (*теорема Вейерштрасса*). Пусть  $f(x)$  - непрерывная функция на отрезке  $(0, 1]$ . Пусть последовательность случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$  соответствует схеме Бернулли с вероятностью успеха  $P(\xi_i = 1) = x, 0 < x < 1$ , и  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Введем многочлены

$$B_n(x) = E f\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

Доказать, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in (0,1)} |f(x) - B_n(x)| \rightarrow 0.$$

(Многочлены  $B_n(x)$  называются *многочленами Бернштейна*.)

## Глава 4

# Введение в математическую статистику. Описательная статистика

### 4.1 Выборка. Эмпирическая функция распределения и гистограмма. Их свойства. Способы визуализации выборки

Чтобы можно было сделать какие-то выводы по выборке, она должна обладать некоторыми свойствами. Во-первых, она должна приходить из какого-то вероятностного пространства (если всё детерминировано, то наши методы теряют смысл). Во-вторых, она должна быть достаточно репрезентативной (большой). Это понятие сложно формализовать, и в разных областях это слово понимается по-своему.

#### Эмпирическая функция распределения

Пусть  $X_1 \dots X_n$  — выборка объёма  $n$ , реализация  $n$  i.i.d. случайных величин с теоретической функцией распределения  $F(x)$ :  $X_1 \dots X_n \sim F(x)$ . Введем пару функций.

$$\mu_n(x) = \sum \mathbf{1}(X_k \leq x); \quad F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}$$

$\mu_n(x)$  считает количество элементов выборки, которые не превосходят  $x$ . Функция  $F_n$  называется эмпирической функцией распределения (кратко эфр).

**Определение.** Вариационным рядом называется упорядоченная по возрастанию выборка. Обозначается он так:  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ . (График эфр в общем случае).

Теперь поговорим про свойства эмпирической функции распределения. Заметим, что  $1(X_k \leq x) \sim \text{Bern}(F(x))$ , и тогда  $\mu_n(x) = \sum 1(X_k \leq x) \sim \text{Bin}(n; F(x))$ . Это значит, что

$$P\left(F_n(x) = \frac{k}{n}\right) = P(\mu_n(x) = k) = C_n^k F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}.$$

Тогда

$$E\mu_n(x) = nF(x), \quad EF_n(x) = EF(x); \quad D\mu_n(x) = nF(x)(1 - F(x))$$

По ЗБЧ имеет место  $P(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) \rightarrow 0$ . В мат. статистике это говорит о состоятельности эфр.

Теперь с помощью ЦПТ мы можем получить доверительный интервал для эфр. ЦПТ утверждает, что

$$P\left(t_1 \leq \frac{\mu_n(x) - nF(x)}{\sqrt{nF(x)(1 - F(x))}} \leq t_2\right) \approx \Phi(t_1) - \Phi(t_2).$$

Выражение слева можно переписать как  $P\left(t_1 \leq \sqrt{n} \frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}} \leq t_2\right)$ . Теперь рассмотрим  $P(|\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))| < t)$ :

$$P(|\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))| < t) = P(-t < \sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) < t).$$

Поделив это неравенство на  $\sqrt{nF(x)(1 - F(x))} = \sqrt{D\mu_n(x)}$  и применив ЦПТ, получим:

$$P\left(\frac{-t}{\sqrt{D\mu_n(x)}} < F_n(x) - F(x) < \frac{t}{\sqrt{D\mu_n(x)}}\right) = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\dots}}\right) - \Phi\left(\frac{-t}{\sqrt{\dots}}\right)$$

По свойствам  $\Phi$  выполнено равенство  $\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\dots}}\right) - \Phi\left(\frac{-t}{\sqrt{\dots}}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\dots}}\right) - 1$ . Выражение под корнем можно оценить: при том, что  $0 < F(x) < 1$  имеет место неравенство  $\frac{1}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}} \leq 2$ , и тогда

$$2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\dots}}\right) - 1 \geq 2\Phi(2t) - 1$$

Обозначим  $\gamma = 2\Phi(2t) - 1$ . Тогда  $2t = q_{\frac{\gamma+1}{2}}$ , значит  $t = \frac{q_{\frac{\gamma+1}{2}}}{2}$ . Обозначим просто  $q = q_{\frac{\gamma+1}{2}}$ . Итак, получается:

$$P\left(\frac{-q}{2\sqrt{n}} < F_n(x) - F(x) < \frac{q}{2\sqrt{n}}\right) \geq \gamma,$$

а следовательно

$$P\left(-F_n(x) - \frac{q}{2\sqrt{n}} < F(x) < F_n(x) - \frac{q}{2\sqrt{n}}\right) \geq \gamma.$$

Такое неравенство называется доверительным интервалом для  $F(X)$ .

Продолжим говорить о свойствах эфр. Рассмотрим набор чисел из какой-то выборки  $x_0 = -\infty < x_1 < \dots, x_{N-1} < x_N = +\infty$ , и связанную с выборкой функцию распределения в этих точках  $0 < F(x_1) < \dots < F(x_{N-1}) < 1$ . Рассмотрим следующие величины:

$$p_i = \Delta_i F = F(x_i) - F(x_{i-1}) = P(x_{i-1} < X < x_i),$$

$$\nu_i = \Delta_i \mu_n = \nu_n(x_i) - \nu_n(x_{i-1}) = \sum_{j=1}^n 1[x_{i-1} < X < x_i].$$

$\nu_i$  — это частоты, т.е. число элементов выборки в интервале между  $x_{i-1}$  и  $x_i$ . Теперь эфр можно записать по другому:

$$F_n(x_i) = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i}{n}$$

$$\Delta_i F_n(x_i) = F_n(x_i) - F_n(x_{i-1}) = \frac{\nu_i}{n}$$

$$\sqrt{n}(\Delta_i F_n(x) - \Delta_i F(x)) = \sqrt{n} \frac{\nu_i - np_i}{n} =: \hat{\nu}_i^{(n)}$$

Векторная случайная величина  $\hat{\nu}$  имеет полиномиальное распределение:

$$(\nu_1, \dots, \nu_N)^T \sim \text{Poly}(n, (p_1, \dots, p_N)^T)$$

Тогда по многомерному закону ЦПТ верно

$$\hat{\nu}^{(n)} \rightarrow^d N(0, \Sigma), \quad \Sigma_{i,j} = p_i(\delta_{i,j} - p_j).$$

Здесь  $\Sigma$  — ковариационная матрица



**Теорема 4.1. (Теорема Колмогорова)**

Пусть  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  – выборка объема  $n$  из неизвестного распределения  $F$ , где  $F(x)$  – непрерывна,  $F_n(x)$  – эфр,  $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда:

$$P(\sqrt{n}D_n \leq t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta$$

где случайная величина  $\eta$  имеет распределение Колмогорова с непрерывной функцией распределения:

$$K(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 t^2} \text{ при } t \geq 0$$

$$K(t) = 0 \text{ при } t < 0$$

**Теорема 4.2. (Теорема Смирнова)**

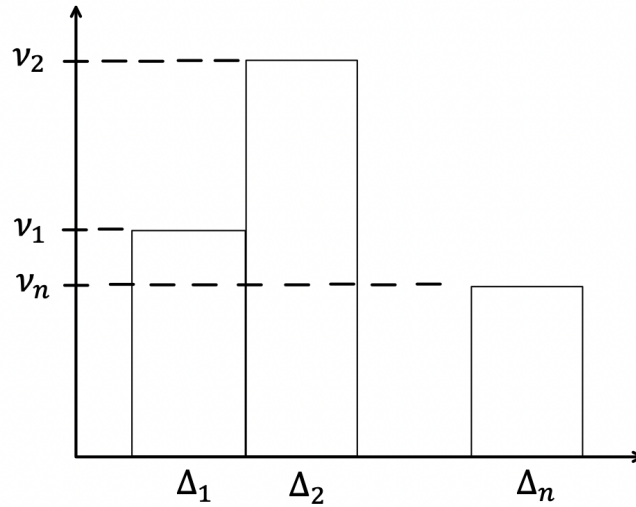
Пусть есть две независимые выборки объемов  $m$  и  $n$  соответственно из неизвестного распределения  $F$ , где  $F(x)$  – непрерывна,  $D_{m,n} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_m(x) - F_n(x)|$ .

Тогда:

$$P\left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \leq t\right) \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} K(t)$$

**4.1.1 Гистограмма**

Одной из характеристик эмпирического распределения является гистограмма. Для заданной выборки  $X_1, \dots, X_n$  разобьем числовую прямую на конечное число промежутков  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ . Обозначим через  $\nu_k(x)$  число случайных величин среди выборки, попавших в интервал  $\Delta_k$ . Тогда  $\nu_1(x) + \dots + \nu_m(x) = n$ . На каждом из интервалов  $\Delta_k$  строится прямоугольник, площадь которого пропорциональна  $\nu_k$ . Общая площадь всех прямоугольников должна равняться единице. Пусть  $l_k$  – длина интервала  $\Delta_k$ . Высота  $f_k$  прямоугольника над  $\Delta_k$  будет равняться:  $f_k = \frac{\nu_k}{n\Delta_k}$ .



#### 4.1.2 Box-plot

### 4.2 Выборочные моменты и их свойства

Пусть имеется выборка  $X_1, \dots, X_n - i.i.d. \sim F(X)$ . Тогда существуют теоретические моменты. Если теоретические моменты существуют, то в силу закона больших чисел выборочные моменты сходятся по вероятности к своим теоретическим прообразам. Среди выборочных моментов особое место занимают моменты первого и второго порядков.

$$\alpha_k = EX^k - \text{теоретическое матожидание } X^k$$

$$\beta_k = E(X - EX)^k - k\text{-ый центральный момент распределения}$$

**Определение.** *K-ый выборочный момент*

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

**Определение.** *Выборочное среднее*

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{X}$$

**Определение.** *K-ый центральный выборочный момент*

$$\hat{\beta}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\alpha}_1)^k$$

**Определение.** *Выборочная дисперсия*

$$S_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \hat{\beta}_2$$

$$S_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - |\bar{X}|^2 = \hat{\beta}_2$$

#### 4.2.1 Свойства выборочных моментов

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E[X_1] = E[X]$$

$$Var[\bar{X}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{1}{n} Var[X_1] = \frac{Var[X]}{n}$$

**Свойства  $S^2$**

$$E[S_*^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i^2] - E[(\bar{X})^2] = \alpha_2 - \alpha_1^2 - \frac{\beta_2}{n} = \beta_2 - \frac{\beta_2}{n} = \frac{n-1}{n} \beta_2$$

Т.к.  $E[S_*^2] \neq \beta_2$ , то такую дисперсию называют **смещённой**

$$S^2 = \frac{n}{n-1} S_*^2$$

$S^2$  - **не смещённая** дисперсия

#### 4.2.2 Прочие выборочные характеристики

**Определение.** *Величина*

$$\gamma_1 = \frac{E(X - EX)^3}{Var^{3/2} X}$$

называется коэффициентом асимметрии и характеризует скошенность распределения по отношению к математическому ожиданию.

Если  $\gamma_1 > 0$  \*вставить картинку\* («длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания)

Если  $\gamma_1 < 0$  \*вставить картинку\* («длинная часть» кривой расположена слева от математического ожидания.)

**Определение.** *Величина*

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\overline{(X - \bar{X})^3}}{S_*^3}$$

*называется выборочным коэффициентом асимметрии*

**Определение.** *Величина*

$$\gamma_2 = \frac{E(X - EX)^4}{Var^2 X} - 3$$

*называется коэффициентом эксцесса и характеризует относительную остроконечность или сглаженность распределения по сравнению с нормальным распределением.*

«Минус три» в конце формулы введено для того, чтобы коэффициент эксцесса стандартного нормального распределения был равен нулю.

Если  $\gamma_2 > 0$  \*вставить картинку\* (пик распределения около математического ожидания острый)

Если  $\gamma_2 < 0$  \*вставить картинку\* (пик распределения около математического ожидания гладкий)

**Определение.** *Величина*

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\overline{(X - \bar{X})^4}}{S_*^4} - 3$$

*называется выборочным коэффициентом эксцесса.*

### 4.2.3 Выборочные моменты для двух выборок

**Определение.** *Величина*

$$S_*^2 = \overline{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

или

$$S_*^2 = \overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

называется выборочным коэффициентом ковариации и численно выражает меру совместной изменчивости двух случайных величин.

**Определение.** Величина

$$\rho_{XY} = \frac{S_*^2(XY)}{S_*(X) \cdot S_*(Y)}$$

называется выборочным коэффициентом корреляции и характеризует степень линейной зависимости между наборами чисел  $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_n$ .

Обе эти оценки состоятельные и асимптотически нормальные.

## 4.3 Порядковые статистики

### 4.3.1 Вариационный ряд. Выборочная квантиль

**Определение.** Вариационный ряд – отсортированная по возрастанию выборка.

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)} \quad (4.1)$$

**Определение.**  $k$ -я порядковая статистика –  $k$ -й элемент вариационного ряда:

$$\square 0 < p < 1, \exists k, \quad \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n} \implies k-1 < np \leq k \quad (4.2)$$

$$X_{(1)} = \min(X)$$

$$X_{(n)} = \max(X)$$

**Определение.** Медианой распределения называется его  $\frac{1}{2}$  квантиль. Выборочной медианой  $med = med(X_1 \dots X_n)$  выборки  $(X_1, \dots, X_n)$  выборки  $(X_1 \dots X_n)$  называется величина

$$med(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \frac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2}, n = 2m, \\ X_{(m+1)}, n = 2m + 1 \end{cases}$$

**Определение.** Квантильная функция:  $F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) > \alpha\}$

**Определение.** Пусть распределение  $\mathcal{F}$  с функцией распределения  $F$  абсолютно непрерывно. Число  $\tau\delta$  называется квантилью уровня  $\delta$  распределения  $F$ , если  $F(\tau\delta) = \delta$ . Если функция  $F$  монотонна, квантиль определяется единственным образом.

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 - \min X \\ \alpha &= 1 - \max X \\ 0 < \alpha < 1 \exists, k \leq n \frac{k-1}{n} < \alpha \leq \frac{k}{n} &\rightarrow (k-1) < \alpha_n \leq k \\ \alpha = \frac{1}{4} &- \text{нижний квантиль} \\ \alpha = \frac{3}{4} &- \text{верхний квантиль} \\ I = X([n\frac{3}{4}] - X[\frac{n}{4}]) &- \text{межквантильный размах}\end{aligned}$$

### 4.3.2 Распределение порядковых статистик

Функция распределения  $k$ -й порядковой статистики:  
 Пусть  $F_{(k)}(t) = P(X_{(k)} \leq t) = P(\mu_n(t) \leq k) = \sum_{r=k}^n C_n^r F^r(t)(1-F(t))^{n-r}$ .  
 Функция распределения для максимума  $F_{(n)}(t) = F^n(t)$   
 Функция распределения для минимума  $F_{(1)}(t) = 1 - (1 - F(t))^n$

### 4.3.3 Асимптотические свойства

**Определение.**  $X_{(k)}$  – среднее, если  $\frac{k(n)}{n} \rightarrow p \in (0, 1)$   
 $X_k, X_{(k+1-S)}$  – крайние, если  $\gamma, S$  – ограничены

**Теорема 4.3.** Теорема об асимптотическом поведении ор. члена вариационного ряда.

Пусть  $X = (X_1, \dots, X_n)$  – выборка растущего размера из распределения с функцией распределения  $F(x)$ . Пусть  $q_\alpha, \alpha \in (0, 1)$  – его  $\alpha$ -квантиль, причем  $F$  дифференцируема в точке  $q_\alpha$  и  $F'(q_\alpha) > 0$ . Тогда:

$$\sqrt{n} \frac{X - q_\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} f(q_\alpha) \rightarrow Y \sim N(0, 1) \quad (4.3)$$

## Глава 5

# Оценивание параметров

### 5.1 Постановка задачи точечного оценивания параметров

Задача точечного оценивания параметров заключается в том, чтобы оценить неизвестный параметр или параметры распределения на основе имеющихся наблюдений. То есть, в нахождении числовых значений параметров, описывающих распределение случайной величины, на основе выборки из этого распределения. В качестве точечной оценки параметра выбирается одно конкретное значение, которое является наиболее вероятным для данной выборки.

Пусть имеется выборка независимых и одинаково распределенных случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с неизвестным распределением  $F(x; \theta)$ , где  $\theta$  - неизвестный параметр распределения. Задача состоит в том, чтобы на основе выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  получить оценку параметра  $\theta$ .

Оценка параметра  $\theta$  может быть построена по различным критериям, таким как наиболее вероятное значение (Maximum Likelihood Estimator, MLE), метод моментов (Method of Moments, MM) или минимизация квадратичного отклонения (Least Squares Estimator, LSE) и т.д. В зависимости от выбранного метода и типа распределения, полученные оценки могут отличаться между собой.

Цель точечного оценивания параметров состоит в том, чтобы получить наиболее достоверную оценку неизвестного параметра  $\theta$  на основе имеющихся данных, чтобы можно было использовать эту оценку для принятия решений и делать выводы о характеристиках изучаемой выборки.

Важным моментом при точечном оценивании параметров является оценка точности полученных значений. Для этого используются стандартные ошибки оценок, доверительные интервалы и другие характеристики, которые поз-

воляют оценить разброс полученных значений и определить, насколько они точны.

## 5.2 Свойства точечных оценок

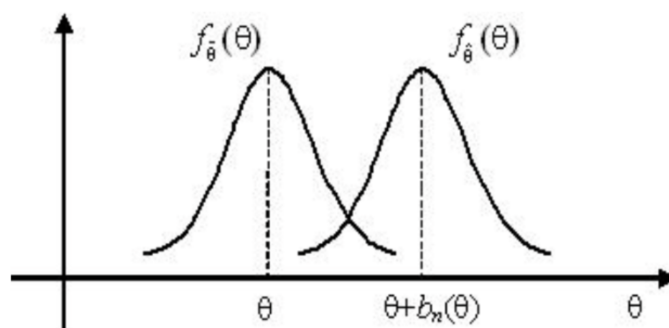
### 5.2.1 Несмещенность

Оценка называется несмещённой, если матожидание этой оценки равно оцениваемому параметру. Другими словами, среднее значение оценки должно быть равно параметру, который мы пытаемся оценить. То есть, если  $\hat{\theta}$  - несмещённая оценка параметра  $\theta$ , то

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Разность  $b_n(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta$  называется *смещением* точечной оценки  $\hat{\theta}_n$

Несмещенность оценки  $\hat{\theta}_n$  означает, что реализации этой оценки, рассчитанные для различных реализаций случайной выборки  $X_1, \dots, X_n$  объема  $n$ , будут группироваться в среднем около оцениваемого параметра  $\theta$ . Реализация несмещенной точечной оценки  $\hat{\theta}$  группируются около оцениваемого параметра  $\theta$ , а реализация смещенной оценки  $\hat{\theta}$  – около величины  $\theta + b_n(\theta)$



### 5.2.2 Состоятельность

Оценка является состоятельной, если с увеличением размера выборки оценка сходится к истинному значению параметра. Другими словами, чем больше данных мы имеем, тем более точной должна становиться наша оценка.

Оценка называется состоятельной по вероятности, если вероятность того, что она отклонится от оцениваемого параметра больше, чем на заданную ширину доверительного интервала, стремится к нулю с ростом размера выборки.



То есть, если  $\hat{\theta}_n$  - оценка параметра  $\theta$  по выборке размера  $n$ , то для  $\forall \varepsilon > 0$  при  $n \rightarrow \infty$ :

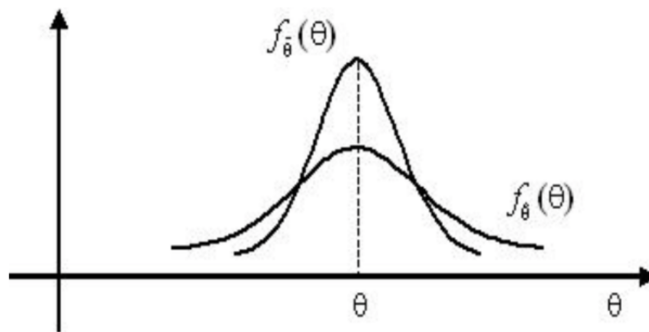
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

### 5.2.3 Эффективность

Эффективной называется оценка, которая имеет наименьший возможный разброс среди всех несмещенных оценок. Другими словами, оценка является эффективной, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех несмещенных оценок. То есть, если  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  - две несмещенные оценки параметра  $\theta$  и  $\text{Var}(\hat{\theta}_1) \leq \text{Var}(\hat{\theta}_2)$  для любого значения  $\theta$ , то  $\hat{\theta}_1$  называется более эффективной, чем  $\hat{\theta}_2$ . Если оценка  $\hat{\theta}_1$  более эффективна, чем оценка  $\hat{\theta}_2$ , то это означает, что реализации оценки  $\hat{\theta}_1$ , рассчитанные для различных реализаций случайной выборки  $X_1, \dots, X_n$  объема  $n$ , будут иметь меньший разброс около оцениваемого параметра  $\theta$ , чем реализации менее эффективной оценки  $\hat{\theta}_2$ .

Эффективность оценки означает, что достигается минимум среднеквадратической ошибки (mean squared error)  $E(\hat{\theta} - \theta)^2$  (для несмещенных оценок MSE совпадает с дисперсией).



### 5.2.4 Асимптотическая нормальность

Оценка называется асимптотически нормальной, если её распределение приближается к нормальному с ростом размера выборки. То есть, если  $\hat{\theta}_n$  - оценка параметра  $\theta$  по выборке размера  $n$ , то

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

## 5.3 Метод моментов

Метод моментов - это статистический метод оценки параметров распределения случайной величины на основе равенства теоретических моментов (средних значений) выборки и их оценок. Более конкретно, этот метод состоит в том, чтобы приравнять теоретические моменты распределения, выраженные через параметры этого распределения, к их оценкам, вычисленным на основе выборки. Затем, решив уравнения относительно параметров распределения, можно получить их оценки.

Конкретный алгоритм метода моментов может отличаться в зависимости от выбранного распределения и его параметров. Однако общий подход заключается в следующих шагах:

1. Выбирается распределение, которое, как предполагается, описывает выборку.
2. Выбирается число моментов, которые будут использоваться для оценки параметров. Обычно используются первый и второй моменты (среднее и дисперсия).
3. Выражаются теоретические моменты через параметры распределения.
4. Вычисляются оценки этих моментов на основе выборки.
5. Путем приравнивания теоретических моментов к их оценкам решаются уравнения относительно параметров распределения.
6. Полученные оценки параметров используются для описания и анализа выборки.

Все оценки, рассчитанные по методу моментов, являются состоятельными, однако их несмещённость и эффективность, так же, как и в случае метода подстановки, не гарантированы.

## 5.4 Метод максимального правдоподобия

Пусть есть наблюдаемые данные  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые распределены согласно какому-то параметрическому распределению с неизвестными параметрами  $\theta$ . Тогда функция правдоподобия (likelihood function) определяется как произведение плотностей вероятности для каждого наблюдения:

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1|\theta) \cdot f(x_2|\theta) \cdot \dots \cdot f(x_n|\theta),$$

где  $f(x|\theta)$  - это плотность вероятности для наблюдения  $x$  при условии параметров  $\theta$ .

Метод максимального правдоподобия заключается в том, чтобы найти такие значения параметров  $\theta$ , при которых функция правдоподобия достигает максимума:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Таким образом, метод максимального правдоподобия позволяет оценить параметры модели, которые наиболее вероятно приводят к наблюдаемым данным.

## 5.5 Информация Фишера

**Определение 5.1.** *Информация Фишера – это мера, которая индицирует, насколько информативна определенная выборка для оценки неизвестных параметров генеральной совокупности. Она выражает, насколько хорошо параметр может быть оценен на основе выборки данных.*

Интуитивно, информация Фишера увеличивается с увеличением количества информации, содержащейся в выборке данных. Используя информацию Фишера, можно оценить дисперсию точечной оценки. Чем больше информация Фишера, тем меньше дисперсия точечной оценки и тем более точной является оценка параметра.

Пусть  $L(\theta, x_1, \dots, x_n)$  - функция правдоподобия для данной статистической модели. Тогда определена функция

$$I_n(\theta) = E_{\theta} \left( \frac{\partial \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} \right)^2,$$

где  $E_{\theta}$  - математическое ожидание при данном  $\theta$ , то она называется информация Фишера для данной статистической модели при  $n$  независимых испытаниях. Поскольку математическое ожидание функции вклада выборки равно нулю, выписанная величина равна ее дисперсии.

Если выборка состоит из одного элемента, то информация Фишера записывается так:

$$I(\theta) = E_{\theta} \left( \frac{\partial \ln L(\theta, x)}{\partial \theta} \right)^2$$

Из того, что в случае независимости случайных величин дисперсия суммы равна сумме дисперсий, следует, что в случае  $n$  независимых испытаний  $I_n(\theta) = nI(\theta)$ .

## 5.6 Неравенство Рао-Крамера

Неравенство Рао-Крамера устанавливает ограничение на наименьшую возможную дисперсию для несмещенной оценки  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$  в терминах информации Фишера  $I(\theta)$  и ее производной по  $\theta$ . Формулировка неравенства Рао-Крамера следующая:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)},$$

где  $\text{Var}(\hat{\theta})$  - дисперсия оценки  $\hat{\theta}$ , а  $I(\theta)$  - информация Фишера для параметра  $\theta$ .

Таким образом, оценка  $\hat{\theta}$  является более эффективной, если ее дисперсия близка к минимально возможной дисперсии, которую диктует неравенство Рао-Крамера.

Информация Фишера  $I(\theta)$  зависит от формы функции правдоподобия, используемой для оценки  $\hat{\theta}$ . Если функция правдоподобия более крутая (то есть имеет большую производную), то информация Фишера будет выше, и тем самым более эффективные оценки  $\hat{\theta}$  будут ближе к минимально возможной дисперсии.

Таким образом, оценка  $\hat{\theta}$  будет более эффективной, если она имеет меньшую дисперсию и/или более крутую функцию правдоподобия.

## 5.7 Доверительные интервалы

**Определение 5.2.** *Доверительный интервал*

*Пусть есть выборка  $X_1, \dots, X_n$  с распределением  $F_\theta$ ;  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ .*

*$T_1(X)$ ,  $T_2(X)$  - статистики.*

*Будем называть интервал  $[T_1(X), T_2(X)]$  доверительным интервалом уровня  $1 - \alpha$ , если:*

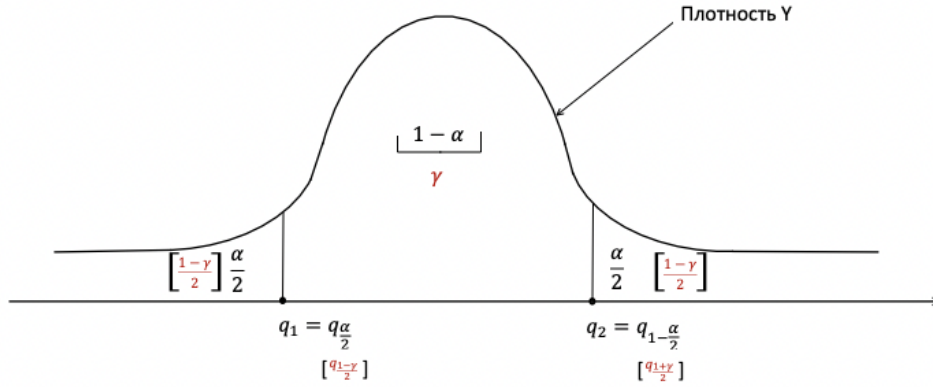
$$P(\theta \in [T_1(X), T_2(X)]) \geq 1 - \alpha$$

**Общая схема построения доверительных интервалов:**

Пусть  $G(X, \theta) \sim Y$  - центральная статистика, при этом распределение  $Y$  непрерывно и не зависит от неизвестных параметров, тогда:

$$P(q_1 \leq G(X, \theta) \leq q_2) = 1 - \alpha$$

Из данной вероятности выражается  $\theta$ .



Где  $q_{\frac{\alpha}{2}}$  и  $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$  - квантили порядка  $\frac{\alpha}{2}$  и  $1 - \frac{\alpha}{2}$  соответственно.

**Пример 5.1.** Имеется выборка  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

a.  $\mu$  - ?,  $\sigma^2$  - известна

Возьмем статистику  $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Она имеет нормальное распределение с математическим ожиданием равным нулю и дисперсией равной единице ввиду того, что исходная выборка имеет нормальное распределение.

$$P(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Выразим из данного выражения  $\mu$ :

$$P(\mu \in [\bar{X} - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}])$$

b.  $\mu$  - известно,  $\sigma^2$  - ?

Пусть  $U_1, \dots, U_n - i.i.d. \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , тогда  $U_1^2, \dots, U_n^2 \sim \chi^2(1)$

Заметим, что  $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$  имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому, если преобразовать ее следующим образом, она будет иметь распределение  $\chi^2$ :

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

Воспользуемся полученной статистикой для построения доверительного интервала:

$$P(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Выразим отсюда  $\sigma^2$ :

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

- с.  $\mu$ —?,  $\sigma^2$ —?, построить доверительный интервал для  $\sigma^2$   
Воспользуемся теоремой Фишера и получим статистику:

$$\frac{n \cdot S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

где  $S_*^2$  - выборочная смещённая дисперсия

$$P(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{n \cdot S_*^2}{\sigma^2} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Выразим  $\sigma^2$ :

$$P\left(\frac{n \cdot S_*^2}{q_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n \cdot S_*^2}{q_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

- д.  $\mu$ —?,  $\sigma^2$ —? построить доверительный интервал для  $\mu$   
Пусть есть  $U_0, U_1, \dots, U_n - i.i.d. \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , тогда:

$$T_n = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2}} \sim T(n),$$

где  $T(n)$  - распределение Стьюдента (*t-distribution*) с  $n$  степенями свободы, симметричное относительно 0. Также заметим, что  $\sum_{i=1}^n U_i^2 \sim \chi^2(n)$ .

По теореме Фишера  $\bar{X}$  и  $S_*^2$  - независимы. Рассмотрим следующую статистику, где числитель и знаменатель знакомы нам из предыдущих примеров:

$$\frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{n \cdot S_*^2}{\sigma^2}}} \sim T(n-1),$$

где  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ;  $\frac{n \cdot S_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

Сократим получившееся выражение:

$$\sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S_*}$$

Тогда:

$$P(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{S_*} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\mu \in \left[\bar{X} - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot S_*}{\sqrt{n-1}}; \bar{X} + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot S_*}{\sqrt{n-1}}\right]\right)$$

е. Пусть имеются две независимые выборки объемов  $n$  и  $m$  соответственно:  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  и  $Y_1, \dots, Y_m \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ . При этом  $\mu_1, \mu_2$  - известны. Построить доверительный интервал для  $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ . Воспользуемся распределением Фишера ( $F$  распределением):

$$U_1 \sim \chi^2(n_1),$$

$$U_2 \sim \chi^2(n_2),$$

где  $U_1$  и  $U_2$  независимы. Тогда:

$$\frac{U_1/n_1}{U_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

Выведем статистику с необходимым нам распределением:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2 \cdot \sigma_2^2 m}{\sigma_1^2 n \cdot \sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2} \sim F(n, m),$$

$$\text{где } \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2 n} \sim \frac{\chi^2(n)}{n} \text{ и } \frac{\sigma_2^2 m}{\sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2} \sim \frac{m}{\chi^2(m)} \text{ Получаем:}$$

$$P\left(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2 \cdot m}{n \cdot \sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

Выведем  $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ :

$$P\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \in \left[\frac{q_{\frac{\alpha}{2}} \cdot n \cdot \sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2 \cdot m}; \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot n \cdot \sum_{j=1}^m (Y_j - \mu_2)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_1)^2 \cdot m}\right]\right)$$

## 5.8 Асимптотические доверительные интервалы

**Определение 5.3.** Пусть дана выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с неизвестным параметром  $\theta$ , где каждый  $X_i$  является случайной величиной. Тогда  $[T_1(X), T_2(X)]$  – асимптотический доверительный интервал для  $\theta$  с заданным уровнем доверия  $1 - \alpha$ , если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq 1 - \alpha = \Gamma,$$

где статистики  $T_1(X)$  и  $T_2(X)$  являются точечными оценками параметра  $\theta$  и имеют асимптотически нормальное распределение с асимптотической дисперсией  $\sigma^2$

Статистика для асимптотического доверительного интервала:

$$G(X, \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Y,$$

где  $Y$  не зависит от  $\theta$ .

**Пример 5.2.** Построить асимптотический доверительный интервал для параметра распределения Бернулли.

*Решение:*

Воспользуемся ЦПТ и запишем:

$$\frac{\sum X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{U} \sim N(0, 1)$$

Заметим, что

$$P(|S_*^2 - p(1-p)| > \epsilon) \xrightarrow{0} 0 \\ S_* \xrightarrow{p} \sqrt{p(1-p)}$$

Тогда можем написать:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - p}{S_*} \xrightarrow{U} \sim N(0, 1)$$

Напишем искомый доверительный интервал:

$$\bar{X} - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} S_*}{\sqrt{n}} \leq p \leq \bar{X} + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} S_*}{\sqrt{n}}$$

Замечание: для распределения Бернулли  $p$  – вероятность успеха, который соответствует математическому ожиданию.



Обобщая, мы построили асимптотический доверительный интервал для математического ожидания, то есть:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_*} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1)$$

Получаем асимптотический доверительный интервал:

$$\left[ \bar{X} - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} S_*}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} S_*}{\sqrt{n}} \right]$$

Построим асимптотический доверительный интервал для дисперсии выборки:

$$\frac{\sqrt{n}(S_*^2 - \sigma^2)}{\sqrt{\mu_4 - S_*^4}} \xrightarrow{d} U \sim N(0, 1)$$

Получаем:

$$\left[ S_*^2 - \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\mu_4 - S_*^4}}{\sqrt{n}}; S_*^2 + \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\mu_4 - S_*^4}}{\sqrt{n}} \right]$$

**Теорема 5.1.** Теорема об асимптотическом поведении крайних членов вариационного ряда:

Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - выборка из распределения с функцией распределения  $F(x)$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  выполнены следующие сходимости:

$$\begin{aligned} nF(x_n) &\rightarrow U_1 \sim \Gamma(r, 1) \\ n(1 - F(x_{(n+1-s)})) &\rightarrow U_2 \sim \Gamma(s, 1) \end{aligned}$$

# Глава 6

## Проверка статистических гипотез

### 6.1 Постановка задачи проверки статистической гипотезы

На входе имеется выборка  $X$  объема  $n$ , причем выборка может из себя представлять просто набор из  $n$  чисел и иметь более нетривиальную структуру.

Имеется некоторая проблема. Утверждение "по умолчанию" для данной проблемы будем называть нулевой гипотезой и обозначать его  $H_0$  (монетка подбрасывается честно, между явлениями нет никакой связи, некоторый показатель не имеет аномалий и т.п.). Наши "подозрения" будем называть альтернативной гипотезой и обозначать его  $H_1$  (подбрасывание монетки нечестно/смещено к орлу, между явлениями есть связь, показатель имеет аномалии и т.д.).

#### 6.1.1 Статистический критерий

Опишем принцип работы статистического критерия или статистического теста – функции, по выборке возвращающая  $H_0$  или  $H_1$ . Зададим число  $\alpha \in (0; 1)$ , которое мы будем называть уровень значимости (типичные значения: 0.1, 0.05, 0.01). Если критерий выбрал  $H_0$ , то говорят, что гипотеза  $H_0$  принята (ассерт), если  $H_1$  – гипотеза  $H_0$  опровергнута (reected) в пользу альтернативной  $H_1$ .

Пусть  $T(X)$  – функция от выборки, которая при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение (или стремится по распределению при  $n \rightarrow \infty$ ) с плотностью  $p(\cdot)$ . Пусть  $T_{0,\alpha}$ ,  $T_{1,\alpha}$  – области принятия и опровержения

(критическая) области, то есть

$$\begin{aligned} P(T(X) \in T_{0,\alpha}) &\simeq 1 - \alpha, \\ P(T(X) \in T_{1,\alpha}) &\simeq \alpha, \end{aligned}$$

где запись  $P(\dots) \simeq c$  означает, что вероятность  $P(\dots)$  равняется или стремится при  $n \rightarrow \infty$  к  $c$ . Как правило,  $T_{1,\alpha} = \overline{T_{0,\alpha}}$ .

Далее рассмотрим три типа критериев и областей  $T_{0,\alpha}$  и  $T_{1,\alpha}$ : двусторонний, левосторонний и правосторонний.

1. Двусторонний случай.  $T_{0,\alpha} = [q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ ;

2. Односторонний случай.

- Правосторонняя альтернатива.  $T_{0,\alpha} = (-\infty, q_{1-\alpha}]$ ;
- Левосторонняя альтернатива.  $T_{0,\alpha} = [q_{\alpha}, +\infty)$ .

Здесь  $q_c$  – квантиль порядка  $c$ .

p-value

- левосторонний случай:  $p_l := p[Y \leq T(x)|H_0]$ ; если  $T(x) > q_2$ , то  $p_l > \alpha$ ;
- правосторонний:  $p_2 := p[Y \geq T(x)|H_0]$ ; если  $T(x) < q_1 - 2$ , то  $p_2 > \alpha$ , иначе  $p_2 \leq \alpha$ ;
- двусторонний случай:  $p := 2\min(p_l; p_2)$ ; принимаем  $H_0 \Leftrightarrow p \leq \alpha$ .

**Состоятельность выборки:** при росте объема выборки  $\beta \rightarrow 0$ .  $W(F) := p[G(X_n) \in T_1(\alpha)|F]$ , где  $F$ -распределение;  $\alpha = W(F_0)$ ,  $F_0$  соответствует распределению нулевой гипотезы;  $\beta = 1 - W(F_1) = P[G(X_n) \in T_0(\alpha)|F_1]$ ,  $F_1$  - соответствует распределению альтернативной гипотезы;  $1 - \beta = W(F_1)$ -мощность критерия. На практике фиксируется  $\alpha$  и выбирается критерий с наибольшей мощностью.

## 6.2 Гипотеза о виде распределения. Критерий согласия

$X_1, \dots, X_n \sim \widetilde{F}$ ;  $H_0 : F \in F_0$ ,  $F_0$ -набор распределений;  $H_1 : F \in F_1$ , как правило,  $F_1 = \widetilde{F_0}$ .

**Критерий Колмогорова** ограничение:  $H_0 : F = F_0$ ,  $F_0$ -непрерывное распределение;  $D_n := \sup x \in \mathbb{R} |F_n(x) - F(x)|$ , где  $F_n$ -эмпирическая функция

распределения;  $P[\sqrt[2]{n}D_n \leq] \rightarrow K(t)$ -функция распределения Колмогоровского закона; если  $H_0$  верно, то  $D_n$  скорее маленькое;  $T_0(\alpha) := (0, q_{1-\alpha})$ ;  $H_0$ -принимается  $\Leftrightarrow \sqrt[2]{n}D_n \in (0, q_{1-\alpha})$ ;

**рекомендация:** использовать при  $n \geq 20$ . **Замечание**  $H_0 : F \in F\theta, \theta$  - параметр;  $D_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} |Fn(x) - F(x, \theta)|, \tilde{\theta}$  - оценка максимального правдоподобия.

**Критерий согласия Пирсона хи-квадрат** выборка из неопределенного распределения; разбиваем на отрезки, группируем данные;  $p_j = \delta \int p(x)dx$ ; input:  $v_1, \dots, v_m$ -частоты,  $n$ -объем выборки;  $H_0 : p = p_0 = (p^{(0)}_0, \dots, p^{(m)}_0); p^{(j)}_0, \sum_{j=0}^m p^{(j)}_0 = 1$ ;  $H_1 : p \neq p_0$ ;  $X^2_n := \sum_{j=0}^m \frac{(v_j - np_0^j)^2}{np_0^j}$ - функция для критерия хи-квадрат;  $T_0(\alpha) := [0, q_{1-\alpha}), q_{1-\alpha}$  -квантиль  $\chi^2(m-1)$ ;  $H_0$  - принимается  $\Leftrightarrow x^2_n \in [0; q_{1-\alpha})$ .

**Теорема 6.1.** Если верно  $H_0$ , то  $x^2_n \rightarrow Y \sim \chi^2(m-1)$ .

*Доказательство.*  $v := \frac{v - np_0}{\sqrt{n}} \rightarrow U \sim N(0, \sum_m)$ ;  $\sum_m = (p_j^{(0)}) \cdot \mathbb{I}_{i=j} - p_0^{(i)} \cdot p_0^{(j)}$ ;  $\sum_m = m-1$ ;  $Q(v) = n(\cdot(\frac{v}{n}) - p)^t \cdot I(p)(\frac{v}{n}) - p$ ;  $I(p) = \frac{1}{p_m}$ , если  $i \neq j$ ,  $\frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_m}$  иначе;  $Q(v) = \sum_{i,j=1}^m -1 \frac{(v_i - n \cdot (p_0)^{(j)})(v_j - n \cdot (p_0)^{(i)})}{n \cdot (p_0)^{(m)}} + \sum_{i,j=1}^m -1 \frac{(v_i - n \cdot (p_0)^{(j)})^2}{n \cdot (p_0)^{(i)}} = \sum_{i,j=1}^m -1 \frac{(v_i - n \cdot (p_0)^{(j)})^2}{n \cdot (p_0)^{(m)}} + \sum_{i,j=1}^m -1 \frac{(v_i - n \cdot (p_0)^{(j)})^2}{n \cdot (p_0)^{(i)}}. Q(v) = x^2 \cdot (m-1) \quad \square$

**Рекомендации:**  $n \geq 20, v_j \geq 5$ , дискретизация (есть рецепты) **Замечание:**  $H_0 : p = p_0(F \in F\theta, \theta), \theta - r$ -мерный параметр ( $r < m < -1$ );  $x^2_n = \sum_{i=1}^m \frac{(v_i - np_j(\in F\theta))^2}{np_j(\in F\theta)}$ ,  $\in F\theta$  -оценка максимального правдоподобия; степень свободы  $m-1-r$

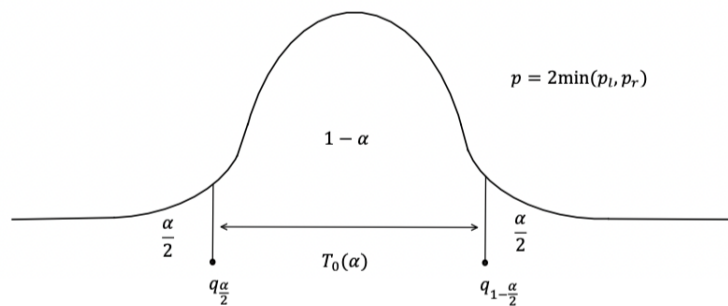
## 6.3 Проверка гипотез и доверительные интервалы

$X_1, \dots, X_n \sim F_\theta$ ;  $G(X, \theta) \simeq Y$  - не зависит от  $\theta$   $H_0 : \theta = \theta_0$  3 альтернативы:

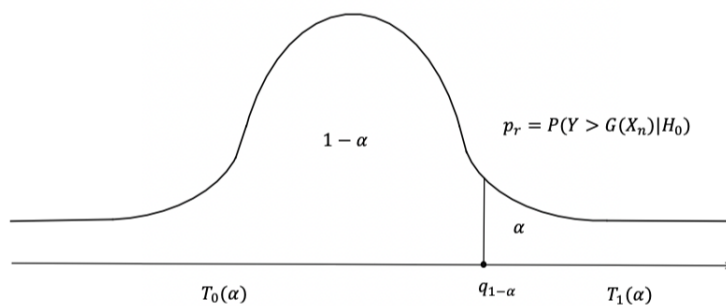
- двусторонняя альтернатива:  $\theta \neq \theta_0$  ;
- правосторонняя альтернатива:  $\theta \geq \theta_0$  ;
- левосторонняя альтернатива:  $\theta \leq \theta_0$ .

**Пример 6.1.** Рассмотрим Пример с монеткой. Пусть робот подбрасывает монетку независимо и одинаково, то есть у нас имеется реализация бернуллиевских величин с вероятностью успеха  $p$  (условимся считать, что  $p$  — вероятность орла). По умолчанию робот кидает монетку честно, то есть  $p = \frac{1}{2}$ , что будет являться  $H_0$ . Возможны три подозрения:

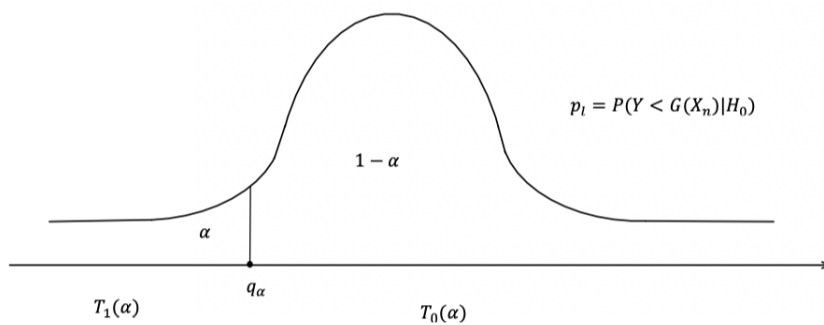
- робот нечестно кидает монету, то есть  $p \neq \frac{1}{2}$ . В этом случае  $p \neq \frac{1}{2}$  и будет  $H_1$



- робот кидает монетку так, чтобы скорее выпал орел, то есть  $p > \frac{1}{2}$ , что и будет  $H_1$



- робот кидает монетку так, чтобы выпала решка, то есть  $p < \frac{1}{2}$ , что и будет  $H_1$



## 6.4 Критерии однородности

На входе  $K$  независимых выборок;  $H_0$ : все выборки-реализации одного и того же нормального закона.

### 6.4.1 Критерий Смирнова

$F$ - непрерывна;

На входе 2 независимых выборки объёмов  $m$  и  $n$  соответственно;

$$D_{m,n} := (\sqrt[2]{\frac{m+n}{mn}})^{-1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(X) - F_m(X)|$$

Если  $F_1 = F_2$ , то  $P[D_{m,n} \leq t] \rightarrow K_t$ -функция распределения Колмогорова;

Условие принятия  $H_0 : D_{m,n} \in [0, q_{1-\alpha}]$ ;  $q_{1-\alpha}$  -квантиль Колмогоровского закона

### 6.4.2 Хи-квадрат

На входе  $K$  независимых выборок;  $n_i$  - объем  $i$ -й выборки;  $n := \sum_{i=1}^k n_i$ ;  $M$  - количество возможных значений

$v_{ij}$  - частота в  $i$ -й выборке значения  $x_j$ ;

$H_0 : F_1 = F_2 = \dots = F_k$ ;

$v_i := (v_{i1}, \dots, v_{im})^\top$ ;

$p_1 = p_2 = \dots = p_k = p = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $p$ -неизвестно  $\Leftrightarrow H_0$ ;

$X_i^2 := \sum_{j=1}^m \frac{(v_{ij} - n_i p_j)^2}{n_i p_j}$ , степени свободы ( $p$ -известно):  $M - 1$ ;

$X_{n_1}^2, \dots, X_{n_k}^2 := \sum_{i=1}^M X_i^2$ , степени свободы ( $p$ -известно):  $k(M - 1)$ ;

$p$ -неизвестно, тогда степени свободы :  $(k - 1)(M - 1)$ ;

условие принятия  $H_0 : X_{n_1}^2, \dots, X_{n_k}^2 \in [0, q_{1-\alpha}]$ .

$q_{1-\alpha}$  - квантиль  $\chi^2((k - 1)(M - 1))$  вместо  $p_j$  берем оценку максимального правдоподобия:

$$\hat{p}_j = \frac{v_{1j} + v_{2j} + \dots + v_{kj}}{n} =: \frac{v_{*j}}{n},$$

модификация:

$$p_j = \frac{U_{1j} + \dots + U_{kj}}{n} = \frac{U_{*j}}{n}; U_{*j} = U_{1j} + \dots + U_{kj};$$

$$X_i^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(v_{ij} - n_i p_j(\theta))^2}{n_i p_j(\theta)}; \text{ вместо } \theta \text{ поставить } \hat{\theta} \text{ О.М.П}$$

ст. свободы:  $k(m - 1) - r$ ,  $r$ - размерность  $\theta$

Особый случай :  $k = 2$ ,  $m = 2$

$$Z_{n_1, n_2} := (\frac{v_{11}}{n_1} - \frac{v_{21}}{n_2}) \sqrt{\frac{n n_1 n_2}{v_{*1} v_{*2}}}; Z^2 = X^2) \text{ в данном случае; } p_1 := \frac{v_{11}}{n_1}, p_2 := \frac{v_{21}}{n_2}$$

если  $H_0$  верно, то  $Z_{n_1, n_2} \xrightarrow{d} Y \sim N(0, 1)$ ;

$H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p \neq p_2[-q_{1-\alpha/2}; q_{1-\alpha/2}], p_1 \geq p_2(-\infty; q_{1-\alpha}], p_1 \leq p_2[-q_{1-\alpha}; \infty); [\dots]$  - области принятия  $H_0$ .

### 6.4.3 Критерий квантилей

$q_1, \dots, q_{N-1}$  - предполагаемые квантили;

$p_1, \dots, p_{N-1}$  - предполагаемые вероятности;

$H_0 : F(q_i) = p_i, 1 \leq i \leq N-1$ ;

$(-\infty; q_1] \rightarrow v_1$ , вероятность  $p_1 - 0$ ;

$[q_1; q_2] \rightarrow v_2$ , вероятность  $p_2 - p_1$ ;

$[q_2; q_3] \rightarrow v_3$ , вероятность  $p_3 - p_2$ ;

...

$[q_{N-2}; q_{N-1}] \rightarrow v_{N-1}$ , вероятность  $p_{N-1} - p_{N-2}$ ;

$[q_{N-1}; +\infty) \rightarrow v_N$ , вероятность  $1 - p_{N-1}$ ;

Применяем *Хи-квадрат* к полученным частотам и вероятностям (ст.свободы:  $N - 1$ )

### 6.4.4 Критерий знаков

$q, p = \frac{1}{2}$ .  $H_0$  :  $q$ -медиана

$$\frac{2}{n}(v_1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{2}{n}(n - v_1 - \frac{n}{2})^2 = \frac{4}{n}(v_1 - \frac{n}{2})^2$$

на входе 2 выборки:  $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_n$ ;

$H_0$ : выборки независимы и имеют одинаковое распределение;

если  $H_0$ -верно, то  $p[X_i - Y_i \leq 0] = p[X_i - Y_i \geq 0] = \frac{1}{2}$ ;

$H_0 \Leftrightarrow 0$  -медиана  $U_i := X_i - Y_i$ .

**Определение 6.1.**  $X_1, \dots, X_n$ -выборка; **Ранг**  $X_i$ -его номер в вариационном ряде.

### 6.4.5 Критерии Вилкоксона и Манна-Уитни

на входе 2 выборки:  $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_m$ -независимы;

$R_i$ -ранг  $X_i$  в объединенной выборке;

$T := \sum_{i=1}^n R_i$  - статистика для критерия Вилкоксона;

$$U(n, m) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbb{I}[X_i \leq Y_j]; T + U(n, m) = nm + \frac{n(n+1)}{2};$$

$$E[U] = nmE[\mathbb{I}[X_i \leq Y_j]] = nmP[X_i \leq Y_j] = nmP[X_i - Y_j \leq 0] = nm \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} p(x)p(y)dx dy;$$

$U \approx Y \sim N(\frac{nm}{2}, \frac{nm(n+m+1)}{12})$ , если  $H_0$ -верно;

$H_0 : F_1 = F_2 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$ ;

$H_1 : \alpha \neq \frac{1}{2}, \alpha \leq \frac{1}{2}, \alpha \leq \frac{1}{2}$ .

### 6.4.6 Критерий Спирмена

на входе 2 выборки:  $X_1, \dots, X_n$  и  $Y_1, \dots, Y_m$ ;

$R_i$ -ранг  $X_i$  в  $X$ ;

$S_j$  -ранг  $Y_j$  в  $Y$ ;

$H_0$ : выборки независимы;

$$p = \frac{\sum_i (R_i - \bar{R})(S_j - \bar{S})}{\sqrt{\sum_i (R_i - \bar{R})^2 \sum_i (S_j - \bar{S})^2}} = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_i (R_i - \frac{n+1}{2})(U_i - \frac{n+1}{2})$$

Если  $H_0$ -верно, то  $\sqrt{n}p \rightarrow Y \sim N(0, 1)$

$(R_i, S_i)$ -пары рангов

↓ сортировка по 1 рангу

$(i, T_i)$

Кендолл

$$\frac{2 \cdot 3 \sqrt{n}}{n(n+1) \cdot 2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n Sg(T_j - T_i) \rightarrow Y \sim N(0; 1)$$

## 6.5 Критерии независимости

### 6.5.1 Хи-квадрат

На входе две выборки одного и того же размера  $n$  (дискретные распределения)

Пусть  $X_i \in 1, \dots, s$  и  $Y_j \in 1, \dots, k$ ; Рассмотрим пары  $\binom{Y_i}{Y_j}$  :  $v_{xy}$  - количество пар  $\binom{y}{x}$

X \ Y	Y					$\Sigma$
	1	.	.	.	k	
1	$v_{11}$	.	.	.	$v_{1k}$	$v_{1*}$
.	.				.	.
.	.				.	.
.	.				.	.
s	$v_{s1}$	.	.	.	$v_{sk}$	$v_{s*}$
$\Sigma$	$v_{*1}$	.	.	.	$v_{*k}$	$n$



$H_0$ : выборки независимы;

$v_x : (v_{1*}, v_{2*}, \dots, v_{s*}) \sim Poly(n, p_x = (p_x^{(1)}, \dots, p_x^{(s)}))$ ;

$v_y : (v_{*1}, v_{*2}, \dots, v_{*k}) \sim Poly(n, p_y = (p_y^{(1)}, \dots, p_y^{(k)}))$ ;

$H_0 \Leftrightarrow p_{ij} = p_x^{(i)} p_y^{(j)}, \sum i = 1 s p_x^{(i)} = \sum j = 1 k p_y^{(j)} = 1$ ;

$x^2 := \sum i, j \frac{(\frac{v_{ij}}{v_{ij} - n p_x^{(i)} p_y^{(j)}})^2 n p_x^{(i)} p_y^{(j)}}{v_{ij} - n p_x^{(i)} p_y^{(j)}};$

Если вероятности известны, то берем оценку максимального правдоподобия:

$\hat{p}_x^{(i)} = \frac{v_{i*}}{n}$  и  $\hat{p}_y^{(j)} = \frac{v_{*j}}{n}$ ; степень свободы:  $sk - 1 - (s + k - 2) = \dots = (s - 1)(k - 1)$ .

**Особый случай:**  $s = k = 2$  у хи-квадрат 1 степень свободы в данном случае;  $Z_n := (\frac{v_{11}}{v_{1*}} - \frac{v_{21}}{v_{2*}}) \sqrt{\frac{nv_{1*}v_{2*}}{v_{*1}v_{*2}}} = \sqrt{n} g_n$ , где  $g_n$ - выборочный коэффициент корреляции;  $Z_n^2 = X^2$ ; Если  $H_0$  верно, то  $Z_n \rightarrow Y \sim N(0, 1)$ .

**Пример:**  $X \sim Bern(px)$ ;  $A$ -успех;  $\bar{A}$  -неудача

$Y \sim Bern(py)$ ;  $B$ -успех;  $\bar{B}$  -неудача

$$\begin{aligned} \rho(XY) &= \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{P(A)P(\bar{A})P(B)P(\bar{B})}} = cov(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = \\ &= \frac{P(A,B) \cdot P(B) - P(A) \cdot P(B)}{\sqrt{\dots}} = \frac{P(B)}{\sqrt{\dots}} (P(A|B) - P(A)) = \frac{P(B)}{\sqrt{\dots}} (P(A|B) - P(A|B) \cdot \\ &P(B) - P(A|\hat{B}) \cdot P(\hat{B}) = \frac{P(B)}{\sqrt{\dots}} (P(A|B) \cdot P(\hat{B}) - P(A|\hat{B}) \cdot P(\hat{B}) = \\ &= \frac{P(B) \cdot P(\hat{B})}{\sqrt{\dots}} (P(A|B) - P(A|\hat{B})) \quad H_0 : P(A|B) = P(A|\hat{B}) \quad H_1 : P(A|B) \neq P(A|\hat{B}) \\ P(A|B) &\geq P(A|\hat{B}) \\ P(A|B) &\leq P(A|\hat{B}) \end{aligned}$$

## 6.6 Критерий отношения правдоподобия

$\alpha_i$  - ошибка I рода для i-го критерия;

$\beta_i$  - ошибка II рода для i-го критерия;

$1 - \beta_i$  - мощность i-го критерия.

Критерий  $i$  равномерно мощнее критерия  $j$ , если  $\alpha_i \leq \alpha_j$  и  $(\beta_i \leq \beta_j \Leftrightarrow 1 - \beta_i \geq 1 - \beta_j)$

Так бывает редко.

$\alpha_i \leq \alpha_j, 1 - \beta_i \rightarrow sup$ :

максимизируем мощность при допустимой ошибке I рода.

**Выбор из 2-х простых гипотез (непрерывный случай)**  $H_0 : \theta = \theta_0, H_1 :$

$\theta = \theta_0$  - простая гипотеза;

$L(X, \theta_0)$ -функция правдоподобия при  $\theta = \theta_0$ ;  $L(X, \theta_1)$  - функция правдоподобия при  $\theta = \theta_1$ ;

$L(X, \theta_0) = \prod f(x_i, \theta_0), L(X, \theta_1) = \prod f(x_i, \theta_1)$ ;

$L(x) := \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} \geq c \Rightarrow H_0$  - опровергается;

$\psi(c) := P[L(x) \geq c | \theta = \theta_0] = l(x) \geq c \int L(x, \theta_0) dx; \psi_0 = 1, \psi \searrow;$   
 $1 \geq P[l(x) \geq c | \theta = \theta_1] = l(x) \geq c \int L(x, \theta_1) dx \geq l(x) \geq c \int L(x, \theta_0) dx = c\psi(c) \Rightarrow$   
 $\psi(c) \geq \frac{1}{c} \Rightarrow \psi(c) \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0;$   
 $\psi(\infty) = 0, \psi$ -строго монотонна (не совсем верно, но выполняется)  
 $\Rightarrow \exists \alpha : \psi(c\alpha) = \alpha, \alpha \in (0, 1)$

**Лемма (Неймана-Пирсона)** При  $c\alpha$ , определенном выше ( $\psi(c\alpha) = \alpha$ ), критерий отношения правдоподобия имеет наибольшую мощность.

### Дискретный случай

Отсортируем значения  $l(x) : l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq \dots$ ;  
 $\psi(c) = P[l(x) \geq c | \theta = \theta_0] = \sum_{l(x) \leq c} L(x, \theta_0);$   
 $\exists k = k(\alpha) : \sum_{l(x) \leq l_{k+1}} L(x, \theta_0) \leq \alpha \leq \sum_{l(x) \leq l_k} L(x, \theta_0)$   
 $a_i := \sum_{l(x) \leq l_{k+1}} L(x, \theta_i),$  где  $i \in 0, 1; p_j := P[l(x) = l_k | \theta = \theta_i],$  где  $i \in 0, 1;$   
 если  $L(x) \geq l_k,$  то опровергается;  
 если  $L(x) \leq l_k,$  то принимаем;  
 если  $L(x) = l_k,$  то вероятность опровержения равно  $\frac{\alpha - a_0}{p_0};$   
 $P[-H_0] = P[l(x) = l_k | H_0] + P[l(x) \geq l_k | h_0] = \alpha_0 + p_0 \frac{\alpha - a_0}{p_0} = \alpha$  и тоже оптимальный по мощности.

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \geq \theta_0 \text{ либо } \theta \leq \theta_0$$

Критерий отношения правдоподобия оптимально.

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Для рет.моделей критерий отношения правдоподобия опт.

**Пример 6.2.**  $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \delta^2)$ ;  $\theta$  - не известен,  $\delta^2$  - известен;

$$H_0 : \theta = \theta_0; H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0; L(X, \theta_j) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\delta^2})^n \exp[-\frac{1}{2\delta^2} \sum_{j=1}^n (x_i - \theta_j)^2]}, j \in 0, 1;$$

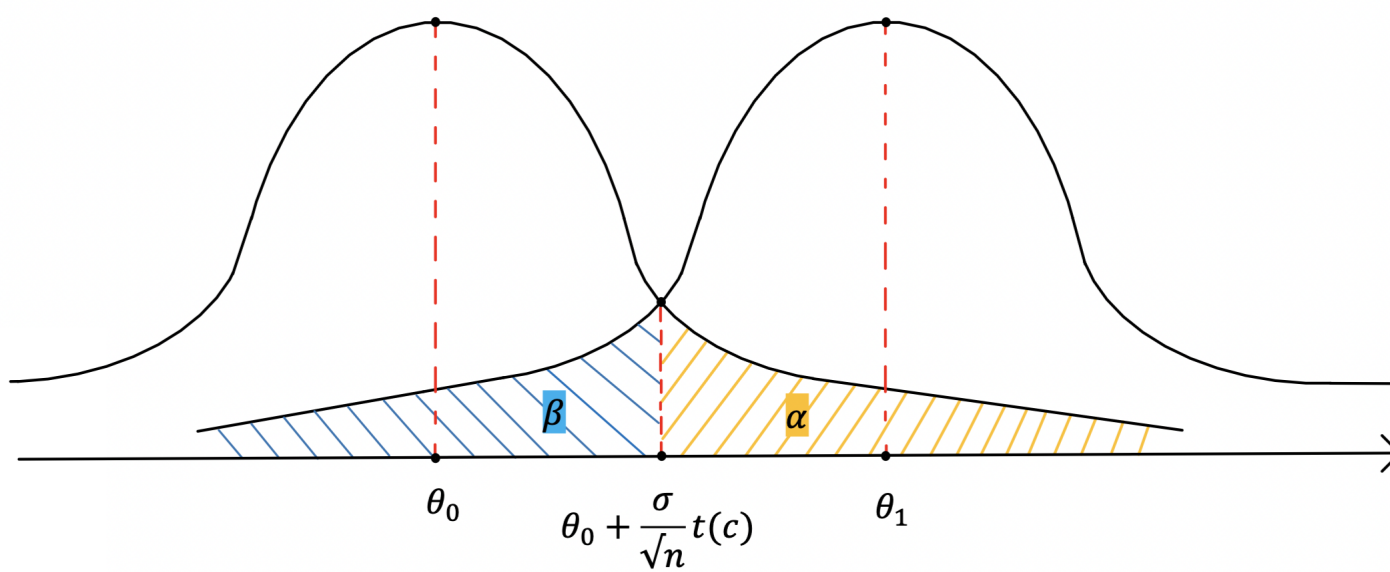
$$L(x) = \frac{L(X, \theta_1)}{L(X, \theta_0)} = \exp[-\frac{1}{2\delta^2} \sum_{j=1}^n (x_i - \theta_1)^2 - (x_i - \theta_0)^2] = \exp[\frac{n}{\delta^2} (\theta_1 - \theta_0) \bar{X} - \frac{n}{2\delta^2} (\theta_1^2 - \theta_0^2)] \geq c \Leftrightarrow \bar{X} \geq \delta^2 \frac{\ln c}{n(\theta_1 - \theta_0)} + \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\delta} (\bar{X} - \theta_0) \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)} \ln c + \frac{\sqrt{n}}{2\delta} (\theta_1 - \theta_0)$$

если верно  $H_0,$  то  $\frac{\sqrt{n}}{\delta} (\bar{X} - \theta_0) \sim N(0, 1)$

$$\psi(c) = P[\frac{\sqrt{n}}{\delta} (\bar{X} - \theta_0) \geq t(c) | \theta = \theta_0] = 1 - \phi(t(c)) = \phi(-t(c)) = \alpha;$$

мощность;

$$P[\frac{\sqrt{n}}{\delta} (\bar{X} - \theta_0) \geq t(c) | \theta = \theta_1] = P[\frac{\sqrt{n}}{\delta} (\bar{X} - \theta_1) \geq t(c) - \frac{\sqrt{n}}{c} (\theta_1 - \theta_0) | \theta = \theta_1] = 1 - \phi(t(c) - \frac{\sqrt{n}}{\delta} (\theta_1 - \theta_0)) = \phi(-t(c) + \frac{\sqrt{n}}{\delta} (\theta_1 - \theta_0)) \geq \alpha;$$



$\beta$  – ошибка второго рода

$\alpha$  – ошибка первого рода

# Глава 7

## Линейные статистические модели

### 7.1 Модель линейной регрессии

$n$  - число наблюдений,  $k$  - количество переменных (непрерывные);  $k < n$ ;  
 $Y = Xb + E$ ;

предполагаем, что

- наблюдения независимы или хотя бы  $Cov[\xi_i, \xi_j] = 0, i \neq j$ ;
- $E[\xi]$ ;
- $Var[\xi_1] = \dots = Var[\xi_n] = \delta^2$  (гомоскедастичность);

$\delta^2$  - остаточная дисперсия;  $Var[\xi] = \delta^2 E_n$ ;

цель: "оценить"  $b$  и  $\delta^2$

$A := X^T X \in M_{k \times k}$ ;  $A \geq 0$ ;  $A > 0 \Leftrightarrow A = k$ ; **Метод наименьших квадратов:**

$S^2(b) := (Y - Xb)^T(Y - Xb) = \sum_{i=1}^n (Y_i - X_{[i,*]}b)^2$ ;

**Оценка наименьших квадратов (ОНК):**  $\hat{b} = \operatorname{argmin}_b S^2(b)$ .

**Утверждение 1.**  $A > 0 \Rightarrow \hat{b} = A^{-1}X^TY$

**Доказательство:**  $b = \hat{b} + \delta$ ;

$S^2(b) = (Y - X\hat{b} - X\delta)^T(Y - X\hat{b} - X\delta) = S^2(\hat{b}) + \delta^T X^T X \delta - (Y - X\hat{b})^T X \delta - \delta^T X^T (Y - X\hat{b}) = S^2(\hat{b}) + \delta^T X^T X \delta \geq S^2(\hat{b})$ ;

равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\delta = 0$

$t = Tb$ - линейная функция от  $b$ ;  $\hat{t} = T\hat{b}$ - ОНК для  $t$ .

**Утверждение 2.** В рамках тех предположений, которые мы описали в начале:

- ОНК - несмещенная;
- ОНК обладает наименьшей дисперсией в классе линейных несмещенных оценок:  $Var[\hat{b}] = \delta^2 T A^{-1} T^{tau}$  ;

**Доказательство:**

- $E[\hat{t}] = T \dot{E}[\hat{b}] = T A^{-1} X^{-1} X b = T b = t$
- $l = LY$  - линейная несмещенная оценка  $t$   
 $El = Tb$   
 $LEY = LXb \Rightarrow T = LX$   
 $VarLY = LVarYL^T = \delta^2 LEL^T = \delta^2 LL^T$   
 $LL^T = (TA^{-1}X^T)(TA^{-1}X^T)^T + (L - TA^{-1}X^T)(L - TA^{-1}X^T)^T \geq 0$   
 $L = TA^{-1}X^T$ -оптимально для  $Var\hat{b} = \theta^2 A^{-1}$  - следствие

$$E[S^2(b)] = E[\epsilon^T \epsilon] = n\delta^2; E[(\hat{b} - b)^T A(\hat{b} - b)] = \sum_{i,j} a_{ij} E[(\hat{b}_i - b_i)^T (\hat{b}_j - b_j)] =$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} cov[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = \sum_{i,j} a_{ij} a_{ij}^{-1} \delta^2 = k\delta^2$$

$$n\delta^2 = E[S^2(\hat{b})] + k\delta^2, \text{ т.к. } S^2(b) = S^2(\hat{b}) + (\hat{b} - b)^T A(\hat{b} - b);$$

несмещенная оценка  $\delta^2$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s^2(\hat{b})}{n - k} = \frac{(X\hat{b} - Y)^T (X\hat{b} - Y)}{n - k} = \frac{\epsilon^T \epsilon}{n - k}$$

$$Y - X\hat{b} = Y - A^{-1}X^T Y = (E - A^{-1}X^T)Y$$

$$B = B^T B, \quad B = n - k \sim \hat{\sigma}^2 = \frac{Y^T B Y}{n - k}$$

Условная оптимальная несмещенная оценка (ОНК) имеет вид:

$$\hat{b}_T = argmin_{Tb=t_0} S^2(b); \quad S_T^2 = S^2(\hat{b}_T), \quad T \in M_{m,k}, \quad T = m, \quad m \leq k$$

**Определение 7.1.**  $\hat{b}_T = \hat{b} - A^{-1}T^T D^{-1}(T\hat{b} - t_0)$ , где  $D = TA^{-1}T^T$ ;

$$S^2(b) = S^2(\hat{b}_T - b)^T A(\hat{b}_T - b) \geq S^2(\hat{b}_T);$$

$$s_T^2 = s^2(\hat{b}) + (T\hat{b} - t_0)^T D^{-1}(T\hat{b} - t_0);$$

$$Q_T \sim \xi^2(m), \text{ если } \epsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n) \Leftrightarrow Y \sim N(Xb, \sigma^2 E_n)$$

$$L(Y, b, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_{i*}b)^2 \right] = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left[ -\frac{S^2(b)}{2\sigma^2} \right]$$

$$L(Y, b, \sigma^2) \xrightarrow[\sigma^2 - \text{fix}]{s} up \Leftrightarrow S^2(b) \xrightarrow[\sigma^2 - \text{fix}]{i} nf$$

Следовательно, ОНК – оптимальная в классе всех несмещенных оценок  $\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{S^2(\hat{b})}{n}$  – смещенная оценка  $\sigma^2$ .

**Теорема 7.1.** Основная теорема о регрессии.

$\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ , тогда:

- $\hat{b}, S^2(\hat{b})$  – независимы;
- $S^2(b) - S^2(\hat{b})$  – независимы;
- $\hat{b} \sim N(b, \sigma^2 A^{-1})$ ;
- $\frac{S^2(\hat{b})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k)$ ;
- $\frac{S^2(\hat{b}) - S^2(b)}{\sigma^2} \sim \chi^2(k)$ ;

*Доказательство.*  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sigma}$ ;  $\hat{b} = A^{-1}X^T(Xb + \sigma\epsilon') = b + \sigma A^{-1}X^T\epsilon'$ ;  $\frac{S^2(\hat{b})}{\sigma^2} = \epsilon'^T B \epsilon'$ ;  $BA^{-1}X^T = (E - XA^{-1}X^T)A^{-1}X^T$ ;  $A^{-1}X^T(E - XA^{-1}X^T) = A^{-1}X^T - A^{-1}X^T X A^{-1}X^T = 0 \Rightarrow \hat{b}$  и  $S^2(\hat{b})$  – независимы;  $S^2(b) - S^2(\hat{b}) = (\hat{b} - b)^T A(\hat{b} - b)$  и  $S^2(\hat{b})$  – независимы.  $\square$

Следствие:

- $\frac{\hat{b}_i - b_i}{\sigma \sqrt{a_{ii}^{-1}}} \sim N(0, 1)$ ;
- $\sqrt{n - k} \frac{\hat{b}_i - b_i}{\sqrt{a_{ii}^{-1} S^2(\hat{b})}} \sim T(n - k)$  – можем построить доверительные интервалы для  $b$  или проверить  $H_0 : b_i = 0$  (t-критерий);
- $\frac{n - k}{k} \cdot \frac{S^2(b) - S^2(\hat{b})}{S^2(\hat{b})} \sim F(k, n - k)$ ;
- с помощью  $\frac{S^2(\hat{b})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k)$  можем построить доверительный интервал для  $\sigma^2$ ;

- также можем строить доверительные интервалы для  $Y$  из области выборки, а также из тестовой  $X^*$  – набор тестовых значений;  $Y^* = X^*b + \epsilon^*$ ; предположим, что  $Var[\epsilon^*] = \sigma^2 E$  и  $\epsilon^*, \epsilon$  – независимы,  $\epsilon^* \sim N(0, \sigma^2 E)$ ;  $\hat{b} \sim N(b, \sigma^2 A^{-1}) \Rightarrow Y^* \sim N(X^*b, X^* \sigma^2 A^{-1} (X^*)^T + \sigma^2 E) \sim N(X^*b, \sigma^2 [X^* A^{-1} (X^*)^T + E])$ ;  $Y_i^* \sim N(X_{i*}^* b, \sigma^2 [...]_{ii})$ ;  $\sqrt{n-k} \frac{x_{i*}^* \hat{b} - Y_i^*}{\sqrt{S^2(\hat{b})} \sqrt{(...)}_{ii}} \sim T(n-k)$

# Предметный указатель

- К-ый выборочный момент, 88
- Ассимптотическая нормальность, 95
- Выборочная дисперсия, 89
- Выборочное среднее, 88
- Доверительный интервал, 98
- Информация Фишера, 97
- Метод максимального правдоподобия, 96
- Метод моментов, 96
- Неравенство Рао-Крамера, 98
- Несмещенность, 94
- Постановка задачи точечного оценивания параметров, 93
- Ранг, 109
- Свойства точечных оценок, 94
- Состоятельность, 94
- Теорема Колмогорова, 87
- Теорема Смирнова, 87
- Центральный выборочный момент, 88
- Эффективность, 95
- абсолютно непрерывная случайная величина, 46
- абсолютно непрерывный случайный вектор, 53
- алгебра множеств, 1
- биномиальное распределение, 45
- борелевская сигма-алгебра, 4
- вероятностное пространство, 2
- вероятностное пространство в широком смысле, 3
- вероятность, 2
- вырожденное распределение, 45
- гамма-распределение, 49
- геометрическое распределение, 46
- дискретная случайная величина, 44
- дискретное распределение, 44
- дискретный случайный вектор, 53
- дисперсия, 67
- для независимых, 55
- интеграл Стильеса, 64
- ковариация, 75
- коэффициент асимметрии, 71
- коэффициент эксцесса, 72
- математическое ожидание, 65
- медиана, 73
- многомерное нормальное распределение, 54
- многомерное распределение, 52
- мода, 73
- момент, 71
- независимость набора событий, 16
- независимость пары событий, 16
- независимые испытания, 18
- независимые случайные величины, 55
- непрерывное равномерное распределение, 47
- несовместные события, 3
- нормальное распределение, 48
- носитель распределения, 51
- отрицательное биномиальное распределение, 45
- перестановка (без повторений), 6



перестановка (с повторениями), 7  
плотность, 46  
полиномиальное распределение, 53  
  
размещение (без повторений), 7  
размещение (с повторением), 8  
распределение Бернулли, 45  
распределение Коши, 49  
распределение Пуассона, 46  
распределение случайной величины,  
41  
сигма-алгебра множеств, 2  
сингулярное распределение, 50  
случайная величина, 40  
случайный вектор, 51  
сочетание (без повторений), 7  
сочетание (с повторением), 8  
стандартное отклонение, 67  
схема Бернулли, 19  
условная вероятность, 15  
функция распределения случайной  
вектора, 52  
функция распределения случайной  
величины, 41  
экспоненциальное распределение, 49

## Список литературы

- [1] А.А. Боровков. *Теория вероятностей*. Изд. 5-е, существенно перераб. и доп. М.: URSS, 2009. ISBN: 978-5-397-00582-1.
- [2] Н.Я. Виленкин. *Комбинаторика*. М.: Наука, 1969.
- [3] Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогоров. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*. М. и Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949.
- [4] М. Лоэв. *Теория вероятностей*. Пер. Б.А. Севастьянов. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
- [5] Б.М. Макаров и А.Н. Подкорытов. *Лекции по вещественному анализу*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. ISBN: 978-5-9775-0631-1.
- [6] И.П. Натансон. *Теория функций вещественной переменной*. Изд. 5-е, стер. СПб.: Лань, 2008. ISBN: 978-5-8114-0136-9.
- [7] В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Пер. Ю.В. Прохоров. Изд. 2-е. Т. 1. М.: URSS, 2009. ISBN: 978-5-397-01035-1.
- [8] П. Халмош. *Теория меры*. Пер. Д.А. Васильков. М.: Факториал Пресс, 2003. ISBN: 5-88688-065-8.
- [9] А.Н. Ширяев. *Вероятность*. Изд. 6-е, испр. М.: Изд-во МЦНМО, 2016. ISBN: 978-5-4439-1093-2.