АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ФУНКЦИИ*)

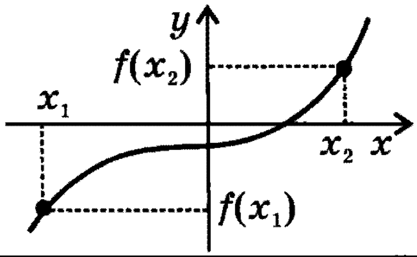
Числовой **функцией** называется соответствие, которое каждому числу x из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число y.

Обозначение: $y = f(x)$, где x — независимая переменная (аргумент функции), y — зависимая переменная (функция).

Множество значений x называется **областью определения** функции (обычно обозначается D).

Множество значений y называется **областью значений** функции (обычно обозначается E).

Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- ***Аналитический способ:*** функция задается с помощью математической формулы.

  Примеры: $y = x^2$, $y = \ln x$

- ***Табличный способ:*** функция задается с помощью таблицы.

  Пример.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

- ***Описательный способ:*** функция задается словесным описанием.

  Пример: функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ для рациональных } x, \\ 0 \text{ для иррациональных } x. \end{cases}$

- ***Графический способ:*** функция задается с помощью графика.

*)Все параметры функций, в том числе коэффициенты многочленов, считаются действительными.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ

Функция называется **четной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = f(x).$$

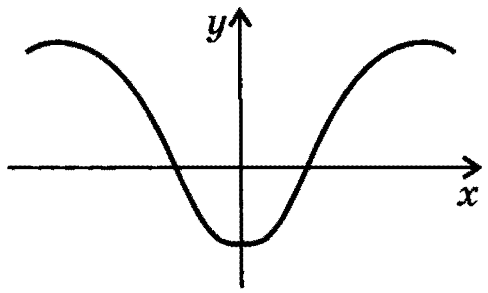


График четной функции симметричен относительно оси y.

Функция называется **нечетной**, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения

$$f(-x) = -f(x).$$

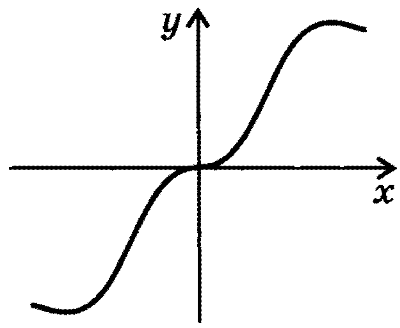
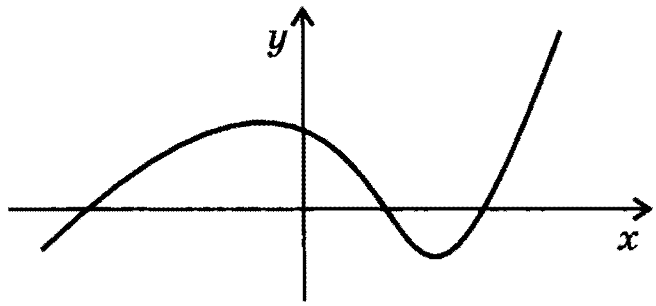


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Многие функции не являются ни четными, ни нечетными.

Пример графика функции, не являющейся ни четной, ни нечетной:



Примеры четных функций: $y = x^{2n}$, $n \in Z$; $y = \cos x$

Примеры нечетных функций: $y = x^{2n+1}$, $n \in Z$; $y = \sin x$

Примеры функций, не являющихся ни четными, ни нечетными:
$y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x - 2$, $y = (x + 1)^2$

ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Функция $f(x)$ называется **периодической** с периодом $T > 0$, если для любого x из области определения значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

При этом любое число вида Tn, где $n \in N$, также является периодом этой функции.

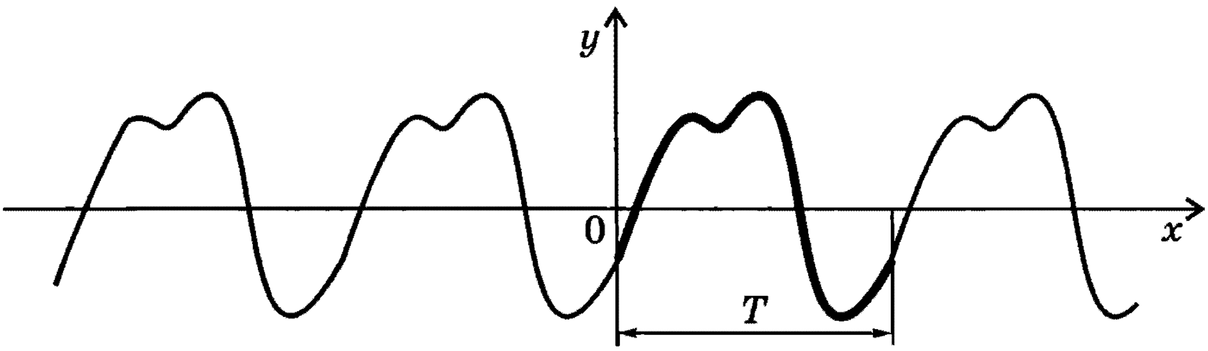


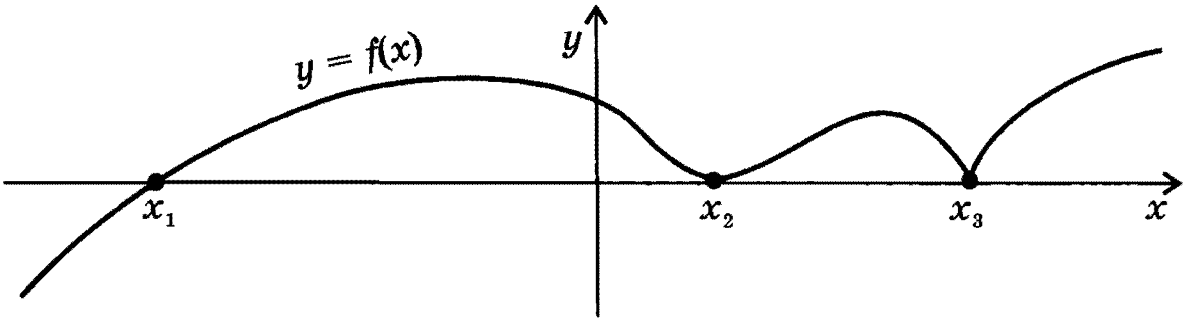
График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов. Чтобы построить график периодической функции, строят фрагмент графика на любом отрезке длиной T (например, $[0; T]$), а затем производят последовательные параллельные переносы фрагмента графика на T, $2T$, $3T$ и т.д. вдоль оси x (вправо и влево).

НУЛИ ФУНКЦИИ

Нулем функции $y = f(x)$ называется такое значение аргумента x_0, при котором функция обращается в нуль:

$$f(x_0) = 0.$$

В нуле функции ее график имеет общую точку с осью x.

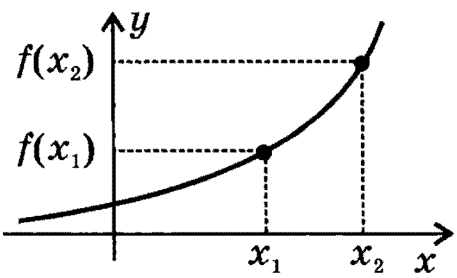


x_1, x_2, x_3 — нули функции $y = f(x)$

МОНОТОННОСТЬ (ВОЗРАСТАНИЕ, УБЫВАНИЕ)

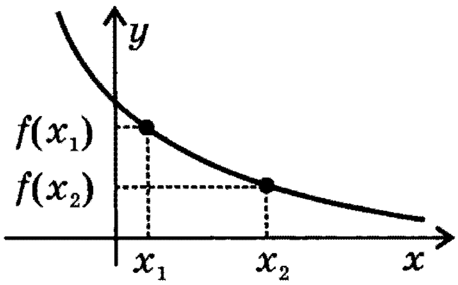
Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

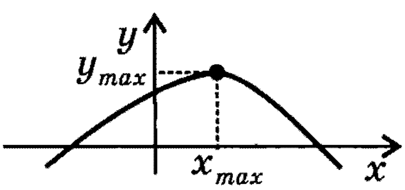


ЭКСТРЕМУМЫ (МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ)

Внутренняя точка x_{max} области определения называется **точкой максимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x_{max}).$$

Значение $y_{max} = f(x_{max})$ называется **максимумом** этой функции.



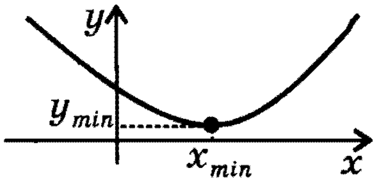
x_{max} — точка максимума

y_{max} — максимум

Внутренняя точка x_{min} области определения называется **точкой минимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x_{min}).$$

Значение $y_{min} = f(x_{min})$ называется **минимумом** этой функции.



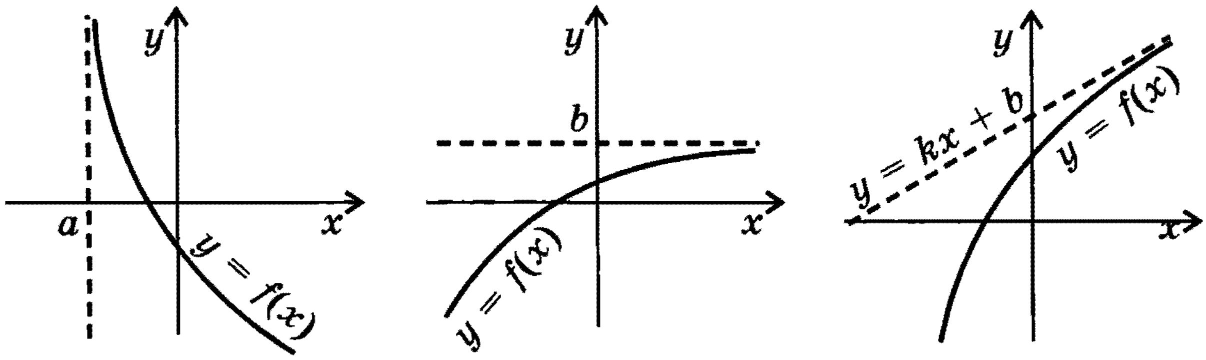
x_{min} — точка минимума

y_{min} — минимум

АСИМПТОТЫ

Если график функции $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь (ветви), у графика могут быть асимптоты.

> **Асимптотой** графика называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика при удалении этой точки по бесконечной ветви.



Вертикальная асимптота $x = a$	Горизонтальная асимптота $y = b$	Наклонная асимптота $y = kx + b$

Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой**, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ (предел справа) или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (предел слева) равен бесконечности.

Прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x\to -\infty} f(x) = b.$$

Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой**, если существуют конечные пределы

$$k = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim(f(x) - kx)$$

либо при $x \to \infty$, либо при $x \to -\infty$.

ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие обратной функции применимо к функциям, обладающим следующим свойством: *каждому* значению y из области значений функции соответствует *единственное* значение x из области определения этой функции.

Замечание. Для многих функций это свойство выполняется лишь на части области определения, в частности, на любом промежутке монотонности (для функции $y = x^2$ таким промежутком является, например, луч $[0; \infty)$, для функции $y = \sin x$ — отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$).

Функция g называется **обратной** для функции f, если каждому y из области значений функции f функция g ставит в соответствие такое x из области определения функции f, что $y = f(x)$. Таким образом, если $y = f(x)$, то $x = g(y)$.

Функции f и g являются **взаимно обратными.**

- Область определения функции f является областью значений функции g, а область значений функции f является областью определения функции g.
- Графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (построение графика обратной функции см. на стр. 23).

Примеры взаимно обратных функций:

$y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$

НАХОЖДЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ, ОБРАТНОЙ ДАННОЙ

- Пользуясь формулой $y = f(x)$, следует выразить x через y, а в полученной формуле $x = g(y)$ заменить x на y, а y на x.

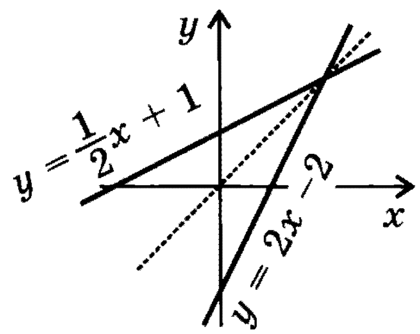
Пример. Найти формулу для функции, обратной функции

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Выражение x через y: $x = 2y - 2$.

Замена x на y, y на x дает: $y = 2x - 2$.

Результат: функция $y = 2x - 2$ является обратной для функции $y = \frac{1}{2}x + 1$.



ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ x

$$f(x) \to -f(x)$$

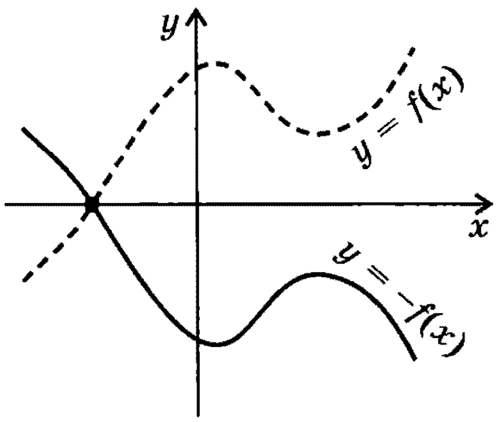
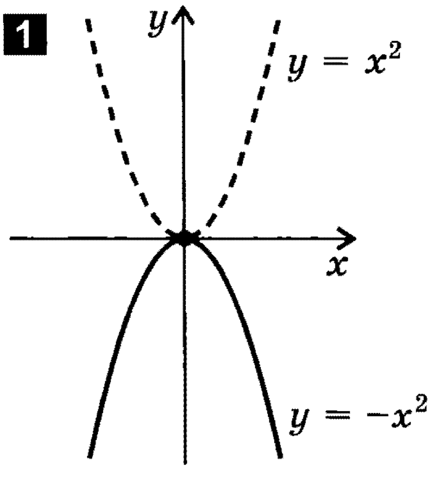


График функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси x.

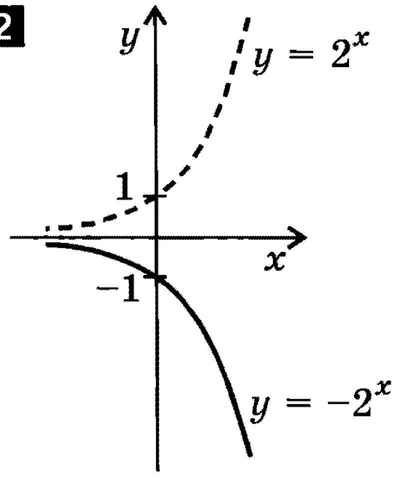
Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

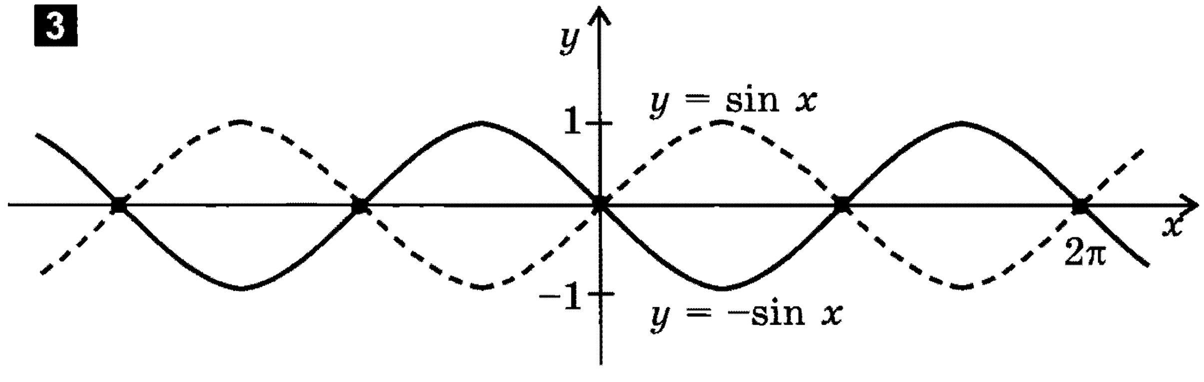
1



2



3



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ y

$f(x) \to f(-x)$

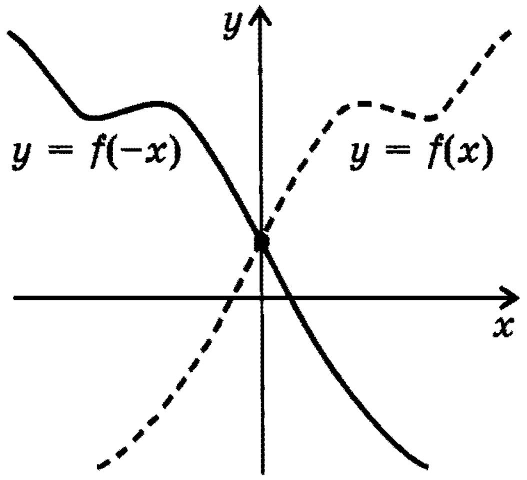
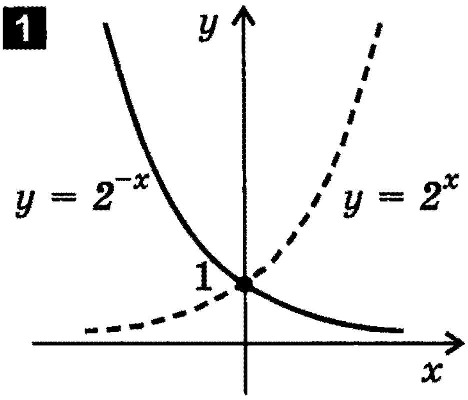


График функции $y = f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси y.

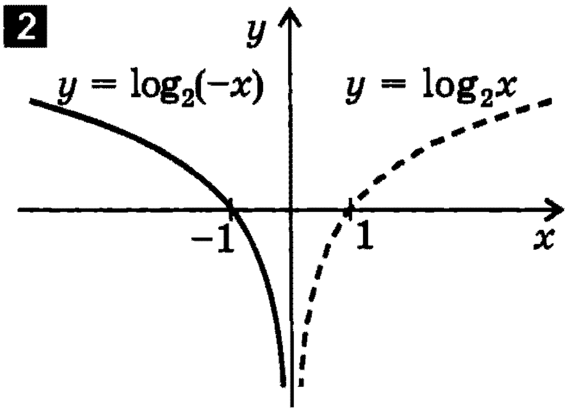
Замечание. Точка пересечения графика с осью y остается неизменной.

Примеры:

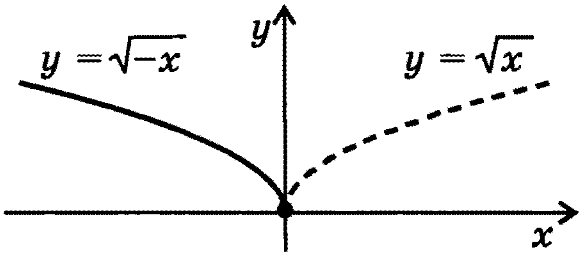
1



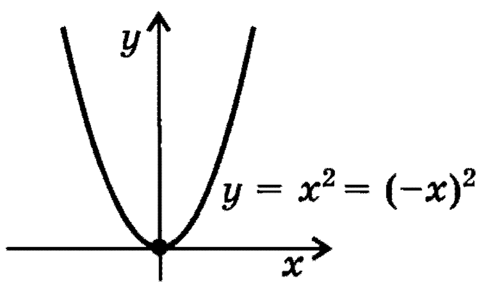
2



3



4



Замечание 1. График четной функции (см. стр. 11) не изменяется при отражении относительно оси y, поскольку для четной функции $f(-x) = f(x)$. ***Пример***: $(-x)^2 = x^2$.

Замечание 2. График нечетной функции (см. стр. 11) изменяется одинаково как при отражении относительно оси x, так и при отражении относительно оси y, поскольку для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$. ***Пример***: $\sin(-x) = -\sin x$.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ x

$$f(x) \to f(x - a)$$

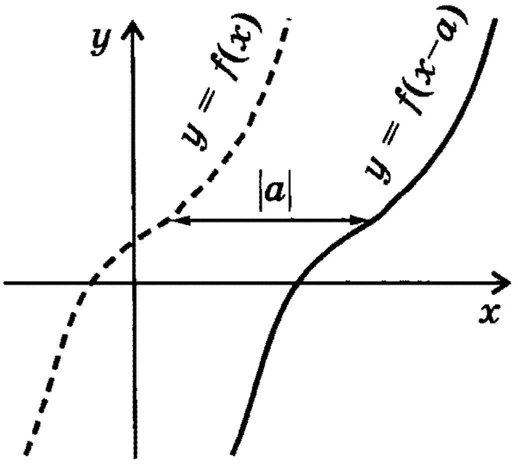
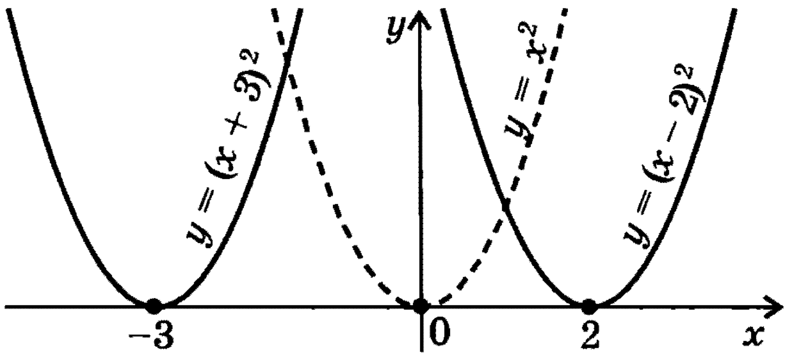


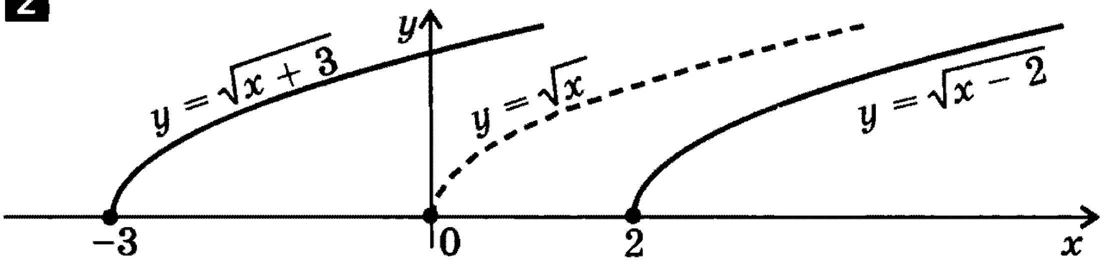
График функции $y = f(x - a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на $|a|$ вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Примеры:

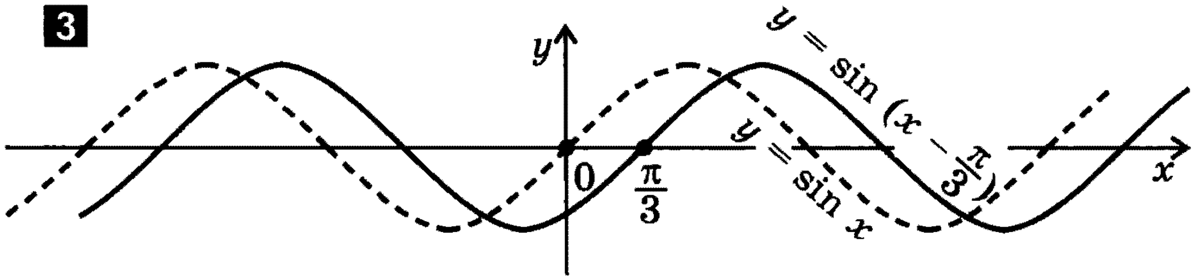
1



2



3



Замечание. График периодической функции (см. стр. 12) с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT, $n \in Z$.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ y

$$f(x) \to f(x) + b$$

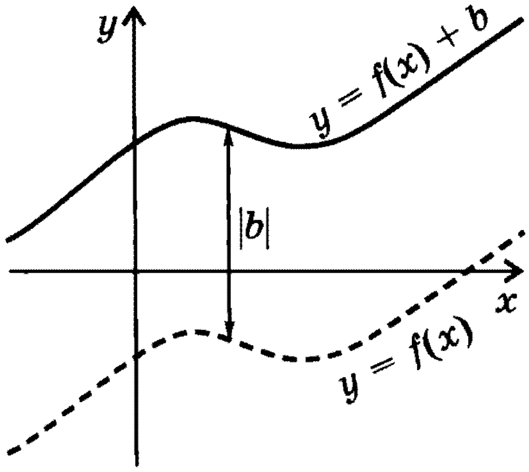
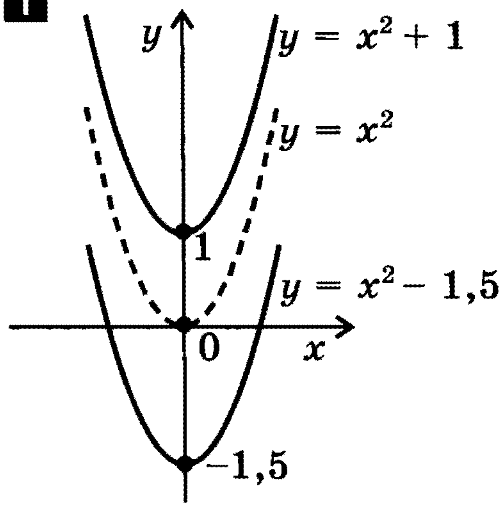


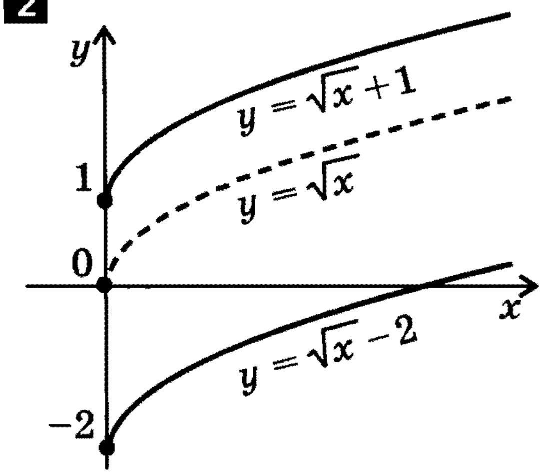
График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

Примеры:

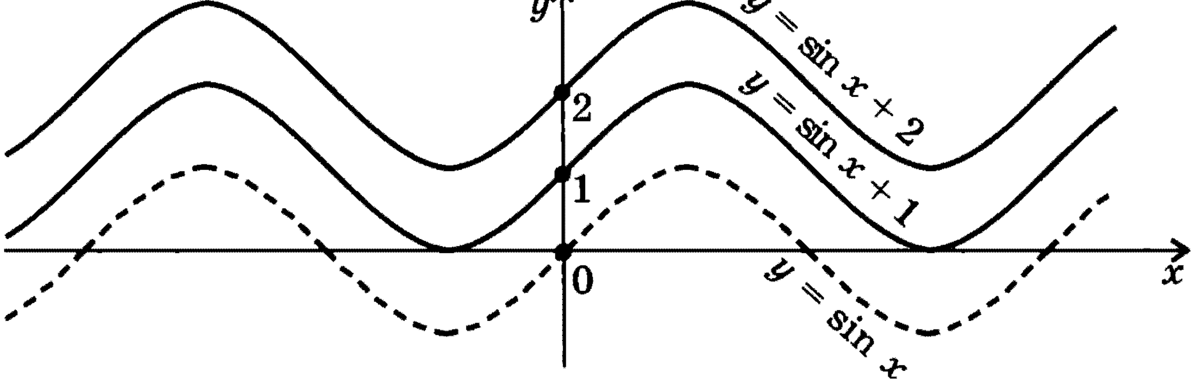
1



2



3



СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ x

$f(x) \to f(\alpha x)$, где $\alpha > 0$

$\boxed{\alpha > 1}$

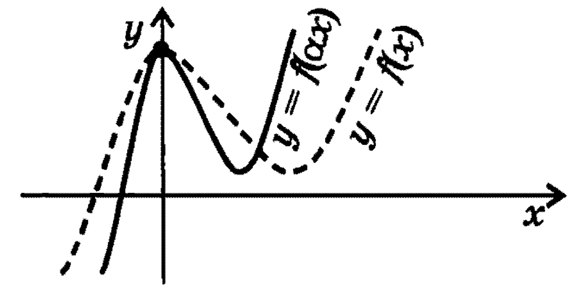


График функции $y = f(\alpha x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в α раз.

$\boxed{0 < \alpha < 1}$

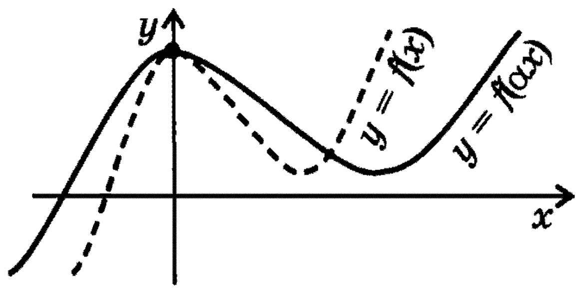
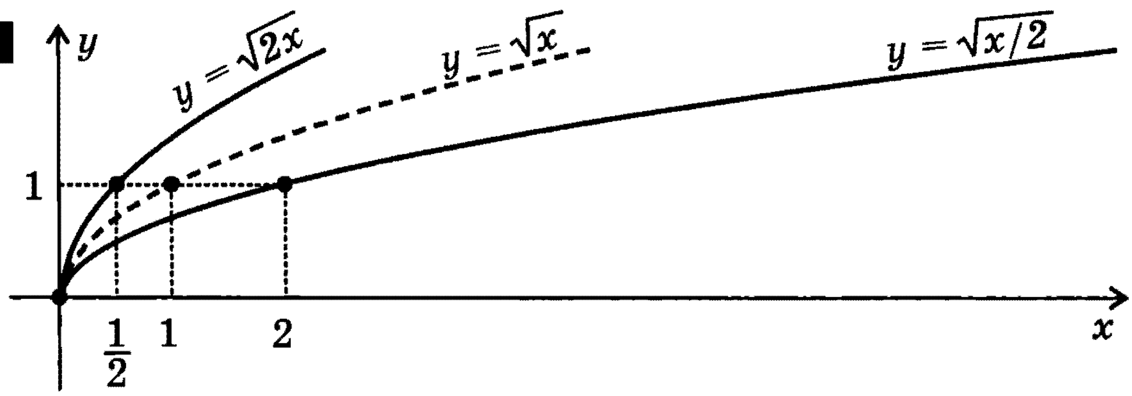


График функции $y = f(\alpha x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в $1/\alpha$ раз.

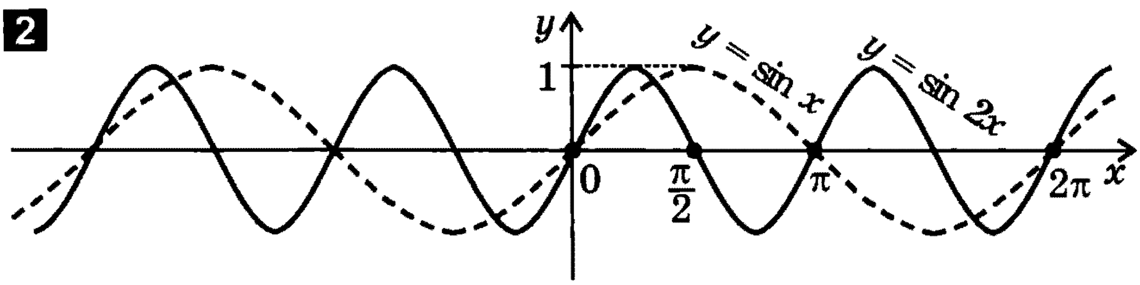
Замечание. Точки пересечения графика с осью y остаются неизменными.

Примеры:

1



2



СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ y

$f(x) \to kf(x)$, где $k > 0$

$\boxed{k > 1}$

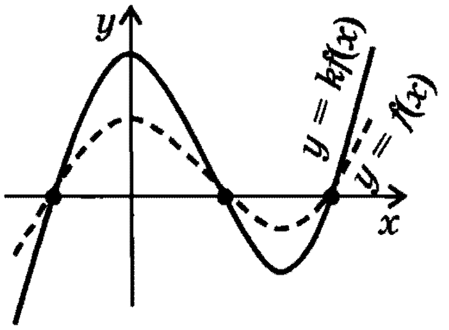


График функции $y = kf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в k раз.

$\boxed{0 < k < 1}$

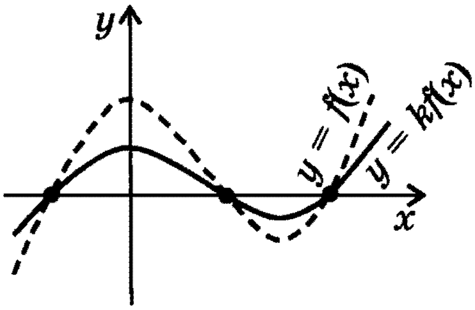
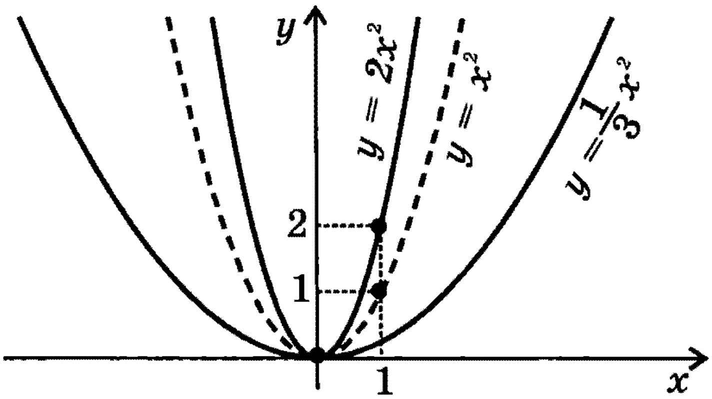


График функции $y = kf(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в $1/k$ раз.

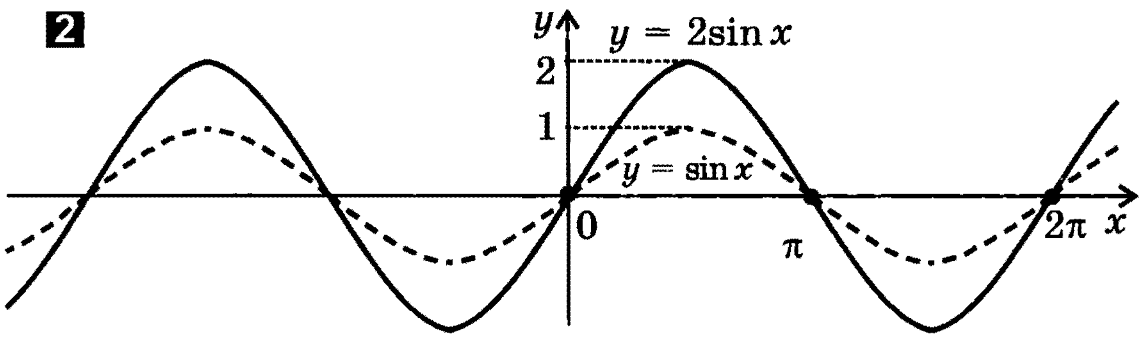
Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

1



2



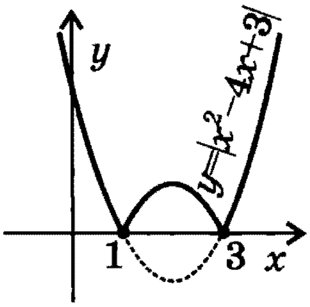
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = |f(x)|$

Части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси x и на оси x, остаются без изменения, а лежащие ниже оси x — симметрично отражаются относительно этой оси (вверх).

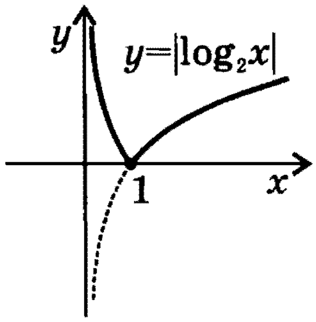
Замечание. Функция $y = |f(x)|$ неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:

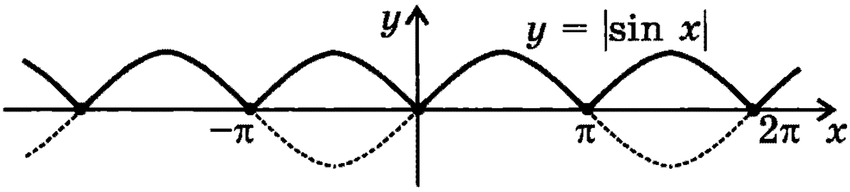
1



2



3



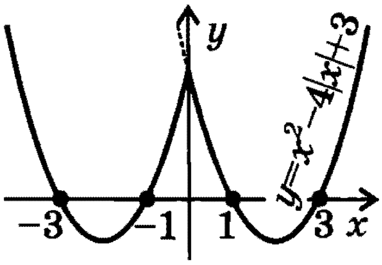
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(|x|)$

Часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси y, удаляется, а часть, лежащая правее оси y — остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика, лежащая на оси y, остается неизменной.

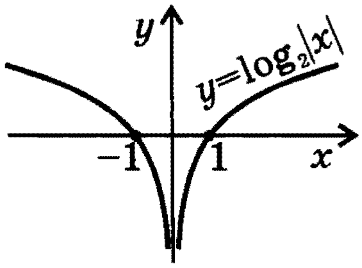
Замечание. Функция $y = f(|x|)$ четная (ее график симметричен относительно оси y).

Примеры:

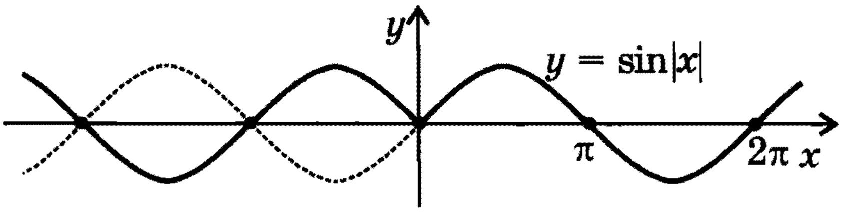
1



2



3



ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

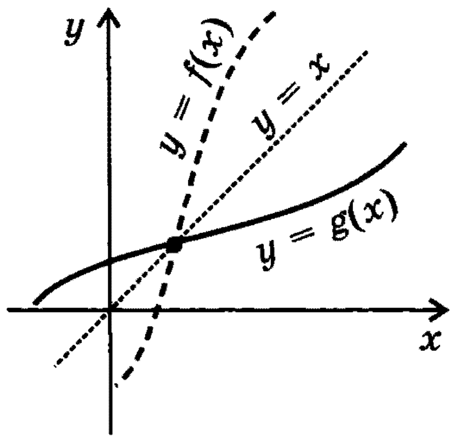
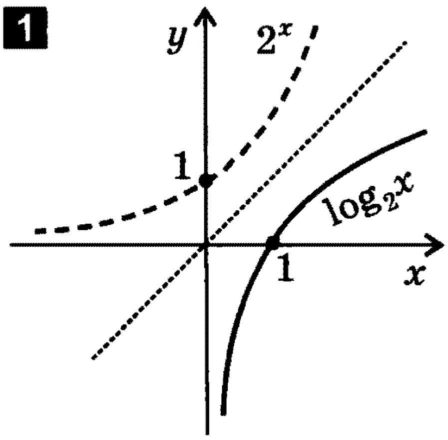


График функции $y = g(x)$, обратной для функции $y = f(x)$, можно получить преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

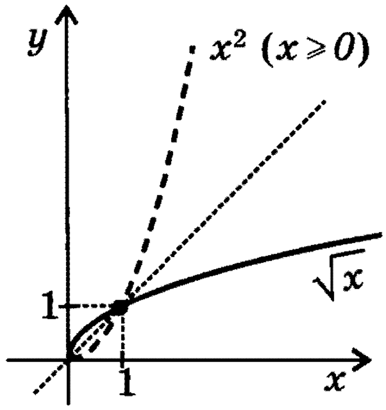
Замечание. Описанное построение можно производить только для функции, имеющей обратную (см. стр. 15).

Примеры графиков взаимно обратных функций.

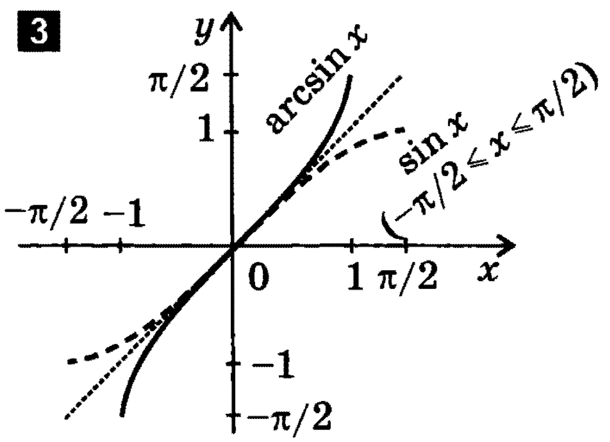
1



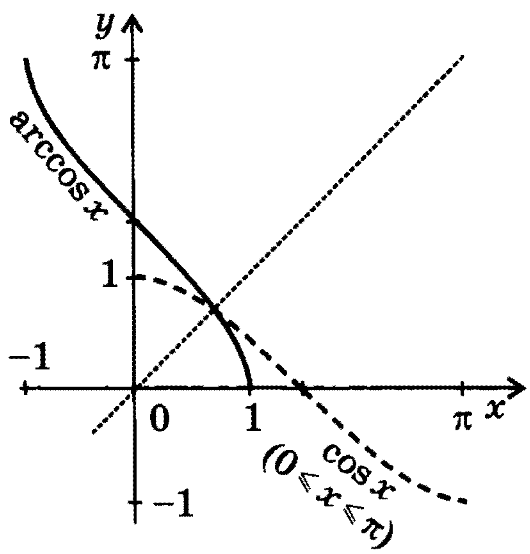
2



3



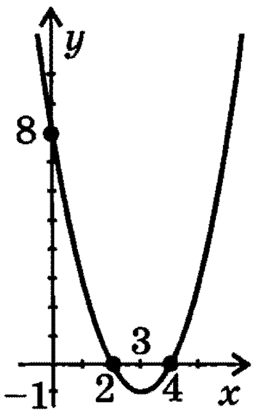
4



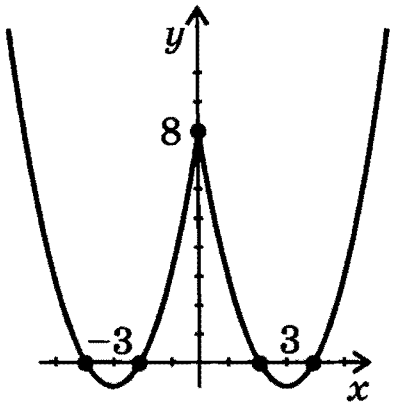
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ с помощью последовательных преобразований графиков элементарных функций (на примерах)

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x|^2 - 6|x| + 8| = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

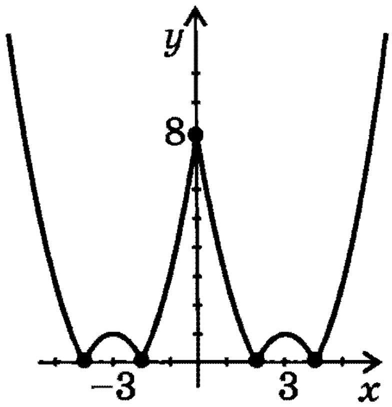
$y = x^2 - 6x + 8 =$
$= (x - 3)^2 - 1$



$y = (|x| - 3)^2 - 1$

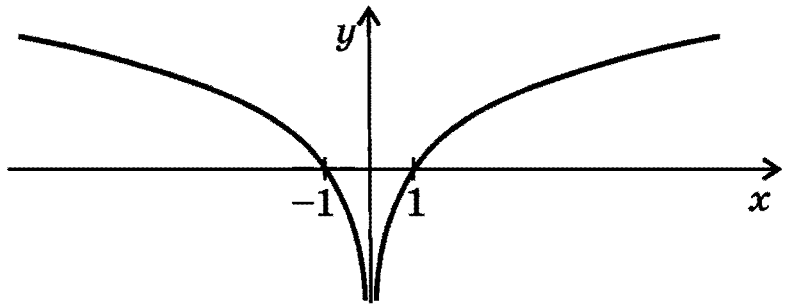


$y = |(|x| - 3)^2 - 1|$

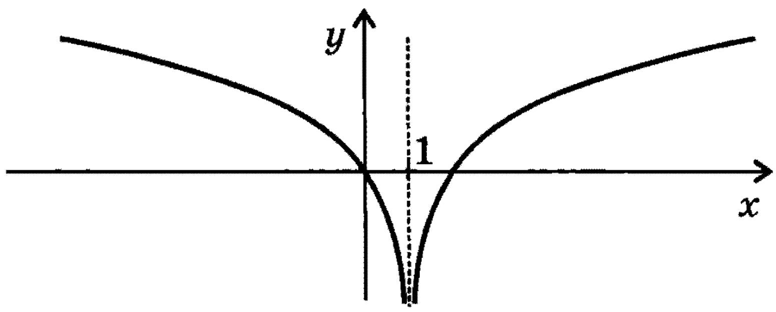


$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

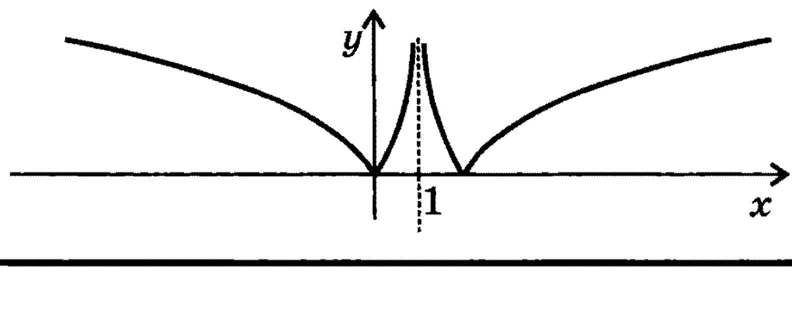
$y = \log_2|x|$



$y = \log_2(|x - 1|)$

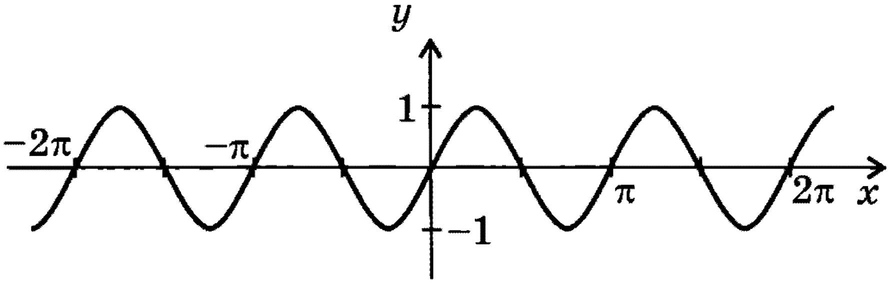


$y = |\log_2(|x - 1|)|$

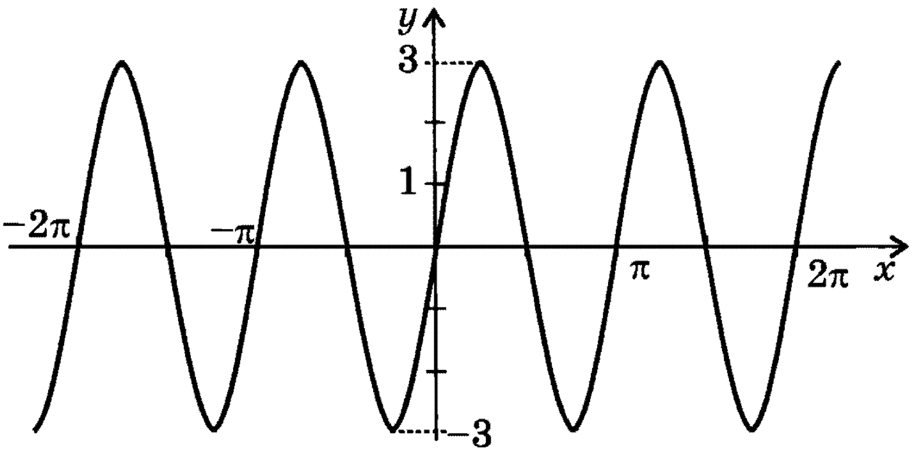


$y = |3\sin 2x| - 1$

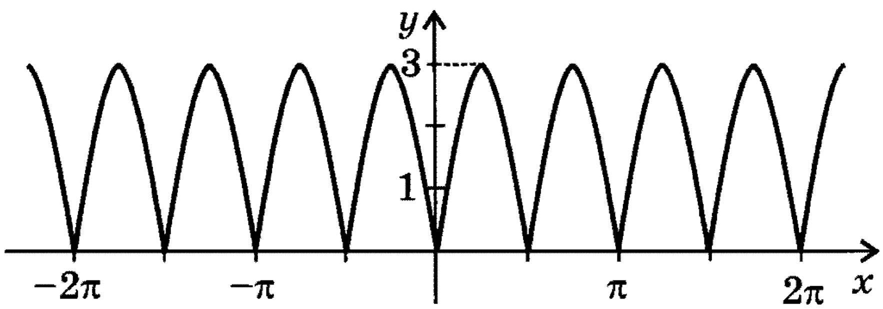
$y = \sin 2x$



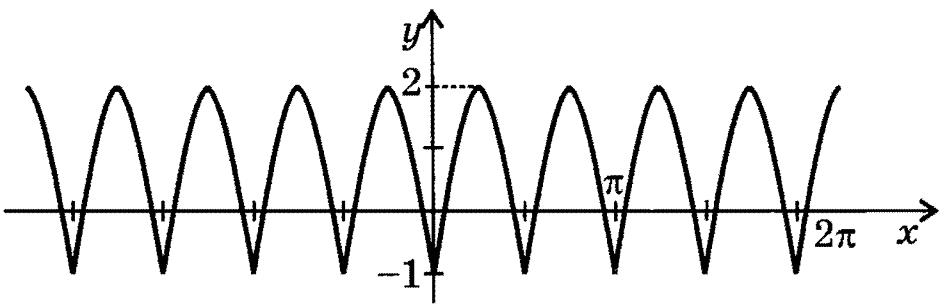
$y = 3\sin 2x$



$y = |3\sin 2x|$



$y = |3\sin 2x| - 1$



ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = kx + b$, где k, b — действительные числа.

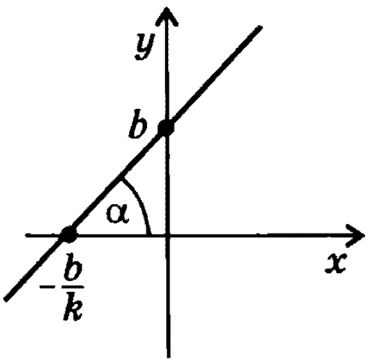
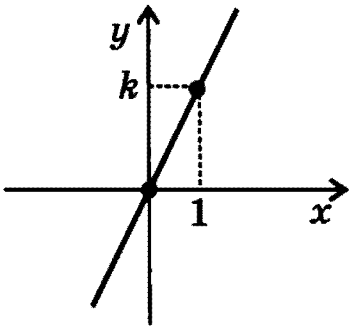


График — **прямая**.
Угловой коэффициент
$k = \operatorname{tg} \alpha$
b — ордината точки пересечения графика с осью y.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

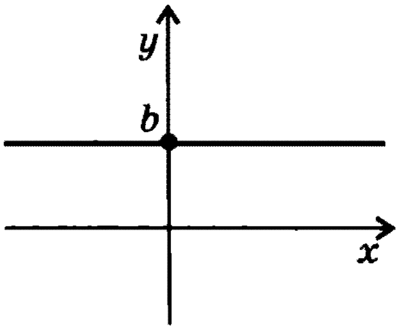
Прямая пропорциональность

$y = kx$



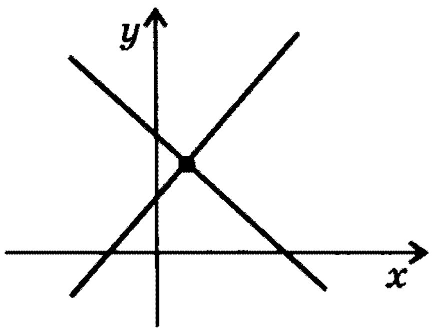
Постоянная функция

$y = b$

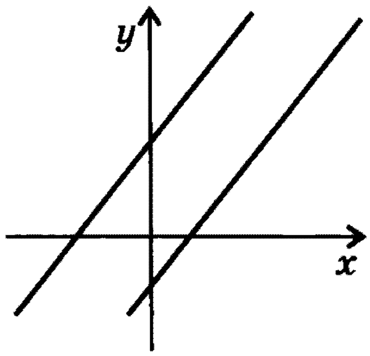


ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Если $k_1 \neq k_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в одной точке.



Если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$, графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ являются параллельными прямыми.



СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ $y = kx + b$

- *Область определения:* R
- *Область значений:*

  при $k \neq 0$ R

  при $k = 0$ $\{b\}$

- *Четность, нечетность:*

  если $k \neq 0$, $b \neq 0$, то функция не является ни четной, ни нечетной

  если $k \neq 0$, $b = 0$, то функция нечетная

  если $k = 0$, $b \neq 0$, то функция четная

  если $k = 0$, $b = 0$, то функция тождественно равна нулю, то есть является одновременно четной и нечетной

- *Нули:*

  если $k \neq 0$, то $y = 0$ при $x = -b/k$

  если $k = 0$, $b \neq 0$, то нулей нет

  если $k = 0$, $b = 0$, то $y = 0$ при $x \in R$

- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $k > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-b/k; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -b/k) \end{cases}$

  если $k < 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -b/k) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-b/k; \infty) \end{cases}$

  если $k = 0$, $b > 0$, то $y > 0$ при $x \in R$

  если $k = 0$, $b < 0$, то $y < 0$ при $x \in R$

  если $k = 0$, $b = 0$, то $y = 0$ при $x \in R$

- *Промежутки монотонности:*

  если $k > 0$, то функция возрастает при $x \in R$

  если $k < 0$, то функция убывает при $x \in R$

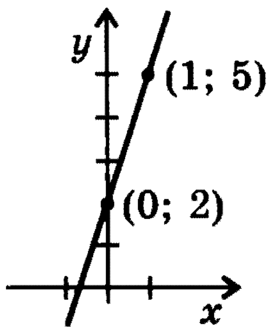
  если $k = 0$, то функция постоянна при $x \in R$

- *Экстремумов* нет

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ПО ДВУМ ТОЧКАМ

Часто удобно выбирать $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Соответствующие точки прямой $(0;\ b)$ и $(1;\ b + k)$.

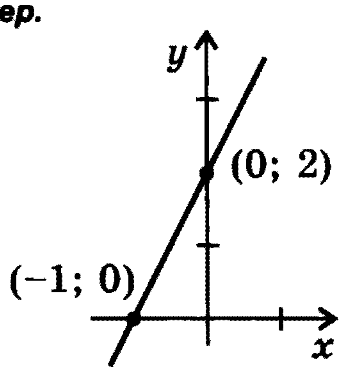
Пример.



$y = 3x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $x_2 = 1$, то $y_2 = 5$.
Через точки (0; 2) и (1; 5) провести прямую.

Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, можно выбирать точки $(0;\ b)$ и $(-b/k;\ 0)$ на осях координат.

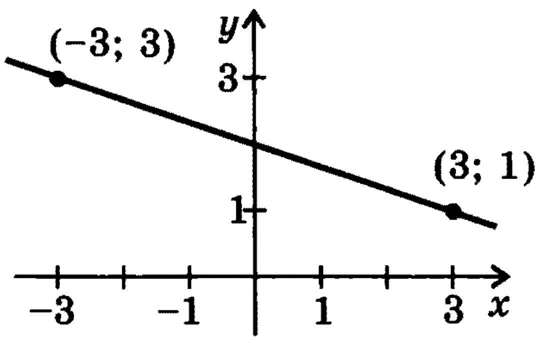
Пример.



$y = 2x + 2$
Если $x_1 = 0$, то $y_1 = 2$;
если $y_2 = 0$, то $x_2 = -1$.
Через точки (0; 2) и (−1; 0) провести прямую.

Если коэффициент перед x дробный, удобно выбирать x_1 и x_2 так, чтобы y_1 и y_2 были целыми.

Пример.

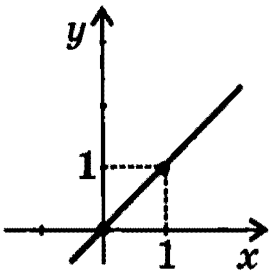
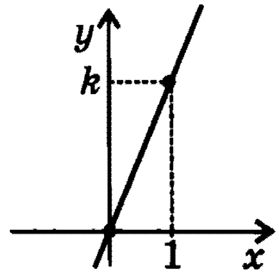
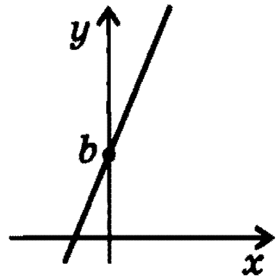


$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

Если $x_1 = 3$, то $y_1 = 1$;
если $x_2 = -3$, то $y_2 = 3$.
Через точки (3; 1) и (−3; 3) провести прямую.

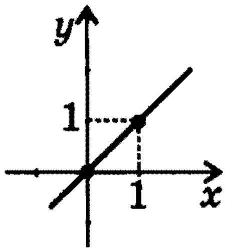
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ $y = kx + b$ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x$

Этапы преобразования графика

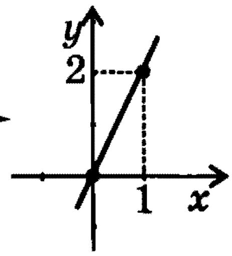
1. $y = x$	2. $y = kx$	3. $y = kx + b$
		
Построить график функции $y = x$.	Произвести растяжение (при $\lvert k \rvert > 1$) или сжатие (при $\lvert k \rvert < 1$) графика вдоль оси y (если $k < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение относительно любой из координатных осей).	Произвести параллельный перенос графика вдоль оси y на $\lvert b \rvert$ (вверх при $b > 0$, вниз при $b < 0$).

Примеры:

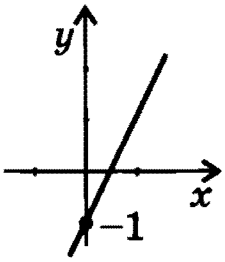
$\boxed{1.\ \ y = 2x - 1}$



$y = x$

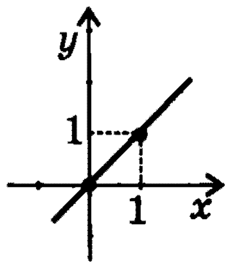


$y = 2x$

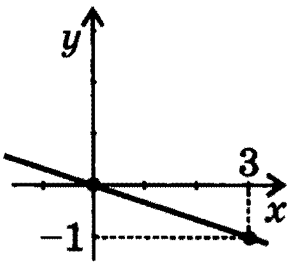


$y = 2x - 1$

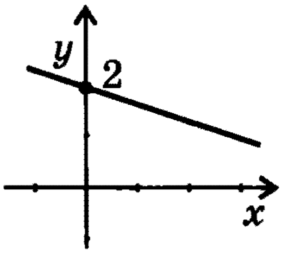
$\boxed{2.\ \ y = -x/3 + 2}$



$y = x$



$y = -x/3$



$y = -x/3 + 2$

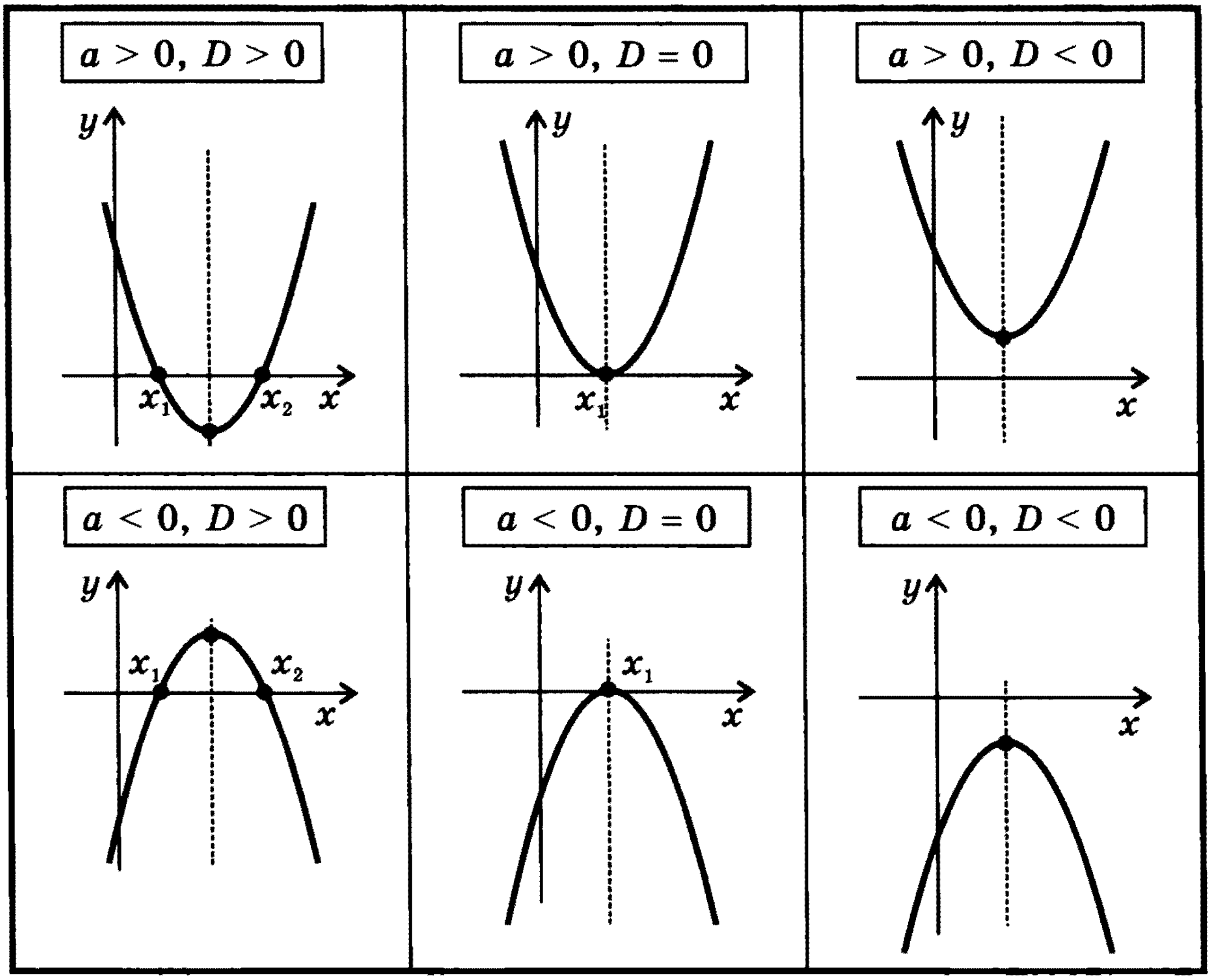
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

График — **парабола**.

Свойства функции и вид ее графика определяются, в основном, значениями коэффициента a и *дискриминанта*

$$D = b^2 - 4ac.$$



РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

1. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

2. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

при $D > 0$	$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
при $D = 0$	$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
при $D < 0$	разложить на множители нельзя

СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c$

• *Область определения:* R

• *Область значений:*

при $a > 0$ $[-D/(4a); \infty)$

при $a < 0$ $(-\infty; -D/(4a)]$

• *Четность, нечетность:*

при $b = 0$ функция четная

при $b \neq 0$ функция не является ни четной, ни нечетной

• *Нули:*

при $D > 0$ два нуля: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

при $D = 0$ один нуль: $x_1 = -b/(2a)$

при $D < 0$ нулей нет

• *Промежутки знакопостоянства:*

если $a > 0$, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \end{cases}$

если $a > 0$, $D = 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

если $a > 0$, $D < 0$, то $y > 0$ при $x \in R$

если $a < 0$, $D > 0$, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (x_1; x_2) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty) \end{cases}$

если $a < 0$, $D = 0$, то $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; \infty)$

если $a < 0$, $D < 0$, то $y < 0$ при $x \in R$

• *Промежутки монотонности:*

при $a > 0$ $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in [-b/(2a); \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \end{cases}$

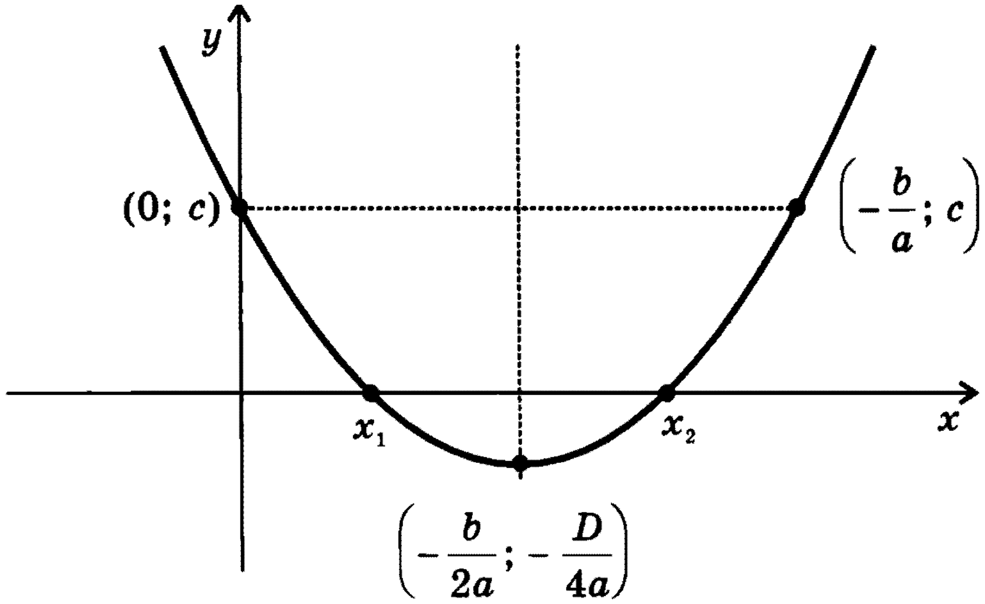
при $a < 0$ $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty; -b/(2a)] \\ \text{функция убывает при } x \in [-b/(2a); \infty) \end{cases}$

• *Экстремумы:*

при $a > 0$ $x_{min} = -\,b/(2a)$; $y_{min} = -\,D/(4a)$

при $a < 0$ $x_{max} = -\,b/(2a)$; $y_{max} = -\,D/(4a)$

НАПРАВЛЕНИЕ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫЕ ТОЧКИ И ОСЬ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ, являющейся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$



- *Направление ветвей параболы:*
  при $a > 0$ ветви направлены вверх
  при $a < 0$ ветви направлены вниз
- *Координаты вершины параболы:* $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right)$
- *Ось симметрии параболы* — прямая $x = -\frac{b}{2a}$
- *Точки пересечения (касания) графика с осью x:*

  $D > 0$: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (точки пересечения)

  $D = 0$: $x_1 = -b/(2a)$ (точка касания)

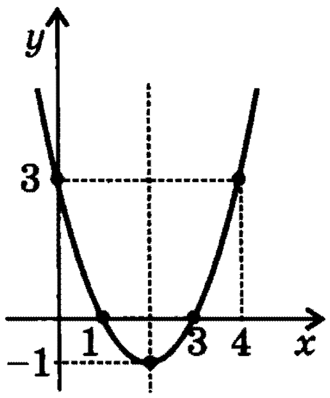
  $D < 0$: общих точек у графика с осью x нет
- *Точка пересечения графика с осью y:* $(0;\ c)$,
  симметричная ей точка относительно оси параболы $(-b/a;\ c)$

Для построения графика квадратичной функции используют некоторые из указанных характеристик. Например, если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, удобно использовать координаты вершины параболы и координаты двух точек пересечения параболы с осью x.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ВЕТВЕЙ, ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ И ОСИ СИММЕТРИИ ПАРАБОЛЫ

Примеры:

$\boxed{y = x^2 - 4x + 3}$



1. *Ветви направлены вверх*, т.к. $a = 1 > 0$.
2. *Координаты вершины* $(2; -1)$, т.к.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2\,;$$

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1\,.$$

3. *Ось симметрии* параболы

$$x = -\frac{b}{2a} = 2\,.$$

4. *Координаты точек пересечения с осью x:*

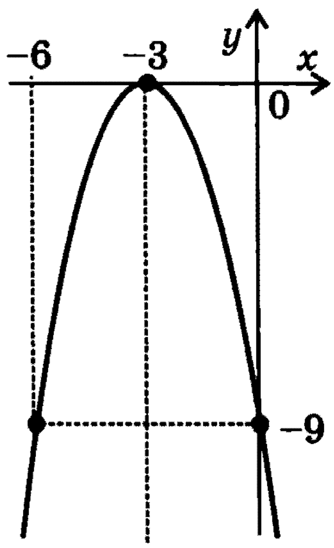
$$(x_1;\ 0) = (1;\ 0) \text{ и } (x_2;\ 0) = (3;\ 0).$$

5. *Координаты точки пересечения с осью y:*

$$(0;\ c) = (0;\ 3);$$

симметричная ей точка относительно оси параболы: $\left(-\frac{b}{a};\ c\right) = (4;\ 3)$.

$\boxed{y = -\,x^2 - 6x - 9}$



1. *Ветви* направлены *вниз*, т.к. $a = -1 < 0$.
2. *Координаты вершины* $(-3; 0)$, т.к.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-2} = -3\,;$$

$$y(3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 9 = 0\,.$$

3. *Ось симметрии* параболы $x = -\frac{b}{2a} = -3$.
4. *Координаты точки касания с осью x:*

$$(x_1;\ 0) = (-3;\ 0).$$

5. *Координаты точки пересечения с осью y:*

$$(0;\ c) = (0;\ -9);$$

симметричная ей точка относительно оси параболы: $\left(-\frac{b}{a};\ c\right) = (-6;\ -9)$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = x^2$

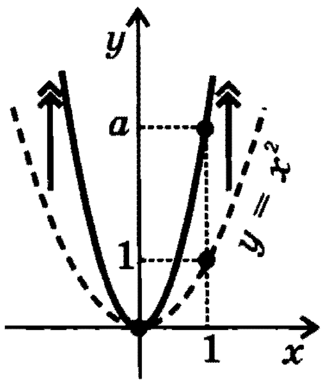
С помощью выделения полного квадрата (см. стр. 30) любую квадратичную функцию можно представить в виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n,$$

$$\text{где } m = -\frac{b}{2a},\ n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

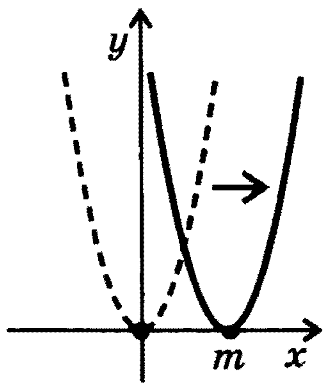
Это позволяет построить график квадратичной функции с помощью элементарных преобразований графика функции $y = x^2$.

Этапы построения графика функции $y = a(x - m)^2 + n$:



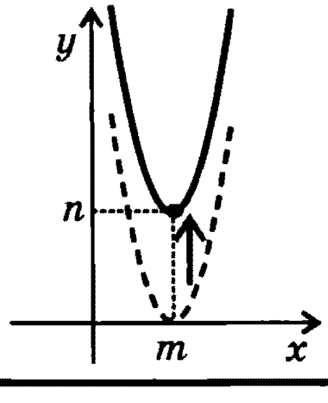
1. *Растяжение* графика $y = x^2$ вдоль оси y в $|a|$ раз (при $|a| < 1$ — это сжатие в $1/|a|$ раз).
   Если $a < 0$, произвести, кроме того, зеркальное отражение графика относительно оси x (ветви параболы будут направлены вниз).

Результат: график функции $y = ax^2$.



2. *Параллельный перенос* графика функции $y = ax^2$ вдоль оси x на $|m|$ (вправо при $m > 0$ и влево при $m < 0$).

Результат:
график функции $y = a(x - m)^2$.

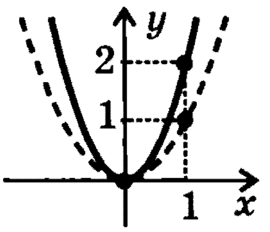


3. *Параллельный перенос* графика функции $y = a(x - m)^2$ вдоль оси y на $|n|$ (вверх при $n > 0$ и вниз при $n < 0$).

Результат:
график функции $y = a(x - m)^2 + n$.

Примеры:

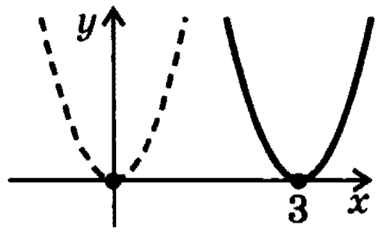
$$\boxed{y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1}$$



- - - - - $y = x^2$

——— $y = 2x^2$

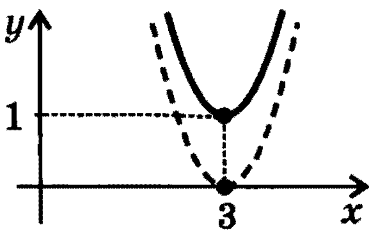
1. Растяжение графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза.



- - - - - $y = 2x^2$

——— $y = 2(x-3)^2$

2. Параллельный перенос графика функции $y = 2x^2$ вдоль оси x на 3 вправо.

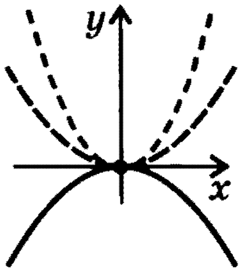


- - - - - $y = 2(x-3)^2$

——— $y = 2(x-3)^2+1$

3. Параллельный перенос графика функции $y = 2(x-3)^2$ вдоль оси y на 1 вверх.

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 3 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1}$$

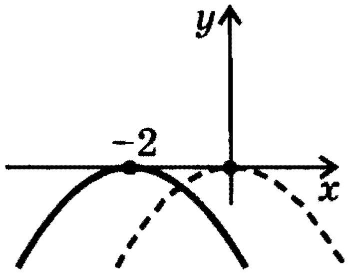


- - - $y = x^2$

— — $y = x^2/2$

——— $y = -x^2/2$

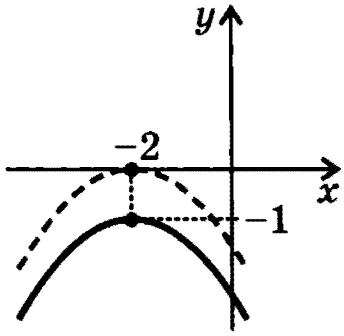
1. Сжатие графика функции $y = x^2$ вдоль оси y в 2 раза и преобразование симметрии относительно оси x.



- - - $y = -x^2/2$

——— $y = -(x+2)^2/2$

2. Параллельный перенос графика функции $y = -x^2/2$ вдоль оси x на 2 влево.



- - - $y = -(x+2)^2/2$

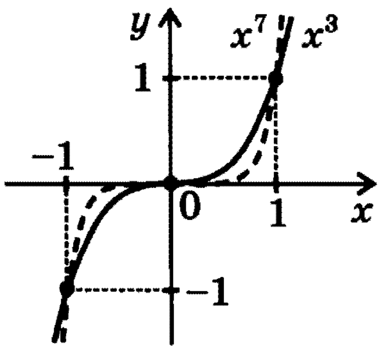
——— $y = -(x+2)^2/2 - 1$

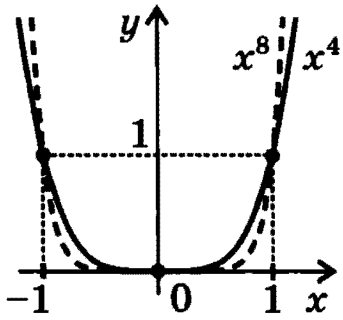
3. Параллельный перенос графика функции $y = -(x+2)^2/2$ вдоль оси y на 1 вниз.

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
с натуральными показателями степени
$y = x^n$, где $n \in N$

Примеры графиков

n нечетное	n четное





СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:* R
- *Область значений:*
  при n нечетном R
  при n четном $[0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  при n нечетном функция нечетная
  при n четном функция четная
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 0$
- *Промежутки знакопостоянства:*
  если n нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  если n четное, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  если n нечетное, то функция возрастает при $x \in R$
  если n четное, то $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in [0; \infty) \\ \text{функция убывает при } x \in (-\infty; 0] \end{cases}$
- *Экстремумы:*
  если n нечетное, экстремумов нет
  если n четное, $y_{min} = 0$ при $x_{min} = 0$
- *Графики функций проходят через точки:*
  при n нечетном $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$
  при n четном $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$

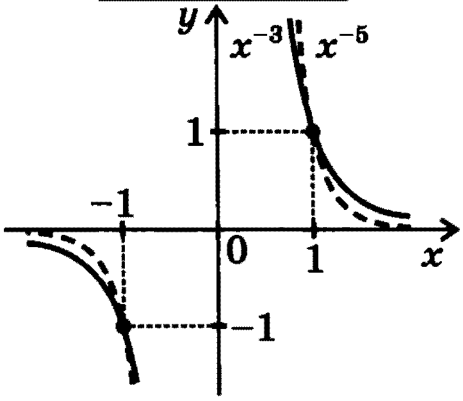
Замечание. При $n = 0$ функция $y = x^n$ определяется так: $x^0 = 1$ при $x \neq 0$; при $x = 0$ функция не определена.

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
с целыми отрицательными показателями степени

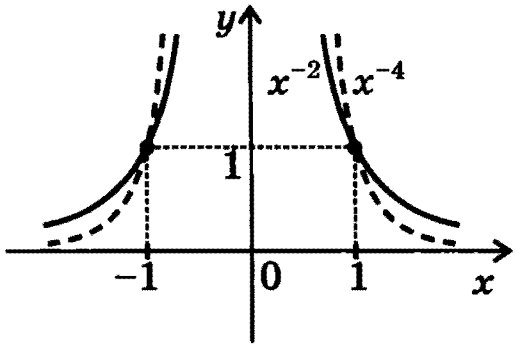
$$y = x^{-n}, \text{ где } n \in N$$

Примеры графиков

n нечетное



n четное



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:* $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$
- *Область значений:*
  при n нечетном $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$
  при n четном $(0;\ \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  при n нечетном функция нечетная
  при n четном функция четная
- *Нулей* нет.
- *Промежутки знакопостоянства:*
  если n нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0;\ \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ 0) \end{cases}$
  если n четное, то $y > 0$ при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  если n нечетное, то функция убывает при $x \in (-\infty;\ 0)$ и при $x \in (0;\ \infty)$
  если n четное, то $\begin{cases} \text{функция возрастает при } x \in (-\infty;\ 0) \\ \text{функция убывает при } x \in (0;\ \infty) \end{cases}$
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при n нечетном $(-1;\ -1)$, $(1;\ 1)$
  при n четном $(-1;\ 1)$, $(1;\ 1)$
- *Асимптоты:* $x = 0$, $y = 0$

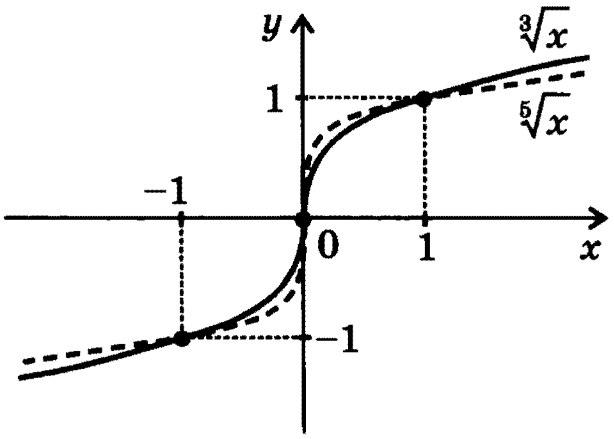
Замечание. При $n = 1$ функция $y = x^{-n}$ имеет вид $y = 1/x$ и называется *обратной пропорциональностью*.

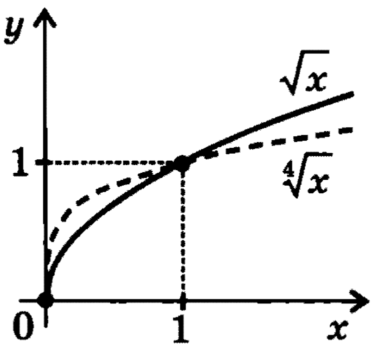
ФУНКЦИИ

$$y = \sqrt[n]{x}\text{ , где } n \in N$$

Примеры графиков

n нечетное	n четное



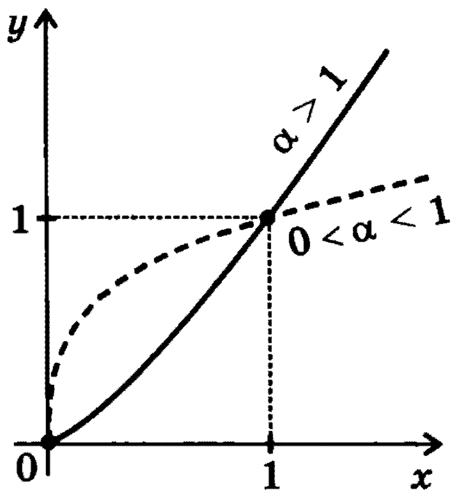


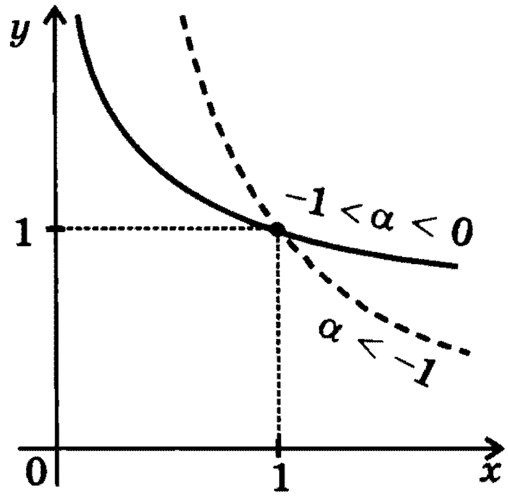
СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:*
  при n нечетном R
  при n четном $[0; \infty)$
- *Область значений:*
  при n нечетном R
  при n четном $[0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  при n нечетном функция нечетная
  при n четном функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 0$
- *Промежутки знакопостоянства:*
  если n нечетное, то $\begin{cases} y > 0 \text{ при } x \in (0; \infty) \\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$
  если n четное, то $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  функция возрастает при всех x из области определения
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при n нечетном $(-1; -1)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$
  при n четном $(0; 0)$, $(1; 1)$

СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ
с действительными показателями степени
$y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$



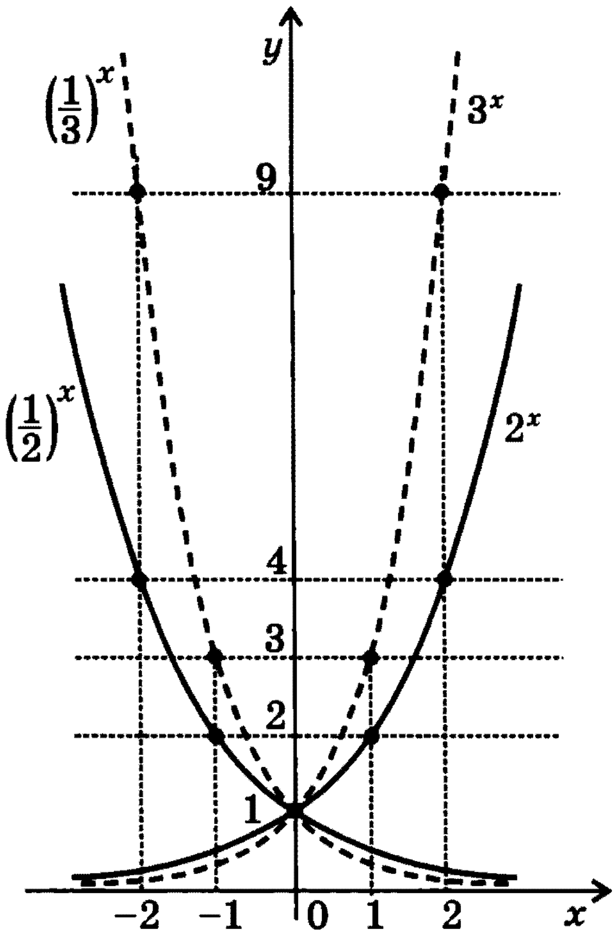


СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

- *Область определения:*
  если $\alpha > 0$, $[0; \infty)$
  если $\alpha < 0$, $(0; \infty)$
- *Область значений:*
  если $\alpha > 0$, $[0; \infty)$
  если $\alpha < 0$, $(0; \infty)$
- *Четность, нечетность:*
  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:*
  если $\alpha > 0$, $y = 0$ при $x = 0$
  если $\alpha < 0$, нулей нет
- *Промежутки знакопостоянства:*
  $y > 0$ при $x \in (0; \infty)$
- *Промежутки монотонности:*
  при $\alpha > 0$ функция возрастает при $x \in [0; \infty)$
  при $\alpha < 0$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$
- *Экстремумов* нет
- *Графики функций проходят через точки:*
  при $\alpha > 0$ (0; 0), (1; 1)
  при $\alpha < 0$ (1; 1)
- *Асимптоты:* при $\alpha < 0$ $x = 0$ и $y = 0$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = a^x$, где $a > 0,\ a \neq 1$*)



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* R
- *Область значений:* $(0;\ \infty)$
- *Четность, нечетность:*

  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нулей* нет
- *Промежутки знакопостоянства:* $y > 0$ при $x \in R$
- *Промежутки монотонности:*

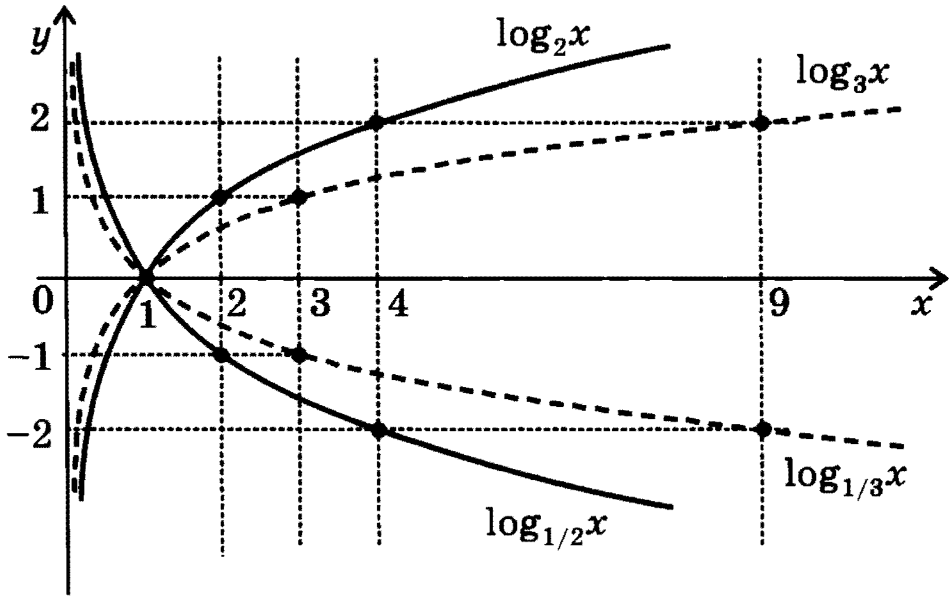
  при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in R$

  при $a > 1$ функция возрастает при $x \in R$
- *Экстремумов* нет
- *График функции проходит через точку* $(0;\ 1)$
- *Асимптота:* $y = 0$

*) При $a = 1$ функция $y = a^x$ является постоянной: $1^x = 1$ при $x \in R$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

$y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* $(0; \infty)$
- *Область значений:* R
- *Четность, нечетность:*

  функция не является ни четной, ни нечетной
- *Нули:* $y = 0$ при $x = 1$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  если $0 < a < 1$, то $y > 0$ при $x \in (0; 1)$, $y < 0$ при $x \in (1; \infty)$

  если $a > 1$, то $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (0; 1)$
- *Промежутки монотонности:*

  при $0 < a < 1$ функция убывает при $x \in (0; \infty)$

  при $a > 1$ функция возрастает при $x \in (0; \infty)$
- *Экстремумов* нет
- *График функции проходит через точку* $(1; 0)$
- *Асимптота:* $x = 0$

Замечание. Логарифмическая и показательная функции с одним и тем же основанием a являются взаимно обратными функциями (см. стр. 15).

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ*)

$y = \sin x$

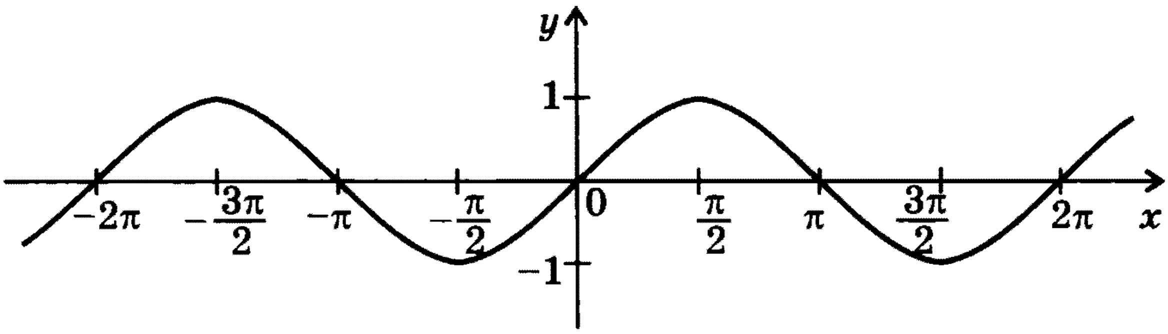


график — синусоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* R
- *Область значений:* $[-1;\ 1]$
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* 2π
- *Нули:* $\sin x = 0$ при $x = \pi n,\quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\quad n \in Z$

  $\sin x < 0$ при $x \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n),\quad n \in Z$
- *Экстремумы:*

  $$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z;\quad y_{min} = -1$$

  $$x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z;\quad y_{max} = 1$$
- *Промежутки монотонности:*

  функция возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right],\quad n \in Z$

  функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right],\quad n \in Z$

*) Основные формулы тригонометрии см. на стр. 184-187. Далее в качестве периода функции рассматривается ее наименьший положительный период.

$y = \cos x$

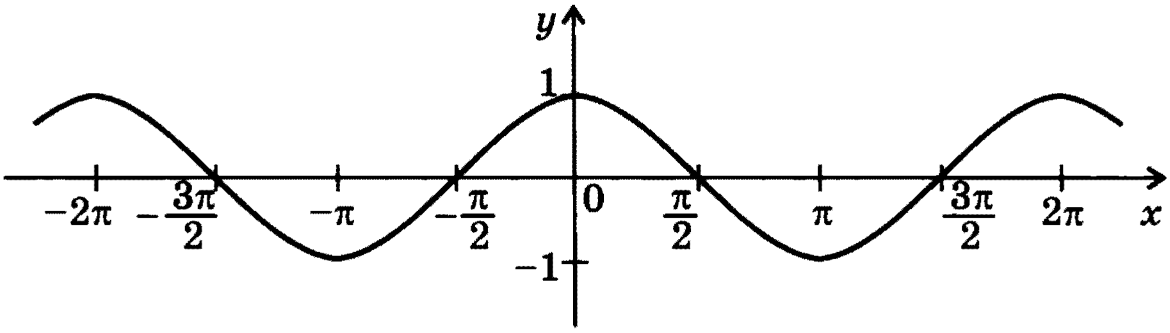


график — косинусоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- ***Область определения:*** R
- ***Область значений:*** $[-1;\ 1]$
- ***Четность, нечетность:*** функция четная
- ***Период:*** 2π
- ***Нули:*** $y = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- ***Промежутки знакопостоянства:***

  $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$

  $\cos x < 0$ при $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad n \in Z$

- ***Экстремумы:***

  $x_{min} = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{min} = -1$

  $x_{max} = 2\pi n, \quad n \in Z; \quad y_{max} = 1$

- ***Промежутки монотонности:***

  функция возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n], \quad n \in Z$

  функция убывает при $x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n], \quad n \in Z$

Замечание. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ получаются друг из друга с помощью параллельных переносов вдоль оси x на $\pi/2$: $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\sin x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$y = \operatorname{tg} x$$

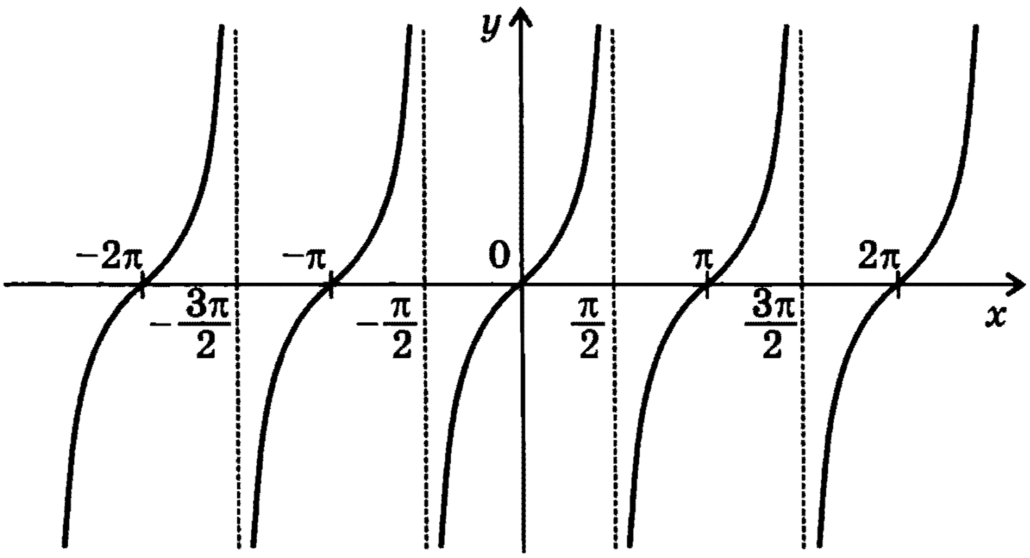


график — тангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- ***Область определения:*** **объединение интервалов** $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$
- ***Область значений:*** R
- ***Четность, нечетность:*** **функция нечетная**
- ***Период:*** π
- ***Нули:*** $y = 0$ **при** $x = \pi n, \quad n \in Z$
- ***Промежутки знакопостоянства:***

  $\operatorname{tg} x > 0$ **при** $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$

  $\operatorname{tg} x < 0$ **при** $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), \quad n \in Z$
- ***Экстремумов*** **нет**
- ***Промежутки монотонности:***

  функция возрастает на каждом интервале области определения
- ***Асимптоты:*** $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in Z$

$y = \mathrm{ctg}\, x$

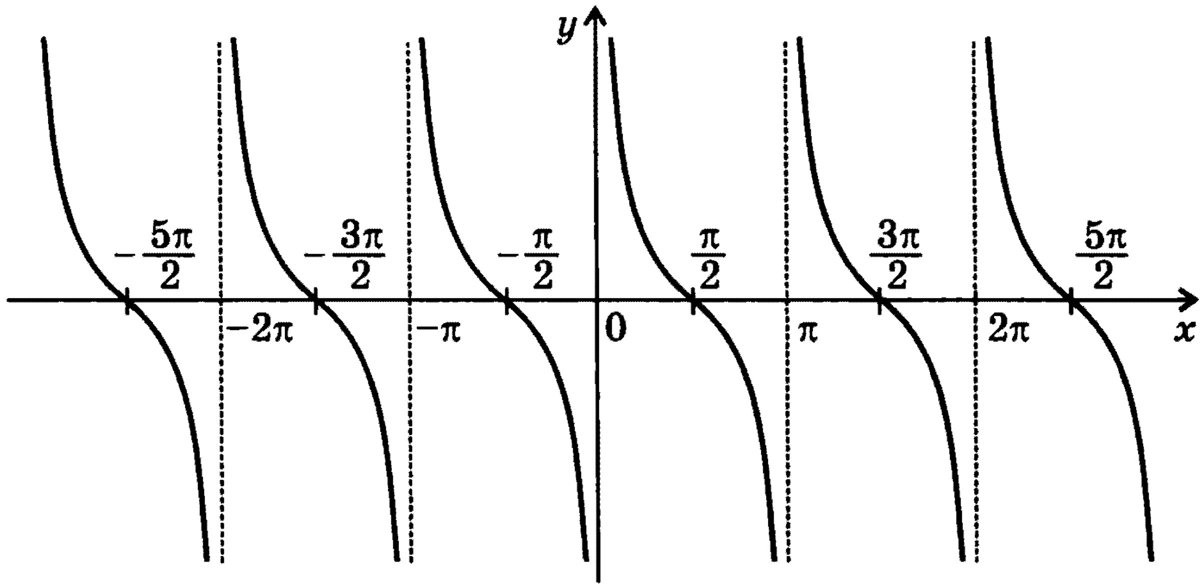


график — котангенсоида

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

- *Область определения:* объединение интервалов $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, $n \in Z$
- *Область значений:* R
- *Четность, нечетность:* функция нечетная
- *Период:* π
- *Нули:* $y = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in Z$
- *Промежутки знакопостоянства:*

  $\mathrm{ctg}\, x > 0$ при $x \in \left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right),\quad n \in Z$

  $\mathrm{ctg}\, x < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right),\quad n \in Z$
- *Экстремумов* нет
- *Промежутки монотонности:*

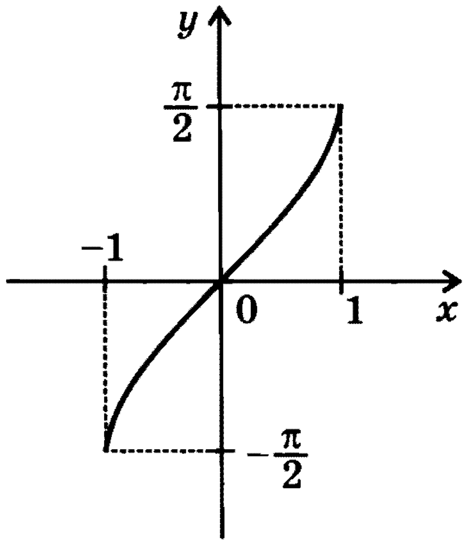
  функция убывает на каждом интервале области определения
- *Асимптоты:* $x = \pi n,\ n \in Z$

Замечание. График функции $y = \mathrm{ctg}\, x$ получается из графика функции $y = \mathrm{tg}\, x$ отражением относительно любой из координатных осей и последующим параллельным переносом вдоль оси x на $\pi/2$.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

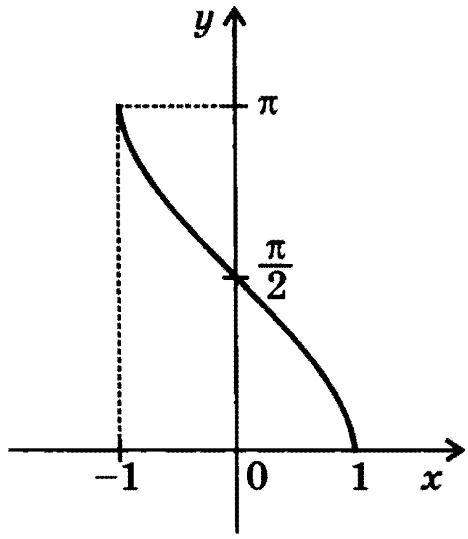
$y = \arcsin x$

функция, обратная функции
$y = \sin x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$



$y = \arccos x$

функция, обратная функции
$y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ*)

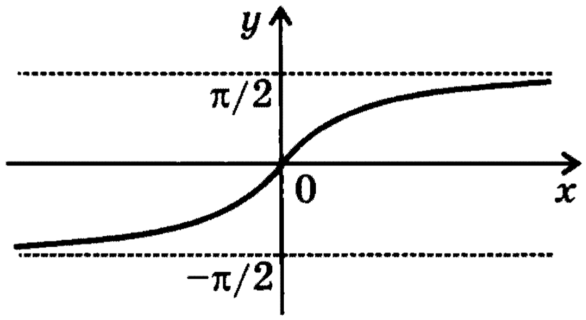
	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$
• *Область определения:*	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$
• *Область значений:*	$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0;\ \pi]$
• *Четность, нечетность:*	нечетная	ни четная, ни нечетная
• *Нули:*	$y = 0$ при $x = 0$	$y = 0$ при $x = 1$
• *Промежутки знакопостоянства:*	$y > 0$ при $x \in (0;\ 1]$ $y < 0$ при $x \in [-1;\ 0)$	$y > 0$ при $x \in [-1;\ 1)$
• *Экстремумы:*	нет	нет
• *Промежутки монотонности:*	возрастает на всей области определения	убывает на всей области определения

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2$$

*) См. также стр. 187.

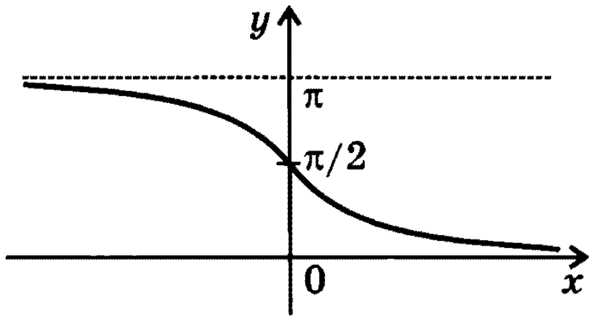
$y = \operatorname{arctg} x$

функция, обратная функции
$y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$



$y = \operatorname{arcctg} x$

функция, обратная функции
$y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$



СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
• *Область определения:*	R	R
• *Область значений:*	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
• *Четность, нечетность:*	нечетная	ни четная, ни нечетная
• *Нули:*	$y = 0$ при $x = 0$	нулей нет
• *Промежутки знакопостоянства:*	$y > 0$ при $x \in (0; \infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$	$y > 0$ при $x \in R$
• *Экстремумы:*	нет	нет
• *Промежутки монотонности:*	возрастает при $x \in R$	убывает при $x \in R$
• *Асимптоты:*	$y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$	$y = 0$ и $y = \pi$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$$

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

десятки	единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРОПОРЦИИ*)

СВОЙСТВА ПРОПОРЦИЙ

1. Произведение крайних членов равно произведению средних, т.е. если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$.
2. В пропорции, все члены которой отличны от нуля, можно менять местами средние и крайние члены пропорции, т.е. если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОПОРЦИИ,

полученные из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c} \qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d} \qquad \frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{am_1+bn_1}{am_2+bn_2}=\frac{cm_1+dn_1}{cm_2+dn_2}, \qquad \frac{am_1+cn_1}{am_2+cn_2}=\frac{bm_1+dn_1}{bm_2+dn_2},$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 — произвольные числа.

*) Во всех приведенных формулах знаменатели не должны равняться нулю.

МНОГОЧЛЕНЫ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Если n — четное,

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$$

Если n — нечетное,

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

БИНОМ НЬЮТОНА

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k.

МОДУЛЬ ЧИСЛА

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

$\lvert a\rvert \geqslant 0;$	$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	$\lvert a + b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$	$\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert},\ b \neq 0$	$\lvert a - b\rvert \geqslant \lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert$

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0,\ a \neq 1$) называется такой показатель степени c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ*)

- Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b,\ b > 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- Логарифм произведения: $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|,\ xy > 0$
- Логарифм частного: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|,\ \frac{x}{y} > 0$
- Логарифм степени:

  $\log_a x^p = p \log_a |x|,\ x^p > 0$

  $\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q} \log_a |x|,\ x^p > 0$
- Логарифм корня: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x,\ x > 0$
- Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ где } b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ где } b > 0,\ b \neq 1$$

*) Во всех приведенных формулах $a > 0,\ a \neq 1$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ*)

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{ctg}(x - y) = -\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$$

ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

*) Во всех формулах, приведенных в этом разделе, следует учитывать область допустимых значений левой и правой частей формул.

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2}$$

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \qquad \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

ФОРМУЛЫ ТРОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}$$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \qquad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} \qquad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\cos(x+y)}{\cos x\sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(45^\circ - x) = \sqrt{2}\sin(45^\circ + x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(45^\circ - x) = \sqrt{2}\cos(45^\circ + x)$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi),$$

где $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

функция \ угол	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp \sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mp \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mp \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mp \mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mp \mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\,\alpha$

ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

Угол в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad |a| \le 1$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad |a| \le 1$

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a, \quad a \in \mathrm{R}$

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a, \quad a \in \mathrm{R}$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \le 1$$

$$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}, \quad a \in R$$