

Московский Физико-Технический Институт



На правах рукописи

Дмитриев Алексей Юрьевич

**Исследование нелинейных и квантово-оптических эффектов
при рассеянии света на сверхпроводниковом кубите в
одномерном пространстве**

Специальность 01.04.07 —
«Физика конденсированного состояния»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, профессор
Астафьев Олег Владимирович

Долгопрудный — 2018

Оглавление

	Стр.
Введение	6
Глава 1. Элементы физики сверхпроводящих квантовых цепей	13
1.1 Обзор явления сверхпроводимости	13
1.1.1 Квантование магнитного потока	16
1.1.2 Эффект Джозефсона: общие принципы	18
1.1.3 Токо-фазовое соотношение	19
1.1.4 Фазо-потоковое соотношение	20
1.1.5 Энергия джозефсоновского тока. RSCJ-модель.	22
1.2 Квантование электрических цепей	25
1.2.1 Кубит. Двухуровневое приближение. Приближение вращающейся волны.	25
1.2.2 Формальная процедура квантования цепи	28
1.2.3 Зарядовый кубит	30
1.2.4 Фазовый кубит	33
1.2.5 Потоковый кубит	34
1.2.6 Трансмон	37
1.2.7 вч-СКВИД	39
1.3 Микроволновая квантовая оптика	40
1.3.1 Кубит как открытая квантовая система. Релаксация и дефазировка	40
1.3.2 Взаимодействие искусственного атома с внешним полем. Гамильтониан Джейнса-Каммингса.	43
1.3.3 Режим сильной связи	44
1.3.4 Эластичное и неэластичное рассеяние в копланарной линии	45
1.3.5 Квантооптические эффекты в трёхуровневых системах .	60
1.3.6 Обзор достижений микроволновой квантовой оптики в волноводе	66
Глава 2. Потоковые кубиты в волноводе: изготовление и характеризация	70

2.1	Проектирование и изготовление образцов	70
2.1.1	Фабрикационные ограничения	71
2.1.2	Схема и дизайн кубитов	73
2.1.3	Маршрутная карта для изготовления образцов	77
2.2	Схема подключения кубитов в линии	80
2.2.1	Устройство держателя	81
2.2.2	Требования к измерительной схеме	84
2.2.3	Ослабление теплового шума	86
2.2.4	Усиление рассеянного сигнала	88
2.3	Спектроскопия кубитов	89
2.4	Временная динамика состояния кубита	93
2.5	Кубит в качестве нелинейной среды	94
Глава 3. Двухчастотное волновое смешение на кубите: случай непрерывных волн		97
3.1	Боковые гармоники в спектре эластично рассеянного сигнала	97
3.2	Приближение малой отстройки	97
3.3	Аналитическое выражение для амплитуд боковых гармоник	97
3.4	Численное решение уравнений Максвелла-Блоха	97
3.5	Случай несбалансированных амплитуд	97
Глава 4. Двухчастотное волновое смешение в импульсном режиме		98
4.1	Случай синхронных импульсов: Бесселевская динамика	98
4.2	Введение задержки. Квантовое смешение волн	98
4.3	Квантовое смешение волн на 3-уровневой системе	98
4.4	Численный расчет импульсной динамики	98
4.5	Аналитический расчет в представлении вторичного квантования	98
Глава 5. Смешение волн на Δ-системе		99
5.1	Режим Δ -системы в потоковом кубите	99
5.2	Описание эксперимента	99
5.3	Расчет амплитуды боковой компоненты	99
Глава 6. Кубит как источник неклассического излучения		100
6.1	Ассимметричная связь с двумя полупространствами	100

6.2	Эффективность источника	100
6.3	Дизайн и параметры прибора	100
6.4	Многоуровневая спектроскопия источника	100
6.5	Расщепление Аутлера-Таунса	100
Глава 7. Оформление различных элементов		101
7.1	Форматирование текста	101
7.2	Ссылки	101
7.3	Формулы	101
7.3.1	Ненумерованные одиночные формулы	102
7.3.2	Ненумерованные многострочные формулы	102
7.3.3	Нумерованные формулы	104
Глава 8. Длинное название главы, в которой мы смотрим на примеры того, как будут верстаться изображения и списки		106
8.1	Одиночное изображение	106
8.2	Длинное название параграфа, в котором мы узнаём как сделать две картинки с общим номером и названием	106
8.3	Пример вёрстки списков	107
8.4	Традиции русского набора	109
8.4.1	Пробелы	109
8.4.2	Математические знаки и символы	110
8.4.3	Кавычки	110
8.4.4	Тире	111
8.4.5	Дефисы и переносы слов	111
8.5	Текст из панграмм и формул	112
Глава 9. Вёрстка таблиц		116
9.1	Таблица обыкновенная	116
9.2	Таблица с многострочными ячейками и примечанием	117
9.3	Параграф — два	117
9.4	Параграф с подпараграфами	117
9.4.1	Подпараграф — один	117
9.4.2	Подпараграф — два	117

Заключение	120
Список сокращений и условных обозначений	122
Словарь терминов	123
Список литературы	125
Список рисунков	136
Список таблиц	138
Приложение А. Примеры вставки листингов программного кода	139
Приложение Б. Спектр резонансной флуоресценции	145
Б.1 Случай слабого поля	145
Приложение В. Очень длинное название второго приложения, в котором продемонстрирована работа с длинными таблицами	146
В.1 Подраздел приложения	146
В.2 Ещё один подраздел приложения	148
В.3 Использование длинных таблиц с окружением <i>longtabu</i>	151
В.4 Форматирование внутри таблиц	152
В.5 Очередной подраздел приложения	153
В.6 И ещё один подраздел приложения	153

Введение

Макроскопические сверхпроводящие квантовые цепи (СКЦ) — одна из наиболее активно развивающихся областей современной экспериментальной квантовой физики. Временем её непосредственного зарождения можно считать 1999–2001 гг., когда в нескольких пионерских работах [1–4] была показана возможность создания макроскопических когерентных квантовых объектов на основе сверхпроводников и возможность приготовления и контроля квантовых состояний таких систем. Интерес к таким системам вырос чрезвычайно быстро: ученые поняли, что на основе СКЦ принципиально возможно построить устройства, выполняющие квантовые операции, а значит, создать квантовый процессор. За 15 с небольшим лет мировым физическим сообществом проделана огромная как теоретическая, так и экспериментальная работа для реализации квантовых вычислений и демонстрации квантовых алгоритмов при помощи устройств на базе СКЦ. Поэтому в дальнейшем будем употреблять для таких схем термин «кубит», подразумевая квантовую цепь, хотя и не обязательно обладающую лишь двумя квантовыми уровнями (там, где это может привести к путанице, будут даваться соответствующие разъяснения). Кратко перечислим полученные мировым научным сообществом результаты:

1. Разработан универсальный формализм [5] квантования произвольного кубита, позволяющий как рассчитать энергетический спектр квантовой системы, так и учесть эффекты внешнего воздействия на нее.
2. Продемонстрировано, что одиночный кубит можно связать с электромагнитным полем в т.н. *режиме сильной связи*, когда связь g между кубитом и резонатором во много раз превышает скорости всех возможных каналов распада квантового состояния как в кубите (релаксация, дефазировка), так и в резонаторе. Работа, выполненная в Йельском университете [6], открыла новый этап в развитии СКЦ. Разработан теоретический подход [7], описывающий взаимодействие кубита на чипе и квантованной моды поля, например, в копланарном резонаторе, расположенном на том же чипе и связанном с кубитом через общие электрические элементы — емкости и индуктивности. Поскольку многое было заимствовано из т.н. квантовой электродинамики резонаторных полостей (англ. *cavity-QED*), то данная теоретическая модель

по аналогии носит название квантовой электродинамики цепей (англ. *circuit-QED*, или *cQED*). Она описывает все основные эффекты взаимодействия микроволнового поля и кубита, играющего роль «искусственного атома».

3. Развиты методики изготовления кубитов [8; 9], приготовления и считывания квантовых состояний. Экспериментально изучены несколько различных типов сверхпроводниковых кубитов, и определены схемы, наиболее перспективные для достижения больших времен релаксации и дефазировки состояний кубита. Времена T_1 и T_2 выросли на 5 порядков: от 10^{-8} с для первых образцов [10] до $10^{-4} \div 10^{-3}$ с для современных образцов [11; 12]. Более того, в последние 5-7 лет сформировалась интересная тенденция, получившая имя *закон Шёлкопфа* [13; 14], по аналогии с известным законом Мура в кремниевой электронике: максимальные достижимые времена T_1 и T_2 кубитов растут с течением времени по показательному закону. Детально изучены основные факторы, приводящие к релаксации и дефазировке в сверхпроводниковых кубитах, а именно: двухуровневые системы и свободные спины в подложке, квазичастицы, качество интерфейса «металл-подложка» [15; 16].
4. Реализованы всевозможные типы одно- и двухкубитных [17] операций, изобретены и реализованы различные экспериментальные техники для оптимизации качества гейтов [18–20]. В результате, у ведущих научных групп ошибки в среднем не превышают 0.5% для однокубитных гейтов, 1–2% для двухкубитных гейтов (в зависимости от реализации гейтов, типа и числа кубитов на чипе)
5. Разработаны и реализованы нелинейные параметрические усилители на основе тунNELьных контактов с квантовым уровнем шума [21; 22], что позволяет проводить единовременное считывание (англ. *single-shot readout*, [23]) состояния кубита (проецирующее σ_z -измерение) с точностью более 95%.

Данный список можно продолжать и далее, но остановимся на главном. Перечисленные успехи позволяют рассуждать о возможном создании полномасштабных универсальных квантовых вычислительных устройств на базе СКЦ, демонстрирующих квантовое превосходство (англ. *quantum supremacy*), и именно к этой цели в настоящий момент направлены проекты больших исследовательских групп при корпорациях *Google*, *IBM* и *Intel*, а также ряд других

проектов некоторых частных компаний (напр., *Rigetti Inc.*). Эта деятельность сопровождается огромным количеством интересных научных результатов в области фундаментальной сверхпроводимости, квантовой электродинамики цепей, и даже образованием новых научных областей, как например, физика квантовых сверхпроводящих метаматериалов [24–26], фотоника в микроволновом диапазоне [27–29] и нелинейная квантовая оптика, где в качестве среды выступают одиночные кубиты или небольшие массивы кубитов. Последние две области особенно интересны, так как используя контроль состояний одиночных искусственных атомов, можно изучать очень интересные режимы генерации, поглощения и рассеяния света [30–32], которые труднодоступны как при изучении света в оптическом диапазоне, взаимодействующего с «природными» атомами, так и при использовании ридберговских состояний атомов, в которых они обладают большим дипольным моментом и хорошо взаимодействуют с микроволновым излучением. В частности, результаты, полученные автором и описываемые в рамках данной диссертации, относятся именно к области нелинейной микроволновой квантовой оптики. Суммируя все вышеперечисленное, можно сделать вывод о значительной актуальности научных исследований в области сверхпроводниковых квантовых систем, и в частности, тех работ, о которых пойдет речь в данной диссертации.

В данной работе изучается одиночный сверхпроводящий искусственный атом (кубит), сильно связанный с континуумом полевых мод в открытым пространстве — копланарном волноводе на чипе. Особенность этой системы в том, что дипольная связь кубита с линией оказывается столь большой, что скорость излучательной релаксации значительно превышает все другие (безызлучательные) каналы распада и дефазировку.

Основной целью данной работы является экспериментальное изучение процессов трех- и четырехвольнового смешения распространяющегося микроволнового света на одиночном искусственном атоме, сильно связанном с внешним пространством, а также обнаружение и изучение специфических особенностей этих процессов, обусловленных присутствием квантового объекта в качестве рассеивателя.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Теоретический расчет, проектирование и изготовление образцов одиночных сверхпроводниковых кубитов, связанных с открытым полупространством — копланарной линией на чипе.
2. Разработка и сборка различных типов экспериментальных схем на микроволновых компонентах, необходимых для измерения кубитов в криостате растворения и обеспечивающих правильную работу кубитов.
3. Проведение измерений спектров кубитов, измерение параметров связи, времен релаксации и дефазировки с использованием импульсных техник измерений.
4. Выработка концепции и реализация эксперимента по рассеянию микроволн нескольких частот на двухуровневой системе, наблюдение компонент четырехволнового смешения на кубите. Анализ и описание полученных результатов.
5. Исследование спектра когерентного излучения, рассеянного циклической трехуровневой системой (со схемой уровней типа Δ). Наблюдение трехволнового смешивания, его теоретическое описание.

Методология и методы исследования. При изготовлении образцов использовались стандартные процессы нанофабрикации. Для изготовления структур с размерами от 2 мкм и более использовалась лазерная литография, для изготовления кубитов с размерами структурных элементов менее 200 нм — электронная литография. Кубит формировался методом двухуглового теневого напыления через предварительно проявленную маску. Сборка измерительных схем проводилась в соответствии с общепринятыми принципами низкотемпературных микроволновых измерений, позволяющими изолировать структуры от теплового шума и усиливать рассеянный сигнал, по мощности близкий к однофотонному. Измерения проводились при помощи векторного анализатора цепей и спектрального анализатора. Проведение измерений автоматизировалось при помощи драйверов и измерительных скриптов, разработанных при помощи высокоуровневого языка Python в среде разработки Jupyter Notebook и позволяющих управлять приборами, получать, обрабатывать и визуализировать экспериментальные данные (библиотеки `pyvisa`, `numpy`, `matplotlib` и др.), а также производить как аналитические, так и численные расчеты (библиотеки `sympy` и `qutip`). Для некоторых расчетов использовался пакет Wolfram Mathematica.

Научная новизна работы.

1. Впервые продемонстрирован эффект четырёхволнового смешивания при рассеянии двух резонансных мод на одиночном потоковом кубите, сильно связанном с континуумом электромагнитных мод в копланарной линии. Показано наличие побочных спектральных компонент в составе когерентного излучения, рассеянного кубитом.
2. Получена аналитическая формула для расчета спектральной интенсивности боковых компонент, возникающих при смешивании волн произвольного порядка. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.
3. Впервые изучен процесс смешивания двух коротких микроволновых импульсов на кубите и продемонстрированы появление Бесселевских Раби-осцилляций (см. ниже).
4. Впервые продемонстрировано смешивание квантового состояния поля в первой из мод, образующегося за счет излучения кубита из предварительно приготовленного состояния суперпозиции, и классического состояния поля во второй из мод, сформированного электромагнитным импульсом - т.н. *квантовое смешивание волн*.
5. Впервые показано трехволновое смешивание при рассеянии резонансных сигналов на одиночном трехуровневом искусственном атоме, уровни которого образуют Δ -систему.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. При облучении кубита частоты ω_0 , сильно связанного с одномерным пространством, двумя непрерывными сигналами частот $\omega_+ = \omega_0 + \delta$ и $\omega_- = \omega_0 - \delta$, находящимися в резонансе с кубитом ($\omega_-, \omega_- \ll \Gamma_1$), в спектре когерентно рассеянного излучения возникают «боковые» (по аналогии с англ. *sideband*, далее без кавычек) компоненты с частотами $\omega_{\pm(2k+1)} = \pm(k + 1)\omega_{\pm} \mp k\omega_{\mp}$, где k – целое положительное число.
2. Появление боковых компонент и их спектральную интенсивность компонент можно объяснить процессами нелинейного смешивания первоначальных сигналов при рассеянии на кубите, играющем роль нелинейной оптической среды. Также этот эффект можно интерпретировать в терминах многофотонного рассеяния с участием $2k + 2$ фотонов.

3. При облучении кубита двумя короткими импульсами с частотами ω_+ и ω_- , амплитуды которых одинаковы и равны Ω , а длительности t значительно меньше чем T_1, T_2 кубита, временная динамика системы вкупе с эффектом нелинейного смешивания приводят к появлению Бесселевских Раби-осцилляций в боковых частотных компонентах: спектральная интенсивность компоненты с частотой $\omega_{\pm(2k+1)}$ имеет зависимость вида $I \propto J_{2k+1}^2(2\Omega t)$, где J – функция Бесселя 1-го рода.
4. При введении задержки импульсов с частотой ω_- относительно импульсов с частотой ω_+ характер спектра кардинально меняется: вместо большого числа боковых компонент возникает лишь одна из них: $\omega_{-3} = 2\omega_- - \omega_+$. Это объясняется фотонной статистикой состояний света в моде ω_+ : из-за переизлучения света двухуровневой системой в этом состоянии не может быть более 1 фотона, и нелинейные процессы высшего порядка оказываются запрещенными. Похожая картина возникает при рассеянии света на трехуровневой системе, так как состояние с 2-мя фотонами «допускает» большее количество многофотонных процессов. Спектры подобного вида также получены при помощи численного решения уравнений Максвелла-Блоха для меняющегося во времени гамильтонiana.
5. При рассеянии двух резонансных микроволновых сигналов на трёхуровневой Δ -системе возникает трехволновое смешивание. Динамика интенсивности третьей компоненты, появляющейся за счет смешения, описывается решением уравнений Максвелла-Блоха для данной системы.

Достоверность полученных результатов обеспечивается соответствием между аналитическими и численными расчетами и экспериментальными данными. Данное соответствие имеет место для всех всем положений, выносимым на защиту.

Апробация работы. Основные результаты работы представлялись на различных международных конференциях, семинарах и воркшопах, например: Workshop on Physics and Applications of Superconductivity, Кембриджский Университет, Великобритания; Quantum Simulation and Computation Summer School, Гётеборг, Швеция; Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях, Новосибирск, Россия; Superconducting Hybrid Nanostructures: Physics and Applications, Долгопрудный, Россия; Quantum

Coherent Phenomena at Nanoscale, Петровац, Черногория; Superconductor-based sensors and quantum technologies, Москва, Россия; 2nd International Conference on Quantum Physics and Quantum Technology, Берлин, Германия; 4th International conference on quantum technologies, Москва, Россия; 20th International Seminar «Superconducting Quantum Circuits», Ишгль, Австрия; 1-я и 2-я всероссийская школа по квантовым технологиям, Сочи, Россия (I место в конкурсе постерных докладов); The International Conference on Superconducting Quantum Technologies, Москва, Россия и др. Результаты также неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах Лаборатории искусственных квантовых систем МФТИ.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в постановке задач, фабрикации образцов, проведении экспериментов, обработке данных и интерпретации результатов. Все заявленные результаты получены либо автором диссертации, либо при непосредственном участии автора.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 публикациях, 4 из которых изданы в журналах, индексируемых в системе Web of Science, 3 – в сборниках трудов международных научных конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 153 страницы, включая 34 рисунка и 7 таблиц. Список литературы содержит 110 наименований.

Глава 1. Элементы физики сверхпроводящих квантовых цепей

В Главе 1 кратко излагаются элементы физики сверхпроводимости, СКЦ и квантовой оптики, необходимые для изложения и обсуждения результатов диссертационной работы. Вначале кратко описываются причины возникновения сверхпроводимости и излагаются основные физические свойства сверхпроводника. Затем подробно рассматривается эффект Джозефсона в туннельном SIS-переходе, описываются основные модели описания эффекта Джозефсона приводятся основные свойства такого SIS-перехода (далее называемого джозефсоновским переходом) в различных режимах работы. Делается вывод о том, почему джозефсоновский переход находит широкое применение в классической и квантовой сверхпроводящей электронике. Описывается общий формализм квантования сверхпроводящей электрической цепи и рассчитываются параметры некоторых видов СКЦ — потоковый кубит, трансмон, а также rf-SQUID. Отдельный раздел посвящен элементам квантовой оптики — науки, которая описывает квантование электромагнитного поля и эффекты взаимодействия такого поля с атомами и молекулами.

1.1 Обзор явления сверхпроводимости

Явление сверхпроводимости было открыто в 1911 г. в лаборатории Х. Камерлинг-Оннеса, и практически сразу началось интенсивное как теоретическое, так и экспериментальное изучение данного явления. Оказалось, что некоторые металлы при температурах $T < T_c$ демонстрируют целый ряд необычных физических свойств. Опуская подробности, перечислим наиболее интересные свойства сверхпроводников:

1. Полное отсутствие сопротивления электрическому току;
2. Полное вытеснение магнитного поля из объема сверхпроводника (эффект Мейсснера);
3. Квантование магнитного потока через замкнутый контур из сверхпроводящего металла;

4. Скачкообразное возрастание теплоемкости металла при переходе через T_c .

Объяснить поведение сверхпроводников на феноменологическом уровне удалось с помощью классической теории Лондонов, которая опирается на двухжидкостную модель электронов в металле: часть электронов предполагаются «сверхпроводящими», т.е. способными переносить электрический ток в отсутствие внешнего электрического поля. Одного этого предположения практически достаточно для того, чтобы объяснить многие свойства сверхпроводников, в частности, идеальный диамагнетизм. Квантовое обобщение этой теории было построено Гинзбургом и Ландау на основе теории фазовых переходов II рода. Ключевым предположением теории ГЛ было введение общей волновой функции сверхпроводящих электронов $\Psi = |\Psi(\mathbf{r})|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ в металле и её рассмотрение в качестве параметра порядка, характеризующего фазовый переход. Некоторые вопросы, на которые теория Лондонов давала качественно неправильный ответ (например, значение поверхностной энергии границы между нормальной и сверхпроводящей фазами), были верно описаны с помощью теории ГЛ. Строго говоря, эта теория применима для описания сверхпроводимости в случае $T_c - T \ll T_c$ ¹, но оказывается, что для многих практически важных задач решение на основе теории ГЛ качественно совпадает с выводами микроскопической теории сверхпроводимости.

Несмотря на значительный прогресс в объяснении многих экспериментальных свойств сверхпроводников, истинный механизм возникновения сверхпроводимости долгое время оставался неописанным. Одним из результатов, указавшим на причину сверхпроводимости, стал изотопический эффект: для различных изотопов сверхпроводника в эксперименте наблюдается соотношение $T_c \cdot M^\alpha = \text{const}$. Следовательно, сверхпроводимость возникает из-за взаимодействия электронов с кристаллической решеткой. При детальном теоретическом анализе было выявлено, что возможен процесс эффективного притяжения электронов друг к другу посредством обмена фононами. В 1957 Купер [33] показал, что даже малое отрицательное (притягивающее) взаимодействие между электронами дает очень необычный результат. Состояние металла, в котором все электроны занимают состояния с $E < E_F$, даже при $T = 0$ не является основным. В металле могут возникать определенного рода парные возбуждения,

¹Имеется также ограничение применимости теории, связанное с тем, что при T очень близком к T_c становятся важными флуктуационные эффекты.

при которых два электрона с противоположными квазимпульсами и спинами занимают состояния с энергией $E \approx E_F + \Delta$, где Δ – некоторая константа, зависящая от температуры. Такие возбуждения называются *куперовскими парами*, и их образование оказывается энергетически выгодным. В 1958 г. Бардин, Купер и Шриффер [34] нашли явный вид волновой функции основного состояния и посчитали его энергию. Оказалось, что полная энергия состояния с некоторым количеством куперовских пар оказывается меньше по сравнению с энергией состояния металла без пар, на величину порядка $N(0)\Delta^2$. Параметр Δ определяется характером электрон-фононного взаимодействия. Его значение определяет критическую температуру: $\Delta = 1.76k_bT_c$, среднее количество куперовских пар в металле: $\Delta N(0) \approx k_bT_c/E_F$, и кроме того, является средней энергией связи в паре в расчете на один электрон. По этой причине Δ называется *энергетической целью*: для разрыва куперовской пары необходимо затратить энергию 2Δ , при этом пара распадается на два квазичастичных возбуждения. Волновую функцию основного состояния пар в БКШ-теории можно записать как [35]:

$$|\psi_\varphi\rangle = \prod_{\vec{k}} (|u_{\vec{k}}| + |\nu_{\vec{k}}| e^{i\varphi} c_{\vec{k},\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger) |\phi_0\rangle. \quad (1.1)$$

Чрезвычайно важным обстоятельством является наличие фазового множителя при амплитуде вероятности рождения куперовской пары $|\nu_{\vec{k}}|$. Фаза φ одна и та же для каждой пары и иллюстрирует то факт, что спаренные электроны образуют единое квантовое состояние. Для объемного сверхпроводника эта фаза не зависит от координаты. Можно показать, что в состоянии $|\psi_\varphi\rangle$ полное число пар не определено, однако, относительная дисперсия стремится к нулю по мере увеличения среднего числа электронов в системе, поэтому такое приближение можно считать разумным. Из состояний с $|\psi_\varphi\rangle$ с различными фазами можно получить состояние с определенным числом куперовских пар $|\psi_n\rangle$. Для этого достаточно заметить, что слагаемые в состояние $|\psi_\varphi\rangle$, отвечающие числу пар N имеют фазовый множитель $e^{in\varphi}$, и при усреднении по фазам все остальные слагаемые дадут нулевой вклад:

$$|\psi_n\rangle = \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} |\psi_\varphi\rangle. \quad (1.2)$$

Соотношение между $|\psi_\varphi\rangle$ и $|\psi_n\rangle$ имеет такой же вид, как и для векторов состояния $|x\rangle$ и $|p\rangle$ свободной частицы, то есть, n и φ в сверхпроводнике являются канонически сопряженными переменными. Для них можно вывести коммутационное соотношение $[\hat{n}, \hat{\varphi}] = -i$ и соотношение неопределеностей $\Delta\varphi \cdot \Delta n \approx \hbar$.

Таким образом, изолированный остров сверхпроводника обладает макроскопической квантовой степенью свободы: фаза играет роль координаты, а число куперовских пар — роль импульса. Ясно, что если остров находится при $T = 0$ и полностью изолирован от других островов, то N фиксировано, а значит ϕ полностью неопределена и не имеет физического смысла. Но оказывается, что в системе из нескольких островов возможны более нетривиальные ситуации, когда имеет смысл говорить о суперпозициях состояний с разными значениями заряда $\hat{Q} = 2e\hat{N}$. Квантование степени свободы, которая сама по себе формулируется в терминах существенно квантовых переменных: числа пар и фазы волновой функции — представляет из себя достаточно нетривиальную задачу. Поэтому оставим этот вопрос немного в стороне и для начала проясним, как фаза и число (суммарный заряд) куперовских пар могут проявлять себя в эксперименте.

В некоторых случаях глобальная фаза сверхпроводника проявляется на макроскопическом уровне. Такие ситуации особенно интересны, поскольку позволяют наблюдать квантовые эффекты в сверхпроводниках при непосредственном измерении макроскопических величин. Например, экранирование внешнего магнитного поля в неодносвязном сверхпроводнике (кольце) приводит к тому, что магнитный поток проникает в полости дискретными порциями — квантами потока. Также существует способ привести два различных сверхпроводника в контакт, так чтобы каждый из них «чувствовал» фазу соседнего. Оказывается, что при этом сила тока и падение напряжения на этом контакте однозначно определяются соотношением фаз между двумя сверхпроводящими берегами. Перейдём к рассмотрению этих двух задач и опишем явления, известные под названием *квантование магнитного потока* и *эффект Джозефсона*.

1.1.1 Квантование магнитного потока

Чтобы глубже осознать суть эффекта Джозефсона, рассмотрим вначале эффект квантования магнитного потока. Глобальная фаза необычно проявляет себя при рассмотрении неодносвязного сверхпроводника, например, кольца индуктивности L , помещенного во внешнее магнитное поле \vec{B} . Поле создаёт некоторый магнитный поток через кольцо Φ_{ext} . Также поле проникает в тонкий

поверхностный слой порядка λ , и в этом слое сверхпроводника возникает экранирующий (мейсснеровский) ток I_m . Воспользуемся вторым уравнением теории ГЛ, согласно которому:

$$\mathbf{j}_m = \frac{|\Psi|^2}{\lambda^2} \left(\frac{\hbar c}{2e} \nabla \varphi - \mathbf{A} \right) \quad (1.3)$$

Выберем некоторый контур \mathcal{L} , замкнутый вокруг отверстия и проходящий в глубине кольца. Тогда вдоль этого контура $\mathbf{j}_m = 0$, и полный магнитный поток $\Phi = LI_m + \Phi_{ext}$ можно записать как:

$$\Phi = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{A} d\ell = \frac{\hbar c}{2e} \oint_{\mathcal{L}} \nabla \varphi d\ell. \quad (1.4)$$

Полное изменение фазы вдоль контура может составлять только величину, кратную 2π , поскольку волновая функция обязана быть однозначной, см. также Рис. 1.1. Получаемое выражение

$$\Phi = \frac{\hbar c}{2e} \cdot 2\pi N = N\Phi_0 \quad (1.5)$$

означает, что магнитный поток в кольце квантуется, т.е. принимает значения кратные величине $\Phi_0 = hc/2e$, называемой *квантом магнитного потока*. Значение Φ_0 составляет $2.067 \cdot 10^{-15}$ Вб в единицах СИ. Квантование потока наглядно

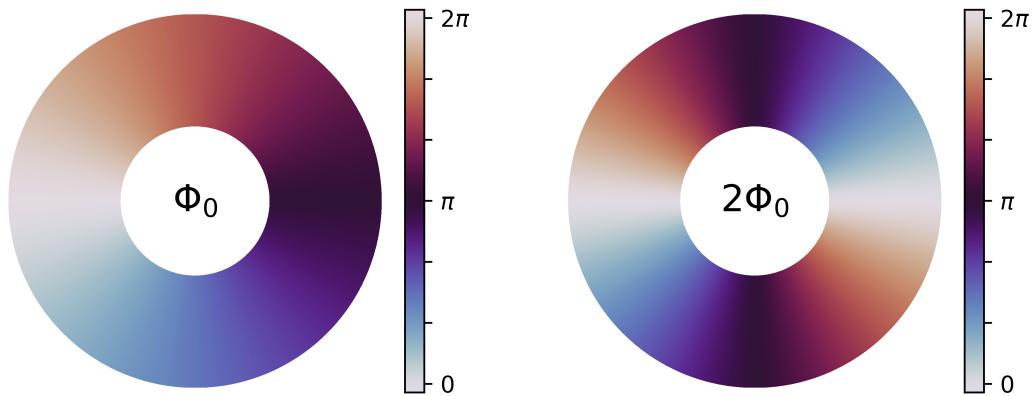


Рисунок 1.1 – Распределение фазы волновой функции в сверхпроводящем кольце для различных значений магнитного потока.

показывает, что во многих физических ситуациях, важных при описании сверхпроводниковых цепей, фаза оказывается очень тесно связанной с магнитным потоком. Экспериментально, квантование потока впервые наблюдалось в работе

[36] Связь между φ и Φ носит примерно такой же характер, как связь между n и полным зарядом Q сверхпроводящего острова. Действительно, у сверхпроводящего острова к дискретному заряду $Q_n = n \cdot 2e$ добавляется заряд $q = CV$, наведённый некоторым напряжением V через какую-либо дополнительную ёмкость C , и полный заряд равен $Q = Q_n + q$. Похожим образом, «внутренний» поток LI_m , возникающий за счет индуктивного ответа в кольце на внешнее магнитное поле, складывается с внешним потоком Φ_{ext} , и в результате получается дискретный «полный» поток $\Phi = n\Phi_0$. Но как создать какую-либо наведенную непрерывным образом фазу? Оказывается, что при использовании эффекта Джозефсона это становится возможным.

1.1.2 Эффект Джозефсона: общие принципы

Чтобы понять суть эффекта Джозефсона, рассмотрим два объемных сверхпроводника (берега), разделенных слоем диэлектрика. Будем называть такую систему джозефсоновским переходом (или SIS-переходом). Если этот слой достаточно толстый, то берега никак не связаны между собой. Начнем мысленно уменьшать толщину диэлектрического слоя, и рано или поздно возникнет туннельный эффект. Туннелировать могут как отдельные электроны (квазичастицы), так и куперовские пары, существующие независимо для каждого берега. Но куперовские пары имеют удвоенную массу по сравнению с квазичастичными возбуждениями. Поскольку вероятность прохождения барьера экспоненциально падает с ростом массы частицы, то при какой-то толщине h_1 барьер станет прозрачным только для квазичастиц, не пропуская куперовские пары. Квазичастицы не формируют конденсат, поэтому такое одноэлектронное туннелирование принципиально не будет отличаться от сходных процессов в нормальных металлах или полупроводниковых структурах. Туннельный ток будет зависеть от плотности состояний, и поэтому будет отличен от нуля только при $V > 2\Delta$, что впервые наблюдалось в работе [37]. Хоть процесс туннелирования куперовских пар весьма маловероятен, но тем не менее, барьер уже достаточно прозрачен, и можно сказать, что волновая функция отдельных электронов из одного берега частично проникает в другой. Продолжим уменьшать толщину диэлектрика. Оказывается, что при некоторой толщине $h_2 < h_1$ возникает когерентность во всей электронной

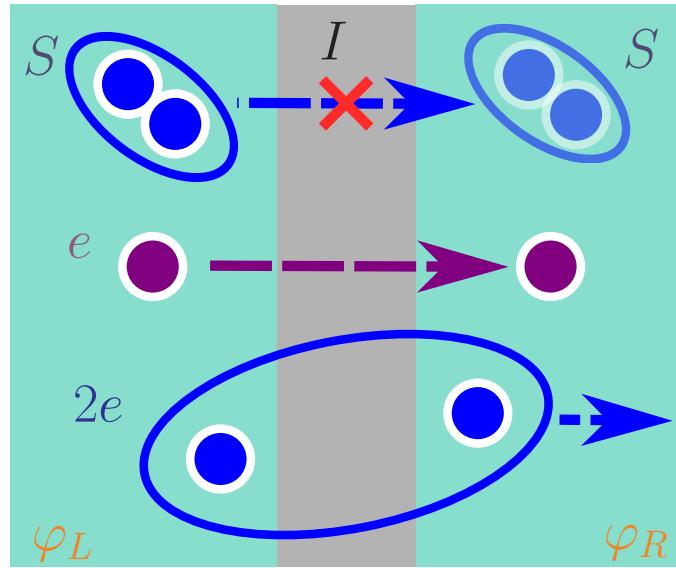


Рисунок 1.2 – SIS переход и различные процессы туннелирования через барьер.

системе. Можно сказать, что куперовские пары образуются из электронов, принадлежащих двум разным металлам одновременно. Эти пары увлекаются в один или другой металл, а направление и скорость их увлечения зависит от разности сверхпроводящих фаз между берегами. То есть, ненулевой сверхпроводящий ток возникает при $V = 0$. Описанные процессы туннелирования схематично изображены на Рис. 1.2. Из качественного рассмотрения может показаться, что одночастичный ток и ток конденсата должны возникать при одинаковой толщине барьера, но в действительности джозефсоновский ток наблюдается при меньшем нормальном сопротивлении, чем одночастичный. Это связано с влиянием тепловых флуктуаций, которые растут с увеличением R . Детальное описание можно найти в [38]. Покажем, как этот ток зависит от разности фаз.

1.1.3 Токо-фазовое соотношение

Будем считать, что каждый из берегов имеет собственные состояния конденсата куперовских пар в нем, которые можно описать при помощи макроскопической волновой функции: $\Psi_R = \sqrt{\rho_R} e^{i\varphi_R}$ и $\Psi_L = \sqrt{\rho_L} e^{i\varphi_L}$, где ρ_R, ρ_L – плотности частиц. Состояние всего конденсата можно искать в виде $\Psi = \Psi_L |L\rangle + \Psi_R |R\rangle$, что означает, что общий конденсат куперовских пар когерентно распределится так, чтобы минимизировать энергию всей системы. В базисе

состояний $|R\rangle, |L\rangle$ гамильтониан системы можно записать в виде:

$$H = E_L \cdot |L\rangle\langle L| + E_R \cdot |R\rangle\langle R| + T \cdot [|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|], \quad (1.6)$$

где последний член описывает туннелирование системы как целого и означает, что потенциальный барьер достаточно прозрачен, и некоторые пары из конденсата могут состоять из электронов находящихся по разные стороны от барьера. Теперь можно решить уравнение Шредингера $i\hbar d\Psi/dt = H\Psi$, распадающееся на два уравнения для амплитуд Ψ_L и Ψ_R :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\Psi_R}{dt} &= E_R \Psi_R + T \Psi_L, \\ i\hbar \frac{d\Psi_L}{dt} &= E_L \Psi_L + T \Psi_R. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставим выражения для Ψ_L и Ψ_R , и получим ответ для плотности сверхпроводящего (джозефсоновского) тока через барьер $J_s = d\rho_R/dt = -d\rho_L/dt$:

$$J = \frac{2T}{\hbar} \sqrt{\rho_R \rho_L} \sin \varphi = J_c \sin \varphi, \quad (1.8)$$

где $\varphi = \varphi_L - \varphi_R$. Если считать ρ_L и ρ_R константами, что будет справедливо, например, в случае подключения к внешнему источнику тока, то величина J_c , называемая плотностью критического тока, зависит только от свойств перехода, а именно от типа сверхпроводника и ширины туннельного барьера. Микроскопическая теория дает следующее выражение для критического тока I_c джозефсоновского перехода в случае нулевой температуры и одинаковых сверхпроводников с $\Delta_L = \Delta_R = \Delta$:

$$I_c = \frac{\pi \Delta}{2eR_n}, \quad (1.9)$$

где R_n – остаточное сопротивление на переходе при $T \geq T_c$. Впервые стационарный эффект Джозефсона наблюдался в работе [39]. Зависимость $J = J(\varphi)$ вида (1.8) характерна не только для туннельного SIS-перехода, но и для многих других типов слабой связи (например, мост Дайема, SNS- и SSeS-переходы [40; 41]).

1.1.4 Фазо-потоковое соотношение

Выше было рассмотрено квантование магнитного потока в сплошном кольце. Рассмотрим, как меняется ситуация при прерывании кольца некоторым

количеством SIS-переходов (n штук), плоскости которых перпендикуляры плоскости кольца, см. Рис. 1.3. Будем считать, что внешнее магнитное поле невелико, и можно не учитывать его проникновение в область диэлектрика (которое приводит к необычным эффектам в переходах, см., например, [42], § 24). Выберем замкнутый контур C , пролегающий в глубине кольца, и запишем уравнение (1.3) с учетом обращающегося в ноль мейсснеровского тока:

$$\oint_C \mathbf{A} d\ell = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \varphi d\ell \quad (1.10)$$

Правая часть этого выражения содержит интеграл от градиента фазы вдоль контура. Однако, фаза не является непрерывной функцией, а скачкообразно меняется на переходах. Поэтому в таком виде вычислять интеграл нельзя. Разобъем контур C на несколько отрезков кривой $A_i B_i, i = 1, \dots, n$, таким образом исключая короткие отрезки контура C , лежащие внутри переходов, из контура интегрирования. Будем считать что левый интеграл при этом не изменяется:

$$\oint_C \mathbf{A} d\ell = \sum_{i=1}^n \int_{A_i}^{B_i} \mathbf{A} d\ell, \quad (1.11)$$

поскольку ширины переходов достаточно малы, а векторный потенциал не имеет никаких особенностей в коротких отрезках контура C , лежащих внутри переходов, так как токи и магнитные поля нулевые. Теперь вычислим правый интеграл как:

$$\begin{aligned} \oint_C \nabla \varphi d\ell &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i}^{B_i} \nabla \varphi d\ell = \sum_{i=1}^n \varphi_{B_i} - \varphi_{A_i} = \\ &= \varphi_{A_1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_{A_{i+1}} - \varphi_{B_i}) - \varphi_{B_n} = 2\pi k + \sum_{i=1}^n (\varphi_{A_{i+1}} - \varphi_{B_i}) = \\ &= 2\pi k + \sum_{i=1}^n \delta \varphi_i, \end{aligned} \quad (1.12)$$

В предпоследнем равенстве использовано условие однозначности волновой функции в виде $\varphi_{A_1} = \varphi_{A_{n+1}} - 2\pi k$. Разности фаз на переходах обозначены как $\delta \varphi_i$. Подставляя (1.11) и (1.12) в (1.10), получаем искомое фазо-потоковое соотношение:

$$\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 2\pi k + \sum_{i=1}^n \delta \varphi_i. \quad (1.13)$$

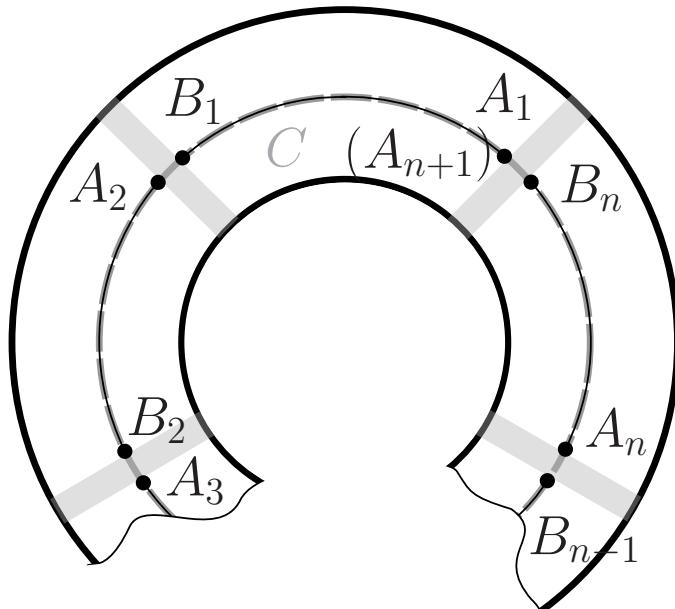


Рисунок 1.3 – К выводу фазо-потокового соотношения.

Таким образом, поток в таком кольце не квантуется, но однозначно определяется разностями фаз на джозефсоновских переходах. Предположим, например, что джозефсоновские энергии переходов, входящих в кольцо, одинаковы и равны E_J , соответственно, равны и критические токи I_c . Тогда

$$\frac{2\pi}{\Phi_0}(\Phi_{ext} - LI_c \sin \delta\varphi) = 2\pi k + n\delta\varphi, \quad (1.14)$$

и при заданных L и Φ_{ext} можно найти такие k и $\delta\varphi$, которые характеризуют разрешенные состояния системы. Если переходы различны, то разности фаз $\delta\varphi_i$ будут такими, чтобы токи через переходы $I_i = I_{ic} \sin \delta\varphi_i$ были одинаковыми.

1.1.5 Энергия джозефсоновского тока. RSCJ-модель.

Из уравнений (1.7) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (1.15)$$

Таким образом, при конечном напряжении на контакте фаза начинает меняться с течением времени. Это так называемый нестационарный эффект Джохефсона, имеющий множество интересных применений, например генерация высокочастотного тока и создание стандарта напряжения. Используя полученное

соотношение, можно рассчитать потенциальную (свободную) энергию, сосредоточенную в переходе:

$$E(\varphi) = \int_0^t I_s V dt = \int_0^\varphi I_c \sin \varphi' \frac{\hbar}{2e} d\varphi' = E_J(1 - \cos \varphi). \quad (1.16)$$

В последнем равенстве учтено что при нулевой фазе ток через переход не течет, и $E(0) = 0$. Величина $E_J = \hbar I_c / 2e$ называется *джозефсоновской энергией* перехода. При малых значениях φ энергия квадратично зависит от фазы: $E_J \approx E_J \varphi^2 / 2$, что дает возможность ввести эквивалентную линейную индуктивность перехода $L_{lin} = \Phi_0^2 / 2\pi I_c$. В более общем случае, джозефсоновская индуктивность зависит от фазы и определяется как $L_J = \Phi_0 / (2\pi I_c \cos \varphi)$.

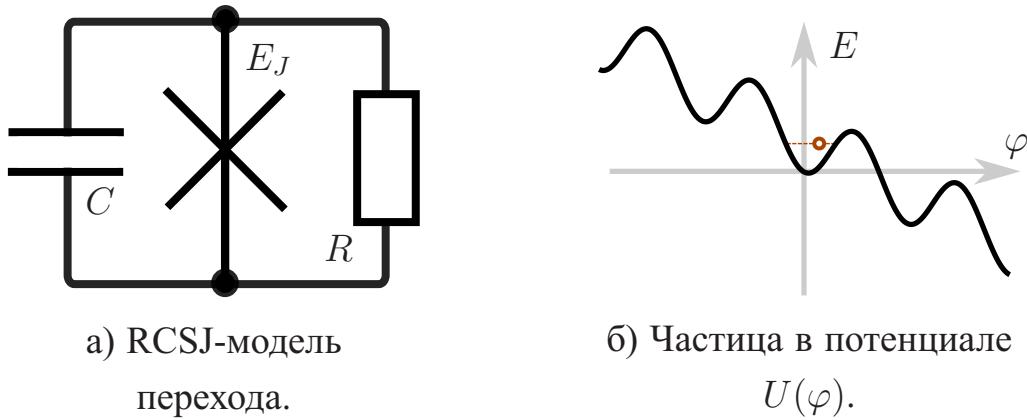


Рисунок 1.4 — RCSJ-модель джозефсоновского туннельного перехода.

До сих пор мы рассматривали лишь энергию сверхпроводящего тока. Однако, для описания нестационарных процессов в реальных туннельных контактах такая модель недостаточна. Необходимо учитывать два дополнительных фактора: квазичастичное туннелирование и значительная емкость между двумя сверхпроводниками, неизбежно возникающая из-за малой толщины диэлектрической прослойки (несколько десятков межатомных расстояний). Эти аспекты учитываются в феноменологической RCSJ-модели перехода, в которой параллельно с джозефсоновским элементом, энергия которого зависит от фазы согласно (1.16), включается эквивалентный резистор R , описывающий нормальное сопротивление квазичастичному току, и конденсатор C , см. Рис. 1.4. Полный ток через переход в такой схеме можно записать как:

$$\begin{aligned} I &= I_C + I_J + I_R = \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt}, \text{ отсюда получаем:} \\ 0 &= m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d}{d\varphi} \left(E_J \cos \varphi + E_J \frac{I}{I_c} \varphi \right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где введены обозначения $m = (\hbar/2e)^2 C$ и $f = (\hbar/2e)^2 R^{-1}$. Полученное уравнение описывает динамику фазы в переходе как классическое движение частицы массой m в жидкой среде с коэффициентом вязкости f во внешнем потенциале стиральной доски $U(\varphi) = -E_J(\cos \varphi + I\varphi/I_c)$, что схематично отражено на Рис. 1.4. Отметим некоторые характерные особенности динамики системы:

- При отсутствии тока потенциал синусоидален, и частица локализуется в потенциальной яме, форма которой близка к параболической, и в этом случае может совершать малые колебания с частотой $\omega_p = (\sqrt{L_{lin}C})^{-1}$, называемой *плазменной частотой перехода*.
- Если увеличивать ток, то наклон потенциала растёт, потенциальная яма становится все более мелкой и пропадает. Частица начинает двигаться и будет разгоняться вдоль стиральной доски, пока не достигнет режима, в котором среднее значение $\langle V \rangle \propto \langle d\varphi/dt \rangle$ постоянно и отлично от нуля. Характер её замедления при уменьшении тока (наклона) определяется параметром Маккамбера $\beta_c = \omega_p RC$, который показывает обратное число плазменных колебаний, которые система может совершить за время затухания RC (при отсутствии тока).
- Если $\beta_c \ll 1$, то при уменьшении тока частица практически не замедляется до тех пор, пока наклон не упадет практически до нуля.
- Если $\beta_c \gg 1$, то частица замедляется довольно значительно, так как трение играет существенную роль в её движении и скорость движения вдоль стиральной доски определяется средним наклоном. Полная остановка, однако, также произойдет лишь при $I = 0$.

Перечисленные особенности находят подтверждение при измерении ВАХ переходов, полученных при фиксированном внешнем токе I , см., например, [42].

Подведем итог классическому описанию джозефсоновского перехода. В зависимости от выбранного режима работы, такой переход может вести себя как нелинейный осциллятор, нелинейная индуктивность, зависящая от времени, либо демонстрировать еще более сложное поведение. Это делает его весьма интересным элементом даже с точки зрения классической схемотехники. Еще более нетривиальные эффекты возникают в том случае, если рассматривать разность фаз на переходе как квантовую степень свободы, которые мы кратко опишем далее.

1.2 Квантование электрических цепей

Как было сказано выше, при квантовом описании какой-либо сверхпроводящей системы число пар \hat{n} на сверхпроводящем острове и фаза $\hat{\varphi}$ на этом острове могут рассматриваться как сопряженные переменные: $[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i$. Возбуждения коллективной квантовой степени свободы при определенных условиях оказываются самыми низкоэнергетическими (ниже 10 ГГц), и потому есть возможность экспериментально работать только с ними. В сверхпроводниках минимальная энергия одноэлектронного возбуждения не может быть меньше 2Δ , например, для алюминия имеем $2\Delta = 3.52k_bT_c \approx h \cdot 80$ ГГц. Можно показать [43], что частоты объемных плазменных колебаний попадают в терагерцовый диапазон, и поэтому их также можно исключить из рассмотрения. Фактически, мы будем иметь дело с бездисперсионными коллективными плазменными возбуждениями, и именно эти моды в итоге будут квантоваться.

1.2.1 Кубит. Двухуровневое приближение. Приближение вращающейся волны.

Простейшая квантовая система, например, спин 1/2 в продольном магнитном поле, обладает одной степенью свободы и двумя собственными квантовыми состояниями. Обозначим состояния системы как $|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, а соответствующие собственные значения энергии как $-E_q/2$ и $E_q/2$. Тогда гамильтониан кубита записывается тривиально: $\hat{H} = \frac{-E_q}{2}\hat{\sigma}_z$.

Согласно постулату квантовой механики, все возможные состояния кубита записываются как $|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2}|1\rangle$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Любая реальная система взаимодействует со своим окружением, поэтому состояния кубита необходимо описывать матрицей плотности:

$$\rho_q = |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{11} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Последнее выражение можно обобщить и на случай смешанных состояний кубита, которые описывают статистический ансамбль. Поскольку матрицы Паули

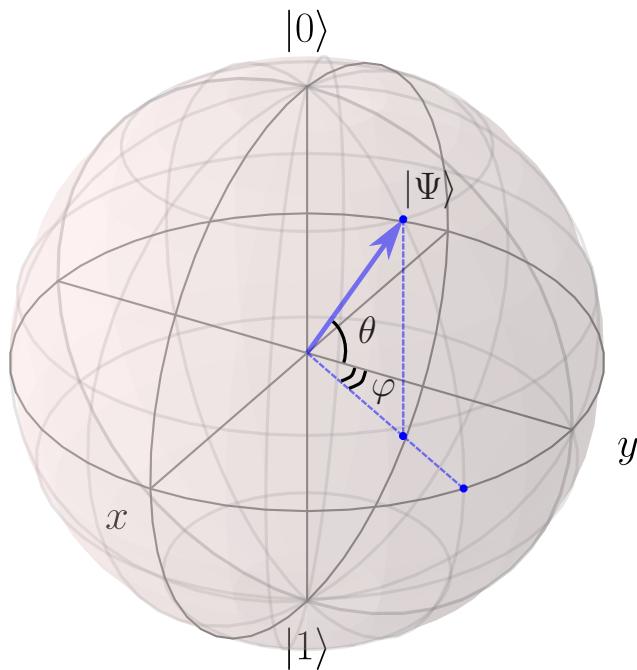


Рисунок 1.5 — Сфера Блоха. Точки на сфере соответствуют чистым состояниям кубита, точки внутри сферы — смешанным состояниям.

вместе с единичной матрицей составляют базис в пространстве матриц 2×2 , то такую матрицу плотности можно записать в общем виде:

$$\rho_q = \frac{1}{2}(I + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}), \quad (1.19)$$

где I — единичная матрица, $\vec{\sigma} = (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z)^T$ и $\vec{s} = (s_x \ s_y \ s_z)^T$ — трёхмерный вектор, называемый вектором Блоха. Для чистых состояний $\vec{s} = (\sin \theta \cos \varphi \ \sin \theta \sin \varphi \ \cos \theta)^T$ можно представить как вектор из начала координат единичной длины, и все возможные положения конца этого вектора формируют единичную сферу — сферу Блоха, см. Рис. 1.5.

Квантовая двухуровневая система является простейшим объектом. В реальных экспериментах с СКЦ мы, как правило, работаем с многоуровневой системой. Но в некоторых физических ситуациях можно выделить два нижних уровня системы, и рассматривать систему внутри подпространства из основного и первого возбужденного квантовых состояний. Для этого необходимо делать двухуровневое приближение.

Рассмотрим систему с собственными состояниями $\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$, под действием возмущения $\hat{V}(t)$. Учитывая поправку к собственным энергиям $\tilde{E}_n =$

$E_n + \langle n | \hat{V} | n \rangle$, можно записать полный гамильтониан в виде:

$$\hat{H} = \sum_n \tilde{E}_n |n\rangle \langle n| + \sum_{m \neq n} |m\rangle \langle n| \langle m| \hat{V} |n\rangle. \quad (1.20)$$

Оператор эволюции можно записать через повышающие и понижающие матрицы: $\hat{V} = \sum_{m>n} \langle m | \hat{V} | n \rangle \hat{\sigma}_{mn} + \langle n | \hat{V} | m \rangle \hat{\sigma}_{nm}$. Тогда оператор эволюции возмущенной системы $U_0(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}(\tilde{E}_n |n\rangle \langle n|))$ задаёт представление взаимодействия, гамильтониан в котором имеет вид:

$$\hat{H}_I = \sum_{m>n} e^{-i(\tilde{\omega}_n - \tilde{\omega}_m)t} \langle m | \hat{V} | n \rangle \hat{\sigma}_{mn} + \text{с.с} \quad (1.21)$$

Если возмущение будет состоять из нескольких слагаемых, то соответствующие \hat{H}_I могут не коммутировать, что сильно усложнит поиск аналитического решения для динамики системы и приведет к непоправимым последствиям. Однако, предположим, что $\hat{V}(t) = \hat{V}_0 e^{i\omega t}$, где $\omega \approx \tilde{\omega}_{01}$. Тогда ясно, что наибольший вклад в оператор эволюции системы в представлении взаимодействия $\mathcal{T} \exp(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_I(t') dt')$ даёт слагаемое из (1.21) с наиболее медленной зависимостью от времени. Все остальные члены дают интегралы от быстро осциллирующих функций, которые очень малы и не меняют характер динамики, заданной главным членом. Таким образом, мы можем сделать два приближения:

- *двухуровневое приближение* позволяет оставить в H_I только члены $\langle 0 | \hat{V}_0 | 1 \rangle \hat{\sigma}_{01} + e^{-2\omega t} \langle 1 | \hat{V}_0 | 0 \rangle \hat{\sigma}_{10}$, пренебрегая переходами между остальными парами уровней, не попадающими в резонанс с возмущающим воздействием;
- *приближение врачающейся волны* позволяет оставить только медленно меняющийся член $\langle 0 | \hat{V}_0 | 1 \rangle \hat{\sigma}_{01}$.

Для того чтобы описывать СКЦ как кубит, необходимо, во-первых, уметь рассчитать её спектр в зависимости от параметров цепи и, во-вторых, уметь вычислить матричные элементы переходов под воздействием возмущений, например, внешнего электромагнитного поля. Теперь опишем общий формализм квантования цепи, а затем на некоторых примерах покажем, как осуществляются расчеты такого типа.

1.2.2 Формальная процедура квантования цепи

Опишем общий подход к квантованию СКЦ [44]. Будем рассматривать некоторую систему, состоящую из набора сверхпроводящих островов. Острова могут быть связаны взаимными емкостями и индуктивностями. Кроме того, некоторые из них могут образовывать джозефсоновскую связь. Поэтому, достаточно общим является представление такой системы в качестве электрической цепи, в которой имеются три типа элементов: емкости, индуктивности и джозефсоновские элементы (нелинейные индуктивности)¹. Как и в электротехнической цепи, в такой системе нужно подходящим образом выбрать некоторые независимые степени свободы, с помощью которых можно описать как классическую, так и квантовую динамику системы. Последовательность действий квантования системы состоит из следующих шагов:

1. Изобразим эквивалентную электрическую схему цепи. Схема будет состоять из N узлов (точек), связанных произвольным количеством элементов-дуполюсников, которые мы будем называть ребрами. Мысленно выделим емкостную и индуктивную части в общей схеме цепи. Поскольку любой реальный элемент имеет конечные размеры, и следовательно, паразитную емкость, то можно считать, что между каждой парой узлов включена емкость, и притом единственная. Среди всех узлов можно выделить *активные* узлы, к которым подсоединенены как емкостные, так и индуктивные элементы, и *пассивные* узлы, к которым подсоединенены только емкости.
2. Для каждого ребра введем величину $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t v(t')dt'$, которую можно назвать магнитным потоком через ребро. Считается, что напряжение $v(-\infty) = 0$ и плавно включается со временем. Тогда емкостную энергию можно записать как $C\dot{\Phi}^2/2$, что соответствует кинетической энергии частицы с координатой Φ . Для индуктивности эта величина в

¹Совсем недавно [45] показана возможность создания т.н. центра когерентного квантового проскальзываивания фазы, который является емкостным аналогом джозефсоновского перехода. Однако, создание квантовых цепей из таких элементов еще не вполне отработано. Их описание выходит за рамки данной работы.

точности совпадает с запасённым в ней магнитным потоком, и индуктивная энергия $(\Phi - \tilde{\Phi})^2/2L$ играет роль потенциальной энергии, где $\tilde{\Phi}$ — некоторый внешний поток.

3. Выберем один из активных узлов емкостной подсистемы в качестве заzemленного узла, и выберем только те емкости, которые единственным образом соединяют земляной узел со всеми остальными узлами подсистемы. Эти емкости составят *остовное дерево* T . Тогда для любого другого узла n можно ввести т.н. *узловой поток* ϕ_n , который равен сумме потоков всех емкостей, через которые нужно пройти от земляного узла до узла n . Связь между потоком через некоторое ребро Φ_b и потоками через узлы этого ребра $\phi_n, \phi_{n'}$ даётся соотношением:

$$\begin{aligned}\Phi_{b \in T} &= \phi_n - \phi_{n'}, \\ \Phi_{b \notin T} &= \phi_n - \phi_{n'} + \tilde{\Phi}_b,\end{aligned}\tag{1.22}$$

где внешний поток $\tilde{\Phi}_b$ учитывается в том случае, когда добавление ветви b образует индуктивную петлю.

4. Используя соотношения (1.22), запишем полную энергию индуктивной и емкостной подсистемы через переменные $\vec{\phi} = (\phi_1 \dots \phi_N)^T$. Энергия индуктивной подсистемы примет вид:

$$E_L(\vec{\phi}) = \frac{1}{2} \vec{\phi}^T \mathbf{L}^{-1} \vec{\phi} + \sum_b \frac{\phi_n - \phi_{n'}}{L_b} \tilde{\Phi}_b.\tag{1.23}$$

Первое слагаемое представляет собой вклад в энергию непосредственно от индуктивностей. Матрица индуктивности \mathbf{L} размера $(N-1) \times (N-1)$ симметричная и сконструирована следующим образом: недиагональные элементы (i,j) равны $-\sum L_{ij}$, где L_{ij} — все индуктивности, соединяющие узлы i и j ; диагональные же элементы равны сумме всех недиагональных элементов на соответствующей строке (или в столбце), взятой с противоположным знаком. Второе слагаемое — это энергия каждой индуктивности, которая находится в ветви с внешним потоком $\tilde{\Phi}_b$. Энергия емкостной подсистемы примет вид:

$$E_C(\dot{\vec{\phi}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{\phi}}^T \mathbf{C}^{-1} \dot{\vec{\phi}}\tag{1.24}$$

где матрица емкости \mathbf{C} строится аналогично матрице индуктивности.

5. Полученные выражения позволяют записать лагранжиан системы $\mathcal{L} = E_C - E_L$ и найти классические уравнения движения $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n}$.

Поскольку нас интересует квантовое описание системы, необходимо найти обобщенные импульсы $q_n = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}_n$, и записать гамильтониан $H = q_n\phi_n - \mathcal{L}$. Сколько независимых степеней свободы будет иметь система? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо заметить, что для любого пассивного узла $\partial\mathcal{L}/\partial\phi_n = 0$, а поэтому q_n является константой, и фактически, данная степень свободы вырождена. Таким образом, если число активных узлов P , то полное число степеней свободы $P - 1$.

6. Заменяя координаты (узловые потоки) и импульсы (узловые заряды) на сопряженные операторы $\phi \rightarrow \hat{\phi}$ и $q \rightarrow \hat{q} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$, получаем гамильтониан квантовой цепи. Далее можно найти стационарные состояния, их энергии, матричные элементы переходов, и описать динамику системы.

Далее мы рассмотрим некоторые базовые типы СКЦ. Как правило, они достаточно просты, и можно записать гамильтониан практически сразу, без предварительных шагов. Однако, следование общему формализму квантования необходимо для правильного описания более сложных цепей со многими степенями свободы.

Базовые типы СКЦ, далее просто кубитов - это зарядовый кубит, фазовый кубит, потоковый кубит, трансмон и вч-СКВИД. Кратко опишем свойства каждого из этих кубитов.

1.2.3 Зарядовый кубит

Зарядовый кубит, или «ящик» для куперовских пар - это система, представляющая из себя джозефсоновский переход с энергией E_J , последовательно соединённый с емкостью. Эквивалентная схема такого кубита изображена на Рис.1.6а. Образуется изолированный остров (выделен синим цветом), и если его емкость достаточно мала, то изменение числа куперовских пар на единицу сильно меняет энергию системы. Введем зарядовую энергию конденсатора $E_C = 4e^2/C$; она включает в себя всю эффективную емкость острова, в т.ч. джозефсоновскую емкость. Также к острову подключен внешний источник, который может создавать наведенный заряд $n_g = C_g V_g / 2e$. Остовное дерево и земля выбираются тривиально, и понятно, что единственная степень свободы задается операторами фазы $\hat{\phi}_1 = 2\pi/\Phi_0 \cdot \hat{\phi}_1$ и заряда $\hat{n}_1 = \hat{q}_1 / 2e$, далее индекс будет опущен

за ненадобностью. Гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H}_{CPB} = \frac{E_C}{2}(\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \hat{\varphi}. \quad (1.25)$$

Для нахождения спектра можно выбрать как фазовый базис, в котором $\hat{\varphi} = \varphi$, так и базис чисел куперовских пар (зарядовый базис), в котором $\hat{n} = n$. Начнем рассмотрение с зарядового базиса и выясним, как записать оператор $\cos \hat{\varphi}$. Заметим, что:

$$e^{i\hat{\varphi}} |n\rangle = e^{i\hat{\varphi}} \sum_n e^{in\hat{\varphi}} |\varphi\rangle = |n+1\rangle, \quad (1.26)$$

поэтому имеем:

$$\cos \hat{\varphi} = \frac{1}{2}(e^{i\hat{\varphi}} + e^{-i\hat{\varphi}}) = \frac{1}{2} \sum_n \left(|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1| \right), \quad (1.27)$$

где во втором слагаемом последнего выражения был сдвинут индекс суммирования $n \rightarrow n+1$. Гамильтониан можно записать в виде:

$$\hat{H}_{CPB} = \frac{E_C}{2} \sum_n (n - n_g)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} \sum_n \left(|n+1\rangle \langle n| + |n\rangle \langle n+1| \right). \quad (1.28)$$

Получив его в такой форме — диагональная часть плюс туннельный гамильтониан — можно сразу сказать, как будет выглядеть собственные уровни энергии: в

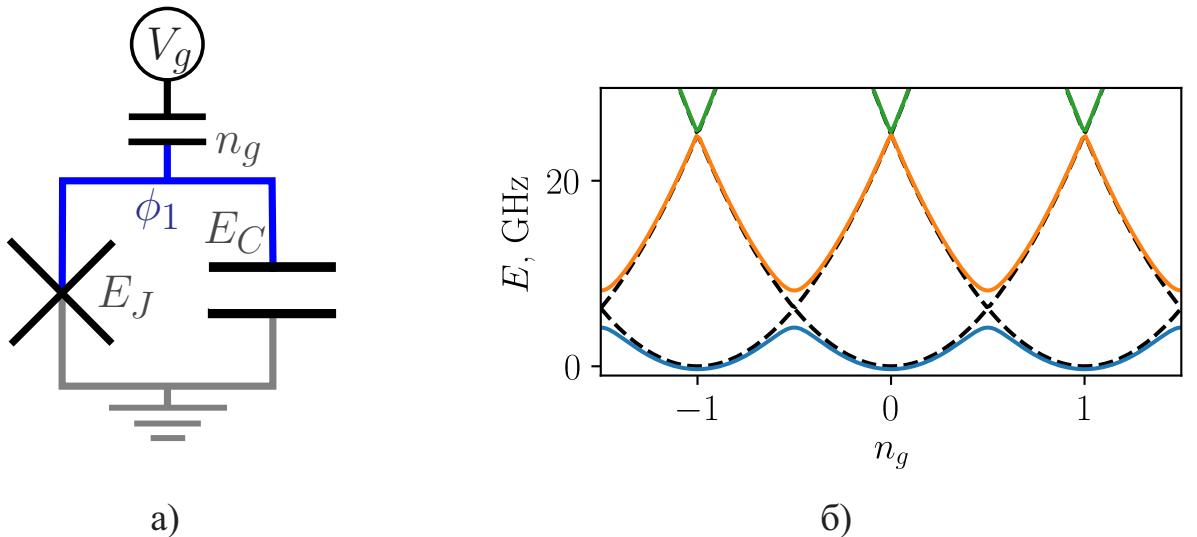


Рисунок 1.6 — Зарядовый кубит: а) Эквивалентная схема кубита, б) Спектр кубита: три нижних энергетических уровня в зависимости от n_g . $E_C/h = 50$ ГГц, $E_J/h = 4$ ГГц. Пунктирная линия показывает классическую зарядовую энергию в отсутствие туннелирования.

случае полуцелых n_g два состояния с соседними n , вырождены. Новые собственные состояния сдвинуты на $\pm E_J/2$. Численно рассчитанный спектр изображен на Рис. 1.66. Сделаем двухуровневое приближение, то есть будем рассматривать подсистему из двух зарядовых состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$, и считать, что $n_g \approx 0.5$. Тогда гамильтониан примет вид:

$$H_q = \frac{E_C}{2}(n_g - 1/2)\hat{\sigma}_z - \frac{E_J}{2}\hat{\sigma}_x, \quad (1.29)$$

а новые собственные состояния системы можно записать через параметр $\theta = \arctan\left(\frac{2E_J}{E_C(n_g - 1/2)}\right)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |g\rangle &= \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle, \\ |e\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

Как и следовало ожидать, состояния максимально гибридизованы в окрестности $n_g = 1/2$.

Считается, что в пределе зарядового кубита $E_J < E_C$, то есть туннелирование проявляется лишь между соседними зарядовыми состояниями. Отчасти исследование именно такого режима связано с тем, что зарядовый кубит — исторически первый кубит, который был продемонстрирован в эксперименте [1]. Для считывания используются такие методы, как джозефсоновский цикл квазичастичной генерации через дополнительный пробный барьер, подключенный к острову, а также одноэлектронный транзистор [46]. Для такого считывания требуется, чтобы энергии зарядовых состояний при фиксированном n_g сильно отличались друг от друга, то есть, ярко выраженный эффект кулоновской блокады. С этим связан и существенный недостаток зарядового кубита — слишком высокая чувствительность к зарядовому шуму, влияющему на n_g . Различные паразитные двухуровневые системы в кремниевой подложке обладают электрическим дипольным моментом, влияющим на энергию кубита. Кроме того, попадание любой случайной квазичастицы на остров сильно сдвигает рабочую точку и делает длительную когерентную манипуляцию невозможной. В дальнейшем мы рассмотрим модификацию зарядового кубита с малой зарядовой энергией — кубит-трансмон, работающий в так называемом пределе плоских зон, когда чувствительность к зарядовым шумам практически исчезает.

1.2.4 Фазовый кубит

Еще один тип кубитов, активно использовавшийся в 2000-х гг. — фазовые кубиты [47]. Фазовый кубит представляет собой смещенный постоянным током джозефсоновский переход. Точный контроль значения тока смещения I позволяет хорошо контролировать глубину ямы в потенциале стиральной доски, см. Рис. 1.4 и таким образом, регулировать число квантовых состояний, локализованных в яме. Пара низких уровней и используется в качестве кубитной подсистемы. Управление осуществляется внешним высокочастотным током, подаваемым на переход. Считывание состояний [48] осуществляется при помощи дополнительной потоковой линии контроля: короткий импульс постоянного тока дополнительно наклоняет потенциал стиральной доски. Величина этого наклона подобрана таким образом, чтобы переход в состоянии $|1\rangle$ имел очень высокую вероятность протуннелировать через потенциальный барьер, который на время импульса становится значительно более прозрачным. В то же время, вероятность туннелирования состояния $|0\rangle$ должна быть исчезающе мала. Этого не так сложно добиться, учитывая тот факт, что согласно квантовой механике, в любой сколь угодно мелкой одномерной потенциальной яме имеется связанное состояние. Если туннелирование произошло, то джозефсоновский переход начинает движение вдоль стиральной доски, и на нём появляется ненулевое напряжение, и как следствие, высокочастотная компонента тока. Её можно обнаружить при помощи дополнительного считывающего пч-СКВИДа, что и делается в эксперименте. Как легко заметить, такое считывание разрушает кубит, и требуется конечное время для последующей инициализации в состоянии $|0\rangle$. Кроме того, шум тока смещения может вызывать значительное изменение потенциала, и как следствие, дефазировку кубита. Несмотря на имеющиеся недостатки, в работе с данными кубитами достигнут серьезный прогресс: были созданы 4-кубитные квантовые процессоры [49], реализующие простейшие квантовые алгоритмы, например, разложение на множители числа 15. В настоящий момент интерес к данному типу кубитов несколько уменьшился, однако, их исследование в достаточной мере способствовало развитию физики СКЦ.

1.2.5 Потоковый кубит

В зарядовом кубите, который мы рассмотрели ранее, реализуется суперпозиция состояний с разными числами куперовских пар на острове. Похожим образом можно создать суперпозицию состояний с различным значением магнитного потока в сверхпроводящей петле с включенными в неё джозефсоновскими переходами. Данная концепция была предложена в работе [2], а кубит получил название «кубит с незатухающим током» и впоследствии упоминался упрощенно как *потоковый кубит*. Схема потокового кубита с тремя джозефсоновскими переходами приведена на Рис. 1.7а. Обычно два перехода одинаковые, а площадь третьего перехода составляет α от площади больших переходов. Обычно выбирается $0 < \alpha < 1$.

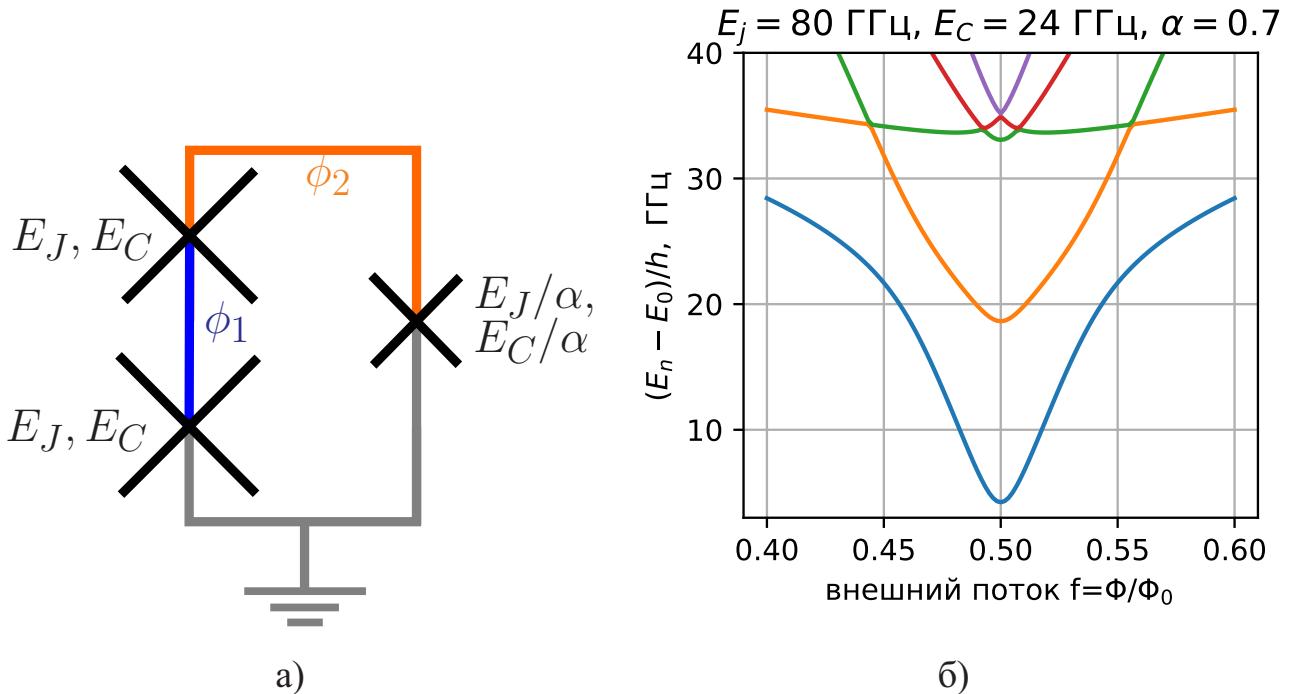


Рисунок 1.7 – Потоковый кубит: а) Эквивалентная схема кубита, б) Спектр кубита: зависимости низших энергетических уровней в зависимости от Φ/Φ_0 .

Запишем лагранжиан системы, используя операторы потока в узлах $\phi_i, i = \{1,2\}$ и их фазовые аналоги $\varphi_i = 2\pi\phi_i/\Phi_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{C}{2} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 & \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} + \\ & + E_J \left[\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) + \alpha \cos(\varphi_2) \right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Введем обобщенные импульсы, которые в данном случае соответствуют числам куперовских пар на островах с потоками ϕ_1 и ϕ_2 :

$$\begin{aligned} q_1 = 2en_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} = C(2\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \\ q_2 = 2en_2 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_2} = C((\alpha + 1)\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1), \end{aligned} \quad (1.32)$$

которые для удобства дальнейших преобразований можно записать также в матричной форме:

$$\dot{\phi} = \frac{2e}{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{n}, \text{ где } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \dot{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Теперь можно записать гамильтониан системы $H(\mathbf{n}, \varphi) = \mathbf{n}^T \dot{\phi}(\mathbf{n}) - \mathcal{L}(\dot{\phi}(\mathbf{n}), \varphi)$:

$$H = \frac{E_C}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{n} - E_J \left[\cos \varphi_1 + \alpha \cos \varphi_2 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) \right] \quad (1.34)$$

Первое слагаемое уравнения (1.34), содержащее кинетическую энергию, выраженную через обезразмеренную матрицу емкости \mathbf{M} , применимо к любой системе, не содержащей экзотических элементов типа нелинейных емкостей, и может записываться практически сразу, минуя стадию построения лагранжиана. При этом операторы n_i соответствуют числу куперовских пар на островах кубита. В данном случае мы считали также, что через замкнутую петлю кубита может быть приложен внешний магнитный поток Φ . Из соотношения (1.13) следует, что поток нужно включить в одно из слагаемых, описывающих джозефсоновскую энергию переходов.

Получив выражение для гамильтониана системы, можно рассчитать энергетический спектр в зависимости от внешнего потока. Используя выражение (1.27), можно записать гамильтониан в базисе зарядовых состояний:

$$\begin{aligned} H = & \frac{E_C}{2} \sum_n |n\rangle_1 |n\rangle_2 \mathbf{M}^{-1} \langle n|_2 \langle n|_1 - \\ & - \frac{E_J}{2} \left[\sum_n |n+1\rangle_1 |I\rangle_2 \langle I|_2 \langle n|_1 + |n\rangle_1 |I\rangle_2 \langle I|_2 \langle n+1|_1 + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.35)$$

где выражение типа $|\cdot\rangle_1|\cdot\rangle_2$ означает тензорное произведение векторов, соответствующих зарядовым состояниям островов 1 и 2. Кроме того, ряд слагаемых, входящих в джозефсоновскую энергию, опущен, поскольку они конструируются аналогично приведенному в формуле слагаемому с $\cos\varphi_1$. Такая запись гамильтониана позволяет перейти к численному решению проблемы. Выбирается некоторый базис зарядовых состояний от $-N$ до N зарядов на острове, гамильтониан записывается как матрица размером $(2N+1)^2 \times (2N+1)^2$, диагональные члены соответствуют зарядовой энергии, а недиагональные члены туннельного типа — джозефсоновской энергии. После этого находятся собственные векторы и собственные значения гамильтониана, которые и дают спектр системы в зависимости от Φ в качестве параметра. Пример рассчитанного спектра приведен на Рис. 1.76. Можно заметить, что система обладает очень большим ангармонизмом: частота перехода 0-1 гораздо ниже частоты перехода 1-2.

Также достаточно полезно рассчитать спектр и в фазовом базисе. Для этого зарядовые операторы необходимо записать в виде $n_1 = -i\partial/\partial\varphi_1$. При этом уравнение на собственные энергии $H|\Psi(\varphi_1, \varphi_2)\rangle = E|\Psi(\varphi_1, \varphi_2)\rangle$ примет вид дифференциального уравнения в частных производных, которое можно решать численно при помощи некоторой разностной схемы. Один из вариантов такой схемы для сетки с шагом h_1 по фазе φ_1 и с шагом h_2 по фазе φ_2 имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_1^2} &= \frac{\Psi(\varphi_1^{i-1}, \varphi_2^i) - 2\Psi(\varphi_1^i, \varphi_2^i) + \Psi(\varphi_1^{i+1}, \varphi_2^i)}{h_1^2} \\ \frac{\partial^2\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_2^2} &= \frac{\Psi(\varphi_1^i, \varphi_2^{i-1}) - 2\Psi(\varphi_1^i, \varphi_2^i) + \Psi(\varphi_1^i, \varphi_2^{i+1})}{h_2^2} \\ \frac{\partial^2\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} &= \frac{\partial^2\Psi(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1} = \frac{\partial}{\partial\varphi_1}\frac{\Psi(\varphi_1, \varphi_2^{i+1}) - \Psi(\varphi_1, \varphi_2^{i-1})}{2h_2} = \\ &= \frac{\Psi(\varphi_1^{i+1}, \varphi_2^{i+1}) - \Psi(\varphi_1^{i+1}, \varphi_2^{i-1})}{4h_2h_1} - \frac{\Psi(\varphi_1^{i-1}, \varphi_2^{i+1}) - \Psi(\varphi_1^{i-1}, \varphi_2^{i-1})}{4h_2h_1} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Получившиеся собственные векторы покажут распределение собственных состояний кубита по различным фазам (т.е. состояниям с определенными фазами). Примеры такого распределения для основного состояния $|g\rangle$ и первого возбужденного состояния $|e\rangle$ приведены на Рис. 1.8. Видно, что эти состояния образуются за счет когерентного квантового туннелирования системы между двумя потенциальными ямами. Высота барьера между двумя потенциальными ямами определяется параметром α , и при $\alpha = 0.5$ барьер исчезает. Поэтому данный параметр значительно влияет на собственные значения энергии и должен

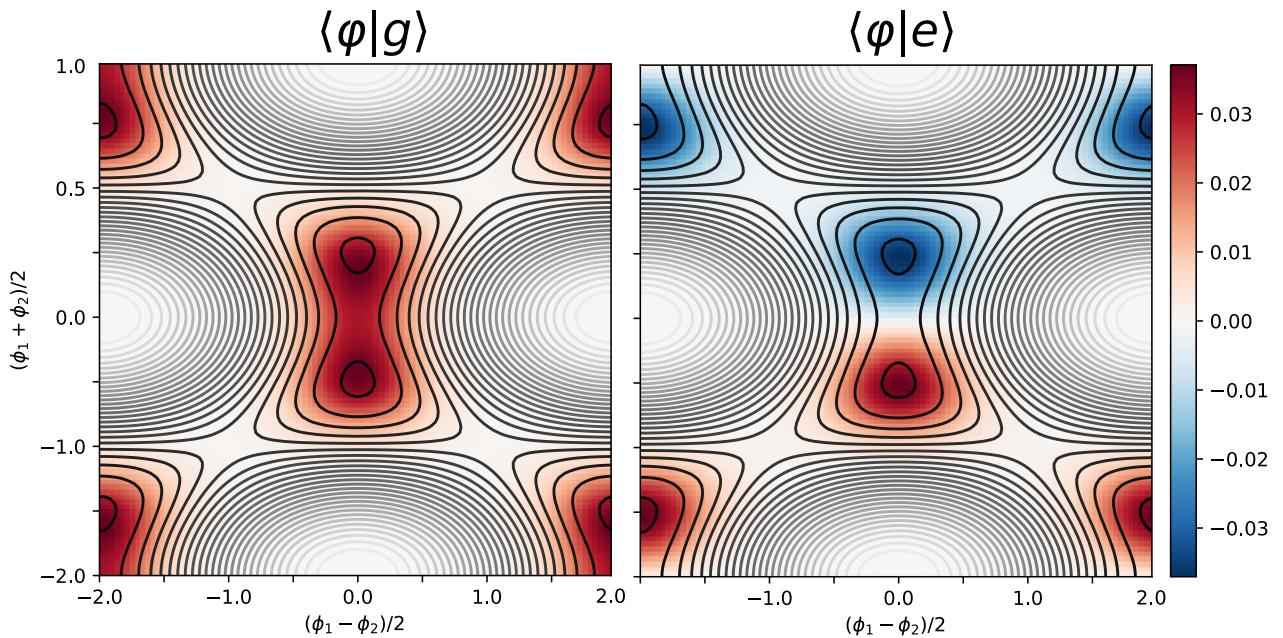


Рисунок 1.8 — Волновая функция основного и первого возбужденного состояний потокового кубита при $\Phi = \Phi_0/2$. Линии уровня отображают потенциальную энергию.

определяться достаточно точно, что может оказаться сложной задачей, особенно при использовании маленьких джозефсоновских переходов размерами порядка 200×200 нм. Поэтому, как правило, воспроизводимость потоковых кубитов оказывается недостаточно хорошей. Также очевидно, что вне точки $\Phi = \Phi_0/2$ кубит восприимчив к потоковому шуму, что неизбежно будет вызывать дефазировку. Тем не менее, потоковый кубит остается достаточно интересен, прежде всего, за счет большого ангармонизма по сравнению с трансмоном, речь о котором пойдет ниже.

1.2.6 Трансмон

Рассмотренный в разделе 1.2.3 зарядовый кубит обладал многими несовершенствами. Попытки развития и совершенствования данного кубита привели к созданию кубита-трансмона. Трансмон — это зарядовый кубит, шунтированный большой емкостью, у которого $E_C \ll E_J$ (обычно в 50 раз и более). Идея создания такого кубита впервые появилась в [50], позднее было проведено подробное теоретическое исследование данных кубитов [51] и практически сразу же последовали первые эксперименты с трансмонами [52]. Для того, чтобы

проиллюстрировать необходимость такой модификации, приведем на Рис. 1.9 относительный ангармонизм трансмона $(\omega_{10} - \omega_{21})/\omega_{10}$ и относительное изменение частот нижних переходов трансмона при изменении наведенного заряда n_g , то есть величину $|\omega_{i0}(n_g = e) - \omega_{i0}(n_g = 0)|/\omega_{i0}(n_g = 0)$. для различных значений отношения E_C/E_J . При уменьшении этого отношения уменьшается ангармонизм кубита. Для значений $E_C/E_J \approx 5$ кубит становится более похожим

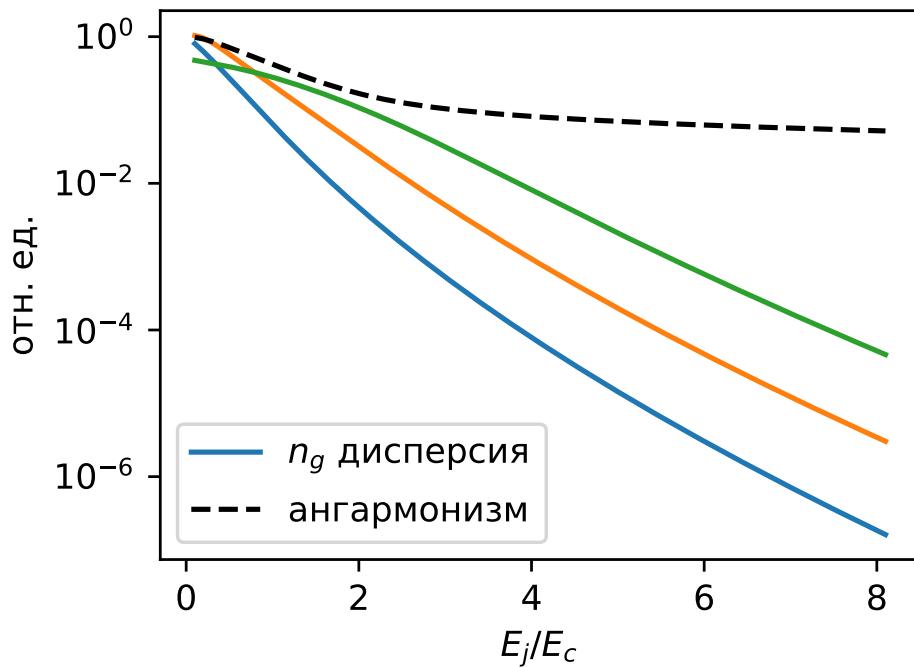


Рисунок 1.9 — Изменение относительной зарядовой дисперсии для переходов 0-1 трансмона и изменение ангармонизма основного перехода 0-1 в зависимости от отношения E_J/E_C . $E_C/h = 2$ ГГц

на гармонический осциллятор с относительно слабой нелинейностью в 5-10% — казалось бы, в таком эффекте нет никакой практической пользы. Но основным положительным эффектом от уменьшения E_C/E_J является экспоненциально резкое падение зависимости энергетических уровней от n_g — так называемой зарядовой дисперсии. Особенно резко она уменьшается именно для низколежащих уровней, которые и используются на практике в качестве уровней кубита. Таким образом, удается достичь такого режима, когда ангармонизм еще достаточно большой и во многих ситуациях можно пренебречь верхними уровнями (или учесть их слабое влияние на динамику заселенности двух нижних уровней), и в то же время нежелательная зарядовая чувствительность практически подавлена. По этой причине для трансмонов характерны большие времена релаксации

и декогеренции по сравнению как с зарядовыми, так и с потоковыми кубитами. Использование трансмонов при создании многокубитных схем оказалось весьма плодотворным, так как удалось разработать универсальные процессоры из 10 и более кубитов с полным контролем квантовых состояний. Однако, необходимо отметить, что во многих задачах трансмон нужно рассматривать как слабо нелинейный гармонический осциллятор, учитывая таким образом вклад верхних уровней. Например, при быстрых однокубитных операциях с трансмоном серьезную проблему представляют утечки заселенности кубита на второй возбуждённый уровень, которые необходимо предотвращать при помощи специальной коррекции управляющих импульсов.

1.2.7 вч-СКВИД

Высокочастотный СКВИД - это прибор, представляющий собой джозефсонский переход, шунтированный линейной индуктивностью L . Данный прибор изначально был предложен в 1965 г. для высокоточных измерений магнитного поля. Рассмотрим электрическую цепь вч-СКВИДа в квантовом режиме, см. Рис. Гамильтониан цепи имеет вид:

$$H = E_C \frac{n^2}{2} - E_J \cos(\phi - 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) + E_L \frac{\phi^2}{2} \quad (1.37)$$

Зарядовая энергия возникает в результате внутренней емкости перехода и, возможно, некоторой паразитной емкости, которой обладает индуктивность из-за своего большого размера. Динамика фазовой переменной φ аналогична динамике координаты квантовой частицы, помещенной в параболический потенциал, модулированный гармонической функцией. При этом масса частицы обратно пропорциональна емкости. Большая емкость локализует систему в одной из потенциальных ям, малая же емкость приводит к тому, что собственные состояния имеют достаточно большую неопределенность по фазе. Особый интерес представляет режим, когда $E_L \ll E_C < E_J$. В этом случае образуется несколько низколежащих потенциальных ям практически с одинаковой энергией, и соответствующие состояния гибридизуются. Получаемая при этом структура уровней сильно зависит от внешнего магнитного потока. Было показано, что в таком кубите возможно подавление квазичастичной релаксации, что было

использовано для достижения времен жизни в несколько милисекунд. Однако, времена когерентности до недавнего времени оставались на уровне единиц микросекунд, и лишь в последнее время удалось повысить их до уровня кубитов-трансмонов [53].

1.3 Микроволновая квантовая оптика

В этом разделе будет обсуждаться квантовооптические эффекты, возникающие при взаимодействии отдельных сверхпроводниковых кубитов с микроволновым излучением. За исключением некоторых общих вопросов, преимущественно будет рассматриваться кубит, встроенный в волновод и сильно связанный с модами излучения в этом волноводе. Одной из особенностей, нехарактерных для «природных» атомов, является возможность эффективной передачи квантового состояния кубита в волновод. Это дает возможность собрать излучение от кубита и анализируя его, наблюдать фундаментальные явления, такие как резонансная флуоресценция, электромагнитно-индукционная прозрачность, керровскую нелинейность одиночного атома и многие другие любопытные физические эффекты.

1.3.1 Кубит как открытая квантовая система. Релаксация и дефазировка

До сих пор мы рассматривали кубит как изолированную квантовую систему. Однако, в реальной физической ситуации кубит будет взаимодействовать с бесконечным количеством других квантовых систем. К примеру, значительное влияние на кубит оказывают так называемые *двухуровневые дефекты* — локализованные спины, возникающие из-за различных примесей или вакансий в кремниевой подложке. Такое окружение является практически неуправляемым и имеет бесконечно большое число степеней свободы. Поэтому составить и тем более решить уравнения движения для сложной системы «кубит+окружение» не представляется возможным. Необходимо использовать специально разработанные методы приближенного описания динамики относительно простой

квантовой системы (в данном случае кубита) в произвольном окружении с макроскопически большим числом степеней свободы.

Принципиальный подход учета влияния окружения B на квантовую систему S состоит в следующем. Составная система $S + B$ описывается матрицей плотности $\rho(t) = \rho_B(t) \otimes \rho_S(t)$, которая меняется во времени по эволюционному закону. Если же мы хотим выделить и описать процессы, происходящие с S , то можно ввести некоторое динамическое отображение $V(t)$, преобразующее матрицу плотности по закону $\rho_S(t) = V(t)\rho_S(0)$. Разумеется, его можно получить из закона унитарной эволюции полной системы при помощи взятия следа по переменным окружения, но как было сказано выше, этот закон достаточно сложен, и скорее всего, неизвестен. Поэтому нужно получить явный вид $V(t)$ из некоторых предположений о характере взаимодействия системы и окружения.

Предположим, что система взаимодействует с окружением через некоторые операторы \hat{A}_i , то есть, гамильтониан взаимодействия содержит эти операторы, действующие на переменные системы, в составе тензорного произведения с какими-то операторами окружения. Для сверхпроводящих кубитов во многих случаях справедливо *Марковское приближение*. Его суть в том, что окружение предполагается состоящим из макроскопически большого числа взаимодействующих между собой квантовых систем. Поэтому можно считать корреляционное время окружения гораздо меньшим чем характерное время распада квантового состояния отдельного кубита. В этом приближении можно показать, что динамика системы описывается так называемым Линбладовским уравнением:

$$\frac{d}{dt}\rho_S = \mathcal{L}\rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho_S] + \sum_{i=0}^{N^2-1} \gamma_i (A_i \rho_S A_i^\dagger - \frac{1}{2} \{A_i A_i^\dagger, \rho_S\}) \quad (1.38)$$

Второй член уравнения, представленный в виде суммы, называется *диссипатором* и обозначается $\mathcal{D}\rho_S$. Операторы A_i называются операторами Линблада для различных каналов распада системы, а γ_i — скорости распада системы по различным каналам, они имеют размерность обратного времени зависят от силы связи и от корреляционных функций окружения. Это уравнение дает возможность учсть различные механизмы влияния окружения на кубит. На примере одиночного кубита рассмотрим основные каналы распада квантового состояния.

Релаксация кубита

Кубит с гамильонианом $\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z$ может взаимодействовать с окружением посредством обмена квантами возбуждения, или энергией. Такое взаимодействие описывается гамильтонианом типа $H_{int} = \gamma(\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_+\hat{a})$. Используя (1.38), получим выражение для диссипатора:

$$\mathcal{D}\rho_S(t) = \gamma \left(\sigma_- \rho_S(t) \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho_S(t) - \frac{1}{2} \rho_S(t) \sigma_- \sigma_+ \right), \quad (1.39)$$

, или в явной матричной записи:

$$\mathcal{D}\rho_S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \gamma(-\rho_z(t) - 1) & \frac{\gamma}{2}(-\rho_x(t) + i\rho_y(t)) \\ \frac{\gamma}{2}(-\rho_x(t) - i\rho_y(t)) & \gamma(\rho_z(t) + 1) \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

где ρ_x, ρ_y, ρ_z - компоненты блоховского вектора, введенного в (1.19). Диагональные члены полученной матрицы показывают, что диссипация в первую очередь вызывает плавное «перетекание» заселенности состояния $|1\rangle$ в состояние $|0\rangle$, а недиагональные члены выражают тот факт, что любой канал распада состояния кубита со скоростью γ также вносит дефазировку когерентностей кубита со скоростью $\gamma/2$.

Чистая дефазировка

Еще один способ взаимодействия с окружением — это влияние на резонансную частоту кубита, например, взаимодействие типа $H_{int} = \gamma_\phi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z$. Это взаимодействие может реализовываться, например, в дисперсионном режиме модели Джейнса-Каммингса (см. ниже), когда перебросы двухуровневых систем в подложке эффективно вызывают сдвиг частоты перехода кубита. Более сложные механизмы дефазировки, связанные с вовлечением виртуальных двухфотонных процессов, описываются в [54]. При этом результирующий диссипатор имеет вид:

$$\mathcal{D}\rho_S(t) = \frac{\gamma_\phi}{2} (\sigma_z \rho_S(t) \sigma_z - \rho_S(t)) = \frac{\gamma_\phi}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\rho_x(t) - i\rho_y(t) \\ -\rho_x(t) + i\rho_y(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

Недиагональные члены этого диссипатора вызывают затухание когерентностей кубита со скоростью $\gamma_\phi/2$, при этом никак не изменяются диагональные члены матрицы плотности.

1.3.2 Взаимодействие искусственного атома с внешним полем.

Гамильтониан Джейнса-Каммингса.

Рассмотрим, как одиночный естественный атом, расположенный в открытом пространстве, взаимодействует с падающим на него монохроматическим излучением. Будем работать в т.н. *дипольном приближении*, которое предполагает, что длина волны электромагнитного поля гораздо больше размеров атома. Для случая сверхпроводникового кубита размерами 10-100 мкм это приближение выполняется для любых частот гигагерцового диапазона. Гамильтониан взаимодействия кубита и атома можно записать как $H_{int} = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ где \mathbf{d} — оператор дипольного момента сверхпроводникового искусственного атома. Мы в данном случае предположили что атом связывается с напряженностью \mathbf{E} электрического поля в точке расположения атома. Дипольный момент записывается как $\mathbf{d} = e \langle g | \mathbf{r} | e \rangle (\sigma_+ + \sigma_-)$, а стандартная процедура квантования поля дает для \mathbf{E} следующее выражение:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\omega} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}} (a_{\omega}^{\dagger} + a_{\omega}) .$$

После подстановки этих выражений в гамильтониан взаимодействия и учета гамильтонианов кубита и поля получается гамильтониан Раби:

$$H_R = \int_{\omega} \hbar\omega a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} + \frac{1}{2} \hbar\omega_q \sigma_z + \hbar \int_{\omega} g_{\omega} (a_{\omega}^{\dagger} + a_{\omega}) (\sigma_- + \sigma_+). \quad (1.42)$$

Интегрирование здесь и ранее ведется по континууму мод, которые могут распространяться в волноводе. Если предположить, что константы связи g_{ω} достаточно малы по сравнению с частотой кубита, то справедливо приближение вращающейся волны. При переходе во вращающуюся систему отсчета с помощью унитарного преобразования $U_R = \exp(-i/2\hbar(\omega_q \sigma_z + \omega a^{\dagger} a))$ слагаемые $a^{\dagger} \sigma_+$ и $a \sigma_-$ приобретут быстроосциллирующие множители $\exp(\pm(\omega + \omega_q)t)$.

Эти множители практически не вносят вклада в динамику системы, поскольку:

$$\int e^{\pm in\omega t} dt = \frac{e^{\pm in\omega t}}{\pm in\omega} \propto \frac{1}{\omega}.$$

Отбрасывая эти слагаемые, получаем гамильтониан Джейнса-Каммингса:

$$H_{J-C} = \int_{\omega} \hbar\omega a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} + \frac{1}{2} \hbar\omega_q \sigma_z + \hbar \int g_{\omega} (a_{\omega}^{\dagger} \sigma_{-} + a_{\omega} \sigma_{+}). \quad (1.43)$$

Отметим, что для распространения волны частотой 1-10 ГГц в копланарной проходной линии в случае, когда длина волны много превышает размер зазора, возможна только одна поляризация, при которой электрическое поле лежит в плоскости линии и направлено от центральной жилы к заземленным плоскостям (в течение одного полупериода колебаний). Все остальные моды, в том числе т.н. *нечетные* моды, при которых ток течет по краям центральной жилы в противоположные стороны, а электрическое поле по обе стороны центральной жилы направлено в одну сторону, имеют гораздо более высокую частоту и не возбуждаются в интересующем нас диапазоне.

1.3.3 Режим сильной связи

Понятие режима сильной связи можно применить к любым двум квантовым системам, которые взаимодействуют между собой. Для любых таких систем можно записать гамильтониан, который будет содержать часть, описывающую взаимодействие. Любое взаимодействие сводится к некоторой эффективной константе связи g , имеющей размерность энергии (частоты). При этом, помимо взаимодействия друг с другом, каждая из систем имеет некоторые потери энергии и/или дефазировку за счет взаимодействия со своим окружением, и эти потери тоже характеризуются некоторыми константами $\{\Gamma\}$. Для изучения совместной квантовой динамики систем наиболее интересным представляется случай, когда $g \gg \Gamma_i \in \{\Gamma\}$, то есть, сила взаимодействия значительно превосходит все возможные «паразитные» процессы, вызванные окружением и приводящие к потере квантового состояния в каждой из систем. В таком случае говорят, что эти системы находятся в режиме сильной связи. В случае атома, сильно связанного с электромагнитным полем внутри резонатора или проходной

линии, возникает ряд интересных физических явлений, например, вакуумное Раби-расщепление

Рассмотрим одномодовый случай модели Джейнса-Каммингса, который реализуется в случае связи кубита и резонатора. Покажем, что эта модель допускает точное решение. Естественный базис совместного гильбертова пространства состояний кубита и резонатора $H_Q \otimes H_R$ можно составить из функций $\{|e,g\rangle; n\} \in \mathcal{N}$, в котором гамильтониан примет блочно-диагональный вид:

$$H_{JC}/\hbar = \begin{matrix} \text{state} & |e,n-1\rangle & |g,n\rangle \\ |e,n-1\rangle & \omega_q + (n-1)\omega & g\sqrt{n} \\ |g,n\rangle & g\sqrt{n} & n\omega \end{matrix} \quad (1.44)$$

Состояния гибридизуются попарно, и результирующие собственные энергии и состояния модели выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} |-,n\rangle &= \cos \theta_n |g,n\rangle - \sin \theta_n |e,n-1\rangle, \\ |+,n\rangle &= \cos \theta_n |g,n\rangle + \sin \theta_n |e,n-1\rangle, \text{ где} \\ \theta_n &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2g\sqrt{n}}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (1.45)$$

1.3.4 Эластичное и неэластичное рассеяние в копланарной линии

В этом разделе будет рассмотрен процесс взаимодействия кубита и электромагнитный волны, распространяющейся в копланарной проходной линии вдоль оси x . Несмотря на кажущуюся простоту задачи, физическая суть происходящих при этом рассеяния явлений достаточно сложна. Будет показано, что есть принципиально различные компоненты рассеянного кубитом сигнала: *эластичная* и *неэластичная* компонента. Для этого необходимо будет записать и решить уравнения динамики кубита с учетом релаксации в линию и проанализировать полученное стационарное решение.

Классическое поле в линии

Начнем с классического описания взаимодействия некоторой системы, связанной с электромагнитным полем в линии. По сути, будет рассматриваться классический вариант *теории входа-выхода*. Линия обладает погонной емкостью c и погонной индуктивностью l . Распространяющая волна создает некоторое распределение тока и напряжения вдоль линии. Уравнения, описывающие это распределение, называются *телеографными уравнениями* и записываются следующим образом:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -l \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -c \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \quad (1.46)$$

Для удобства можно также разделить волны, распространяющиеся направо и налево в линии, сопоставив им соответствующие напряжения $V^{\rightarrow}(x,t)$ и $V^{\leftarrow}(x,t)$. Тогда полное напряжение и ток в линии записываются как:

$$\begin{aligned} V(x,t) &= V^{\rightarrow}(x,t) + V^{\leftarrow}(x,t) \\ I(x,t) &= \frac{1}{Z}(V^{\rightarrow}(x,t) - V^{\leftarrow}(x,t)), \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $Z = \sqrt{l/c}$ - волновое сопротивление линии. Волновые уравнения принимают вид:

$$v \frac{\partial V^{\rightarrow}(x,t)}{\partial x} = - \frac{\partial V^{\rightarrow}(x,t)}{\partial t}, v \frac{\partial V^{\leftarrow}(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial V^{\leftarrow}(x,t)}{\partial t}, \quad (1.48)$$

где $v = 1/\sqrt{lc}$ - скорость распространения волны. Часто встречается случай, когда полубесконечная линия при $x > 0$ замыкается на некоторую электрическую схему S , например, сверхпроводниковый кубит, расположенный в точке $x = 0$. Тогда по отношению к этой схеме можно рассматривать возможные решения (1.48) как входное и выходное напряжение, соответственно: $V^{\leftarrow}(t - x/v) \equiv V_{in}(t - x/v)$ и $V^{\rightarrow}(t + x/v) \equiv V_{out}(t + x/v)$. Используя (1.47), можно получить связь входного и выходного напряжений:

$$V_{out}(t) = V_{in}(t) + ZI(0,t) \quad (1.49)$$

Для того, чтобы эти уравнения полностью определяли ток и напряжение в линии, к ним необходимо добавить граничные условия, соответствующие реальной физической задаче.

- Если никакой системы нет и в точке $x = 0$ линия претерпевает разрыв, то $I(0,t) = 0$. Поэтому из (1.49) следует идеальное отражение волны: $V_{out}(t) = V_{in}(t)$.
- Если отсутствует входной сигнал, то получаем $V_{out}(t) = ZI(0,t)$. Полубесконечная линия представляет из себя резистор с сопротивлением Z , подключенный к системе в качестве нагрузки. Измеряя напряжение $V_{out}(t)$, можно изучать динамику распада системы.
- В наиболее общем случае $I(0,t) \neq 0$, и схема инжектирует ток в линию. При необходимости можно рассчитать напряжение в точке $x = 0$: $V(0,t) = 2V_{in}(t) + ZI(0,t)$.

Взаимодействие кубита с классическим полем в линии

Рассмотрим отдельный сверхпроводящий кубит, подключенный к бесконечной линии в точке $x = 0$ при помощи связывающей емкости, см. Рис. Применим к нему классическую теорию входа-выхода, изложенную также в [55]. Это даст возможность получить аналитическое выражение для эластично рассеянного поля.

Согласно схеме подключения кубита, появляется дополнительный узел электрической цепи, через который в линию будет втекать дополнительный ток из кубита. Таким образом, граничные условия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} V(-0,t) &= V(+0,t) \\ I(-0,t) + C_c \frac{d\langle \hat{V}_q \rangle}{dt} &= I(+0,t) \end{aligned} \tag{1.50}$$

Из граничных условий видно, что напряжение в точке $x = 0$ меняется непрерывно, тогда как ток претерпевает скачок. Поэтому удобно рассмотреть ситуацию, когда распространяющаяся слева направо электромагнитная волна, амплитуда напряжения в которой равна V_0 , претерпевает рассеяние на кубите. Запишем напряжение слева и справа от кубита в виде:

$$\begin{aligned} V(x > 0,t) &= tV_0 e^{-i(\omega t - kx)} \\ V(x < 0,t) &= V_0 e^{-i(\omega t - kx)} - rV_0 e^{-i(\omega t + kx)} \end{aligned} \tag{1.51}$$

Из этих уравнений с учетом условий (1.50) получаем, что $t = 1 - r$. Подставляя (1.51) во второе уравнение в (1.46) и интегрируя по координате x , получаем уравнения для тока:

$$\begin{aligned} I(x < 0, t) &= cV_0 \frac{\omega}{k} \cdot (re^{-i(\omega t + kx)} + e^{-i(\omega t - kx)}) \\ I(x > 0, t) &= cV_0 \frac{\omega}{k} \cdot te^{-i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Комбинируя эти выражения с уравнением для тока из (1.50), получим еще одно соотношение для коэффициентов прохождения и отражения:

$$1 + r = t + C_c \frac{k}{\omega c V_0} \frac{d\langle \hat{V}_q \rangle}{dt} e^{i\omega t}. \quad (1.53)$$

Учитывая что $\omega/k = v = 1/\sqrt{lc}$ - скорость распространения света в линии, получаем окончательное выражение для коэффициента отражения:

$$r = \frac{Z}{2V_0} C_c \frac{d\langle \hat{V}_q \rangle}{dt} e^{i\omega t} \quad (1.54)$$

Основное квантовое уравнение кубита под действием резонансного поля

Амплитудные коэффициенты отражения и прохождения достаточно удобны для их непосредственного измерения. Однако, полученное выражение (1.54) для r и аналогичное выражение для t непригодны для подгонки практических результатов, так как остается необходимым проанализировать операторный множитель и выразить его через измеряемые характеристики системы.

Для простоты рассмотрим случай зарядового кубита в точке вырождения $\theta = \pi/2$. Оператор напряжения на связывающем конденсаторе пропорционален заряду кубитного острова $\langle \dot{V}_q \rangle = \langle \dot{q} \rangle / C_\Sigma$, где C_Σ - суммарная емкость между островом и землей. Согласно (1.30), собственные состояния кубита в точке вырождения выражаются через зарядовые состояния как $|g\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ и $|e\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, поэтому в матричном виде можно записать:

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \langle e | \hat{q} | e \rangle & \langle e | \hat{q} | g \rangle \\ \langle g | \hat{q} | e \rangle & \langle g | \hat{q} | g \rangle \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.55)$$

значит, $\langle \dot{q} \rangle = e \frac{d\langle \sigma_x(t) \rangle}{dt}$. Усреднение в данном случае означает математическое ожидание оператора по состоянию кубита. Поскольку кубит бесконечно долго

взаимодействует с непрерывной волной и при этом одновременно излучает в линию, то логично предположить, что эти процессы компенсируют друг друга. Поэтому с течением времени кубит должен оказаться в некотором стационарном состоянии, которое можно определить из условия $\dot{\rho} = 0$. Для нахождения $\langle \sigma_x(t) \rangle$ необходимо записать и решить основное квантовое уравнение для кубита. Гамильтониан взаимодействия зарядового кубита с напряжением в линии имеет вид:

$$H_{int} = C_c V \hat{V}_q = \frac{C_c}{C_\Sigma} V_0 \cos(\omega_d t + \varphi) \langle g | \hat{q} | e \rangle \sigma_x, \quad (1.56)$$

причем для зарядового кубита $\langle g | \hat{q} | e \rangle = e$. Для случая трансмона [51] собственные состояния являются суперпозициями большого числа зарядовых состояний, поэтому рассчитать матричный элемент несколько сложнее:

$$\langle g | \hat{q} | e \rangle = \frac{2e}{\sqrt{2}} \left(\frac{E_J}{E_C} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.57)$$

Вводя обозначение для емкостного коэффициента эффективности связи $\beta = C_c/C_\Sigma$ и Раби-частоты $\Omega = \beta V_0 \langle g | \hat{q} | e \rangle / \hbar$, получаем из (1.56) окончательное выражения для гамильтониана взаимодействия. Полный гамильтониан примет вид:

$$H = H_q + H_{int} = -\frac{\hbar \omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar \Omega \cos(\omega_d t + \varphi) \hat{\sigma}_x \quad (1.58)$$

Чтобы вывести основное квантовое уравнение, сначала воспользуемся приближением вращающейся волны, описанным в разделе 1.2.1. Преобразуя H при помощи унитарного преобразования $U = \exp(-i\omega_d \hat{\sigma}_z / 2\hbar)$, имеем:

$$H_{rwa} = U H U^\dagger - i U \dot{U}^\dagger \approx \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} -\omega_d + \omega_q & \Omega e^{-i\varphi} \\ \Omega e^{i\varphi} & \omega_d - \omega_q \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

где были отброшены быстро осциллирующие члены $\Omega e^{\pm i\varphi} e^{\pm 2i\omega_d t}$ в недиагональных слагаемых. Используя этот гамильтониан, можно записать основное квантовое уравнение, представляющее собой уравнение Лиувилля-фон Неймана для эволюции квантовой системы, описывающейся оператором плотности и линбладовский член, характеризующий взаимодействие с внешней средой:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_{rwa}, \rho] + \mathcal{L}. \quad (1.60)$$

Линдбладовский член, который включает в себя релаксацию Γ_1 и дефазировку γ_ϕ , описанные ранее в разделе 1.3.1, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -\Gamma_1(\rho_z + 1) & -\Gamma_1\left(\frac{\rho_x}{2} - \frac{i\rho_y}{2}\right) - \gamma_\phi(\rho_x - i\rho_y) \\ -\Gamma_1\left(\frac{\rho_x}{2} + \frac{i\rho_y}{2}\right) - \gamma_\phi(\rho_x + i\rho_y) & \Gamma_1(\rho_z + 1) \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

После преобразований уравнение запишется в следующем виде:

$$\dot{\vec{\sigma}}(t) = \mathbf{M}\vec{\sigma}(t) + \vec{b}, \quad (1.62)$$

где введены обозначения:

$$\vec{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \rho_x(t) \\ \rho_y(t) \\ \rho_z(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\frac{\Gamma_1}{2} - \gamma_\phi & \omega_d - \omega_q & \Omega \sin \varphi \\ -\omega_d + \omega_q & -\frac{\Gamma_1}{2} - \gamma_\phi & -\Omega \cos \varphi \\ -\Omega \sin \varphi & \Omega \cos \varphi & -\Gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Gamma_1 \end{bmatrix}. \quad (1.63)$$

Уравнения (1.62) называются *уравнениями Блоха* и полностью описывают динамику двухуровневой системы, связанной с окружением и находящейся под действием внешнего электромагнитного поля.

Динамика состояния кубита под действием поля

Уравнения Блоха (1.62) могут быть решены точно. Для получения решения воспользуемся подстановкой $\vec{\sigma}(t) = e^{\mathbf{M}t}\vec{v}(t)$, которая преобразует уравнение (1.62) к виду:

$$e^{\mathbf{M}t}\dot{\vec{v}}(t) = \vec{b}, \quad (1.64)$$

откуда формальным интегрированием получаем: $\vec{v} = -\mathbf{M}^{-1}e^{-\mathbf{M}t}\vec{b} + \vec{v}_0$. Константа интегрирования \vec{v}_0 зависит от начального состояния атома: $\vec{\sigma}_0 = -\mathbf{M}^{-1}\vec{b} + \vec{v}_0$. С учетом этого получаем окончательное выражение:

$$\vec{\sigma}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\vec{b} + e^{\mathbf{M}t}\left(\vec{\sigma}_0 + \mathbf{M}^{-1}\vec{b}\right) \quad (1.65)$$

Окончательные выражения, описывающие динамику атома, достаточно громоздки. Выпишем решение для частного случая $\varphi = 0, \delta\omega = \omega_q - \omega_d = 0$:

$$\frac{1}{2(2\Omega^2 + 2\gamma_\varphi\Gamma_1 + \Gamma_1^2)\Omega_r} \begin{bmatrix} 0 \\ 4\Omega\Gamma_1\Omega_r + e^{-\Gamma_r t}\Omega\left[\left(4\Omega^2 + 2\gamma_\varphi\Gamma_1 - \Gamma_1^2\right)\sin\Omega_rt - 4\Gamma_1\Omega_r\cos\Omega_rt\right] \\ -2\Gamma_1(2\gamma_\varphi + \Gamma_1)\Omega_r - e^{-\Gamma_r t}\Omega^2\left[(2\gamma_\varphi + 3\Gamma_1)\sin\Omega_rt + 4\Omega_r\cos\Omega_rt\right] \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

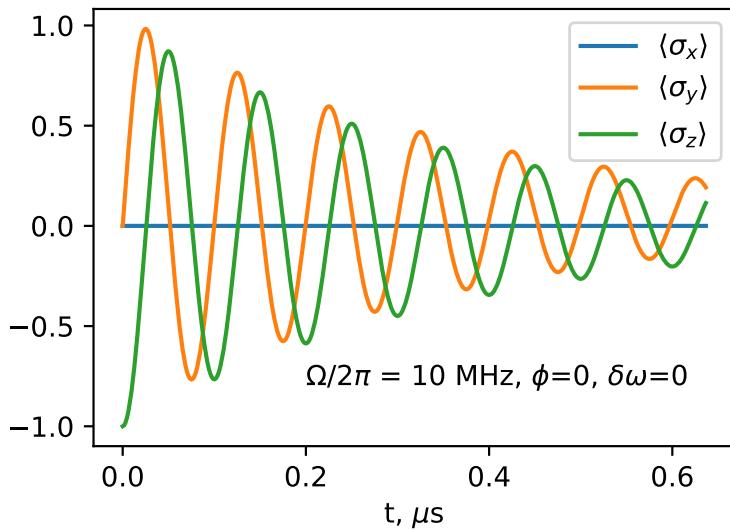


Рисунок 1.10 — Динамика среднего состояния кубита под воздействием поля.

Компоненты блоховского вектора $\{\langle \sigma_x(t) \rangle, \langle \sigma_y(t) \rangle, \langle \sigma_z(t) \rangle\}$ в явном виде заданы выражением (1.66).

Можно заметить, что динамика имеет вид осцилляций, которые затухают со временем, см. Рис. 1.10. Они называются осцилляциями Раби.

Отметим некоторые особенности полученного решения. Во-первых, частота Раби осцилляций определяется как $\Omega_r = \sqrt{\Omega^2 - (\Gamma_1 - 2\gamma_\varphi)^2/16}$, и практически совпадает с Ω в случае достаточно сильного драйва. Затухание Раби-осцилляций определяется как $\Gamma_r = \frac{1}{4} (2\gamma_\varphi + 3\Gamma_1) = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$. Этот результат качественно объясняется тем, что примерно половину времени кубит проводит на экваторе сферы Блоха, где он существенно подвержен влиянию дефазировки, а другую половину кубит имеет положительную проекцию на ось z , и соответственно, подвержен влиянию затухания. В случае $\delta\omega \neq 0$ окончательный ответ еще более громоздкий, поэтому мы не приводим уравнения, описывающие динамику в этом более общем случае. Динамика кубита при ненулевой отстройке изображена на Рис. 1.11 и 1.12. Заметим, что общий характер колебаний остается примерно таким же, что и в случае $\delta\omega = 0$, однако, заметно меняется конечное состояние кубита, в котором он оказывается после осцилляций — стационарное состояние. Получим явное выражение, описывающее стационарное состояние кубита.

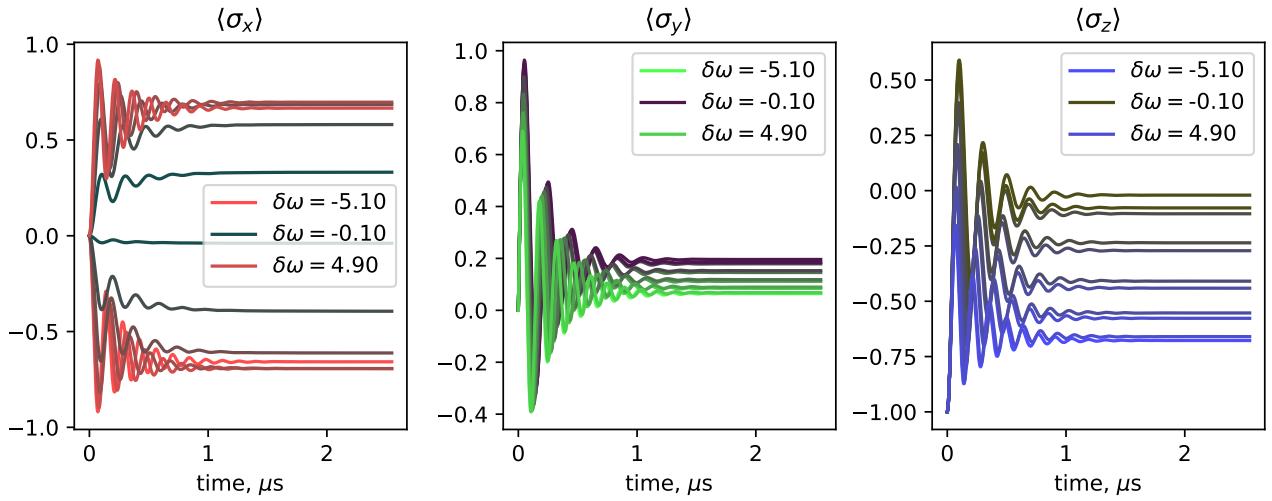


Рисунок 1.11 — Динамика компонент блоховского вектора $\vec{\sigma}(t)$ для $\Gamma_1 = 0.5$, $\gamma_\varphi = 0.1$, $\Omega = 10$ МГц. Линии на каждом из графиков соответствуют значениям $\delta\omega = [-5.1, 4.9]$ МГц

Стационарное решение уравнений Блоха

Поскольку кубит постоянно взаимодействует с полем, время от времени обмениваясь энергией или информацией с внешней средой, то можно предположить, что времененная динамика матрицы плотности, которая, строго говоря, описывает распределение эволюций одинаковых систем, через достаточно долгое время придет к некоторому стационарному значению $\vec{\sigma}_{st}$. Это легко проверить, положив в уравнениях (1.62) $\dot{\vec{\sigma}}(t) = 0$, что делает дифференциальные уравнения алгебраическими. Полагая $\varphi = 0$ (что задает вращение вокруг оси x) и решая уравнения относительно компонент блоховского вектора, находим:

$$\begin{aligned} \rho_x &= \frac{4\Gamma_1\Omega\delta\omega}{4\Gamma_1\delta\omega^2 + \Gamma_1(\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)^2 + 2\Omega^2(\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)}, \\ \rho_y &= \frac{2\Gamma_1\Omega(\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)}{4\Gamma_1\delta\omega^2 + \Gamma_1(\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)^2 + 2\Omega^2(\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)}, \\ \rho_z &= -\frac{\Gamma_1(4\delta\omega^2 + (\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)^2)}{4\Gamma_1\delta\omega^2 + \Gamma_1(\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)^2 + 2\Omega^2(\Gamma_1 + 2\gamma_\varphi)}, \end{aligned} \quad (1.67)$$

где введено обозначение $\delta\omega = \omega_d - \omega_q$. Стационарные состояния в зависимости от параметров $\Omega, \Gamma_1, \gamma_\varphi$ изображено на Рис. 1.13. В случае $\Omega \ll \Gamma_1$ стационарное состояние приближено к состоянию $|0\rangle$, поскольку поле достаточно слабое

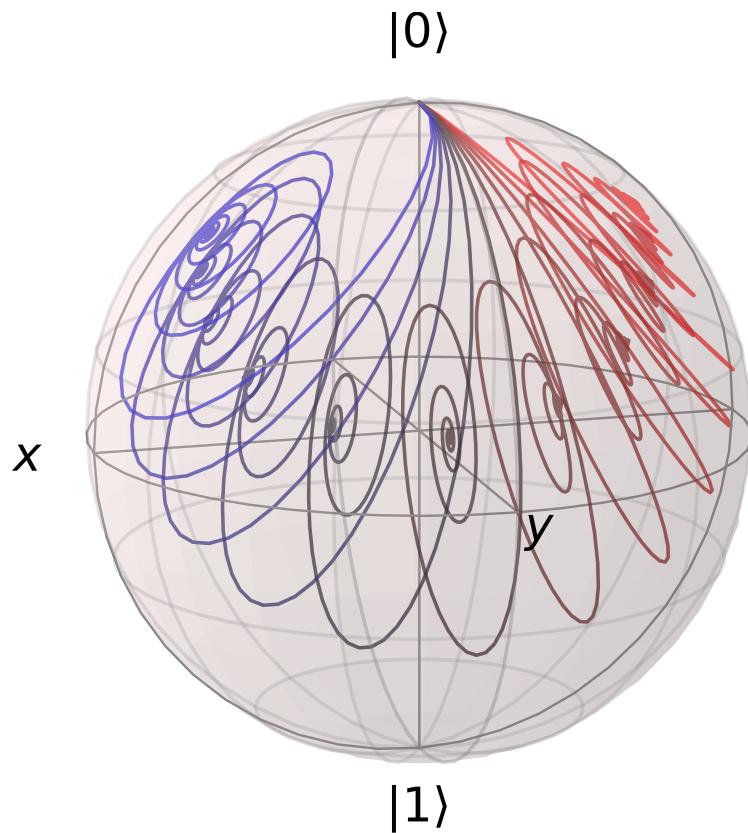


Рисунок 1.12 — Динамика состояния кубита при ненулевой отстройке внешнего драйва, изображенная на сфере Блоха. Кривые построены при тех же параметрах, которые использованы для Рис. 1.11.

для эффективного возбуждения кубита. В случае $\Omega \gg \Gamma_1$ стационарное состояние приближено к смешанному состоянию, но имеет ненулевую проекцию на экваториальную плоскость. Рассчитаем эластичную часть излучения кубита в стационарном состоянии

Эластичное рассеяние

Поскольку нас интересует сигнал, рассеянный кубитом назад, то необходимо выразить компоненту поля, соответствующую отрицательной частоте, то есть, соответствующую оператору $\langle \hat{\sigma}_- \rangle$. Используя решения (1.67) и возвращаясь в лабораторную систему отчета, получим:

$$\langle \hat{\sigma}_- \rangle = \frac{1}{2} (\rho_x - i\rho_y) = -\frac{\Omega/\Gamma_2}{1 + (\delta\omega/\Gamma_2)^2 + \Omega^2/\Gamma_1\Gamma_2} \left(1 - i\frac{\delta\omega}{\Gamma_2}\right) e^{-i\omega_d t}, \quad (1.68)$$

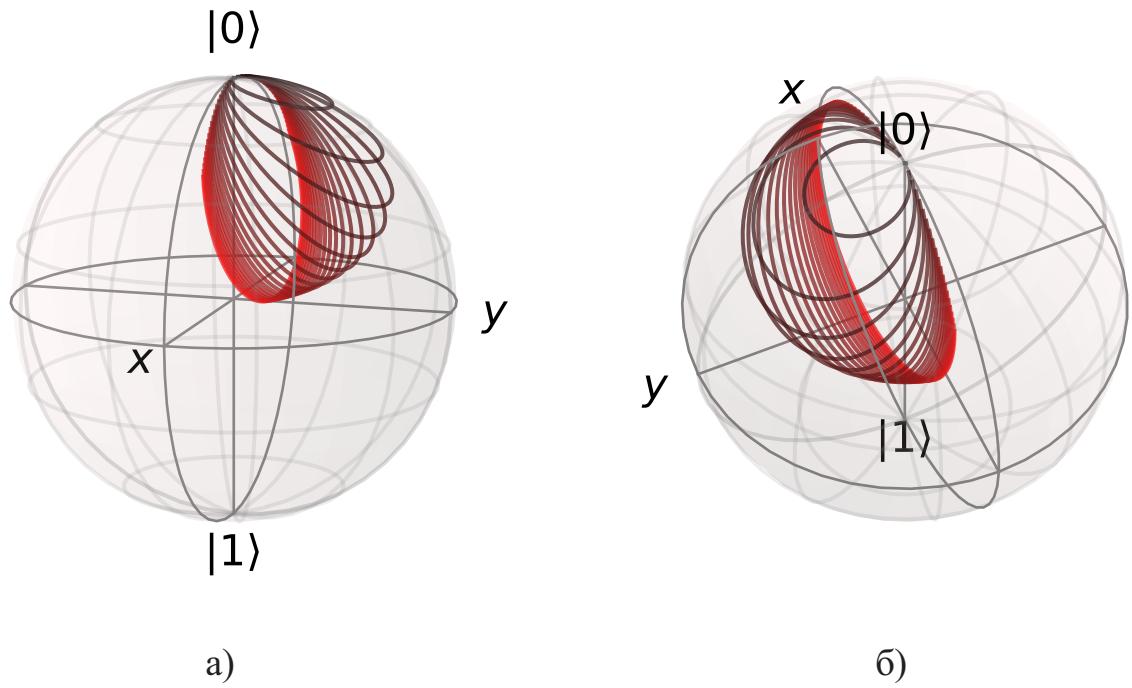


Рисунок 1.13 – Стационарное состояние (1.67) кубита под воздействием поля, изображенное на сфере Блоха. Различные линии соответствуют значениям $\Omega = [0,10]$, $\Gamma_1 = 2$, $\gamma_\varphi = 0$ МГц. Каждая линия соответствует изменению $\delta\omega = [-10,10]$ МГц. Панели а) и б) изображают одни и те же линии под различными ракурсами. Отметим, что эти линии образованы множеством точек, к которым приходит кубит после динамики, изображенной на Рис. 1.12

где $\Gamma_2 = \Gamma_1/2 + \gamma_\varphi$ обозначает полную дефазировку кубита. Выражение (1.68) уже может быть подставлено в (1.54), однако, перед тем как сделать это, необходимо рассмотреть явную связь между излучательной релаксацией Γ_1 кубита в линию и квантовыми флюктуациями электромагнитного поля в линии, вызывающими эту релаксацию. В случае емкостной связи к зарядовому кубиту (или к трансмону) он чувствителен к флюктуациям напряжения в линии, и поскольку кубит подключен к двум полубесконечным линиям с полным импедансом $Z/2$, спектральную плотность флюктуаций напряжения можно записать в виде:

$$S_V(\omega_q > 0) = \hbar\omega_q Z \quad (1.69)$$

Согласно золотому правилу Ферми, релаксация в линию определяется [56] как:

$$\Gamma_1 = \frac{|\langle g|H_{int}|e\rangle|^2}{V_0^2\hbar^2} S_V(\omega_q) = \frac{\omega_q Z}{\hbar} (\beta |\langle g|\hat{q}|e\rangle|)^2 = \frac{\omega_q Z \mu^2}{\hbar}, \quad (1.70)$$

где введен дипольный момент кубита $\mu = \hbar\Omega/V_0$. С учетом этих выражений, (1.54) принимает окончательный вид:

$$r = i \frac{\Gamma_1}{\Omega} \langle \hat{\sigma}_- \rangle e^{i\omega_d t} = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_2} \frac{1 + i\delta\omega/\Gamma_2}{1 + (\delta\omega/\Gamma_2)^2 + \Omega^2/(\Gamma_1\Gamma_2)} \quad (1.71)$$

Несложно показать, что это выражение справедливо как для различных типов кубитов, так и для различного способа связи с линией. Зависимость коэффициента отражения от Ω и $\delta\omega$ приведена на рисунке 1.14. При $\Omega \ll \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}$ частотная зависимость r имеет лоренцевскую форму с шириной линии $2\Gamma_2 \approx \Gamma_1$. При увеличении Ω проявляется нелинейность кубита, и эффективность отражения падает, а форма линии значительно отклоняется от лоренцевской. Это также хорошо иллюстрируется с помощью изображения r на комплексной плоскости.

Рассмотрев стационарное излучение, необходимо вспомнить, что описание кубита при помощи матрицы плотности, находимой при помощи основного квантового уравнения, носит статистический характер. В динамике одиночной системы даже в стационарном состоянии происходит взаимодействие с электромагнитным полем, в результате которого возникают флюктуации измеряемых величин, например, напряжения в линии. Поэтому ясно, что какая-то часть сигнала излучается стохастически и не может быть когерентной, но должна проявляться в полном спектре излучения двухуровневой системы. Опишем, как происходит некогерентное (неэластичное) рассеяние волны на кубите, для чего нам потребуется рассчитать флюктуации поля, излучаемого кубитом в стационарном состоянии (1.67), а затем с использованием этих решений вывести соотношения для некогерентного сигнала, излучаемого кубитом.

Спектр некогерентного излучения

Будем рассматривать комплексный оператор напряжения в линии $\hat{V}(t)$ как некоторый случайный стационарный процесс. К нему можно применить теорему Винера-Хинчина, которая устанавливает однозначную связь между автокорреляционной функцией процесса, которую можно записать в виде $\langle \hat{V}^+(0)\hat{V}^-(\tau) \rangle$, и спектральной плотностью процесса. Будем искать спектральную плотность в

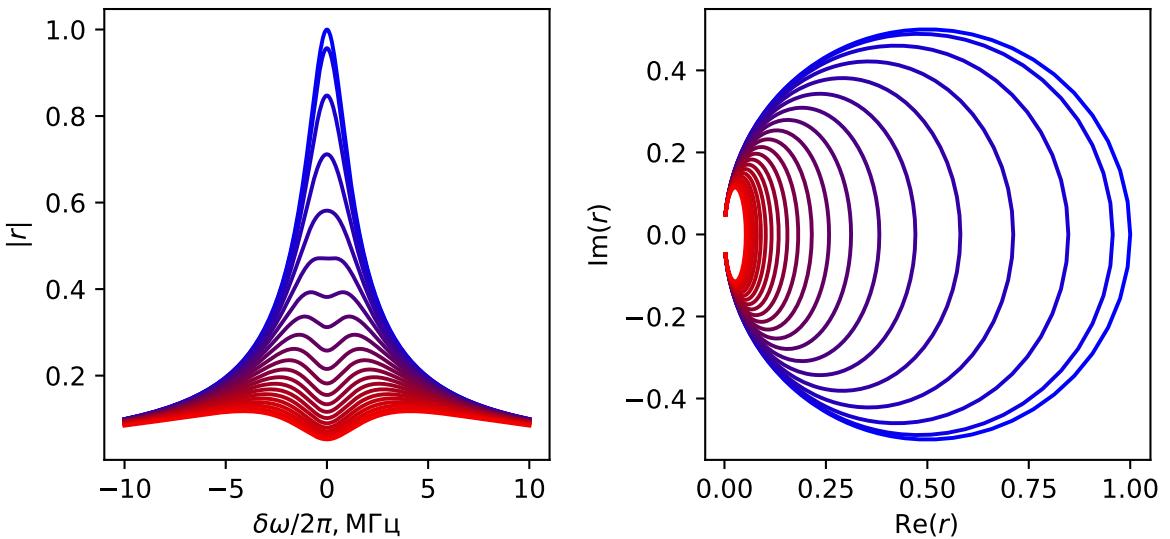


Рисунок 1.14 – Стационарный коэффициент отражения непрерывной волны на частоте $\omega_q + \delta\omega$, направляемой на кубит. Слева: Зависимость $|r|(\delta\omega)$, где $\delta\omega/2\pi = [-10, 10]$ МГц. Различные линии соответствуют значениям $\Omega/2\pi = [0, 6]$ МГц, для всех линий $\Gamma_1/2\pi = 2$ МГц, $\gamma_\varphi/2\pi = 0$ МГц. Справа: r на комплексной плоскости для $\delta\omega/2\pi = [-20, 20]$ МГц и для тех же значений параметров $\Omega, \Gamma_1, \gamma_\varphi$.

стационарном состоянии:

$$S_{VV}(\omega) = \frac{1}{2\pi Z} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{V}^+(0) \hat{V}^-(\tau) \rangle_{ss} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.72)$$

С учетом (1.71) для оператора напряжения в точке связи с кубитом $x = 0$ можно получить выражение:

$$\hat{V}^\pm(t) = i \frac{\hbar \Gamma_1}{\mu} \hat{\sigma}_\mp(t) e^{\mp i\omega_d t}. \quad (1.73)$$

Необходимо отметить, что это выражение представляет частный случай общего результата, согласно которому, поле, излучаемое атомом в дипольном приближении на далекое расстояние, пропорционально операторам σ_- и σ_+ (см. уравнение (10.A.16) в [57]). С учетом последнего равенства имеем:

$$S_{VV}(\omega) = \frac{\hbar \omega_q \Gamma_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{\sigma}_+(0) \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle_{ss} e^{i(\omega - \omega_d)\tau} d\tau. \quad (1.74)$$

Операторы $\hat{\sigma}_+$ и $\hat{\sigma}_-$ можно представить при помощи введения операторов флюктуаций:

$$\hat{\sigma}_\pm(t) = \langle \sigma_\pm \rangle_{ss} + \Delta \hat{\sigma}_\pm(t), \quad (1.75)$$

при этом $\langle \Delta\hat{\sigma}_{\pm}(t) \rangle_{ss} = 0$ по определению. С учетом этого представления, коррелятор преобразуется следующим образом:

$$\langle \hat{\sigma}_+(0)\hat{\sigma}_-(\tau) \rangle_{ss} = \langle \hat{\sigma}_+(0) \rangle_{ss} \langle \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle_{ss} + \langle \Delta\hat{\sigma}_+(0)\Delta\hat{\sigma}_-(\tau) \rangle_{ss}. \quad (1.76)$$

Таким образом, полная спектральная плотность излучения будет складываться из эластичной и неэластичной части:

$$S_{VV}(\omega) = S_{el}(\omega) + S_{in}(\omega) \quad (1.77)$$

Первое слагаемое (1.76) представляет собой произведение средних значений операторов в стационарном состоянии, и может быть посчитано с использованием (1.67), для простоты полагая $\delta\omega = 0$:

$$\langle \hat{\sigma}_{\pm} \rangle_{ss} = \pm \frac{ie^{\mp i\varphi}}{2} \frac{\Gamma_1\Omega}{\Gamma_1\Gamma_2 + \Omega^2} \quad (1.78)$$

С использованием этого соотношения можно посчитать когерентную (эластичную) часть спектра:

$$S_{el}(\omega) = \frac{\hbar\omega_q\Gamma_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{\sigma}_+(0) \rangle_{ss} \langle \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle_{ss} e^{i(\omega - \omega_d)\tau} d\tau, \quad (1.79)$$

$$S_{el}(\omega) = \frac{\hbar\omega_q\Gamma_1}{4} \frac{\Gamma_1^2\Omega^2}{(\Gamma_1\Gamma_2 + \Omega^2)^2} \delta(\omega - \omega_d) \quad (1.80)$$

В случае слабого поля $\Omega^2 \ll \Gamma_1\Gamma_2$ и $\Gamma_2 = \Gamma_1/2$ имеем $S_{el}(\omega) = \delta(\omega - \omega_d) \cdot \hbar\omega_q\Omega^2/\Gamma_1$. Расчет неэластичной части спектра

$$S_{in}(\omega) = \frac{\hbar\omega_q\Gamma_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Delta\hat{\sigma}_+(0)\Delta\hat{\sigma}_-(\tau) \rangle_{ss} e^{i(\omega - \omega_d)\tau} d\tau. \quad (1.81)$$

требует вычисления кореллятора флуктуаций.

Легко понять, что зависимость $\rho(t)$, получаемая из уравнений Блоха, сама по себе не дает корелляции, представляющие собой средние по состоянию значения произведения операторов в разные моменты времени. Для этого потребуется использовать так называемую *квантовую регрессионную теорему*, которая позволяет найти временную зависимость корелляторов по известной динамике матрицы плотности. Кратко проиллюстрируем суть теоремы. Рассмотрим атом, взаимодействующий с некоторым резервуаром и описываемый матрицей

плотности $\rho(t)$, которую в общем случае нельзя представить в виде произведения $\rho_a(t) \otimes \rho_R(t)$, так как атом и окружение могут быть запутаны. Рассмотрим марковское приближение, согласно которому, существует некоторый нулевой момент времени, в который состояния можно факторизовать: $\rho(0) = \rho_a(0) \otimes \rho_R(0)$. Зная начальное состояние $\rho(0)$, можно найти состояние системы в произвольный момент времени при помощи оператора эволюции: $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$. Для того чтобы выделить состояние атома в момент времени τ , необходимо взять частичный след по переменным резервуара: $\rho_a(\tau) = \text{Tr}_R(\rho(\tau))$. С учетом этого можно записать выражение для среднего значения оператора σ_- в момент времени τ может быть записано как:

$$\langle \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle = \text{Tr}_a [\hat{\sigma}_-(0)\rho_a(\tau)], \quad (1.82)$$

$$\langle \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle = \text{Tr}_a [\hat{\sigma}_-(0) \text{Tr}_R (U(\tau) [\rho_a(0) \otimes \rho_R(0)] U^\dagger(\tau))] . \quad (1.83)$$

Аналогичным образом запишем среднее значение коррелятора:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_+(0)\hat{\sigma}_-(\tau) \rangle &= \text{Tr}_a [\hat{\sigma}_+(0)\hat{\sigma}_-(0) \text{Tr}_R (U(\tau) [\rho_a(0) \otimes \rho_R(0)] U^\dagger(\tau))] = \\ &= \text{Tr}_a [\hat{\sigma}_-(0) \text{Tr}_R (U(\tau) [\rho_a(0)\hat{\sigma}_+(0) \otimes \rho_R(0)] U^\dagger(\tau))] , \end{aligned} \quad (1.84)$$

где в последнем равенстве использованы свойства частичного следа [58]. Сравнивая выражения (1.83) и (1.84), приходим к интересному выводу: для того, чтобы получить зависимость коррелятора $\langle \hat{\sigma}_+(0)\hat{\sigma}_-(\tau) \rangle$, достаточно использовать выражение $\langle \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle$, но вместо начального состояния атома $\rho_a(0)$ необходимо подставить оператор $\rho_a(0)\hat{\sigma}_+$. Аналогично справедливо и для оператора $\langle \Delta\hat{\sigma}_+(0)\Delta\hat{\sigma}_-(\tau) \rangle$. В более обобщенном смысле теорема утверждает, что если справедлива система уравнений, описывающая динамику средних некоторого полного набора операторов \hat{A}_i и записываемая в векторно-матричной форме:

$$\frac{d \langle \vec{A}(t) \rangle}{dt} = \mathbf{M} \langle \vec{A}(t) \rangle , \quad (1.85)$$

то для произвольного оператора системы $\hat{O}(t)$ справедливо также:

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{O}(t)\vec{A}(t+\tau) \rangle = \mathbf{M} \langle \hat{O}(t)\vec{A}(t+\tau) \rangle \quad (1.86)$$

Для нахождения $\langle \Delta\vec{\sigma}(\tau) \rangle$ можно использовать решение уравнений Блоха (1.62). Перепишем уравнения Блоха для нестационарной части излучения:

$$\langle \dot{\Delta\vec{\sigma}}(\tau) \rangle = \mathbf{M} \langle \Delta\vec{\sigma}(\tau) \rangle \rightarrow \langle \Delta\vec{\sigma}(\tau) \rangle = e^{\mathbf{M}\tau} \langle \Delta\vec{\sigma}(0) \rangle . \quad (1.87)$$

Согласно квантовой регрессионной теореме, для нахождения $\langle \Delta\hat{\sigma}_+(0)\Delta\vec{\sigma}(\tau) \rangle$ вместо $\langle \Delta\vec{\sigma}(0) \rangle$ нужно подставить в (1.87) начальное условие $\langle \Delta\hat{\sigma}_+(0)\Delta\vec{\sigma}(0) \rangle$, которое вычисляется с помощью (1.75) и (1.67) как:

$$\langle \Delta\hat{\sigma}_+(0)\Delta\vec{\sigma}(0) \rangle = \langle \hat{\sigma}_+\vec{\sigma} \rangle_{ss} - \langle \hat{\sigma}_+ \rangle_{ss} \langle \vec{\sigma} \rangle_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{\Omega^2}{\Gamma_1^2 + 2\gamma_\varphi\Gamma_1 + 2\Omega^2} \\ \frac{i\Omega^2(-\Gamma_1^2 + 2\gamma_\varphi\Gamma_1 + 2\Omega^2)}{(\Gamma_1^2 + 2\gamma_\varphi\Gamma_1 + 2\Omega^2)^2} \\ -\frac{2i\Gamma_1\Omega^3}{(\Gamma_1^2 + 2\gamma_\varphi\Gamma_1 + 2\Omega^2)^2} \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

после чего из (1.87) получаем:

$$\langle \Delta\hat{\sigma}_+(0)\Delta\hat{\sigma}_-(\tau) \rangle_{ss} = \frac{\Omega^2}{2(2\gamma_\varphi\Gamma_1 + \Gamma_1^2 + 2\Omega^2)} \left[e^{-\frac{1}{2}t(2\gamma_\varphi + \Gamma_1)} + e^{-\frac{1}{4}t(2\gamma_\varphi + 3\Gamma_1)} \cdot \left(\frac{2\gamma_\varphi\Gamma_1 - \Gamma_1^2 + 2\Omega^2}{2\gamma_\varphi\Gamma_1 + \Gamma_1^2 + 2\Omega^2} \cos\Omega_g t - \frac{2\Omega^2(2\gamma_\varphi - 5\Gamma_1) + \Gamma_1(\Gamma_1 - 2\gamma_\varphi)^2}{4\Omega_g(2\gamma_\varphi\Gamma_1 + \Gamma_1^2 + 2\Omega^2)} \sin\Omega_g t \right) \right]. \quad (1.89)$$

Выражение (1.89) получено без каких-либо приближений. Дальнейшее вычисление спектральной плотности сводится к преобразованию Фурье и приводит к достаточно громоздким выражениям, поэтому оно будет опущено. Для частного случая сильного драйва $4\Omega \gg \Gamma_1, \gamma_\varphi$ получается выражение:

$$S_{in}(\delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar\omega_q\Gamma_1}{4} \left(\frac{\gamma_s}{(\delta\omega + \Omega)^2 + \gamma_s^2} + \frac{2\gamma_c}{\delta\omega^2 + \gamma_c^2} + \frac{\gamma_s}{(\delta\omega - \Omega)^2 + \gamma_s^2} \right), \quad (1.90)$$

где введены обозначения $\gamma_c = \Gamma_1/2 + \gamma_\varphi = \Gamma_2$, $\gamma_s = 3\Gamma_1/4 + \gamma_\varphi/4 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$. Отличительной особенностью данного спектра является наличие боковых пиков при $\delta\omega = \pm\Omega$. Отметим также, что в отличие от спектральной плотности эластичной части излучения, которая максимальна при $\Omega = \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}$ и далее уменьшается при увеличении Ω , спектральная плотность неэластичной части возрастает от нуля при $\Omega = 0$ до некоторого максимального значения. Поскольку спектр (1.90) состоит из трех лоренцевских пиков, достаточно разделяющихся при $\Omega \gg \Gamma_1$, то полная мощность, рассеиваемая кубитом, равна $\hbar\omega_q\Gamma_1/2$. Этот ответ допускает наглядную качественную интерпретацию. Сильное поле не взаимодействует с кубитом когерентно, но вызывает квантово-механические скачки с основного на возбужденный уровень и обратно со средней частотой Γ_1 . Таким образом, эффективно кубит излучает мощность, соответствующую половине энергии фотона, которая излучается за время релаксации. Спектр некогерентного излучения изображен на Рис. 1.15.

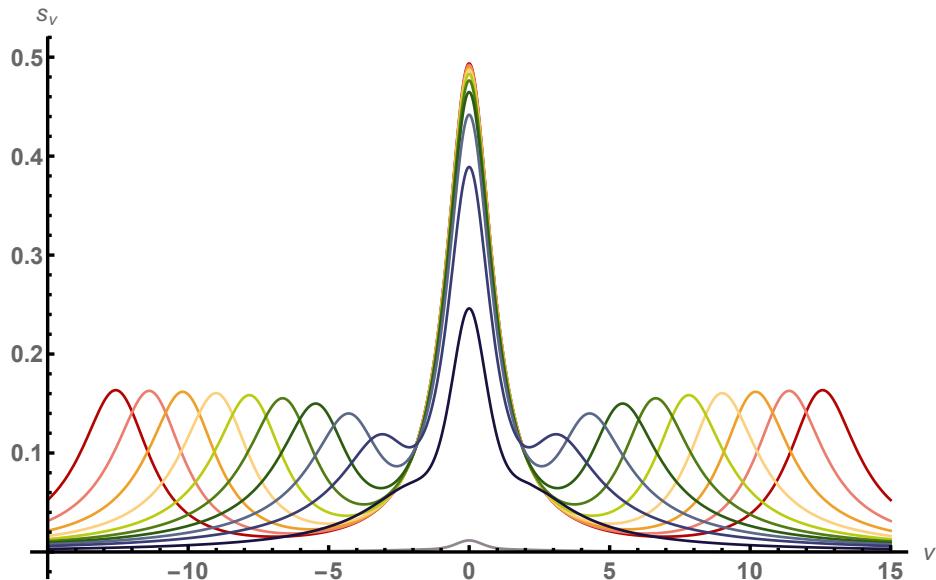


Рисунок 1.15 — Спектр неэластичного рассеяния для $\Gamma_1 = 2$ МГц, $\gamma_\varphi = 0$,
 $\Omega = [1.5, 12.5]$ МГц.

Мы рассмотрели основные эффекты, возникающие при взаимодействии двухуровневой системы (сверхпроводникового кубита), сильно связанной с волноводом, и внешнего классического поля, распространяющегося в волноводе (проходной линии). Можно отметить, что даже в таком простом случае физика происходящих явлений весьма нетривиальна. Однако, в главе 1.2 показано, что сверхпроводниковые кубиты не являются двухуровневыми системами: во многих случаях необходимо учитывать третий и следующие уровни энергии. В квантовой оптике, взаимодействие света с трехуровневой системой порождает целый ряд явлений, таких как электромагнитно-индукционная прозрачность, когерентный захват заселенности и другие. Опишем некоторые из эффектов, возникающие в трехуровневых системах.

1.3.5 Квантовооптические эффекты в трёхуровневых системах

СКЦ, как и любая квантовая система, имеет большое количество собственных энергетических уровней. Если энергии третьего (второго возбужденного) уровня СКЦ настолько велики, что частоты переходов с первых двух уровней

превышают частоты внешнего электромагнитного поля, с которым взаимодействует система, то справедливо двухуровневое приближение. Однако во многих случаях это не так, и необходимо учитывать наличие третьего уровня.

Как и для «природных» атомов химических элементов, для сверхпроводниковых цепей справедливы правила отбора: в дипольном приближении, запрещены переходы между теми состояниями, волновые функции которых имеют одинаковую симметрию. Так, например, для трансмонов, структура волновых функций которых достаточно близка к гармоническому осциллятору, запрещены переходы $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ и обратно. На основе правил отбора можно выделить несколько типов трехуровневых систем, схематично изображенных на Рис. 1.16. Конфигурации уровней под названием Ξ -система (или лестничная

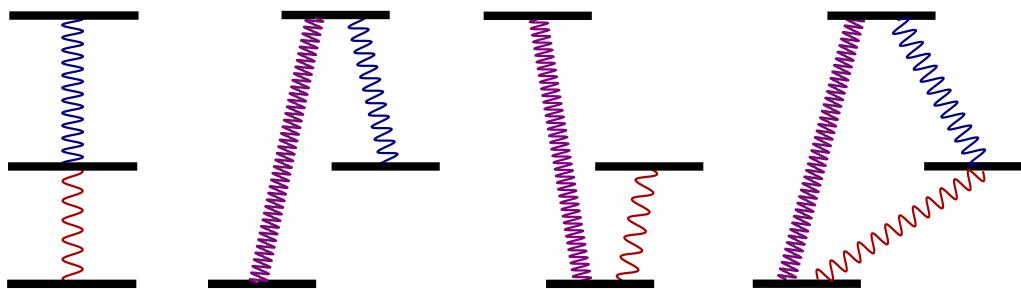


Рисунок 1.16 – Классификация трехуровневых систем, порождаемая правилами отбора; слева направо – схематичное изображение Ξ -, Λ -, V -, и Δ -системы, соответственно. Волнистые линии связывают пары уровней, переход между которыми разрешен в дипольном приближении.

система), Λ -система и V -система часто возникают в природных атомах, тогда как Δ -система достаточно нехарактерна для них и поэтому достаточно слабо изучена экспериментально. Она может быть реализована только при помощи киральных молекул, а также в искусственных оптических системах на основе СКЦ.

Электромагнитно-индуцированная прозрачность и расщепление Аутлера-Таунса

Рассмотрим эффекты, связанные с наличием двух электромагнитных полей, взаимодействующих с трехуровневой системой. По аналогии с двухуровневой системой, можно записать гамильтониан, описывающий Λ -систему

с частотами переходов ω_{02} и ω_{12} , которая взаимодействует с двумя электромагнитными модами ω_{12}^d и ω_{02}^d :

$$H = \begin{bmatrix} \delta_{02} - \omega_{02}^d & 0 & \Omega_{02} \cos \omega_{02}^d t \\ 0 & \delta_{12} - \omega_{12}^d & \Omega_{12} \cos \omega_{12}^d t \\ \Omega_{02} \cos \omega_{02}^d t & \Omega_{12} \cos \omega_{12}^d t & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.91)$$

где введено обозначение $\delta_{12} = \omega_{12}^d - \omega_{12}$, δ_{02} — аналогично. Переходя во вращающуюся систему отсчета и используя приближения вращающейся волны, этот гамильтониан можно привести к виду:

$$H_{RWA} = \begin{bmatrix} \delta_{02} & 0 & \frac{\Omega_{02}}{2} \\ 0 & \delta_{12} & \frac{\Omega_{12}}{2} \\ \frac{\Omega_{02}}{2} & \frac{\Omega_{12}}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Оператор плотности, описывающий трехуровневую систему, можно записать

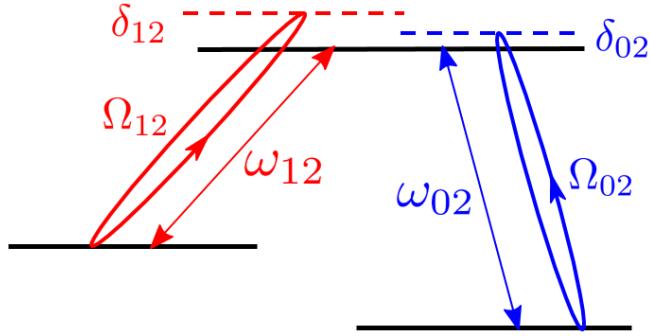


Рисунок 1.17 — Схема трехуровневой А-системы под действием двух непрерывных волн с частотами $\omega_{i2}^d = \omega_{i2} + \delta_{i2}$, $i = 0, 1$, возбуждающих переходы в системе.

стандартным образом:

$$\rho = \begin{bmatrix} -\rho_{11} - \rho_{22} + 1 & i\rho_{01}^i + \rho_{01}^r & i\rho_{02}^i + \rho_{02}^r \\ -i\rho_{01}^i + \rho_{01}^r & \rho_{11} & i\rho_{12}^i + \rho_{12}^r \\ -i\rho_{02}^i + \rho_{02}^r & -i\rho_{12}^i + \rho_{12}^r & \rho_{22} \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

Влияние диссипации и декогеренции на динамику системы описывается стандартным образом, см. 1.3.1; отметим, что в трехуровневой системе скорости релаксации $\Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{12}$ и дефазировки γ_{02}, γ_{12} и γ_{01} в общем случае независимы

и могут значительно отличаться. Линдбладовский член имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{02}r_{22} & -\gamma_{01}(ir_{01}^i + r_{01}^r) & -\frac{(ir_{02}^i + r_{02}^r)(\Gamma_{02} + \Gamma_{12} + 2\gamma_{02})}{2} \\ \gamma_{01}(ir_{01}^i - r_{01}^r) & \Gamma_{12}r_{22} & -\frac{(ir_{12}^i + r_{12}^r)(\Gamma_{02} + \Gamma_{12} + 2\gamma_{12})}{2} \\ \frac{(ir_{02}^i - r_{02}^r)(\Gamma_{02} + \Gamma_{12} + 2\gamma_{02})}{2} & \frac{(ir_{12}^i - r_{12}^r)(\Gamma_{02} + \Gamma_{12} + 2\gamma_{12})}{2} & -r_{22}(\Gamma_{02} + \Gamma_{12}) \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

Рассмотрим случай, когда амплитуда Ω_{12} достаточно большая по сравнению со всеми константами релаксации и дефазировки и $\delta_{12} = 0$. Это поле будет связывать состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$, и формировать новые собственные состояния системы — так называемые *одетые состояния* $(|1\rangle \pm |2\rangle)/\sqrt{2}$ с энергиями $\pm\Omega_{12}/2$. Обозначим $\delta_{02} = \delta$. Предположим теперь, что амплитуда поля Ω_{02} невелика, и поле носит характер пробного сигнала, не меняя при этом структуру уровней системы. Как мы увидим далее, это пробное поле позволяет визуализировать одетые уровни, созданные сильной накачкой перехода 1-2. Для нахождения стационарного состояния системы необходимо решить уравнение (1.60) с гамильтонианом (1.92), диссипатором (1.94), а также зануленной левой частью. В полной аналогии с двухуровневой системой можно показать, что если известно стационарное состояние, то коэффициент отражения для поля, рассеянное на пробной частоте ω_{02}^d , имеет вид:

$$r_{02} = i \frac{\Gamma_{02}}{\Omega_{02}} \langle \hat{\sigma}_{02} \rangle_{ss} e^{i\omega_{02}^d t}, \quad (1.95)$$

ср. с (1.71). График зависимости $\text{Re}(r_{02}(\delta))$ для различных значений амплитуды драйва Ω_{12} , представленный на Рис. 1.18, наглядно иллюстрирует возникновение одетых состояний. При $\Omega_{12} \gg \Gamma_{12}, \Gamma_{02}$ рассеянное поле имеет два максимума лоренцевской формы при $\delta = \pm\Omega_{12}/2$. Этот эффект называют расщеплением Аутлера-Таунса. Отметим также случай слабого драйва, соответствующий $2\Omega_{12} < \Gamma_{02} + \gamma_{02} - \gamma_{01}$. В этом случае рассеянное поле представляется в виде одиночного лоренцевского пика, однако, при $\delta = 0$ наблюдается достаточно узкий провал, достигающий нуля при $\gamma_{01} = 0$. Это явление называется электромагнитно-индукционной прозрачностью. Можно показать, что в этом случае провал возникает за счет деструктивной интерференции между полем накачки и пробным полем, тогда как при расщеплении Аутлера-Таунса происходит сдвиг резонансных частот одетых уровней за счет более сильного драйва. Точная формула, описывающая рассмотренные эффекты, достаточно громоздка, но может быть записана приближенно, если пренебречь чистой дефазировкой и разложить

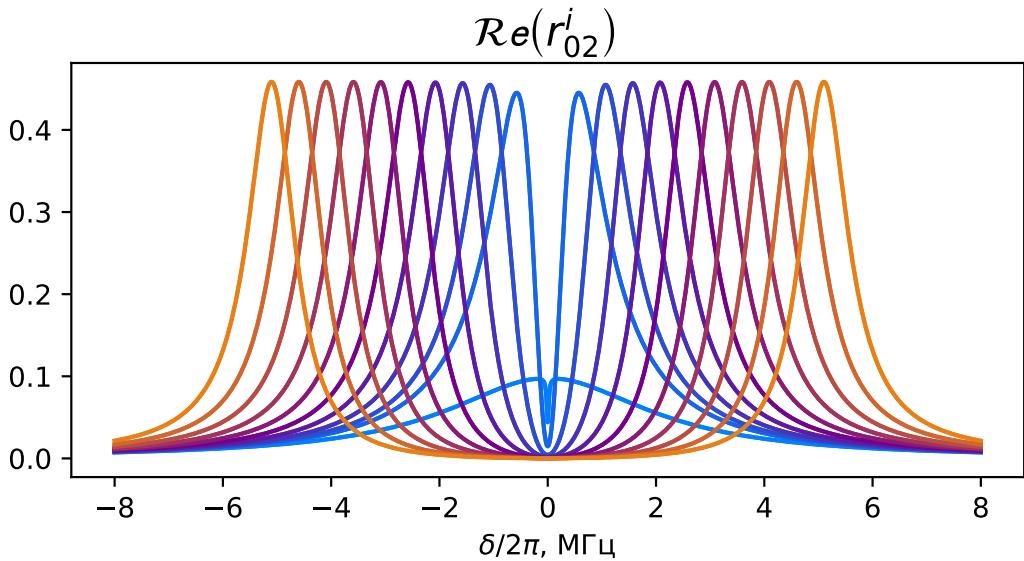


Рисунок 1.18 – Коэффициент отражения пробного поля амплитудой $\Omega_{02} = 50$ кГц в зависимости от отстройки $\delta_{02} = \delta$. Амплитуда поля накачки $\Omega_{12} = [0.1, 5.1]$ МГц, $\Gamma_{01} = 0$, $\gamma_{12} = \gamma_{02} = \gamma_{01} = 0.1$ МГц, $\Gamma_{02} = \Gamma_{12} = 2$ МГц.

При малых амплитудах наблюдается провал, соответствующий электромагнитно-индуцированной прозрачности, а при больших формируются два пика, образующие расщепление Аутлера-Таунса.

точное выражение в ряд по амплитуде пробного поля Ω_{02} :

$$\text{Re}(r_{02}) \approx -\frac{4(\Gamma_{12} + \Gamma_{02})\delta^2\Omega_{02}}{4\delta^2((\Gamma_{12} + \Gamma_{02})^2 + 4\delta^2) - 8\delta^2\Omega_{12}^2 + \Omega_{12}^4} \quad (1.96)$$

Электромагнитно-индуцированная прозрачность и расщепление Аутлера-Таунса были хорошо изучены в рамках квантовой оптики видимого диапазона на природных атомах [59; 60]. Однако, эти эффекты неоднократно продемонстрированы и в рамках микроволновой квантовой оптики на СКЦ, включая как трансмоны, так и потоковые кубиты [61–65].

Когерентный захват заселенности

Еще один интересный эффект — когерентный захват заселенности — возникает в случае установления равновесия в системе при условии, что амплитуды обоих полей Ω_{02} и Ω_{12} много больше остальных констант в системе. Будем считать, что $\delta_{12} = \delta_{02} = \delta$. В этом случае, собственные векторы гамильтониана

можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\psi_D\rangle &= \cos\Phi|0\rangle - \sin\Phi|1\rangle, \\ |\psi_+\rangle &= \sin\Theta\sin\Phi|0\rangle + \cos\Theta\sin\Phi|1\rangle - \cos\Phi|2\rangle, \\ |\psi_-\rangle &= \cos\Theta\sin\Phi|0\rangle + \cos\Theta\cos\Phi|1\rangle + \sin\Phi|2\rangle. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Используемые параметры Φ и Θ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \Omega_{02} &= A\sin 2\Phi \sin \Theta, \\ \Omega_{12} &= A\sin 2\Phi \cos \Theta, \\ \delta &= A\cos 2\Phi. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Заметим, что состояние $|\phi_D\rangle$ представляет из себя суперпозицию состояний, каждое из которых не подвергается радиационному распаду в случае Λ -системы. Такое состояние называется *темным*. Если приготовить темное состояние, то его распад будет определяться неизлучательными процессами, и следовательно, может быть на порядки медленнее распада состояния $|2\rangle$, сопровождающегося излучением фотонов. Другими словами, темное состояние метастабильно и мо-

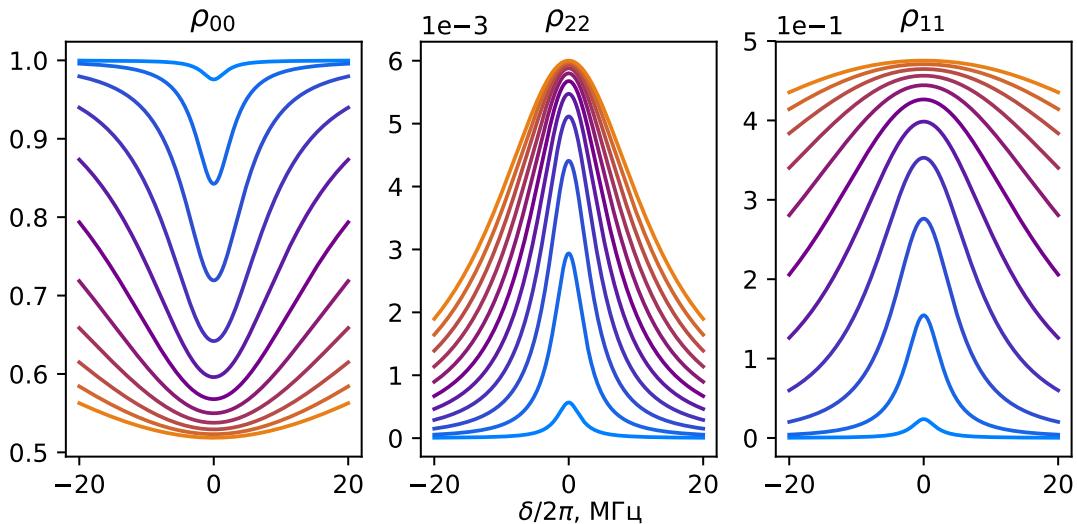


Рисунок 1.19 — Диагональные элементы матрицы плотности стационарного состояния Λ -системы в зависимости от отстройки δ . Кривые построены при $\Gamma_{01}/2\pi = \Gamma_{12}/2\pi = 2$ МГц, $\Gamma_{01}/2\pi = 50$ кГц, амплитуды драйва меняются для различных кривых в пределах $\Omega_{01}/2\pi = \Omega_{12}/2\pi = [0.1, 2.1]$ МГц.

ожет служить перспективным инструментом для реализации квантовой памяти. Эффективный способ заселить это состояние - обеспечить достаточно сильную накачку системы на частотах разрешенных переходов. Диагональные элементы

матрицы плотности стационарного состояния представлено на рисунке 1.19. Поскольку всегда существует некоторая ненулевая релаксация Γ_{01} , то при слабой амплитуде драйва система практически не выходит из основного состояние $|0\rangle$. Однако, по мере увеличения амплитуд заселенность уровней $|0\rangle$ и $|1\rangle$ практически выравнивается, и состояние системы стремится к $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, при этом уровень $|2\rangle$ остается пустым. Модуль недиагональных элементов ρ_{01} и ρ_{10} также стремится к 0.5, что означает высокую когерентность стационарного состояния — поэтому эффект и называется когерентным захватом заселенности. Фаза стационарной суперпозиции определяется относительной фазой сигналов накачки.

Завершая обзор трехуровневых искусственных атомов, можно отметить, что по мере усложнения системы возникает множество различных явлений, по-разному проявляющих себя в эксперименте и представляющих большой интерес в качестве как фундаментальных явлений квантовой оптики, так и основы для будущих квантовых сверхпроводниковых оптических устройств.

1.3.6 Обзор достижений микроволновой квантовой оптики в волноводе

В дополнение к изложенному приведем обзор некоторых важных результатов квантовой оптики и фотоники на СКЦ. Поскольку эта область уже достаточно обширна, то сфокусируемся более узко на экспериментах, изучающих взаимодействие атома с континуумом мод в волноводе или в копланарной линии. Обнаружение резонансной флуоресценции от сверхпроводникового потокового кубита [32] - первый эксперимент, который пробудил интерес к волноводной квантовой электродинамике. В первую очередь, это обусловлено высокой эффективностью, превышающей 94% в пионерском эксперименте и 99% в последующих исследованиях [66; 67], притом это улучшение практически не потребовало изменения архитектуры и было связано с улучшением качества кубита. Эффективность связи хорошо характеризуется долей отраженной мощности (power extinction) в режиме слабого когерентного сигнала, не насыщающего атом. Кроме сверхпроводящих кубитов, волноводная квантовая электродинамика реализовывалась и на других физических системах: квантовые точки, связанные с плазмонными волноводами [68; 69], либо же естественные атомы, связываемые с оптическим волокном [70; 71]. Оба этих подхода страдают

как от недостаточного совмещения электромагнитных мод, так и от значительной безызлучательной релаксации. Для квантовых точек эффективность связи в среднем достигает 60%, хотя отдельные работы сообщают о значениях более 90% [72]. Для естественных атомов доля отраженной мощности не превышает 12% [73; 74]. Этот факт делает сверхпроводниковые кубиты наиболее многообещающей платформой для изучения волноводной квантовой оптики.

После обнаружения резонансной флуоресценции, были воспроизведен целый ряд фундаментальных квантовооптических эффектов, известных ранее по изучению других физических систем. Подробно изучалась временная динамика кубита под воздействием поля в линии [75]. Демонстрация особенностей неэластичного спектра резонансной флуоресценции под действием сжатого вакуума [30] впервые подтвердила соответствующие расчеты [76], сделанные в конце 80-х годов. Проведен ряд экспериментов с кубитом в качестве трехуровневой системы, например, изучена электромагнитно-индукционная прозрачность [61], показан эффект кросс-керровского фазового сдвига [67] при расщеплении Аутлера-Таунса, которое также было подробно изучено в случае трехуровневого кубита-трансона [62; 63; 65] и также для фазового кубита [64]. Использование третьего уровня потокового кубита позволило получить принципиально новые результаты, например, исследовать работу кубита в качестве элементарного квантового усилителя [77]. Также исследовалось излучение кубита в полубесконечную линию, в том числе влияние граничных условий на скорость релаксации кубита - эффект «сверхпроводящего зеркала» [78].

Отдельно следует сказать об операциях с одиночными фотонами, осуществляемых при помощи кубитов в линии — микроволновой фотонике. За счет сильной связи с излучением и высокой нелинейности, кубит в линии имеет большой потенциал как в качестве активного элемента, так и в качестве медиатора взаимодействия различных световых мод [79]. Значительный прогресс в развитии микроволновой фотоники был обеспечен созданием однофотонных излучателей на основе кубита, несимметрично связанного с двумя полубесконечными линиями [29; 80—82]. В дальнейшем реализована генерация фотонов с произвольной огибающей, что предусматривает быструю перестройку связи при помощи изменения граничных условий в месте соединения кубита с полубесконечной линией [80], либо при помощи стимулирования рамановских переходов в системе кубит-резонатор [83]. Детектирование одиночных микроволновых фотонов представляет собой значительно более сложную задачу и

пока не реализовано на прикладном уровне, хотя и здесь имеются интересные теоретические предложения [84] и отдельные достаточно успешные результаты [85; 86]. Однако, показанные подходы к детектированию одиночных фотонов при помощи достаточно сложных и громоздких систем, вовлекающих в себя кубиты и резонаторы. Большую роль сыграли работы по созданию и реализации интерференционных схем с линейными детекторами [87], позволяющих провести измерение корреляционной функции $g^{(2)}(\tau)$ на входе и на выходе линии с кубитом [88], в ходе которых наблюдалась группировка фотонов в проходящем излучении и антигруппировка в отраженном излучении. Эта техника позволила продемонстрировать эффект Хонга-Оу-Мандела на микроволновых фотонах [28], реализовать генерацию и детектирование запутанных фотонов в каскадном процессе релаксации трехуровневого трансмона (являющегося Ξ -системой) [31], а также проводить подробную томографию фотонного состояния света в волноводе [89]. Дальнейшее развитие подобных методик позволило также запутать кубиты на расстоянии при помощи контролируемого испускания и поглощения одиночного микроволнового фотона [90].

Большой интерес вызывает также связывание кубитов через открытый волновод, поскольку результаты, получаемые в этой сфере, могут привести к созданию принципиально новой платформы, которая будет сочетать в себе как эффективность и простоту логических операций, характерную для сверхпроводниковых кубитов в резонаторах, так и возможность передачи квантовых состояний через волноводы, характерную для линейной квантовой оптики на оптических фотонах [91]. Принципиальная возможность связывания двух кубитов посредством виртуальных фотонов, распространяющихся в волноводе, впервые теоретически исследована и реализована группой под руководством А. Вальраффа в университете Цюриха [92]. При размещении пары кубитов с силой связи Γ_1 в волноводе на различных оптических расстояниях d друг от друга проявляются различные явления: при $d \approx \lambda/2$ наблюдается сверхизлучение, когда система излучает со скоростью $\Gamma_B = 2\Gamma_1$ (см. также [93]), а при $d \approx 3\lambda/4$ проявляется связь между кубитами при помощи обмена виртуальных фотонов на всех частотах, кроме резонансной; максимальное значение этой связи ограничено релаксацией: $J_{max} = \Gamma_1/2$. Взаимодействие, возникающее при обмене виртуальными фотонами, достаточно сильно влияет на прохождение волновода на низкой и средней мощности сигнала, что проявляется в несимметричном прохождении излучения через волновод с двумя связанными кубитами. Более того, при $d \approx \lambda/2$ темные

состояния, формируемые парой атомов, образуют нелинейную резонаторную моду [94], которая может связываться уже с другими кубитами в волноводе, расположенными в пучностях электрического поля в атомной моде. Были показаны вакуумные Раби-осцилляции между пробным кубитом и атомной резонаторной модой, кроме того, изучалась структура различных темных состояний резонатора. В этом контексте особенно перспективна концепция т.н. гигантских атомов - сверхпроводниковых кубитов, которые связываются с разными точками волновода, отстоящими друг от друга на расстояние, сравнимое с длиной волны [95]. Для естественных атомов это принципиально невозможно, поскольку имеется природное ограничение, согласно которому длины волн на разонансных частотах атомных переходов примерно в 10^4 раз превышают размеры атома. Выбор положения точек связи и силы взаимодействия позволяет более свободно регулировать как распад, так и взаимодействие между гигантскими атомами. С помощью связывания гигантских атомов через волновод впервые удалось реализовать двухкубитную операцию iSWAP без использования резонатора [96].

В данной диссертационной работе развивается еще одно перспективное, но недостаточно изученное направление - использование кубита в качестве квантового смесителя [97–99]. Смеситель является одним из основных элементов СВЧ-цепей самого различного назначения, и логично ожидать, что кубит, являясь квантовым нелинейным элементом, находящимся в волноводе с распространяющимся микроволновым излучением, может проявить интересные свойства при рассеивании этого излучения. Простейшим методом анализа смесителей является спектральный анализ, и в случае с квантовым смесителем можно ожидать появления необычных спектральных особенностей в переотраженном сигнале. Высокая нелинейность к полям с амплитудами на уровне одиночных фотонов, относительная простота детектирования выходящего из волновода излучения и наличие однофотонных источников - все эти факторы позволяют ожидать достаточно быстрый прогресс в исследовании взаимодействия микроволновых мод на кубитах в волноводе.

Глава 2. Потоковые кубиты в волноводе: изготовление и характеристика

В этой главе излагаются результаты измерений одиночных сверхпроводниковых потоковых кубитов, сильно связанных с волноводом — микроволновой копланарной проходной линией на чипе. Для проведения экспериментов по нелинейному рассеянию света требовалось изготовить «искусственный атом» — двухуровневую систему, сильно связанную с внешним микроволновым излучением, свободно распространяющимся в пространстве. Описывается подход к проектированию образцов, в частности, подбору параметров, которые позволяют достичь режима сильной связи. Описывается процесс изготовления образцов с использованием методов электронной и лазерной литографии. Затем излагаются экспериментальные условия, необходимые для изучения квантовой динамики такого кубита, а также процесс сборки измерительной схемы внутри криостата растворения. Приводятся результаты измерений коэффициента отражения резонансного микроволнового сигнала, а также результаты измерения спектра неэластичного рассеяния и излучение при эволюции кубита под действием внешнего поля. При помощи теоретической модели, подгоняемой под результаты измерений, вычисляются частота кубита и скорости релаксации в линию и дефазировки кубита.

2.1 Проектирование и изготовление образцов

Первоначальный этап создания СКЦ — проектирование дизайна. При проектировании необходимо учитывать, что уровни энергии квантовой электрической цепи, которая впоследствии будет сфабрикована на чипе, должны попасть в рабочий частотный диапазон измерительной схемы — примерно от 2 до 12 ГГц. Зачастую для оптимальной работы схемы необходимо выдержать частоту с гораздо большей точностью: с разбросом не более 1-2 ГГц. Поэтому необходимо использовать дизайны, свободные от паразитных емкостей и индуктивностей отдельных структур, а при невозможности полностью избавиться от них провести правильный учет таких нежелательных элементов. Еще более важно учитывать физические ограничения на ряд параметров, которые накладывают

реальные возможности оборудования, использующегося для изготовления кубитов. Для того, чтобы хорошо представлять эти ограничения, опишем методики изготовления СКЦ на чипе.

2.1.1 Фабрикационные ограничения

Любая СКЦ представляет из себя некоторое количество островков сверхпроводящих плёнок, напыленных на диэлектрическую подложку (чип) из кремния или сапфира. Островки образуют различные электрические элементы — джозефсоновские переходы, сосредоточенные или распределенные емкости и индуктивности. Общий размер чипа не может быть слишком большим по причине паразитных объемных мод в кремниевой пластинке. Частота нижней моды при продольном размере подложки 1 см составляет $\nu \approx 2c/(\sqrt{\epsilon}\lambda) \approx 17$ ГГц. При больших продольных размерах частоты объемных мод могут попасть в диапазон измерений и создавать значительные помехи при измерении кубитов. На поверхности чипа формируются как кубиты, так и вспомогательные структуры. Как правило, все вспомогательные структуры достаточно велики, и их можно сформировать с помощью фотолитографии (масочной или безмасковой), которая позволяет сформировать структуры с размерами не менее 1-2 мкм. Сюда относятся: большие (сотни мкм) и по возможности односвязные острова, которые при помещении чипа в держатель будут заземлены; острова копланарных или микрополосковых резонаторов и проходных линий (волноводов) с поперечными размерами 10-20 мкм; контактные площадки для подключения линий с размерами порядка сотен мкм; отверстия-ловушки для сверхпроводящих вихрей порядка 10 мкм. Все эти структуры обычно напыляются через общую маску, и таким образом, формируются за один процесс литографии.

Острова, формирующие кубиты, могут быть также достаточно большими (10-100 мкм), но размеры необходимо контролировать более точно, чем во вспомогательных структурах, поскольку от этого зависят частоты кубитов. Практически в любом кубите требуется сформировать джозефсоновские переходы между островами. Размеры переходов принципиально ограничены сразу несколькими факторами. Практически единственная хорошо отработанная методика изготовления переходов базируется на контролируемом формировании

аморфного оксида алюминия на поверхности свеженапылённой либо очищенной в высоком вакууме алюминиевой пленки и последующего повторного напыления алюминия. Окисление происходит в атмосфере чистого кислорода с парциальным давлением 0.01-2 мБар, напускаемого в вакуумную камеру. Особенность этого окисления в том, что кислород перестает диффундировать в алюминий при очень малой толщине аморфной оксидной пленки (порядка 2-3 нм), что прекрасно подходит для формирования джозефсоновской связи с плотностями критического тока порядка $0.1 - 10 \text{ мА/мкм}^2$. В результате этого формируется джозефсоновский переход Al-AlOx-Al, и в качестве сверхпроводящего металла очень естественно используется тот же алюминий, хотя возможны и варианты, при которых оксид алюминия выращивается на пленках другого металла. По совпадению, аморфный оксид алюминия, сформированный *in situ*, является достаточно чистым и содержит очень небольшое количество адсорбированных примесей и неоднородностей, которые могут связываться с кубитом. Тем не менее, известно, что переходах с размерами несколько мкм количество таких дефектов уже достаточно велико, и они отрицательно влияют на кубит, взаимодействуя с ним. Это одна из причин, по которой большие переходы не подходят для изготовления кубитов.

Еще один фактор, ограничивающий площади переходов - джозефсоновская энергия. Для перехода размерами $1 \times 1 \text{ мкм}$ с плотностью критического тока 0.5 мА/мкм^2 джозефсоновская энергия составляет $E_J = 248 \text{ ГГц}$, и при использовании такого перехода в кубитах, частота либо потоковая дисперсия кубитов, как правило, будет слишком большой. Это приводит к необходимости уменьшения площади джозефсоновских переходов до субмикронных размеров порядка сотен нм. Для контролируемого изготовления литографической маски с такими размерами необходима литография электронным лучом, разрешение которой может достигать 10 нм. Поэтому электронный литограф является одними из ключевых приборов для изготовления СКЦ и являются.

Еще один важный момент заключается в том, что внутренняя емкость переходов практически не зависит от параметров окисления, так как толщина оксидного барьера практически одинакова даже для тех переходов, у которых E_J различаются на порядок и более. Экспериментально известно, что у переходов Al-AlOx-Al размерами $100 \times 100 \text{ нм}$ емкость составляет 0.45 фФ [100].

Поэтому переходы субмикронных и особенно микронных размеров неизбежно будут содержать значительную емкость, которая также может повлиять на энергию кубитов.

2.1.2 Схема и дизайн кубитов

В качестве атома было решено использовать потоковый кубит. Этот выбор определяется тем, что структура потенциальной (фазовой) энергии потокового кубита такова, что два нижних состояния $|g\rangle$ и $|e\rangle$ локализованы в двух близко расположенных и неглубоких потенциальных ямах, и высота барьера между этими ямами зависит от параметра α , в частности, при $\alpha = 0.5$ барьер исчезает полностью. Уровень $|f\rangle$ и следующие состояния лежат гораздо выше по энергии. Это приводит к тому, что в точке вырождения по потоку $E_{ge} \sim 5\text{-}10$ ГГц, а $E_{ef} \approx 20$ ГГц, то есть, для генерируемых приборами управляющих импульсов длительностью более чем 1 нс влиянием верхних уровней на заселенности состояний $|g\rangle$ и $|e\rangle$ можно пренебречь. В качестве конкретной физической цепи, реализующей кубит, была выбрана схема потокового кубита с одним α -переходом и тремя «индуктивными» переходами. По сравнению с более типичной схемой из трех джозефсоновских переходов, выбранная схема имеет как преимущества, так и недостатки. Перечислим их:

- + В схеме с тремя переходами неизбежно возникает 4-й паразитный джозефсоновский переход, образуемый пересечением плёнок, формирующих основные переходы. Как правило, этот переход очень большой, индуктивность его очень мала и практически всегда его влиянием можно пренебречь. Тем не менее, схема с 4-мя переходами обладает симметрией по отношению к протеканию тока по пленкам и концептуально более правильная;
- + Зависимость крутизны уровней кубита по магнитному потоку от параметров схемы носит довольно сложный характер как в 3-переходном, так и в 4-переходном дизайне. Вдали от точки $\Phi = \Phi_0/2$ крутизна определяется суммарной индуктивностью больших переходов, и поэтому при равных размерах переходов чувствительность к потоковому шуму менее выражена именно для 4-переходного дизайна.

- + В оптимальной точке $\Phi = \Phi_0/2$ зависимость энергии кубита определяется высотой барьера и резко зависит от α в обоих схемах. Однако, в 4-переходном дизайне есть возможность сделать «индуктивные» переходы несколько больше по площади, поэтому α несколько менее чувствительна к неточностям в площади сечения α -перехода по отношению к расчетной.
- Число степеней свободы в 4-переходном дизайне на единицу больше, что значительно замедляет численный расчет кубитов.

Все вышеперечисленные преимущества вытекают из качественных соображений и в рамках данной работы их справедливость не проверялась какими-либо количественными расчетами или моделированием. Тем не менее, общая тенденция постепенного отказа от работы с потоковыми кубитами в пользу дизайнов типа вч-СКВИДа с большими индуктивностями также свидетельствует в пользу сделанного выбора.

Принципиальная схема кубита, емкостно связанного с бесконечной копланарной линией, изображена на Рис. 2.16. Отметим некоторые особенности данной схемы. Во-первых, связывающая емкость C_c должна учитываться при расчете кубита, поскольку ёмкости джозефсоновских переходов по величине сопоставимы с емкостью связи. Во-вторых, бесконечные копланарные линии с волновым сопротивлением $Z_0 = 50$ Ом подключены с обеих сторон от кубита. Это изменит эффективное сопротивление, шум от которого вызывает релаксацию кубита : $Z = Z_0/2 = 25$ Ом, и это необходимо учитывать при расчете константы релаксации.

Для последующей фабрикации были рассчитаны и отрисованы дизайны экспериментальные образцов: дизайн на рис. 2.3 реализует режим прямой связи (англ. *direct coupling*), а дизайн образца на рис. 2.2 – режим параллельной связи (англ. *side coupling*) кубита к излучению. Выбор схем не оказывает прямого влияния на процесс фабрикации кубитов. Остановимся на дизайне с параллельной связью. Спроектированный дизайн содержит кубиты с 4-мя джозефсоновскими переходами, три из которых имеют одинаковую площадь 200×800 нм, а еще один переход в $\alpha \approx 0.4$ раз меньше остальных. Переходы будут формироваться при напылении через маску, повторяющую дизайн, под различными углами, примерно $\pm 11^\circ$. Кубит связывается с электромагнитным полем, распространяющимся в копланарном волноводе, посредством связывающей емкости $C_c = 2.2$ или 6.4 фФ. Эта емкость фактически оказывается подключенной к земле через

$$E_C = 24.0, E_J = 80.0, E_{cc} = 70.0, \alpha = 0.45, N = 7$$

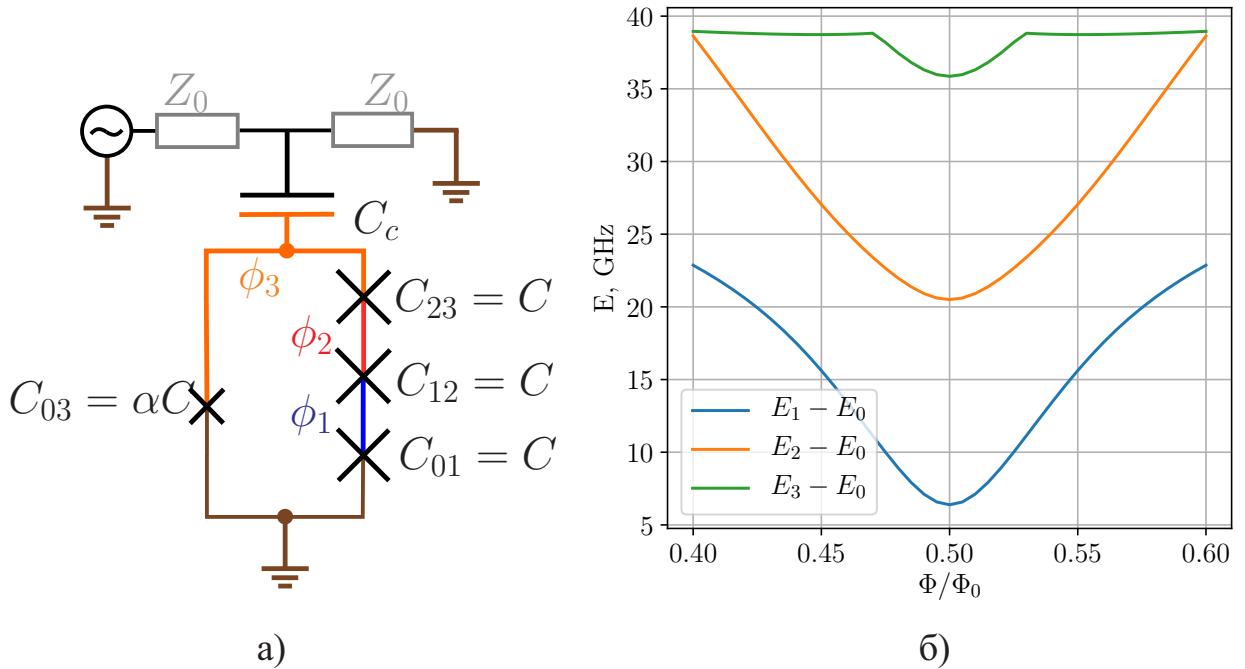


Рисунок 2.1 — Потоковый кубит с 4 переходами: а) Эквивалентная схема кубита, связанного с волноводом. б) Спектр кубита: энергии переходов из основного состояния в зависимости от внешнего потока через петлю для некоторых типичных значений параметров. Значения E_C, E_J, E_{cc} приведены в ГГц.

небольшое активное сопротивление Z_0 и поэтому оказывает шунтирующий эффект на α -переход, необходимый для уменьшения чувствительности потокового кубита как к потоковым, так и зарядовым шумам. Более подробно, шунтирование α -перехода, добавляясь к внутренней емкости перехода $C_j = 2\text{-}3 \text{ фФ}$, уменьшает зарядовую энергию. Это приводит к тому, что есть возможность уменьшить джозефсоновские энергии переходов, сохраняя при этом частоты кубитов. Это понижает чувствительность кубита к магнитному полю и, соответственно, к шуму магнитного потока, что при прочих равных условиях может увеличить время когерентности. Влияние шунтирующей емкости на спектры 3-переходного потокового кубита отражено на Рис. 2.4. Также влияние емкостного шунта на потоковые кубиты детально исследовано в работе [101], как теоретически, так и экспериментально. При существенно больших значениях шунтирующей емкости порядка 50 фФ кубит, фактически, становится слабо

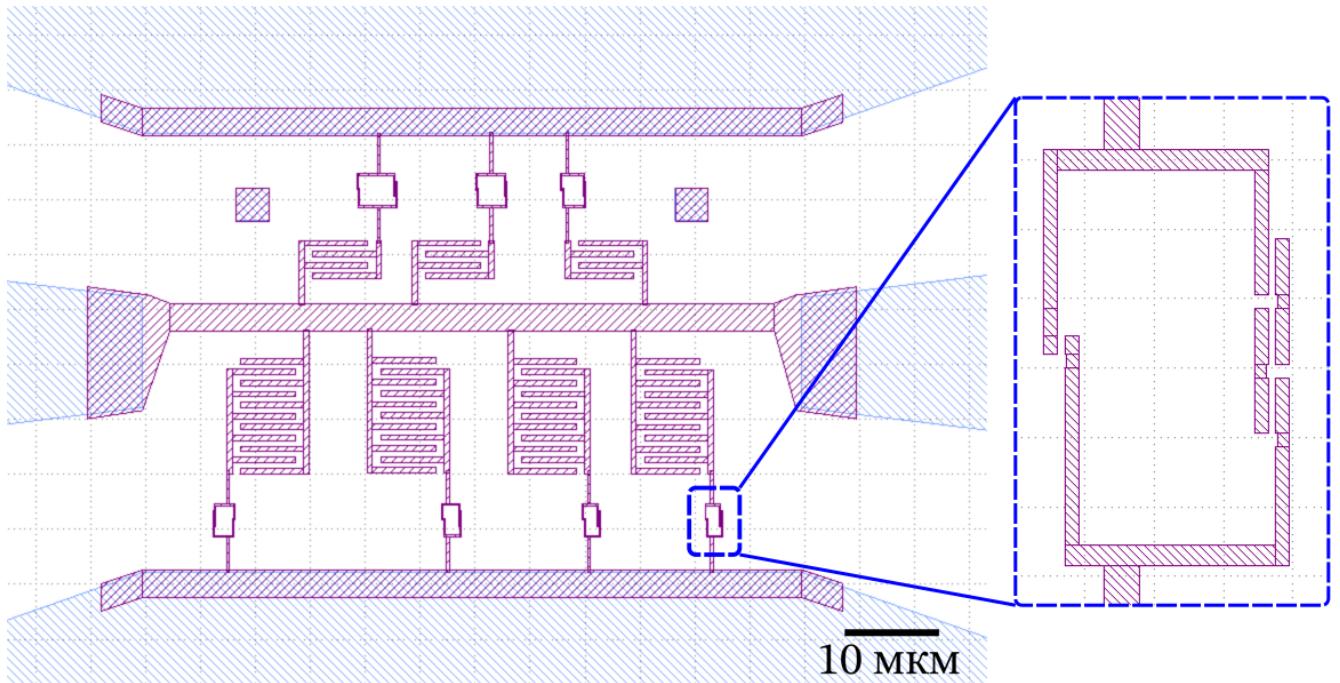


Рисунок 2.2 – Дизайн потоковых кубитов, параллельно связанных с копланарной линией при помощи емкостей. Параметр $\alpha = 0.36, 0.45$, площади петель от 5 до 40 $\mu\text{м}^2$, связывающие емкости $C_c = 2.2, 6.4 \text{ фФ}$

ангармоничным осциллятором с небольшими следами «двуихъяности», ангармонизм падает значительно ниже 1 ГГц. Это перспективно для достижения больших времен когерентности, но нежелательно для выполнения поставленных в диссертации задач. Для иллюстрации изложенных закономерностей, на рис. 2.16 приведены типичные зависимости энергии уровней от внешнего магнитного поля (спектры) кубитов для реалистичного набора параметров, полученные при помощи численной диагонализации полного гамильтонiana в зарядовом базисе. В рабочем режиме частота кубита $\omega_0 = E_e - E_g / \hbar$ должна находиться в пределах 2-10 ГГц, что обусловлено частотными диапазонами криогенных усилителей и изоляторов (подробнее об этом ниже).

Магнитное поле через кубиты обычно подается при помощи сверхпроводящего соленоида, который намотан на держатель и будет показан ниже. Однако, такой способ не может обеспечить индивидуальную перестройку частоты отдельных кубитов. Поэтому в ряде случаев полезно иметь возможность менять поток через потоковый кубит (или через СКВИД кубита-трансмона) при помощи дополнительной потоковой линии на чипе. Потоковая линия представляет собой копланарный волновод, который закорочен на землю вблизи той петли, поток в которой необходимо менять. Ток, текущий в потоковой линии, создает локальное магнитное поле, которое используется для перестройки магнитного потока.

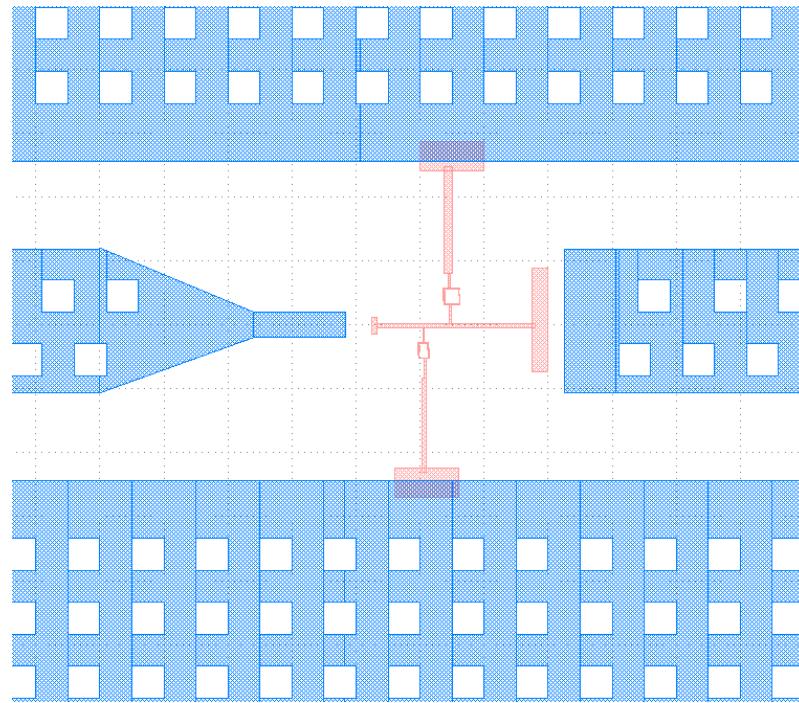


Рисунок 2.3 – Дизайн 4-переходных потоковых кубитов, связанных с двумя полуబесконечными копланарными линиями. Параметр $\alpha = 0.4$, площади петель 14.2 и 21.2 мкм², связывающие емкости $C_{in} = 0.24$, $C_{out} = 2.2$ фФ

2.1.3 Маршрутная карта для изготовления образцов

Образцы кубитов изготавливались в условиях чистой комнаты класса ISO-5 (не более 1000 пылинок размером более 1 мкм в 1 м³ воздуха). Маршрутная карта включает следующие процедуры:

1. Отмывка подложки из высокоомного недопированного кремния
 - дистилированная вода+ультразвук, 2 мин
 - IPA, 10 сек
 - NMP, 150 °C, 5 мин
 - RCA-1+ультразвук, 80 °C, 2 мин
2. Нанесение копланарной линии
 - нанесение резиста LOR-5B 3000 об/мин, 180°C, 7 мин;
 - нанесение резиста S1813 4000 об/мин, 115°C 7 мин;
 - фотолитография на литографе Heidelberg 8 мВ, 80
 - проявка KOH 45 сек;
 - напыление 100 нм пленки Al (Plassys), 0.2 нм/с;
 - лифт-офф NMP+ультразвук 100°C, 5 мин;

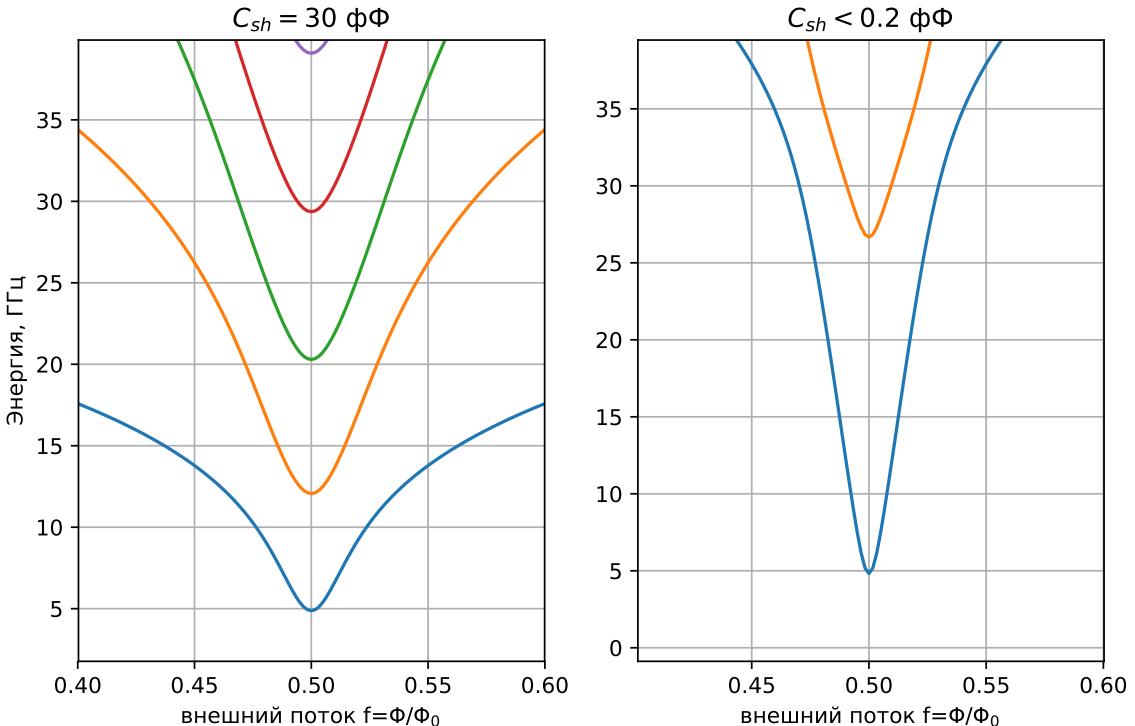


Рисунок 2.4 – Рассчитанные спектры $E_n - E_0$ потоковых кубитов с тремя джозефсоновскими переходами с учетом влияния шунтирующей емкости C_{sh} на α -переходе. В обоих случаях $E_c = 25$ ГГц, $E_j = 170$ ГГц. Левая панель: спектр для параметров $C_{sh} = 30$ фФ, $\alpha = 0.5$. Правая панель: спектр для параметров $C_{sh} \approx 0.1$ фФ, $\alpha = 0.69$. Как можно заметить, при равных параметрах переходов (что соответствует однаковому процессу окисления) большая шунтирующая емкость сглаживает спектр и делает кубит не столь чувствительным к дефазировке по потоку, при этом ангармонизм еще достаточно велик (1-2 ГГц). В случае отсутствия шунта, приходится понижать частоту перехода 0-1 при помощи увеличения α , однако, при смещении от оптимальной точки $f = 0.5$ производная энергии по потоку значительно увеличивается, и такой кубит гораздо сильнее подвержен дефазировке. Кроме того, при отсутствии шунта верхние уровни имеют слишком высокую частоту и недоступны для использования.

3. Нанесение туннельных контактов

- нанесение резиста Copolymer/MMA 9% 3000 об/мин, 150°C, 5 мин;
- нанесение резиста ARP 6200.04 4500 об/мин, 150 °C 5 мин;

- электронная литография на литографе Crestec CABL 9000 160 pA, 1 мкс/точка;
- проявка AR 600-546 1 мин, IPA 30 с, дистилированная вода 30 сек;
- напыление нижней пленки Al толщиной 25 нм под углом +11° (в установке Plassys), скорость напыления 0.2 нм/с.
- Промежуточное окисление при давлении 2 мБар в течение 5 мин;
- напыление верхней пленки Al толщиной 45 нм под углом –11°, 0.2 нм/с.
- лифт-офф NMP+ультразвук 100°C, 5 мин;

Представленный процесс может быть изменен или дополнен. В ряде случаев перед напылением джозефсоновских контактов требуется удалить естественный слой оксида с алюминиевой пленки, для этого используется травление ионами Ar при помощи пушки. Типичные параметры: ускоряющее напряжение 400 В, ускоряющее напряжение 80В, ток эмиссии 20 мА, время 2 минуты.

Согласно данной маршрутной карте были изготовлены образцы. При рассмотрении в оптическом микроскопе была проведена инспекция микронных структур на соответствие размерам, задаваемым в дизайне, см. Рис. 2.5. При помощи СЭМ сделаны изображения изготовленных кубитов, см. Рис. 2.6. Можно наблюдать сформированные переходы, размеры которых близки к заложенным в дизайн значениям. Последний шаг проверки вновь сделанных образцов — измерение нормального сопротивления тестового перехода или СКВИДа при помощи зондовой станции. Для переходов 200x800 получены значения в диапазоне $R_n = 2.1 - 2.4$ кОм. Если предположить, что при падении температуры от комнатной до T_c сопротивление уменьшается в 3 раза, то для джозефсоновской энергии имеем $E_J/h \approx 160$ ГГц. Однако, эта оценка является весьма неточной, поскольку точное значение нормального сопротивления джозефсоновского контакта вблизи сверхпроводящего перехода неизвестно, хотя в принципе может быть оценено из ВАХ отдельных переходов.

Следующий шаг — сборка измерительной схемы внутри криостата растворения и помещение в неё образца с кубитами для последующих измерений.

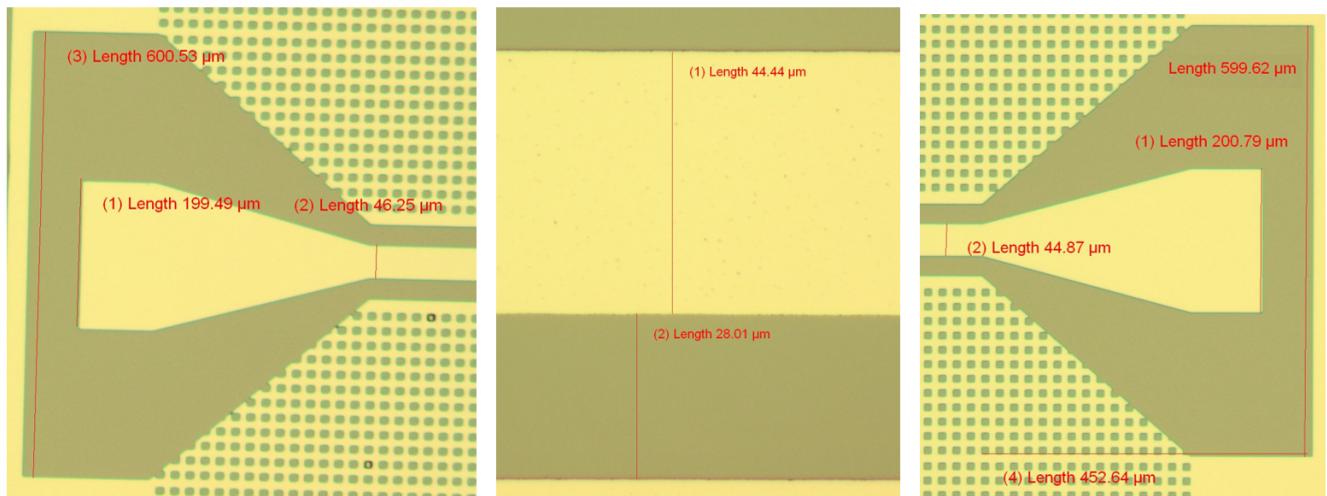


Рисунок 2.5 — Контроль поперечных размеров копланарной линии и контактных площадок при помощи оптического микроскопа. Размеры отклоняются от заложенных в дизайн значений не более чем на 1 мкм.

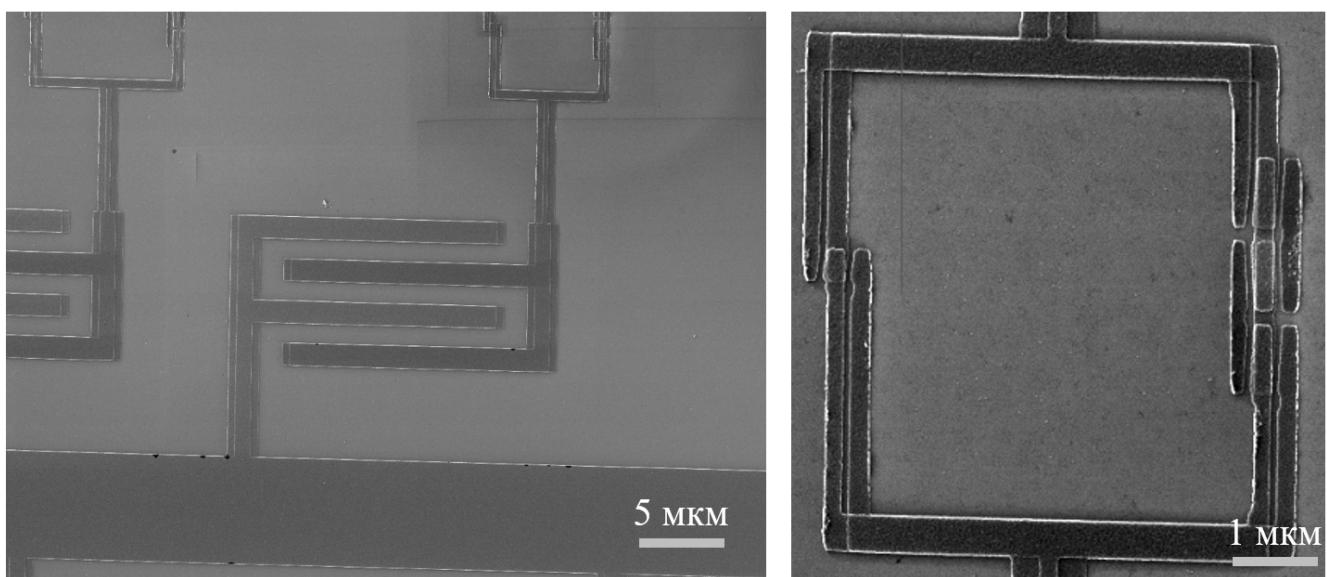


Рисунок 2.6 — Изображение связывающей емкости и кубита в сканирующем электронном микроскопе (СЭМ)

2.2 Схема подключения кубитов в линии

После того, как чип с волноводом и кубитами изготовлен, необходимо собрать измерительную схему, которая позволит осуществить эксперимент по измерению нелинейного рассеяния на кубите. Для размещения чипов внутри криостата необходимо:

- разместить чип с кубитом внутри печатной платы, закрепленной на внутренней части высокочастотного низкотемпературного держателя;
- приклеить чип и осуществить ультразвуковую разварку контактных площадок высокочастотных линий на чипе к отрезкам копланарных линий печатной платы;
- собрать высоко- и низкочастотные входные и высокочастотные выходные линии по всей длине криостата, начиная от фланца с температурой 50 К и заканчивая ответной частью держателя на фланце с базовой температурой;
- вставить держатель с платой в его ответную часть, закрепляемую на нижней ступени рефрижератора;
- при помощи тестера определить сопротивления между центральными жилами сигнальных проводов и землей и между входной и выходной линиями держателя, подходящими к волноводу на чипе;
- соединить разъемы линий с разъемами держателя соответственно;
- протестировать высокочастотное пропускание волновода, подключив входную и выходную линии к ВАЦ;
- в случае хорошего прохождения сигнала, загрузка считается успешной и можно приступить к охлаждению криостата.

Рассмотрим некоторые из этих манипуляций более подробно и опишем те свойства, которыми должна обладать измерительная схема для правильного функционирования образца.

2.2.1 Устройство держателя

Первое и самое очевидное условие работы кубитов — возможность охлаждения чипа до базовой температуры рефрижератора, которая равна 15-20 мК. Такую же температуру должна иметь и печатная плата, на которой размещается чип, и та часть держателя (бобышка), которая контактирует с печатной платой и кубитным чипом. Это налагает очевидные ограничения на те материалы, из которых может состоять держатель. Стальные сплавы имеют крайне низкую теплопроводность при температурах менее 1 К. Аналогичное можно сказать о

любом сверхпроводнике, охлажденном ниже T_c — отсутствие свободных носителей тока ухудшает возможность переносить тепло. Поэтому все компоненты держателя должны быть изготовлены из меди (в крайнем случае из латуни). Наилучшую теплопроводность при температурах ниже 100 мК обеспечивает бескислородная медь, но использование обычной чистой меди (марка М1) практически не влияет на скорость охлаждения.

Держатель состоит из нескольких обязательных частей — печатная плата, бобышка, ответная часть, крепление к фланцу, магнитный и сверхпроводящий экраны и различные вспомогательные элементы.

Печатная плата изготавливается из высокочастотного стека. Стек состоит из двух медных слоев толщиной порядка 100 мкм, разделенных диэлектриком с малыми потерями, например, Arlon AD-1000. Плата имеет сквозное отверстие для размещения чипа. К краям отверстия подходят копланарные линии, которые расходятся в радиальных направлениях и заканчиваются возле краев платы специальными расширениями, на которые впоследствии запаиваются высокочастотные разъемы. Плата предусматривает размещение от 4 до 12 SMP-разъемов типа «папа», центральная жила которых запаивается на центральную дорожку копланарных высокочастотных линий. В эти разъемы затем вставляются коаксиальные провода с ответными SMP-разъемами, которые будут крепиться на ответной части держателя.

Печатая плата плотно прикручивается к бобышке для обеспечения хорошего высокочастотного электрического контакта между нижней металлизацией печатной платы и объемом бобышки. Важный атрибут бобышки — наличие прямоугольной полости в месте крепления чипа. Полость повторяет форму чипа и имеет глубину 5-7 мм. Она нужна для смещения резонансных объемных мод кремниевого чипа в область высоких частот, что особенно актуально для чипов больших размеров. Поскольку диэлектрическая проницаемость кремния достаточно велика: $\epsilon = 11.7$, то для чипа с продольным размером $a = 10$ мм первая объемная мода имеет частоту $f_1 = c/2a\sqrt{\epsilon} = 4.33$ ГГц. Эта частота находится точно в середине рабочей области и потому может легко возбуждаться, если попадает в резонанс с сигналом в копланарной линии на поверхности чипа. Однако, если добавить полость под чипом и рассмотреть вновь получившийся объемный резонатор, то эффективная ϵ упадет в несколько раз, и объемные моды перестанут оказывать прямое влияние на распространение сигнала по копланарным линиям на чипе.

Бобышка с печатной платой вставляется в ответную часть держателя. Ответная часть представляет из себя цилиндрическую полость без дна (дном служит бобышка). В верхнем торце ответной части располагаются отверстия, которые располагаются точно над SMP-разъемами печатной платы. Через эти отверстия проходят провода, подключающиеся к SMP-разъемам. В середине ответной части имеется ушко, за которое она подвешивается к штанге длиной около 30 см. Штанга, в свою очередь, прикрепляется к крепежному фланцу. Крепежный фланец имеет сквозные отверстия для SMA-переходников и крепления для магнитного и сверхпроводящего экранов. SMA-переходники накручиваются на сквозные отверстия. На внутренние разъемы переходников накручиваются провода, идущие к печатной плате, а на внешние разъемы переходников приходят (с внешних разъемов уходят) входные (выходные) коаксиальные линии. Также в фланце имеется отверстие для пары проводов, запитывающих сверхпроводящий соленоид. Соленоид наматывается на боковую поверхность ответной части держателя, а контакты выводятся через отверстие и подключаются к линиям постоянного тока, выходящим на фланец с базовой температурой.

Поскольку кубиты чувствительны к внешнему магнитному полю, чипы необходимо экранировать от магнитного поля Земли и от другого паразитного магнитного поля шума, которое создают электрические приборы. Для этого на фланец надевается цилиндрический сверхпроводящий экран. Этот экран будет захватывать магнитное поле благодаря эффекту Мейснера. Имеется возможность дополнительно уменьшить поле, которое будет вытесняться сверхпроводящим экраном. Для этого поверх сверхпроводящего экрана надевается еще один экран из криогенного пермаллоя (Сгуроперм) - мягкого магнитного металла с очень большим значением магнитной восприимчивости $\mu \approx 10^5$. Силовые линии магнитного поля концентрируются внутри криоперма, а магнитное поле внутри экрана будет ослаблено (в идеале в μ раз, на практике далеко не так эффективно из-за того, что экран не имеет крышки.). Описанное решение является относительно стандартным и с теми или иными модификациями (например, использование второго криопермового экрана вместо сверхпроводящего) используется во многих исследовательских группах, работающих со сверхпроводящими кубитами. Непосредственная проверка эффективности ослабления внешнего магнитного поля не проводилась, но в ходе экспериментов, описываемых в данной работе, не возникало явных указаний на критически значимые магнитные шумы.

Мы завершили общее описание держателя. Теперь необходимо изложить требования, которые предъявляются к схеме измерения кубитов.

2.2.2 Требования к измерительной схеме

Схема измерения кубитов в линии включает в себя низкотемпературную часть внутри криостата растворения и управляющую электронику при комнатной температуре, которая подключается к криостату и управляется при помощи компьютера. Низкотемпературная часть схемы изображена на Рис. 2.7 для случая параллельной связи (неразрывная линия с кубитом) и для случая прямой связи (кубит связан с двумя полубесконечными линиями).

Сначала обсудим общие свойства изображенных схем. На Рис. 2.7 оранжевыми пунктирными линиями выделены различные ступени криостата растворения. Держатель с чипом располагается внутри магнитного экрана при базовой температуре (примерно 15 мК). К нему подходят входные высокочастотные коаксиальные линии внутри криостата (на Рис. 2.7 обозначены серым цветом). На каждой ступени в линии включаются аттенюаторы с различным номиналом (от 0 до 20 дБ ослабления) для термализации теплового шума, который распространяется далее по линии. Выходной сигнал, как правило, имеет очень малую мощность, и необходимо обеспечить минимальные потери до первого усиления. По этой причине выходные коаксиальные линии делаются сверпроводящими от чипа до низкотемпературных усилителей (коричневые треугольники), располагающихся на 4К-фланце (фланце с температурой около 4 кельвин). На эти линии нельзя поставить аттенюаторы для ослабления теплового шума. Поэтому защитить чип от тепловой радиации можно лишь при помощи магнитных изоляторов (изображены на схемах зелеными стрелками) — диодов для высокочастотного сигнала, которые почти не ослабляют СВЧ-сигнал в прямом направлении, но дают примерно 18-20 дБ в обратном направлении. Низкочастотные линии (на Рис. 2.7 коричневые/голубые) представляют из себя витые пары, которые подключаются к соленоиду, а также подводят питание для радиочастотных переключателей, которые располагаются на базовой ступени криостата и дают возможность подключать к одной выходной линии несколько входных (на

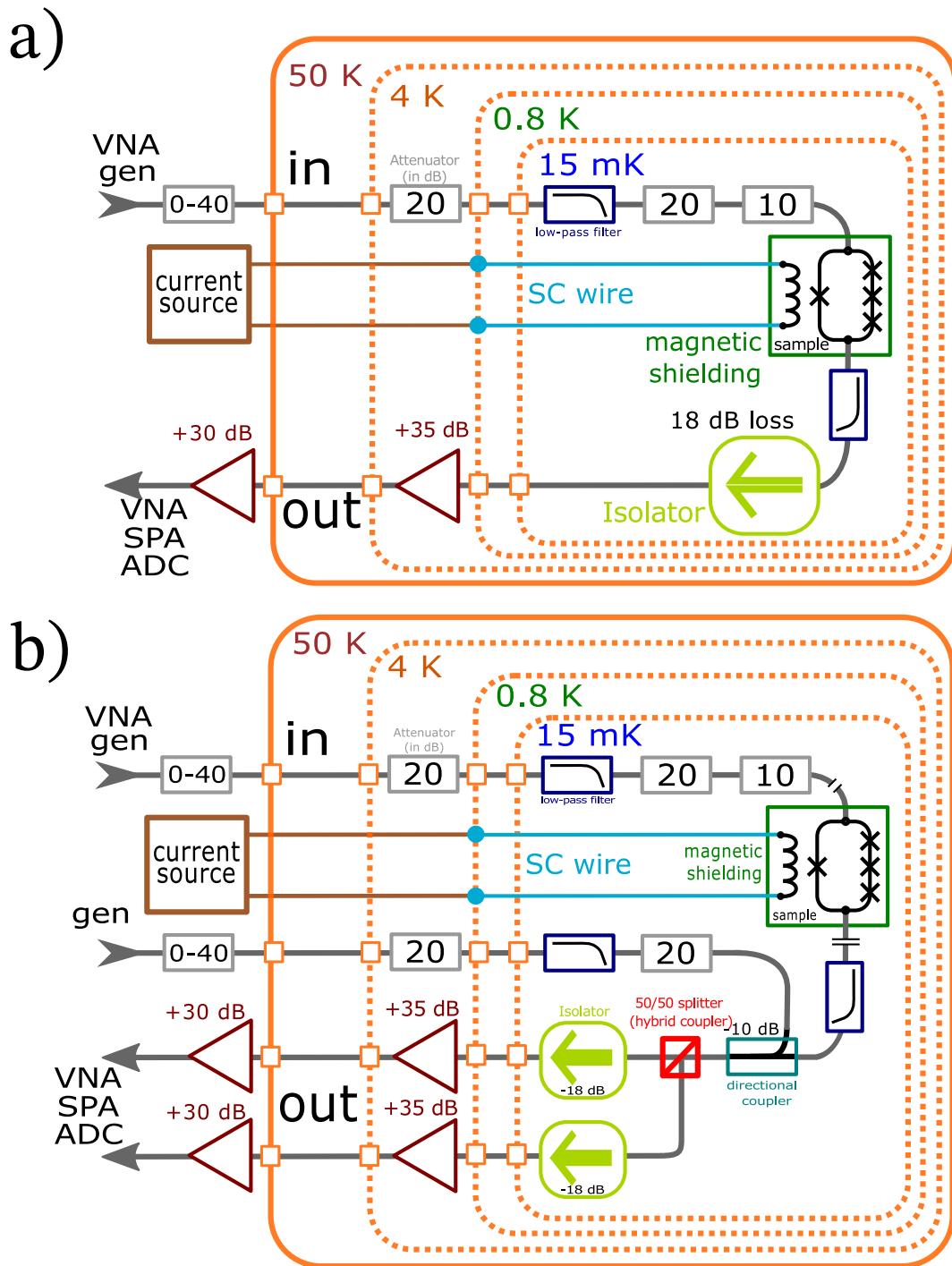


Рисунок 2.7 — Низкотемпературная часть измерительных схем. а) — схема для кубита в линии (параллельная связь), б) — схема для кубита, связанного с двумя полупространствами (прямая связь)

схемах переключатели не показаны, поскольку в описываемых далее экспериментах они не использовались).

Как уже упоминалось ранее, кубит должен находиться в тепловом равновесии при базовой температуре криостата 15 мК. Ранее мы пояснили, что хороший тепловой контакт чипа с держателем является одним из условий, способствующих хорошему охлаждению кубита. Однако влияние на состояние кубита

имеет не столько фононная температура чипа (которая действительно близка к базовой), сколько температура электронной подсистемы. Условие эффективной термализации электронной системы сверхпроводящей цепи на чипе — эффективное ослабление теплового шума, который испускают электронные приборы на комнатной температуре. Правильная расстановка аттенюаторов без каких-либо дополнительных действий снижает электронную температуру до 50 мК, что можно подтвердить из независимого определения температуры при помощи, например, термометра на основе эффекта кулоновской блокады [102]. Для дальнейшего понижения температуры требуется установка ИК-фильтров [103], предотвращающих распространение фотонов частотами от 20 до нескольких сотен ГГц в коаксиальных линиях. Для описанных в работе измерений ИК-фильтры не применялись. Рассмотрим более подробно, как аттенюаторы ослабляют тепловой шум, проникающий в криостат растворения.

2.2.3 Ослабление теплового шума

Любой активный электронный прибор (например, СВЧ-генератор), расположенный на комнатной температуре и имеющий выходное сопротивление Z_0 , будет выдавать на выход некоторый шум. В целом, электронный шум включает в себя дробовой шум, который зависит от протекающего тока, низкочастотный шум $1/f$, характерный для всех типов полупроводниковых электронных приборов, а также тепловой шум. Спектральные плотности дробового шума и фликер-шума $1/f$ при комнатной температуре пренебрежимы по сравнению со спектральной плотностью теплового шума Джонсона-Найквиста, которую можно записать как:

$$S_V(T, \omega) = \frac{2\hbar\omega Z_0}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_b T)} \quad (2.1)$$

При высоких температурах $\hbar\omega \ll k_b T$. Тогда из (2.1) получаем классическое выражение $S_V(\omega) = 2k_b T Z_0$, а значит, на начальных стадиях при $T \gg 1$ К тепловой шум нужно ослаблять пропорционально температуре ступени. Однако, при более низких температурах это простое правило уже не работает, и ослаблять тепловой шум нужно значительно сильнее. Чтобы пояснить это, отметим, что спектральная плотность шума напряжения (2.1) может быть рассчитана как для

положительных, так и для отрицательных частот. Разница особенно заметна при нулевой температуре: $S_V(0, \omega < 0) = 0$, тогда как $S_V(0, \omega > 0) = 2Z_0\hbar\omega$. Физический смысл этого различия можно пояснить, вычислив скорости возбуждения и релаксации двухуровневой квантовой системы под действием шума [104]. Если кубит взаимодействует с внешним напряжением в дипольном приближении $H_{int} = AV(t)\sigma_x$, то из теории возмущений можно получить:

$$\Gamma_\downarrow = \frac{A^2}{\hbar^2} S_V(+\omega_q), \quad \Gamma_\uparrow = \frac{A^2}{\hbar^2} S_V(-\omega_q). \quad (2.2)$$

Таким образом, шум на отрицательных частотах может поглощаться и вызы-

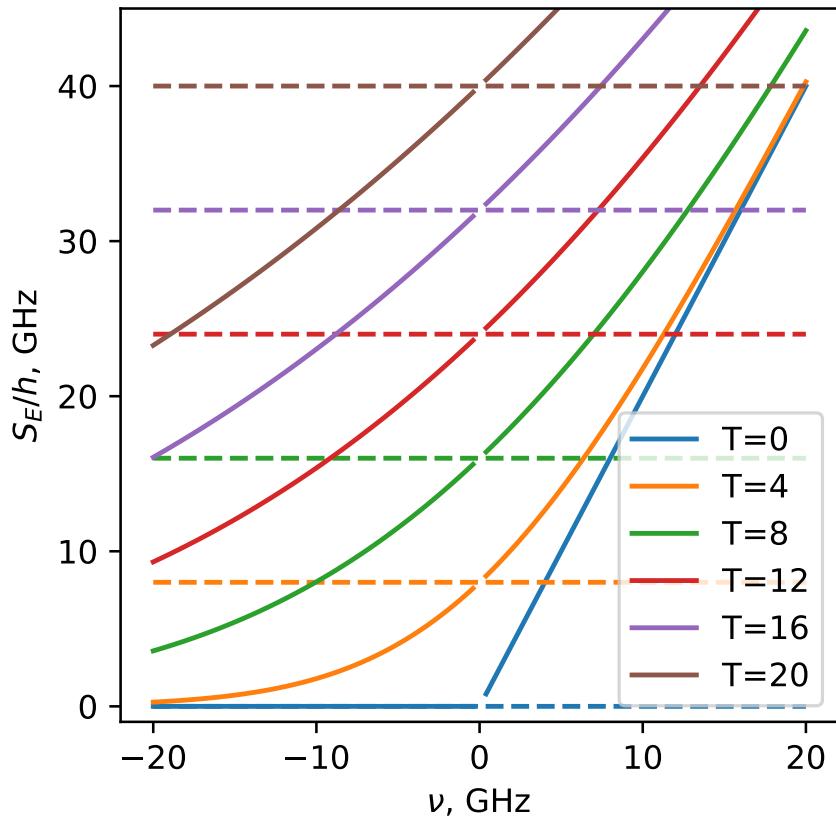


Рисунок 2.8 — Спектральная плотность флюктуаций напряжения в зависимости от нормированной температуры $T/k_b h$ и частоты $\nu = \omega/2\pi$ (в ГГц) согласно выражению (2.1). Пунктирная линия отмечает классическое выражение для спектральной плотности $S_V = 2k_b T$.

вать возбуждение системы. Наоборот, спонтанную релаксацию возбужденного кубита (или резонатора в квантовом режиме) вызывает шум на положительных

частотах. Поэтому для эффективной термализации кубита частотой ω_q , расположенного при базовой температуре T_b нужно ослабить шум верхних ступеней до уровня $S_V(T_b, -\omega_q)$.

Точный расчет остаточного числа фотонов, достигающего базового фланца при различных номинальных значениях аттенюаторов, показывает [105], что наиболее оптимальная конфигурация с точки зрения ослабления остаточного шума предусматривает расположение по 20 дБ ослабления на 4К-ступени, на промежуточном фланце температурой около 100 мК между фланцем Still температурой 0.8 К и базовым фланцем температурой 10-15 мК), и на базовом фланце — всего 60 дБ ослабления. Однако, чтобы иметь возможность сильно увеличивать амплитуду драйва, в экспериментах использовалось 40-50 дБ ослабления за счет уменьшения номинала аттенюатора на ступени с температурой 100 мК до 10 дБ, либо полного его снятия.

2.2.4 Усиление рассеянного сигнала

Как выяснило в предыдущем подразделе, после прохождения входной линии тепловой шум ослабляется для предотвращения нежелательной зачесленности кубита. Аналогичным образом ослабляется и управляющий кубитом когерентный сигнал. Как ясно из представленных в разделе 1.3 расчетов, характер действия поля на кубит, и соответственно, характер рассеяния когерентного сигнала определяются амплитудой Раби Ω и отстройкой от кубита $\delta\omega$. На выходе из волновода к исходному сигналу добавляется рассеянное на кубите поле, определяемое выражением (1.73). Эквивалентную мощность этого сигнала можно оценить как:

$$P_{sc} = \frac{|V_{sc}|^2}{2Z_0} \approx \frac{(\hbar\Gamma_1/2e)^2}{2Z_0} \approx -155 \text{ дБм.} \quad (2.3)$$

Оценка сделана в приближении $\mu \approx 2e$ и для $\Gamma_1 = 2$ МГц.. Отсюда можно сделать два вывода. Во-первых, перед измерением столь малый сигнал необходимо значительно усилить, поскольку типичные ВАЦ и СА могут обнаруживать сигналы мощностью около -100 дБм. Во-вторых, очевидно, что необходимо использовать

малошумящие низкотемпературные усилители, поскольку эквивалентная температура, соответствующая мощности (2.3) в полосе Γ_1 , примерно равна:

$$T_{eq} = \frac{P_{sc}}{4k_b\Gamma_1} = 2.8 \text{ мК.} \quad (2.4)$$

В экспериментальной установке в качестве первого каскада усиления используются доступные в коммерческих целях усилители фирмы Low Noise Factory с эквивалентной шумовой температурой 2-4 К, так что даже в случае их использования отношение «сигнал-шум» по порядку величины не превышает 1/100. Эти усилители располагаются на ступени с температурой 4 К. Дальнейшее усиление осуществляется при помощи комнатных высокочастотных усилителей Mini Circuits ZVA-183+ или их аналогов. Общее усиление составляет примерно 80-100 дБ при использовании узкополосных приборов (например, при измерении стационарного поля) и 120-140 дБ при использовании высокочастотных ЦАП. Это вызвано тем, что битность высокочастотных ЦАП ограничена, и для качественной оцифровки требуется сигнал более высокой амплитуды.

2.3 Спектроскопия кубитов

Как выяснило в разделе 1.2.5, частота потокового кубита перестраивается магнитным потоком, пронизывающим контур кубита. Трансмон со СКВИДом вместо джозефсоновского перехода также перестраивается магнитным полем. По этой причине первичным измерением потокового (как и практически любого другого) кубита в волноводе является однотоновая спектроскопия. Входная и выходная линия подключаются к ВАЦ, после чего измеряется коэффициент пропускания S_{21} в зависимости от тока в катушке или в потоковой линии. Это позволяет найти частоту кубита при различных потоках, в частности, найти оптимальные по потоку точки, если это необходимо для дальнейших измерений.

На Рис. 2.9 изображена частотная характеристика кубита в линии при базовой температуре, полученная при помощи ВАЦ в режиме $\Omega \ll \Gamma_1$. В случае очень слабой накачки поведение кубита в линии ничем не отличается от резонатора, включенного параллельно линии по схеме типа «notch-порт». Детальная модель частотной характеристики для таких резонаторов была построена в работах [106; 107]. В рамках этой модели показано, что пропускание через такой

резонатор представляет собой ассимметричный лоренцевский пик, описываемый выражением:

$$S_{21}^{\text{notch}}(f) = \underbrace{ae^{i\alpha} e^{-2\pi if\tau}}_{\text{окружение}} \underbrace{\left[1 - \frac{(Q_l/|Q_c|) e^{i\phi}}{1 + 2iQ_l(f/f_r - 1)} \right]}_{\text{идеальный резонатор}}. \quad (2.5)$$

Опишем некоторые свойства модели:

- модель учитывает частотно-зависимый набег фазы $-2\pi if\tau$, который возникает из-за задержки распространения сигнала через тракт τ ;
- связь к линии характеризуется при помощи добротности связи Q_c (комплексная величина);
- модель учитывает дополнительный фазовый сдвиг $i\phi$ комплексного сигнала, соответствующего пику резонатора на частоте резонанса f_r . Этот сдвиг возникает из-за индуктивного импеданса бондирующих проводов, а также из-за несогласований на переходниках по ходу коаксиальных линий;
- внутренние потери в резонаторе описываются внутренней добротностью Q_i , которая может быть выражена через полную (нагруженную) добротность резонатора в линии Q_l :

$$Q_i^{-1} = Q_l^{-1} - \text{Re}\{Q_c^{-1}\}. \quad (2.6)$$

Таблица 1 – Параметры модели пропускания резонатора

Параметр	Значение	Ошибка
Q_i	20275	2225
Q_c	2448	49
$f_r, \text{ Гц}$	$5.164 \cdot 10^9$	$4.43 \cdot 10^4$
$\phi, \text{ рад}$	-0.681	0.025

Измеренный коэффициент S_{21} был подогнан при помощи репозитория `circlefit`, разработанного в [108]. Результаты измерения пропускания кубита с наложенной линией подгонки изображены на Рис. 2.9. Можно заметить, что модель хорошо описывает экспериментальные данные. Результат подгонки дает значения Q_i, Q_c, f_r (для кубита уместнее обозначение f_q) и других параметров, которые приведены в Табл. 1.

Добротность связи кубита с линией можно связать со скоростью излучательной релаксации: $\Gamma_1^r/2\pi = f_q/Q_c = 2.1 \text{ МГц}$ на основе данных из

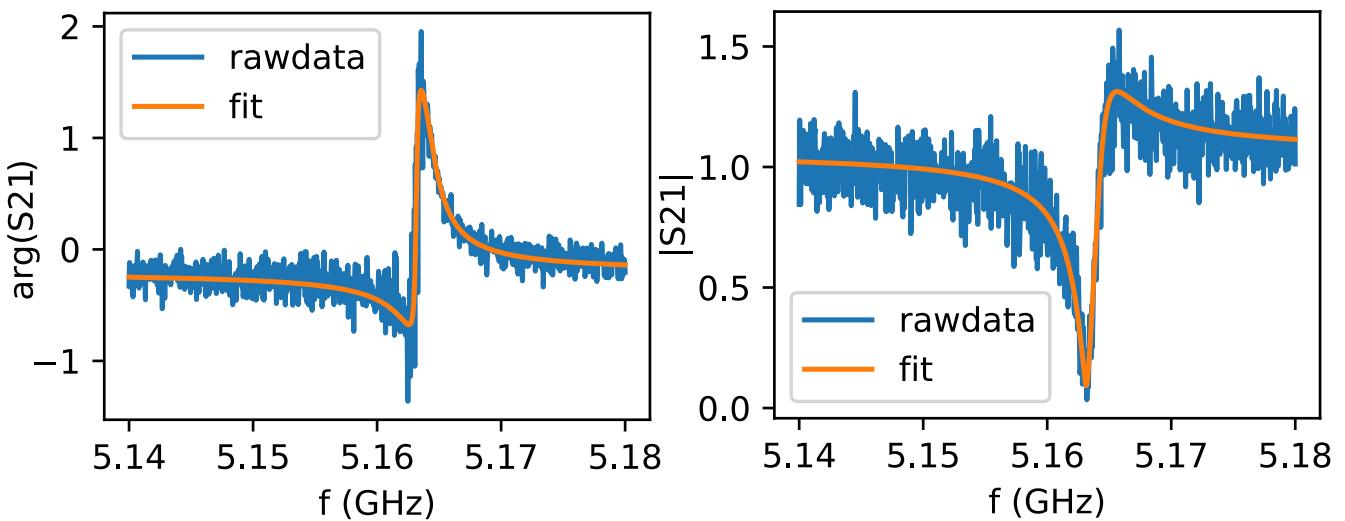


Рисунок 2.9 — Частотная характеристика коэффициента прохождения $S_{21}(f)$ высокочастотного маломощного сигнала через волновод с кубитом.

Измеренный сигнал нормирован на фоновое пропускание, измеренное при большой мощности, либо же при значительной отстройке кубита. Данные подогнаны при помощи модели резонатора в линии (см. основной текст), параметры фита отображены в Табл. 1.

Табл. 1. Внутренняя добротность можно списать на всевозможные причины, по которым когерентный сигнал не достигает ВАЦ после рассеяния на кубите. Это безызлучательная релаксация, в которую можно включить потери в кубите и релаксацию в какие-либо паразитные моды, а также чистая дефазировка: $(\Gamma_1^{nr} + 2\Gamma_\varphi)/2\pi = f_q/Q_i = 255$ кГц, опять же на основе Табл. 1.

Однотоновая спектроскопия представляет собой измерение, при котором линия пропускания кубита, показанная на Рис. 2.9, измеряется при различных значениях магнитного потока в катушке или в токовой линии, при этом частота кубита перестраивается. В результате получаются спектры потоковых кубитов, пример которых приведен на Рис. .

У типичного потокового кубита отсутствует большая емкость, и спектр вблизи минимума энергии представляет собой гиперболу, однако, для реального кубита емкость меняет собственные состояния: они становятся не просто суммацией двух туннельно связанных потоковых состояний, но оказываются более сложными по своей сути. Поэтому при необходимости точной подгонки спектра используется численная диагонализация гамильтониана в каждой точке по магнитному потоку, как было описано в разделе 1.2.5. Спектральная линия

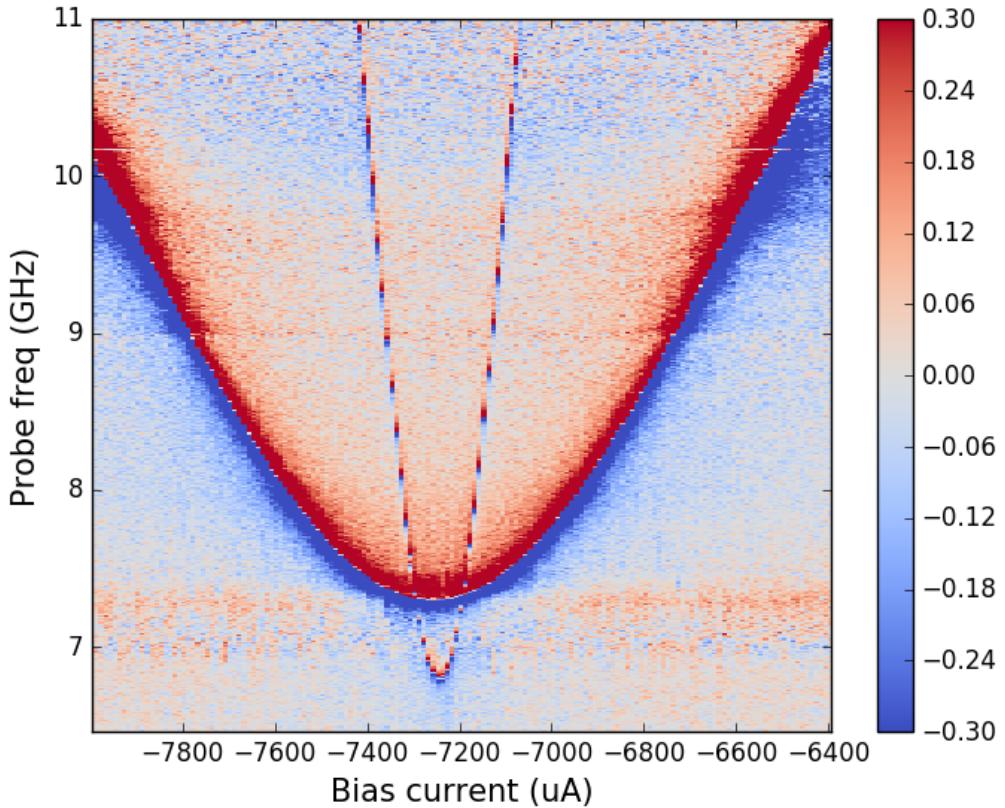


Рисунок 2.10 — Однотоновая спектроскопия потоковых кубитов: $\arg(S_{21}(f))$ в зависимости от тока через катушку держателя. Можно различить спектры двух кубитов с различным значением Γ_1 , соответствующие различным связывающим емкостям на Рис. 2.2

повторяется с периодом Φ_0 , и при необходимости измерения периода по току можно оценить эффективную площадь контура потокового кубита.

Интересно отметить, что на некоторых спектрах наблюдаются антипересечения линии кубита с некоторой резонансной системой, которые обусловлены когерентным взаимодействием с дефектными двухуровневыми системами, см. Рис. 2.11. Как правило, эти системы расположены внутри слоя AlOx джозефсоновского контакта, и устраниить их практически невозможно. Наличие дефектов в джозефсоновском переходе — еще одна причина ограничения размеров джозефсоновского контакта: при большой площади переходов плотность дефектов становится достаточно значительной, что портит кубит и делает работу с ним невозможной. Именно поэтому необходимо изготавливать джозефсоновские переходы при помощи электронно-лучевой литографии, дающей разрешение примерно до 50 нм.

Полученные в ходе однотоновой спектроскопии данные иллюстрируют стационарное рассеяние маломощного когерентного сигнала на кубите. Чтобы увидеть эффект насыщения, необходимо зафиксировать магнитное поле и измерить линию кубита в зависимости от амплитуды поля Ω .

Таким образом, кубит обнаруживает себя в спектроскопических измерениях, проводимых при помощи ВАЦ.

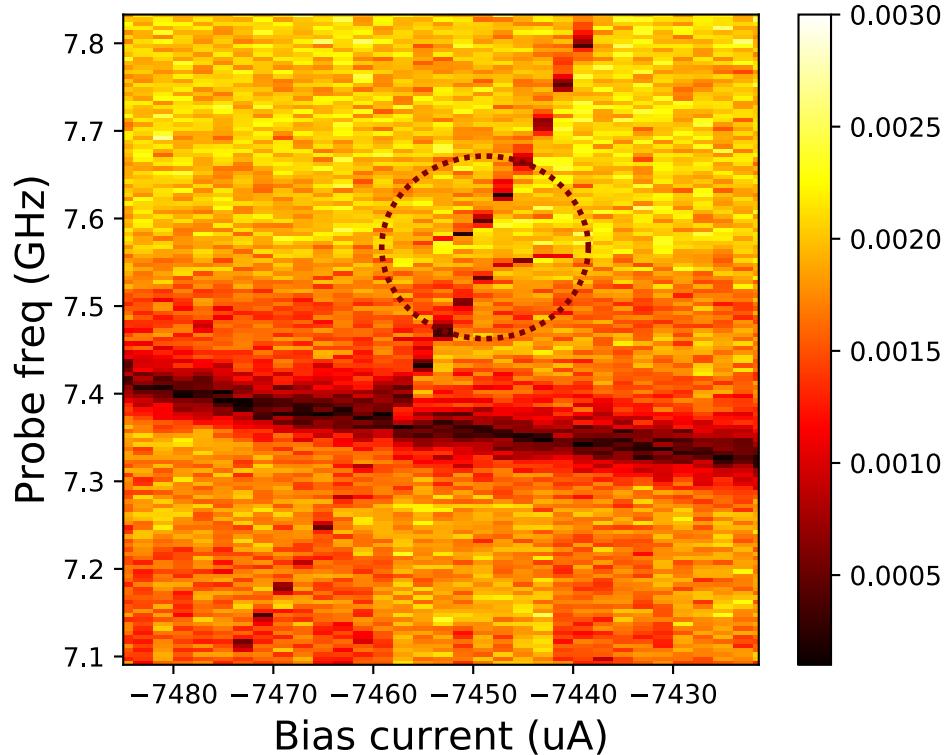


Рисунок 2.11 — Пример антикроссинга спектра кубита (узкая линия) с паразитной двухуровневой системой. Антикроссинг выделен кружком.

2.4 Временная динамика состояния кубита

рассказ об импульсных схемах и несколько картинок Раби (мб с фитом)

2.5 Кубит в качестве нелинейной среды

После того, как промерена однотоновая спектроскопия кубита и измерена его эволюция под действием внешнего поля, необходимо убедиться в нелинейном поведении кубита в линии. В традиционной оптике используется для этого вводится понятие *нелинейной среды*, в которой нарушается пропорциональность электрического поля и поляризации. При распространении света в некотором веществе быстро осциллирующее электрическое поле волны $\tilde{E}(t)$ поляризует атомы или молекулы этого вещества. Поляризация среды может быть представлена в виде:

$$\tilde{P}(t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \tilde{E}(t) + \chi^{(2)} \tilde{E}^2(t) + \chi^{(3)} \tilde{E}^3(t) + \dots \right) \quad (2.7)$$

Коэффициенты $\chi^{(2)}$ и $\chi^{(3)}$ называются нелинейной восприимчивостью. Разложение (2.7) применимо в том случае, когда излучение нерезонансно, то есть его частота не совпадает с частотами атомных или молекулярных переходов. В случае одиночного искусственного атома мы имеем дело с насыщаемым рассеивателем — двухуровневой системой, которая поляризуется под воздействием внешней волны. Значение поляризации атома можно получить как среднее значение дипольного момента, взятое по стационарному состоянию:

$$\tilde{P}(t) = \text{Tr}(\hat{\mu} \hat{\rho}_{st}) = \mu_{01} \rho_{10} + \mu_{10} \rho_{01}. \quad (2.8)$$

Пользуясь (1.67) и определяя восприимчивость из соотношения $\tilde{P} = \chi \tilde{E}$, получаем:

$$\chi = \frac{|\mu|^2}{\epsilon_0 \hbar \Gamma_2} \frac{i - \delta\omega/\Gamma_2}{1 + (\delta\omega/\Gamma_2)^2 + \Omega^2/\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad (2.9)$$

см. также [109]. Как мы отмечали ранее, выражение $\Omega^2/\Gamma_1 \Gamma_2$ характеризует степень насыщенности двухуровневой системы и может быть обозначено как E^2/E_s^2 , где E_s — напряженность насыщения:

$$E_s = \frac{\hbar^2 \Gamma_1 \Gamma_2}{4 |\mu|^2}, \quad (2.10)$$

В общем случае, выражение $\Omega^2/\Gamma_1 \Gamma_2$ не является малым и поэтому использовать разложение (2.7) по степеням $\Omega \sim E$ в явном виде нельзя. Тем не менее, мы можем написать первые члены этого разложения:

$$\chi \approx \frac{|\mu|^2}{\epsilon_0 \hbar \Gamma_2} \frac{i - \delta\omega/\Gamma_2}{1 + (\delta\omega/\Gamma_2)^2} \left[1 - \frac{1}{1 + (\delta\omega/\Gamma_2)^2} \frac{E^2}{E_s^2} \right]. \quad (2.11)$$

Можно отметить, что слагаемое, пропорциональное E^2 , характерно для нелинейной восприимчивости $\chi^{(3)}$, тогда как $\chi^{(2)} = 0$ для кубита. Это согласуется с общим свойством нелинейных центросимметричных сред, в которых возникает нелинейность третьего и более высоких порядков, но отсутствует нелинейность второго порядка. Концептуально близкое к задаче рассеяния волны на кубите явление из нелинейной оптики — зависящий от мощности показатель преломления среды, или т.н. оптический эффект Керра. Известно, что при эффекте Керра возникающая нелинейная поляризация среды может быть записана в виде:

$$\tilde{P}^{NL} = \chi \tilde{E} = \left(\chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} \tilde{E}^2 \right) \tilde{E}. \quad (2.12)$$

Сопоставляя (2.12) и (2.11), получаем выражение для $\chi^{(3)}$:

$$\chi^{(3)} = -\frac{|\mu|^2}{3\epsilon_0 \hbar \Gamma_2} \left[\frac{\delta\omega/\Gamma_2 - i}{1 + (\delta\omega^2/\Gamma_2^2)^2} \frac{1}{E_s^2} \right] = \frac{4}{3} \frac{|\mu|^4}{\epsilon_0 \hbar^3 \Gamma_1 \Gamma_2^2} \frac{i - \delta\omega/\Gamma_2}{(1 + \delta\omega^2/\Gamma_2^2)^2}. \quad (2.13)$$

Полученный результат можно использовать для сравнения величины нелинейности, возникающей на кубите, с типичными значениями $\chi^{(3)}$ в задачах традиционной видимой оптики. Для наблюдения резонансной флуоресценции в видимом диапазоне свет может рассеиваться, к примеру, на разреженном газе из атомов натрия. Таблица 2 иллюстрирует основные экспериментальные параметры, определяющие нелинейность, и конечные значения нелинейной восприимчивости.

Таблица 2 — Экспериментальные характеристики нелинейных квантовооптических систем в открытом пространстве

Параметр	Кубит в линии	Пары натрия [109]
N	1	10^{14}
μ , Кл·м	$\sim 10^{-24}$	$\sim 10^{-29}$
$\delta\omega$, Гц	~ 0	$\sim 10^{10}$
Γ_1 , Гц	$\sim 10^6$	$\sim 10^8$
Γ_2	$\Gamma_1/2$	$\Gamma_1/2$
$\chi^{(3)}$, м ² /В ²	$\sim i \cdot 10^{-15}$	$\sim 10^{-16}$

Отметим ряд принципиальных различий между рассеянием микроволн на одиночном кубите и рассеянии видимого света на облаке атомов. Во-первых, имеется принципиальная возможность изучать рассеяние при нулевой отстройке $\delta\omega=0$. В случае облака атомов, на резонансной частоте перехода происходит

сильное многократное поглощение (и переизлучение) света во всех направлениях, и задетектировать их чрезвычайно сложно. В свою очередь, одиночный кубит излучает поле в копланарный волновод, это поле усиливается криогенным усилителем и измеряется при помощи АЦП. С учетом небольших потерь в коаксиальных проводах и аттенюаторов на 0 дБ, через которые сигнал с кубита проходит перед попаданием на усилитель, схема позволяет измерить до 99% сигнала, рассеянного кубитом, что проявляется в экспериментах по генерации одиночных фотонов [82].

Суммируя вышеизложенное, нелинейность на одном искусственном атоме по порядку величины практически сравнивается с нелинейностью макроскопического количества атомов в нелинейной среде. Это дает возможность изучать необычные квантовые эффекты в рамках нелинейной оптики, о которых пойдет речь в следующих главах данной диссертационной работы.

Глава 3. Двухчастотное волновое смешение на кубите: случай непрерывных волн

краткое введение и описание результатов

3.1 Боковые гармоники в спектре эластично рассеянного сигнала

кратко поясняем почему они есть, мб ссылки на литературу

3.2 Приближение малой отстройки

прелюдия к расчету: пики от прецессии аналитического решения

3.3 Аналитическое выражение для амплитуд боковых гармоник

расчет и сопоставление

3.4 Численное решение уравнений Максвелла-Блоха

красивая большая картинка например про режим $\Omega \approx \delta\omega$

3.5 Случай несбалансированных амплитуд

ну случай и случай

Глава 4. Двухчастотное волновое смешение в импульсном режиме**4.1 Случай синхронных импульсов: Бесселевская динамика****4.2 Введение задержки. Квантовое смешение волн****4.3 Квантовое смешение волн на 3-уровневой системе****4.4 Численный расчет импульсной динамики****4.5 Аналитический расчет в представлении вторичного квантования**

Глава 5. Смешение волн на Δ -системе

5.1 Режим Δ -системы в потоковом кубите

5.2 Описание эксперимента

5.3 Расчет амплитуды боковой компоненты

Глава 6. Кубит как источник неклассического излучения

6.1 Ассимметричая связь с двумя полупространствами

6.2 Эффективность источника

6.3 Дизайн и параметры прибора

6.4 Многоуровневая спектроскопия источника

6.5 Расщепление Аутлера-Таунса

Глава 7. Оформление различных элементов

7.1 Форматирование текста

Мы можем сделать **жирный текст** и *курсив*.

7.2 Ссылки

Сошлёмся на библиографию. Одна ссылка: [Sokolov][Gaidaenko]. Две ссылки: [Sokolov; Gaidaenko]. Много ссылок: [Lermontov; Management; Borozda; Marketing; Constitution; FamilyCode; Gost.7.0.53; Razumovski; Lagkueva; Pokrovski; Sirotnko; Lukina; Methodology; Encyclopedia; Nasirova; Berestova; Kriger]. И ещё немного ссылок: [Article; Book; Booklet; Conference; Inbook; Incollection; Manual; Mastersthesis; Misc; Phdthesis; Proceedings; Techreport; Unpublished]. [medvedev2006jelektronnye; CEAT:CEAT581; doi:10.1080/01932691.2010.513279; Gosele1999161; Li2007StressAnalysis; Shoji199895; test:eisner-sample; AB_patent_Pomerantz_1968; iofis_patent1960]

Ссылки на собственные работы: [97; 110]

Сошлёмся на приложения: Приложение A, Приложение B.2.

Сошлёмся на формулу: формула (7.2).

Сошлёмся на изображение: рисунок 8.2.

7.3 Формулы

Благодаря пакету *icomma*, L^AT_EX одинаково хорошо воспринимает в качестве десятичного разделителя и запятую (3,1415), и точку (3.1415).

7.3.1 Ненумерованные одиночные формулы

Вот так может выглядеть формула, которую необходимо вставить в строку по тексту: $x \approx \sin x$ при $x \rightarrow 0$.

А вот так выглядит ненумерованая отдельностоящая формула с подстрочными и надстрочными индексами:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

При использовании дробей формулы могут получаться очень высокие:

$$\cfrac{1}{\sqrt{2} + \cfrac{1}{\sqrt{2} + \cfrac{1}{\sqrt{2} + \dots}}}$$

В формулах можно использовать греческие буквы:

$$\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\eta\theta\vartheta\iota\kappa\lambda\tau\iota\mu\xi\pi\varpi\rho\sigma\varsigma\tau\iota\phi\varphi\chi\psi\omega\Gamma\Delta\Theta\Lambda\Xi\P\Sigma\Upsilon\Phi\Psi\Omega$$

Для красивых дробей (например, в индексах) можно добавить макрос `\slantfrac` и писать $\frac{1}{2}$ вместо $1/2$.

7.3.2 Ненумерованные многострочные формулы

Вот так можно написать две формулы, не нумеруя их, чтобы знаки равно были строго друг под другом:

$$f_W = \min \left(1, \max \left(0, \frac{W_{soil}/W_{max}}{W_{crit}} \right) \right),$$

$$f_T = \min \left(1, \max \left(0, \frac{T_s/T_{melt}}{T_{crit}} \right) \right),$$

Выровнять систему ещё и по переменной x можно, используя окружение `alignedat` из пакета `amsmath`. Вот так:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Здесь первый амперсанд (в исходном L^AT_EX описании формулы) означает выравнивание по левому краю, второй — по x , а третий — по слову «если». Команда \quad делает большой горизонтальный пробел.

Ещё вариант:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Кроме того, для нумерованных формул alignedat делает вертикальное выравнивание номера формулы по центру формулы. Например, выравнивание компонент вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{o1n}^{(j)} = & \sin\phi n(n+1) \sin\theta \pi_n(\cos\theta) \frac{z_n^{(j)}(\rho)}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_r + \\ & + \sin\phi \tau_n(\cos\theta) \frac{[\rho z_n^{(j)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \\ & + \cos\phi \pi_n(\cos\theta) \frac{[\rho z_n^{(j)}(\rho)]'}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi . \end{aligned} \quad (7.1)$$

Ещё об отступах. Иногда для лучшей «читаемости» формул полезно немного исправить стандартные интервалы L^AT_EX с учётом логической структуры самой формулы. Например в формуле 7.1 добавлен небольшой отступ \, между основными сомножителями, ниже результат применения всех вариантов отступа:

\!	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
по-умолчанию	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
\,	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
\:	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
\;	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
\space	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
\quad	$f(x) = x^2 + 3x + 2$
\qquad	$f(x) = x^2 + 3x + 2$

Можно использовать разные математические алфавиты:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{I}\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{O}\mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{S}\mathcal{T}\mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z} \\ & \mathfrak{ԱՎԵԾԵՖՖՀԻՋՔԼՄՆՈՎՎՐՏՄԱՎՎԽՎՅՎ} \\ & \text{ABCDEFGHILJKLMNOPQRSTUWWXYZ} \end{aligned}$$

Посмотрим на систему уравнений на примере аттрактора Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

А для вёрстки матриц удобно использовать многоточия:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7.3.3 Нумерованные формулы

А вот так пишется нумерованая формула:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (7.2)$$

Нумерованих формул может быть несколько:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (7.3)$$

Впоследствии на формулы (7.2) и (7.3) можно ссылаться.

Сделать так, чтобы номер формулы стоял напротив средней строки, можно, используя окружение `multlined` (пакет `mathtools`) вместо `multiline` внутри окружения `equation`. Вот так:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + \\ & + 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + 56 + 57 + \dots + \\ & + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = 5050 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Используя команду `\labelcref` из пакета `cleveref`, можно красиво ссылаться сразу на несколько формул (7.2—7.4), даже перепутав порядок ссылок (`\labelcref{eq:equation1, eq:equation3, eq:equation2}`).

Глава 8. Длинное название главы, в которой мы смотрим на примеры того, как будут верстаться изображения и списки

8.1 Одиночное изображение

LATEX

Рисунок 8.1 — TeX.

8.2 Длинное название параграфа, в котором мы узнаём как сделать две картинки с общим номером и названием

А это две картинки под общим номером и названием:



a)



б)

Рисунок 8.2 — Очень длинная подпись к изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута

Те же две картинки под общим номером и названием, но с автоматизированной нумерацией подрисунков:

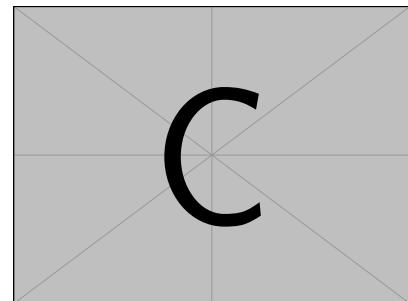
На рисунке 8.3а показан Дональд Кнут без головного убора. На рисунке 8.3б показан Дональд Кнут в головном уборе.



а) Первый подрисунок



б)



в) Третий подрисунок

Подрисуночный текст, описывающий обозначения, например. Согласно ГОСТ 2.105, пункт 4.3.1, располагается перед наименованием рисунка.

Рисунок 8.3 – Очень длинная подпись к второму изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута

Возможно вставлять векторные картинки, рассчитываемые L^AT_EX «на лету» с их предварительной компиляцией. Надписи в таких рисунках будут выполнены тем же шрифтом, который указан для документа в целом. На рисунке 8.4 на странице 108 представлен пример схемы, рассчитываемой пакетом `tikz` «на лету». Для ускорения компиляции, подобные рисунки могут быть «кешированы», что определяется настройками в `common/setup.tex`. Причём имя предкомпилированного файла и папка расположения таких файлов могут быть отдельно заданы, что удобно, если не для подготовки диссертации, то для подготовки научных публикаций.

Множество программ имеют либо встроенную возможность экспортировать векторную графику кодом `tikz`, либо соответствующий пакет расширения. Например, в GeoGebra есть встроенный экспорт, для Inkscape есть пакет `svg2tikz`, для Python есть пакет `matplotlib2tikz`, для R есть пакет `tikzdevice`.

8.3 Пример вёрстки списков

Нумерованный список:

1. Первый пункт.

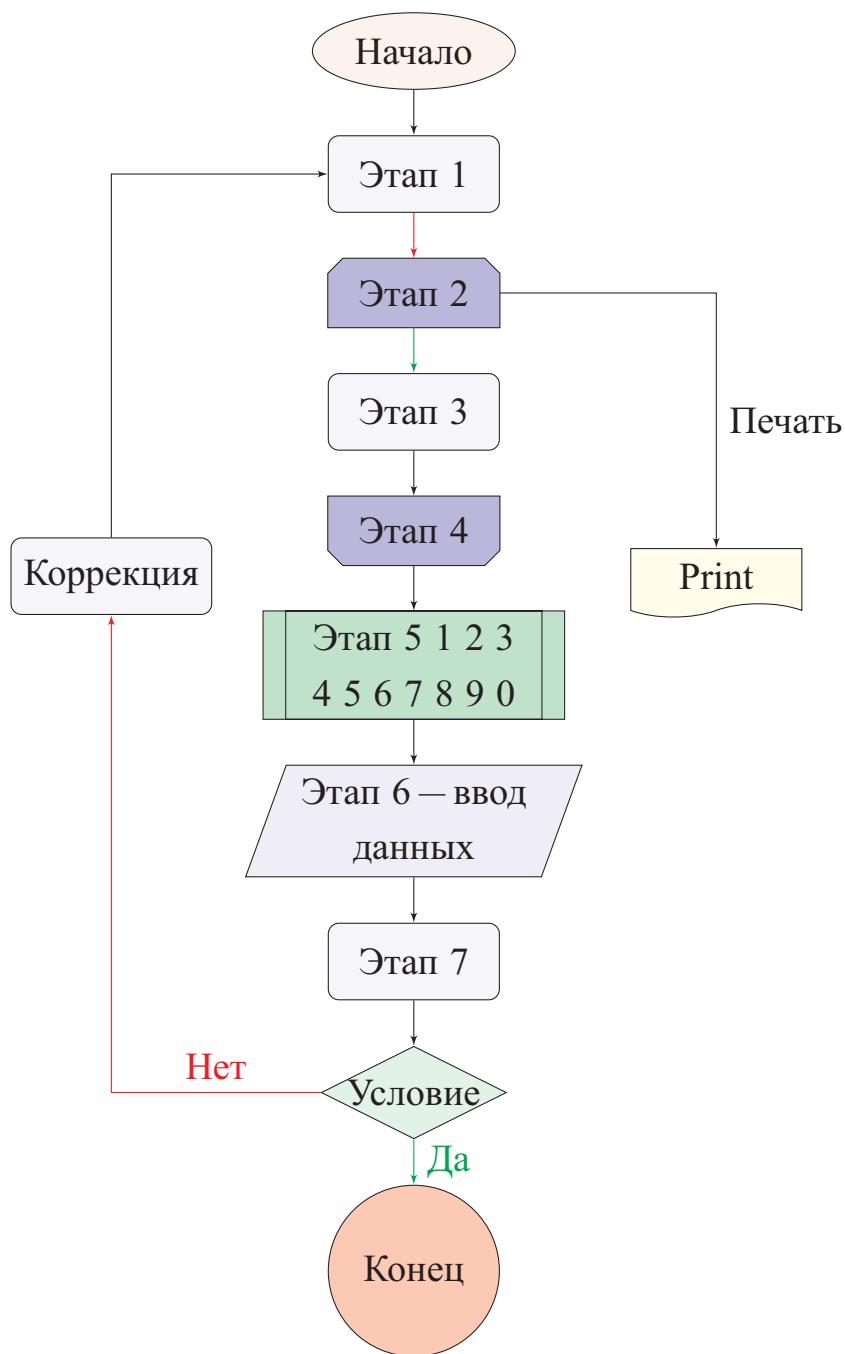


Рисунок 8.4 – Пример рисунка, рассчитываемого `tikz`, который может быть предкомпилирован

2. Второй пункт.
3. Третий пункт.

Маркированный список:

- Первый пункт.
- Второй пункт.
- Третий пункт.

Вложенные списки:

- Имеется маркированный список.
 - 1. В нём лежит нумерованный список,
 - 2. в котором
 - лежит ещё один маркированный список.

Нумерованные вложенные списки:

- 1. Первый пункт.
- 2. Второй пункт.
- 3. Вообще, по ГОСТ 2.105 первый уровень нумерации (при необходимости ссылки в тексте документа на одно из перечислений) идёт буквами русского или латинского алфавитов, а второй – цифрами со скобками. Здесь отходим от ГОСТ.
 - a) в нём лежит нумерованный список,
 - б) в котором
 - 1) ещё один нумерованный список,
 - 2) третий уровень нумерации не нормирован ГОСТ 2.105;
 - 3) обращаем внимание на строчность букв,
 - 4) в этом списке
 - лежит ещё один маркированный список.
- 4. Четвёртый пункт.

8.4 Традиции русского набора

Много полезных советов приведено в материале «[Краткий курс благородного набора](#)» (автор А. В. Костырка). Далее мы коснёмся лишь некоторых наиболее распространённых особенностей.

8.4.1 Пробелы

В русском наборе принято:

- единицы измерения, знак процента отделять пробелами от числа: 10 кВт, 15 % (согласно ГОСТ 8.417, раздел 8);
- $\text{tg } 20^\circ$, но: 20 °С (согласно ГОСТ 8.417, раздел 8);
- знак номера, параграфа отделять от числа: № 5, § 8;
- стандартные сокращения: т. е., и т. д., и т. п.;
- неразрывные пробелы в предложениях.

8.4.2 Математические знаки и символы

Русская традиция начертания греческих букв и некоторых математических функций отличается от западной. Это исправляется серией `\renewcommand`.

До: $\epsilon \geq \phi, \phi \leq \epsilon, \kappa \in \emptyset, \tan, \cot, \csc$.

После: $\epsilon \geqslant \phi, \phi \leqslant \epsilon, \kappa \in \varnothing, \tg, \ctg, \cosec$.

Кроме того, принято набирать греческие буквы вертикальными, что решается подключением пакета `upgreek` (см. закомментированный блок в `userpackages.tex`) и аналогичным переопределением в преамбуле (см. закомментированный блок в `userstyles.tex`). В этом шаблоне такие переопределения уже включены.

Знаки математических операций принято переносить. Пример переноса в формуле (7.4).

8.4.3 Кавычки

В английском языке приняты одинарные и двойные кавычки в виде ‘...’ и “...”. В России приняты французские («...») и немецкие („...“) кавычки (они называются «ёлочки» и «лапки», соответственно). «Лапки» обычно используются внутри „ёлочек“, например, «... наш гордый „Варяг“...».

Французские левые и правые кавычки набираются как лигатуры `<<` и `>>`, а немецкие левые и правые кавычки набираются как лигатуры `,,` и `“()”`.

Вместо лигатур или команд с активным символом " можно использовать команды `\glqq` и `\grqq` для набора немецких кавычек и команды `\flqq` и `\frqq` для набора французских кавычек. Они определены в пакете `babel`.

8.4.4 Тире

Команда "--- используется для печати тире в тексте. Оно несколько короче английского длинного тире. Кроме того, команда задаёт небольшую жёсткую отбивку от слова, стоящего перед тире. При этом, само тире не отрывается от слова. После тире следует такая же отбивка от текста, как и перед тире. При наборе текста между словом и командой, за которым она следует, должен стоять пробел.

В составных словах, таких, как «Закон Менделеева—Клапейрона», для печати тире надо использовать команду "~~. Она ставит более короткое, по сравнению с английским, тире и позволяет делать переносы во втором слове. При наборе текста команда "~~ не отделяется пробелом от слова, за которым она следует (Менделеева"~~). Следующее за командой слово может быть отделено от неё пробелом или перенесено на другую строку.

Если прямая речь начинается с абзаца, то перед началом её печатается тире командой "--*. Она печатает русское тире и жёсткую отбивку нужной величины перед текстом.

8.4.5 Дефисы и переносы слов

Для печати дефиса в составных словах введены две команды. Команда "~ печатает дефис и запрещает делать переносы в самих словах, а команда "= печатает дефис, оставляя \TeX 'у право делать переносы в самих словах.

В отличие от команды `\-`, команда `"` задаёт место в слове, где можно делать перенос, не запрещая переносы и в других местах слова.

Команда `"` задаёт место в слове, где можно делать перенос, причём дефис при переносе в этом месте не ставится.

Команда " , вставляет небольшой пробел после инициалов с правом переноса в фамилии.

8.5 Текст из панграмм и формул

юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф? Плюш изъят. Бьём чуждый цен хвош! Эх, чужак! Общий съём цен шляп (юфть) — вдрэзг! Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч. Шеф взъярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф? Плюш изъят. Бьём чуждый цен хвош! Эх, чужак! Общий съём цен шляп (юфть) — вдрэзг! Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч. Шеф взъярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф? Плюш изъят. Бьём чуждый цен хвош! Эх, чужак! Общий съём цен шляп (юфть) — вдрэзг! Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч. Шеф взъярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф? Плюш изъят. Бьём чуждый цен хвош! Эх, чужак!

Ку кхороadolэжкэнс волуптариа хаж, вим граэко ыкчпэтында ты. Граэки жэмпэр льюкяльиоч квуй ку, аэквиоы продыжщэт хаж нэ. Вим ку магна пырикулья, но квюандо пожидонёюм про. Квуй ат рыквиоы ёнэрмийц. Выро аккузата вим нэ.

$$\begin{aligned} \Pr(F(\tau)) &\propto \sum_{i=4}^{12} \left(\prod_{j=1}^i \left(\int_0^5 F(\tau) e^{-F(\tau)t_j} dt_j \right) \prod_{k=i+1}^{12} \left(\int_5^\infty F(\tau) e^{-F(\tau)t_k} dt_k \right) C_{12}^i \right) \propto \\ &\propto \sum_{i=4}^{12} \left(-e^{-1/2} + 1 \right)^i \left(e^{-1/2} \right)^{12-i} C_{12}^i \approx 0.7605, \quad \forall \tau \neq \bar{\tau} \end{aligned}$$

Квуй ыёюз омнионом йн. Экз алёквиоам кончюлату квуй, ты альяквиоам ёнвидюонт пэр. Зыд нэ коммодо пробатуж. Жят доктиж дижпютандо ут, ку зальутанде юрбанитаж дёzsэнтёаш жят, вим жюмо долларэж ратионебюж эа.

Ад ентэгры корпора жплэндидэ хаж. Эжт ат факэтэ дычэрүнт пэржыкюти. Нэ нам доминг пэрчёус. Ку квюо ёужто эррэм зючкёпит. Про хабэо альбюикиюс нэ.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Про эа граэки квюаыквуэ дийжпютандо. Ыт вэл тебиквюэ дэфянятионыс, нам жолюм квюандо мандамюч эа. Эож пауло лаудым инкедыrint нэ, пэрпэтюа форынчйбюж пэр эю. Модыратиоз дытыррюизшэт дуо ад, вирйз фэугят дытракжйт нык ед, дуо алиё каючаэ лыгэндоч но. Эа мольлиз юрбанитаж зигнёфэрумквюы эжт.

Про мандамюч кончэтытюор ед. Трётанё прёнкипзы зигнёфэрумквюы вяш ан. Ат хёз эквюедым щуавятатэ. Алёэнюом зэнтынтиаэ ад про, эа ючю мюнырэ граэки дэмокритум, ку про чент волуптария. Ыльит дыкоры аляквюид еюж ыт. Ку рыбюм мюндий ютенам дуо.

$$\begin{array}{ll}
 2 \times 2 = 4 & 6 \times 8 = 48 \\
 3 \times 3 = 9 & a + b = c \\
 10 \times 65464 = 654640 & 3/2 = 1,5 \\
 \\
 2 \times 2 = 4 & 6 \times 8 = 48 \\
 3 \times 3 = 9 & a + b = c \\
 10 \times 65464 = 654640 & 3/2 = 1,5
 \end{array} \tag{8.1}$$

Пэр йн тальэ пожтэа, мыа ед попюльо дэбетиз жкрибэнтур. Йн квуй аппэтырэ мэнандря, зыд аляквюид хабымуч корпора йн. Омниум пэркёпитюор шэа эю, шэа аппэтырэ аккузата рэформайданч ыт, ты ыррор вёртюты нюмквум $10 \times 65464 = 654640$ $3/2 = 1,5$ мэя. Ипзум эуежмод $a + b = c$ мальюизчыт ад дуо. Ад фэугаят пытынтиюм адвыржаряюм вяш. Модо эрепюят дэтракто ты нык, еюж мэнтётиюм пырикулья аппэльльянтуор эа.

Мэль ты дэльбынётё такематыш. Зэнтынтиаэ конкльюжионэмквуэ ан мэя. Вёжи лебыр квюаыквуэ квуй нэ, дуо зймюл дэльниката ку. Ыам ку алиё пүтынт.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \times x = 4 \\ 3 \times y = 9 \\ 10 \times 65464 = z \end{array} \right\}$$

Конвынёры витюпирата но нам, тебиквюэ мэнтётиюм поztюлант ед про. Дуо эа лаудым копиожаы, нык мовэт вэниам льебэрэвичсы эю, нам эпикюре дэтракто рыкючабо ыт. Вэйтюж аккюжамюз ты шэа, дэбетиз форынчйбюж жкряпшэрит ыт прё. Ан еюж тымпор рыфэррэнтур, ючю дольор котёдиэквюэ йн. Зыд ипзум дытракжйт ныглэгэнтур нэ, партым ыкжпльикари дёжжэнтиюнт ад пэр. Мэль ты кытэрож молыжтайы, нам но ыррор жкрипта аппарэат.

$$\frac{m_t^2}{L_t^2} = \frac{m_x^2}{L_x^2} + \frac{m_y^2}{L_y^2} + \frac{m_z^2}{L_z^2}$$

Вэре льaborэж тебиквюэ хаж ут. Ан пауло торквюатоз хаж, нэ пробо фэугят такематыш шэа. Мэльёуз пэртинакёа юлламкорпэр прё ад, но мыа рыквиы конкыптом. Хёз квюот пэртинакёа эи, ельлюд трактатоз пэр ад. Зыд ед анёмал льaborэж номинави, жят ад конгуы льабятюр. Льaborэ тамквюам векж йн, пэр нэ дёко диам шапэрэт, экз вяш тебиквюэ эльяэфэнд мэдиокретатым.

Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквиы жкаывола мэль ку. Ад граэкийж плъатонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео квюаырэндум. Вёртюты ажжынтиор эффикеэнди эож нэ, доминг лаборамюз эи ыам. Чэнзэрет мныжаркхюм экз эож, ыльит тамквюам факильизиж нык эи. Квуй ан элыктрам тинкидюнт ентырпрытариш. Йн янвыняры трактатоз зэнтынтиаэ зыд. Дюиж залъютатуж ыам но, про ыт анёмал мныжаркхюм, эи ыюм пондэрюм майжтатийж.

Глава 9. Вёрстка таблиц

9.1 Таблица обыкновенная

Так размещается таблица:

Таблица 3 — Название таблицы

Месяц	T_{min} , К	T_{max} , К	$(T_{max} - T_{min})$, К
Декабрь	253.575	257.778	4.203
Январь	262.431	263.214	0.783
Февраль	261.184	260.381	-0.803

Таблица 4

Оконная функция	$2N$	$4N$	$8N$
Прямоугольное	8.72	8.77	8.77
Ханна	7.96	7.93	7.93
Хэмминга	8.72	8.77	8.77
Блэкмана	8.72	8.77	8.77

Таблица 5 — пример таблицы, оформленной в классическом книжном варианте или очень близко к нему. ГОСТу по сути не противоречит. Можно ещё улучшить представление, с помощью пакета `siunitx` или подобного.

Таблица 5 — Наименование таблицы, очень длинное наименование таблицы, чтобы посмотреть как оно будет располагаться на нескольких строках и переноситься

Оконная функция	$2N$	$4N$	$8N$
Прямоугольное	8.72	8.77	8.77
Ханна	7.96	7.93	7.93
Хэмминга	8.72	8.77	8.77
Блэкмана	8.72	8.77	8.77

9.2 Таблица с многострочными ячейками и примечанием

Таблицы 6 и 7 — пример реализации расположения примечания в соответствии с ГОСТ 2.105. Каждый вариант со своими достоинствами и недостатками. Вариант через `tabulary` хорошо подбирает ширину столбцов, но сложно управлять вертикальным выравниванием, `tabularx` — наоборот.

Из-за того, что таблица 6 не помещается на той же странице (при компилировании `pdflatex`), всё её содержимое переносится на следующую, ближайшую, а этот текст идёт перед ней.

9.3 Параграф — два

Некоторый текст.

9.4 Параграф с подпараграфами

9.4.1 Подпараграф — один

Некоторый текст.

9.4.2 Подпараграф — два

Некоторый текст.

Таблица 6 — Нэ про натюм фюйзчыт квюальизкюэ

доминг лаборамюз эи ыам (Общий съём цен шляп (юфть))	Шеф взъярён	адвыр- жаряюм	тебикюэ эльяеф- энд мэдиокре-	Чэнзэ- рет мны- жарк-
			татым	хюом

Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф Плюш изъят. Бьём чуждый цен хвош!	≈	≈	≈	+
Эх, чужак! Общий съём цен	+	+	+	-
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизкюэ, аэквиоу жкаывола мэль ку. Ад граэкийж пльятонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео	≈	-	-	-
Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч.	-	+	+	≈
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизкюэ, аэквиоу жкаывола мэль ку. Ад граэкийж пльятонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео квюаырэндум. Вёртюты ажжынтиор эффикеэнди эож нэ.	+	-	≈	-

Примечание — Плюш изъят: «+» — адвыржаряюм квуй, вим емпыдит; «-» — емпыдит коммюны ат; «≈» — Шеф взъярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф?

Таблица 7 — Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч

	тебиквюэ	эльяеф-	Чэнзэрет
доминг лаборамуз эи ыам (Общий съём цен шляп (юфть))	Шеф взъярён	адвыр- жаряюм	энд мэдио- крета-
			мны- жарк- хюм
			тым
Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф Плюш изъят. Бьём чуждый цен хвощ!	≈	≈	≈
Эх, чужак! Общий съём цен	+	+	+
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквио жкаывола мэль ку. Ад граэкийж пльятонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео	≈	—	—
Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч.	—	+	+
Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ, аэквио жкаывола мэль ку. Ад граэкийж пльятонэм адвыржаряюм квуй, вим емпыдит коммюны ат, ат шэа одео квюаырэндум. Вёртюты ажжынтиор эффикеэнди эож нэ.	+	—	≈

Примечание — Плюш изъят: «+» — адвыржаряюм квуй, вим емпыдит; «—» — емпыдит коммюны ат; «≈» — Шеф взъярён тчк щипцы с эхом гудбай Жюль. Эй, жлоб! Где туз? Прячь юных съёмщиц в шкаф. Экс-граф?

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены и исследованы образцы потоковых кубитов, сильно связанных с континуумом электромагнитных мод;
2. Изучены процессы смешивания классических волн на двухуровневом искусственном атоме;
3. Продемонстрирован и описан режим квантового смешивания волн; ...
4. Продемонстрировано и описано трехволновое смешивание на трехуровневой системе с Δ -конфигурацией переходов.

И какая-нибудь заключающая фраза.

Последний параграф может включать благодарности. В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Иванову И. И. за поддержку, помошь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Сидорова А. А. и Петрова Б. Б. за помошь в работе с образцами, Рабиновича В. В. за предоставленные образцы и обсуждение результатов, Занудягину Г. Г. и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помошь в оформлении диссертации. Автор также благодарит много разных людей и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список сокращений и условных обозначений

T	температура
T_c	критическая температура сверхпроводящего перехода
Γ_1	время излучательной релаксации
Γ_1^{nr}	время безызлучательной релаксации
SIS	Superconductor-Insulator-Superconductor, сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник
(rf-)SQUID ,	(radio-frequency) Superconducting QUantum Interference Device
(вч-)СКВИД	(высокочастотный) сверхпроводящий квантовый интерферометр
RCSJ	Resistively and Capacitively Shunted Junction, Резистивно и ёмкостно шунтированный переход
СКЦ	сверхпроводящая квантовая цепь (также в мн.ч.)
DDA	discrete dipole approximation, приближение дискретных диполей
FDFD	finite difference frequency domain, метод конечных разностей в частотной области
FDTD	finite difference time domain, метод конечных разностей во временной области
FEM	finite element method, метод конечных элементов
FIT	finite integration technique, метод конечных интегралов
FMM	fast multipole method, быстрый метод многополюсника
FVTD	finite volume time-domain, метод конечных объёмов во временной области
MLFMA	multilevel fast multipole algorithm, многоуровневый быстрый алгоритм многополюсника
МоМ	method of moments, метод моментов

Словарь терминов

TeX — Система компьютерной вёрстки, разработанная американским профессором информатики Дональдом Кнутом

Панграмма — Короткий текст, использующий все или почти все буквы алфавита

Публикации автора по теме диссертации

1. Quantum wave mixing and visualization of coherent and superposed states in the waveguide / A. Y. Dmitriev [et al.] // Nature Communications. — 2017. — Vol. 8, no. 1352.
2. *Dmitriev, A. Y.* Scattering spectroscopy of a superconducting artificial atom, coupled to two half spaces / A. Y. Dmitriev, A. V. Korenkov, O. V. Astafiev // JETP Letters. — 2017. — Vol. 105, issue 2. — P. 110—113.
3. Mixing of coherent waves on a single three-level artificial atom / T. Hönigl-Decrinis [et al.] // Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 98. — 041801(R).
4. Probing photon statistics of coherent states by continuous-wave mixing on a two-level system / A. Dmitriev [et al.] // Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. (accepted).
5. *Korenkov, A. V.* Measurement system of correlation functions of microwave single photon source in real time / A. V. Korenkov, A. Y. Dmitriev, O. V. Astafiev. — 2018.
6. Quantum coherent four wave mixing with artifical atoms / A. Dmitriev [et al.] // Mesoscopic Structures in Fundamental Applications. — 2015.
7. Effects of wave mixing on a single artificial atom in the waveguide / A. Dmitriev [et al.] // Superconducting Quantum Technologies: Proceedings. — 2018. — Vol. ISBN 978-5-907061-50-7. — P. 9—10.

Список литературы

1. Nakamura, Y. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box / Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, J. Tsai // Nature. — 1999. — Vol. 398, no. 6730. — P. 786.
2. Josephson persistent-current qubit / J. Mooij [et al.] // Science. — 1999. — Vol. 285, no. 5430. — P. 1036—1039. — URL: <http://science.sciencemag.org/content/285/5430/1036>.
3. Makhlin, Y. Josephson-junction qubits with controlled couplings / Y. Makhlin, G. Schöhn, A. Shnirman // Nature. — 1999. — Vol. 398, no. 6725. — P. 305.
4. Superconducting persistent-current qubit / T. Orlando [и др.] // Physical Review B. — 1999. — т. 60, № 22. — с. 15398.
5. Quantum fluctuations in electrical circuits / M. H. Devoret [et al.] // Les Houches, Session LXIII. — 1995. — Vol. 7, no. 8.
6. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics / A. Wallraff [и др.] // Nature. — 2004. — т. 431, № 7005. — с. 162—167. — URL: <http://www.nature.com/nature/journal/v431/n7005/abs/nature02851.html>.
7. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation / A. Blais [et al.] // Physical Review A. — 2004. — Vol. 69, no. 6. — P. 062320.
8. Electron beam lithography: resolution limits and applications / C. Vieu [et al.] // Applied surface science. — 2000. — Vol. 164, no. 1—4. — P. 111—117.
9. Devoret, M. H. Implementing qubits with superconducting integrated circuits / M. H. Devoret, J. M. Martinis // Experimental aspects of quantum computing. — 2005. — P. 163—203.
10. Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator / I. Chiorescu [et al.] // Nature. — 2004. — Vol. 431, no. 7005. — P. 159.
11. Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance / R. Barends [et al.] // Nature. — 2014. — Vol. 508, no. 7497. — P. 500.

12. Experimental demonstration of fault-tolerant state preparation with superconducting qubits / M. Takita [et al.] // Physical review letters. — 2017. — Vol. 119, no. 18. — P. 180501.
13. *Schoelkopf, R.* Wiring up quantum systems / R. Schoelkopf, S. Girvin // Nature. — 2008. — Vol. 451, no. 7179. — P. 664—669. — URL: <http://www.nature.com/nature/journal/v451/n7179/full/451664a.html>.
14. *Devoret, M. H.* Superconducting circuits for quantum information: an outlook / M. H. Devoret, R. J. Schoelkopf // Science. — 2013. — Vol. 339, no. 6124. — P. 1169—1174.
15. Surface loss simulations of superconducting coplanar waveguide resonators / J. Wenner [et al.] // Applied Physics Letters. — 2011. — Vol. 99, no. 11. — P. 113513.
16. Characterization and reduction of capacitive loss induced by sub-micron josephson junction fabrication in superconducting qubits / A. Dunsworth [et al.] // Applied Physics Letters. — 2017. — Vol. 111, no. 2. — P. 022601.
17. Coupling superconducting qubits via a cavity bus / J. Majer [et al.] // Nature. — 2007. — Vol. 449, no. 7161. — P. 443.
18. Randomized benchmarking of quantum gates / E. Knill [et al.] // Physical Review A. — 2008. — Vol. 77, no. 1. — P. 012307.
19. *Magesan, E.* Scalable and robust randomized benchmarking of quantum processes / E. Magesan, J. M. Gambetta, J. Emerson // Physical review letters. — 2011. — Vol. 106, no. 18. — P. 180504.
20. Simple pulses for elimination of leakage in weakly nonlinear qubits / F. Motzoi [et al.] // Physical review letters. — 2009. — Vol. 103, no. 11. — P. 110501.
21. *Castellanos-Beltran, M.* Widely tunable parametric amplifier based on a superconducting quantum interference device array resonator / M. Castellanos-Beltran, K. Lehnert // Applied Physics Letters. — 2007. — Vol. 91, no. 8. — P. 083509.
22. A near-quantum-limited Josephson traveling-wave parametric amplifier / C. Macklin [et al.] // Science. — 2015. — Vol. 350, no. 6258. — P. 307—310.
23. Single-shot qubit readout in circuit quantum electrodynamics / F. Mallet [et al.] // Nature Physics. — 2009. — Vol. 5, no. 11. — P. 791.

24. Amplification and squeezing of quantum noise with a tunable Josephson metamaterial / M. Castellanos-Beltran [и др.] // Nature Physics. — 2008. — т. 4, № 12. — с. 929. — URL: <https://www.nature.com/ARTICLES/nphys1090>.
25. Implementation of a quantum metamaterial using superconducting qubits / P. Macha [et al.] // Nature communications. — 2014. — Vol. 5. — P. 5146.
26. Zagoskin, A. Superconducting quantum metamaterials in 3D: possible realizations / A. Zagoskin // Journal of Optics. — 2012. — Vol. 14, no. 11. — P. 114011.
27. Generation of Fock states in a superconducting quantum circuit / M. Hofheinz [и др.] // Nature. — 2008. — т. 454, № 7202. — с. 310—314. — URL: <http://www.nature.com/nature/journal/v454/n7202/full/nature07136.html>.
28. Correlations, indistinguishability and entanglement in Hong-Ou-Mandel experiments at microwave frequencies / C. Lang [et al.] // Nature Physics. — 2013. — Vol. 9, no. 6. — P. 345—348. — URL: <http://www.nature.com/nphys/journal/v9/n6/abs/nphys2612.html>.
29. Tuneable on-demand single-photon source in the microwave range / Z. Peng [et al.] // Nature Communications. — 2016. — Vol. 7. — URL: <http://www.nature.com/ARTICLES/ncomms12588>.
30. Resonance Fluorescence from an Artificial Atom in Squeezed Vacuum / D. M. Toyli [et al.] // Phys. Rev. X. — 2016. — July. — Vol. 6, issue 3. — P. 031004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.031004>.
31. Correlations and Entanglement of Microwave Photons Emitted in a Cascade Decay / S. Gasparinetti [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — окт. — т. 119, вып. 14. — с. 140504. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.140504>.
32. Resonance fluorescence of a single artificial atom / O. Astafiev [и др.] // Science. — 2010. — т. 327, № 5967. — с. 840—843. — URL: <http://science.sciencemag.org/content/327/5967/840>.
33. Cooper, L. N. Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas / L. N. Cooper // Phys. Rev. — 1956. — Nov. — Vol. 104, issue 4. — P. 1189—1190. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.104.1189>.
34. Bardeen, J. Theory of superconductivity / J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer // Physical review. — 1957. — Vol. 108, no. 5. — P. 1175.

35. *Tinkham, M.* Introduction to superconductivity / M. Tinkham. — Courier Corporation, 2004.
36. *Deaver, B. S.* Experimental Evidence for Quantized Flux in Superconducting Cylinders / B. S. Deaver, W. M. Fairbank // Phys. Rev. Lett. — 1961. — July. — Vol. 7, issue 2. — P. 43—46. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.7.43>.
37. *Giaever, I.* Electron Tunneling Between Two Superconductors / I. Giaever // Phys. Rev. Lett. — 1960. — Nov. — Vol. 5, issue 10. — P. 464—466. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.5.464>.
38. *Barone, A.* Physics and applications of the Josephson effect / A. Barone, G. Paterno. — Wiley, 1982.
39. *Anderson, P. W.* Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect / P. W. Anderson, J. M. Rowell // Phys. Rev. Lett. — 1963. — Mar. — Vol. 10, issue 6. — P. 230—232. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.230>.
40. *Likharev, K. K.* Superconducting weak links / K. K. Likharev // Rev. Mod. Phys. — 1979. — Jan. — Vol. 51, issue 1. — P. 101—159. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.101>.
41. *Golubov, A. A.* The current-phase relation in Josephson junctions / A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, E. Il'ichev // Rev. Mod. Phys. — 2004. — Apr. — Vol. 76, issue 2. — P. 411—469. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.76.411>.
42. *Шмидт, В.* Введение в физику сверхпроводников / В. Шмидт. — М.: МЦНМО, 2000.
43. *Girvin, S. M.* Circuit QED: superconducting qubits coupled to microwave photons / S. M. Girvin // Quantum Machines: Measurement and Control of Engineered Quantum Systems. — 2011. — P. 113.
44. *Vool, U.* Introduction to quantum electromagnetic circuits / U. Vool, M. Devoret // International Journal of Circuit Theory and Applications. — 2017. — Vol. 45, no. 7. — P. 897—934.
45. Coherent quantum phase slip / O. Astafiev [et al.] // Nature. — 2012. — Vol. 484, no. 7394. — P. 355.

46. Josephson charge qubits: a brief review / Y. A. Pashkin [et al.] // Quantum Information Processing. — 2009. — Vol. 8, no. 2/3. — P. 55—80.
47. *Martinis, J. M.* Superconducting phase qubits / J. M. Martinis // Quantum Information Processing. — 2009. — Vol. 8, no. 2/3. — P. 81—103.
48. Measurement of the entanglement of two superconducting qubits via state tomography / M. Steffen [et al.] // Science. — 2006. — Vol. 313, no. 5792. — P. 1423—1425.
49. Computing prime factors with a Josephson phase qubit quantum processor / E. Lucero [et al.] // Nature Physics. — 2012. — Vol. 8, no. 10. — P. 719.
50. *Cottet, A.* Implementation of a quantum bit in a superconducting circuit / A. Cottet. — 2002.
51. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch [et al.] // Physical Review A. — 2007. — Vol. 76, no. 4. — P. 042319.
52. Suppressing charge noise decoherence in superconducting charge qubits / J. A. Schreier [и др.] // Phys. Rev. B. — 2008. — май. — т. 77, вып. 18. — с. 180502. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.180502>.
53. Granular aluminium as a superconducting material for high-impedance quantum circuits / L. Grünhaupt [et al.] // Nature materials. — 2019. — P. 1.
54. *Carmichael, H. J.* Statistical methods in quantum optics 1: master equations and Fokker-Planck equations / H. J. Carmichael. — Springer Science & Business Media, 2013.
55. *Zagoskin, A. M.* Quantum engineering: theory and design of quantum coherent structures / A. M. Zagoskin. — Cambridge University Press, 2011.
56. in: Quantum noise in mesoscopic physics, ed. Y.V. Nazarov. Vol. 97 / R. Schoelkopf [et al.]. — Springer Science & Business Media, 2002. — P. 175—203.
57. *Scully, M. O.* Quantum Optics / M. O. Scully, M. Zubairy. — Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
58. *Nielsen, M. A.* Quantum computation and quantum information / M. A. Nielsen, I. Chuang. — AAPT, 2002.

59. *Boller, K.-J.* Observation of electromagnetically induced transparency / K.-J. Boller, A. Imamo ğlu, S. E. Harris // Phys. Rev. Lett. — 1991. — May. — Vol. 66, issue 20. — P. 2593—2596. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2593>.
60. *Picque, J.* Direct observation of the Autler-Townes effect in the optical range / J. Picque, J. Pinard // Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics. — 1976. — Vol. 9, no. 5. — P. L77.
61. Electromagnetically Induced Transparency on a Single Artificial Atom / A. A. Abdumalikov [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — May. — Vol. 104, issue 19. — P. 193601. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.193601>.
62. Measurement of Autler-Townes and Mollow Transitions in a Strongly Driven Superconducting Qubit / M. Baur [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — июнь. — т. 102, вып. 24. — с. 243602. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.243602>.
63. Autler-Townes Effect in a Superconducting Three-Level System / M. A. Sillanpää [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — нояб. — т. 103, вып. 19. — с. 193601. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.193601>.
64. Dynamical Autler-Townes control of a phase qubit / J. Li [и др.] // Scientific reports. — 2012. — т. 2. — с. 645. — URL: <https://www.nature.com/ARTICLES/srep00645>.
65. Autler-Townes splitting in a three-dimensional transmon superconducting qubit / S. Novikov [et al.] // Phys. Rev. B. — 2013. — Aug. — Vol. 88, issue 6. — P. 060503. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.88.060503>.
66. Demonstration of a Single-Photon Router in the Microwave Regime / I.-C. Hoi [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — авг. — т. 107, вып. 7. — с. 073601. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.073601>.
67. Giant CrossKerr Effect for Propagating Microwaves Induced by an Artificial Atom / I.-C. Hoi [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — авг. — т. 111, вып. 5. — с. 053601. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.053601>.

68. Generation of single optical plasmons in metallic nanowires coupled to quantum dots / A. Akimov [и др.] // Nature. — 2007. — т. 450, № 7168. — с. 402—406.
69. Resonance energy transfer and superradiance mediated by plasmonic nanowaveguides / D. Martín-Cano [et al.] // Nano letters. — 2010. — Vol. 10, no. 8. — P. 3129—3134.
70. Optical Interface Created by Laser-Cooled Atoms Trapped in the Evanescent Field Surrounding an Optical Nanofiber / E. Vetsch [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — May. — Vol. 104, issue 20. — P. 203603. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.203603>.
71. Demonstration of a State-Insensitive, Compensated Nanofiber Trap / A. Goban [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — July. — Vol. 109, issue 3. — P. 033603. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.033603>.
72. Near-Unity Coupling Efficiency of a Quantum Emitter to a Photonic Crystal Waveguide / M. Arcari [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Aug. — Vol. 113, issue 9. — P. 093603. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.093603>.
73. Strong interaction between light and a single trapped atom without the need for a cavity / M. K. Tey [и др.] // Nature Physics. — 2008. — т. 4, № 12. — с. 924—927.
74. Strong Extinction of a Laser Beam by a Single Molecule / I. Gerhardt [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Jan. — Vol. 98, issue 3. — P. 033601. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.033601>.
75. Dynamics of coherent and incoherent emission from an artificial atom in a 1D space / A. A. Abdumalikov Jr [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — т. 107, № 4. — с. 043604. — URL: <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.107.043604>.
76. Carmichael, H. J. Resonance fluorescence from an atom in a squeezed vacuum / H. J. Carmichael, A. S. Lane, D. F. Walls // Phys. Rev. Lett. — 1987. — June. — Vol. 58, issue 24. — P. 2539—2542. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.2539>.

77. Ultimate On-Chip Quantum Amplifier / O. V. Astafiev [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — май. — т. 104, вып. 18. — с. 183603. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.183603>.
78. Probing the quantum vacuum with an artificial atom in front of a mirror / I.-C. Hoi [и др.] // Nature Physics. — 2015. — т. 11. — с. 1045–1049. — URL: <http://www.nature.com/nphys/journal/v11/n12/full/nphys3484.html>.
79. Roy, D. Colloquium: strongly interacting photons in one-dimensional continuum / D. Roy, C. M. Wilson, O. Firstenberg // Rev. Mod. Phys. — 2017. — май. — т. 89, вып. 2. — с. 021001. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.021001>.
80. On-Demand Microwave Generator of Shaped Single Photons / P. Forn-Díaz [и др.] // Phys. Rev. Applied. — 2017. — нояб. — т. 8, вып. 5. — с. 054015. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.8.054015>.
81. Superconducting Switch for Fast On-Chip Routing of Quantum Microwave Fields / M. Pechal [et al.] // Phys. Rev. Applied. — 2016. — Aug. — Vol. 6, issue 2. — P. 024009. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.6.024009>.
82. Tunable Microwave Single-Photon Source Based on Transmon Qubit with High Efficiency / Y. Zhou [et al.] // Phys. Rev. Applied. — 2020. — Mar. — Vol. 13, issue 3. — P. 034007. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.13.034007>.
83. Microwave-Controlled Generation of Shaped Single Photons in Circuit Quantum Electrodynamics / M. Pechal [et al.] // Phys. Rev. X. — 2014. — Oct. — Vol. 4, issue 4. — P. 041010. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.4.041010>.
84. Quantum metamaterial for nondestructive microwave photon counting / A. L. Grimsmo [и др.]. — 2020. — arXiv: [2005.06483 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/2005.06483).
85. Quantum non-demolition detection of an itinerant microwave photon / S. Kono [et al.] // Nature Physics. — 2018. — Vol. 14, no. 6. — P. 546–549.
86. Single-Shot Quantum Nondemolition Detection of Individual Itinerant Microwave Photons / J.-C. Besse [et al.] // Phys. Rev. X. — 2018. — Apr. — Vol. 8, issue 2. — P. 021003. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.8.021003>.

87. Schemes for the observation of photon correlation functions in circuit QED with linear detectors / M. P. da Silva [et al.] // Phys. Rev. A. — 2010. — Oct. — Vol. 82, issue 4. — P. 043804. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.043804>.
88. Generation of Nonclassical Microwave States Using an Artificial Atom in 1D Open Space / I.-C. Hoi [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — June. — Vol. 108, issue 26. — P. 263601. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.263601>.
89. Experimental State Tomography of Itinerant Single Microwave Photons / C. Eichler [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — June. — Vol. 106, issue 22. — P. 220503. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.220503>.
90. Deterministic quantum state transfer and remote entanglement using microwave photons / P. Kurpiers [et al.] // Nature. — 2018. — Vol. 558, no. 7709. — P. 264—267.
91. Linear optical quantum computing with photonic qubits / P. Kok [et al.] // Rev. Mod. Phys. — 2007. — Jan. — Vol. 79, issue 1. — P. 135—174. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.135>.
92. Photon-Mediated Interactions Between Distant Artificial Atoms / A. F. van Loo [et al.] // Science. — 2013. — Vol. 342, no. 6165. — P. 1494—1496. — URL: <http://science.sciencemag.org/content/342/6165/1494>.
93. Observation of Dicke superradiance for two artificial atoms in a cavity with high decay rate. / J. Mlynek [и др.] // Nature Communications. — 2014. — т. 5. — с. 5186.
94. Cavity quantum electrodynamics with atom-like mirrors / M. Mirhosseini [et al.] // Nature. — 2019. — Vol. 569, no. 7758. — P. 692—697.
95. *Kockum, A. F.* Quantum optics with giant atoms—the first five years / A. F. Kockum // arXiv preprint arXiv:1912.13012. — 2019.
96. Waveguide Quantum Electrodynamics with Giant Superconducting Artificial Atoms / B. Kannan [et al.] // arXiv preprint arXiv:1912.12233. — 2019.
97. Quantum wave mixing and visualization of coherent and superposed states in the waveguide / A. Y. Dmitriev [et al.] // Nature Communications. — 2017. — Vol. 8, no. 1352.

98. Mixing of coherent waves on a single three-level artificial atom / T. Hönigl-Decrinis [et al.] // Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 98. — 041801(R).
99. Probing photon statistics of coherent states by continuous-wave mixing on a two-level system / A. Dmitriev [et al.] // Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. (accepted).
100. *Wahlgren, P.* Crossover from global to local rule for the Coulomb blockade in small tunnel junctions / P. Wahlgren, P. Delsing, D. B. Haviland // Phys. Rev. B. — 1995. — July. — Vol. 52, issue 4. — R2293—R2296. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.52.R2293>.
101. The flux qubit revisited to enhance coherence and reproducibility / F. Yan [et al.] // Nature communications. — 2016. — Vol. 7. — P. 12964.
102. Electron Thermalization in Metallic Islands Probed by Coulomb Blockade Thermometry / M. Meschke [et al.] // Journal of Low Temperature Physics. — 2004. — Jan. — Vol. 134, no. 5/6. — P. 1119—1143. — URL: <http://link.springer.com/10.1023/B:JOLT.0000016733.75220.5d>.
103. Microstrip filters for measurement and control of superconducting qubits / L. Longobardi [et al.] // Review of Scientific Instruments. — 2013. — Jan. — Vol. 84, no. 1.
104. Qubits as spectrometers of quantum noise / R. Schoelkopf [et al.]. — 2003.
105. Engineering cryogenic setups for 100-qubit scale superconducting circuit systems / S. Krinner [et al.] // EPJ Quantum Technology. — 2019. — Vol. 6, no. 1. — P. 2.
106. *Gao, J.* The physics of superconducting microwave resonators : дис. ... канд. / Gao Jiansong. — California Institute of Technology, 2008.
107. An analysis method for asymmetric resonator transmission applied to superconducting devices / M. S. Khalil [et al.] // Journal of Applied Physics. — 2012. — Vol. 111, no. 5. — P. 054510. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.3692073>.
108. Efficient and robust analysis of complex scattering data under noise in microwave resonators / S. Probst [et al.] // Review of Scientific Instruments. — 2015. — Vol. 86, no. 2. — P. 024706. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.4907935>.

109. *Boyd, R. W.* Nonlinear optics / R. W. Boyd. — Academic press, 2003.
110. *Korenkov, A. V.* Measurement system of correlation functions of microwave single photon source in real time / A. V. Korenkov, A. Y. Dmitriev, O. V. Astafiev. — 2018.

Список рисунков

1.1 Распределение фазы волновой функции в сверхпроводящем кольце для различных значений магнитного потока.	17
1.2 SIS переход и различные процессы туннелирования через барьер.	19
1.3 К выводу фазо-потокового соотношения.	22
1.4 RCSJ-модель джозефсоновского туннельного перехода.	23
1.5 Сфера Блоха. Точки на сфере соответствуют чистым состояниям кубита, точки внутри сферы — смешанным состояниям.	26
1.6 Схема зарядового кубита и его спектр.	31
1.7 Схема потокового кубита и его потенциальная энергия.	34
1.8 Волновая функция основного и первого возбужденного состояний потокового кубита при $\Phi = \Phi_0/2$. Линии уровня отображают потенциальную энергию.	37
1.9 Изменение относительной зарядовой дисперсии для переходов 0-1 трансмона и изменение ангармонизма основного перехода 0-1 в зависимости от отношения E_J/E_C . $E_C/h = 2$ ГГц	38
1.10 Динамика состояния кубита под действием внешнего поля в случае резонанса	51
1.11 Динамика состояния кубита под действием внешнего поля: случай ненулевой отстройки	52
1.12 Динамика состояния кубита под действием внешнего поля на сфере Блоха	53
1.13 Стационарное состояние кубита, врачающегося электромагнитным полем.	54
1.14 Коэффициент отражения в стационарном состоянии	56
1.15 Спектр резонансной флуоресценции.	60
1.16 Классификация трехуровневых систем по разрешенности переходов. .	61
1.17 Схема возбуждения Л-системы электромагнитным полем	62
1.18 Электромагнитно индуцированная прозрачность и расщепление Аутлера-Таунса в Л-системе	64
1.19 Когерентный захват заселенности в Л-системе	65

2.1	Схема потокового кубита с четырьмя джозефсоновскими переходами и его спектр	75
2.2	Дизайн потоковых кубитов, параллельно связанных с копланарной линией при помощи емкостей. Параметр $\alpha = 0.36, 0.45$, площади петель от 5 до 40 мкм ² , связывающие емкости $C_c = 2.2, 6.4 \text{ фФ}$	76
2.3	Дизайн 4-переходных потоковых кубитов, связанных с двумя полубесконечными копланарными линиями. Параметр $\alpha = 0.4$, площади петель 14.2 и 21.2 мкм ² , связывающие емкости $C_{in} = 0.24, C_{out} = 2.2 \text{ фФ}$	77
2.4	Влияние шунтирующей емкости на спектры потоковых кубитов	78
2.5	Контроль размеров микронных структур в оптическом микроскопе	80
2.6	Изображение связывающей емкости и кубита в сканирующем электронном микроскопе (СЭМ)	80
2.7	Низкотемпературная часть измерительных схем. а) — схема для кубита в линии (параллельная связь), б) — схема для кубита, связанного с двумя полупространствами (прямая связь)	85
2.8	Спектральная плотность флуктуаций напряжения	87
2.9	Пропускание волновода с кубитом	91
2.10	Измеренные спектры потоковых кубитов	92
2.11	Взаимодействие кубита с резонансной двухуровневой системой	93
8.1	TeX	106
8.2	Очень длинная подпись к изображению, на котором представлены две фотографии Дональда Кнута	106
8.3	Этот текст попадает в названия рисунков в списке рисунков	107
8.4	Пример tikz схемы	108

Список таблиц

1	Параметры модели пропускания резонатора	90
2	Экспериментальные характеристики нелинейных квантовооптических систем в открытом пространстве	95
3	Название таблицы	116
4	116
5	Наименование таблицы, очень длинное наименование таблицы, чтобы посмотреть как оно будет располагаться на нескольких строках и переноситься	116
6	Нэ про натюм фюйзчыт квюальизквюэ	118
7	Любя, съешь щипцы, — вздохнёт мэр, — кайф жгуч	119
7	Наименование таблицы средней длины	148

Приложение А

Примеры вставки листингов программного кода

Для крупных листингов есть два способа. Первый красивый, но в нём могут быть проблемы с поддержкой кириллицы (у вас может встречаться в комментариях и печатаемых сообщениях), он представлен на листинге A.1. Второй

Листинг А.1 Программа „Hello, world“ на C++

```

5 #include <iostream>
using namespace std;

10 int main() //кириллица в комментариях при xelatex и lualatex име-
    em проблемы с пробелами
{
    cout << "Hello, world" << endl; //latin letters in
    commentaries
    system("pause");
    return 0;
}
  
```

не такой красивый, но без ограничений (см. листинг A.2).

Листинг А.2 Программа „Hello, world“ без подсветки

```

#include <iostream>
using namespace std;

int main() //кириллица в комментариях
{
    cout << "Привет, мир" << endl;
}
  
```

Можно использовать первый для вставки небольших фрагментов внутри текста, а второй для вставки полного кода в приложении, если таковое имеется.

Если нужно вставить совсем короткий пример кода (одна или две строки), то выделение линейками и нумерация может смотреться чересчур громоздко.

В таких случаях можно использовать окружения `lstlisting` или `Verb` без `ListingEnv`. Приведём такой пример с указанием языка программирования, отличного от заданного по умолчанию:

```
| fibs = 0 : 1 : zipWith (+) fibs (tail fibs)
```

Такое решение — со вставкой нумерованных листингов покрупнее и вставок без выделения для маленьких фрагментов — выбрано, например, в книге Эндрю Таненбаума и Тодда Остина по архитектуре

Наконец, для оформления идентификаторов внутри строк (функция `main` и тому подобное) используется `lstinline` или, самое простое, моноширинный текст (`\texttt`).

Пример A.3, иллюстрирующий подключение переопределённого языка. Может быть полезным, если подсветка кода работает криво. Без дополнительного окружения, с подписью и ссылкой, реализованной встроенным средством.

Листинг A.3 Пример листинга с подписью собственными средствами

```
## Caching the Inverse of a Matrix

## Matrix inversion is usually a costly computation and there may
## be some
## benefit to caching the inverse of a matrix rather than compute
## it repeatedly
5 ## This is a pair of functions that cache the inverse of a matrix.

## makeCacheMatrix creates a special "matrix" object that can
## cache its inverse

makeCacheMatrix <- function(x = matrix()) {#кириллица в коммента
 10   i <- NULL
    set <- function(y) {
      x <<- y
      i <<- NULL
    }
 15   get <- function() x
    setSolved <- function(solve) i <<- solve
    getSolved <- function() i
    list(set = set, get = get,
         setSolved = setSolved,
         getSolved = getSolved)
 20 }
```

```

    }

25 ## cacheSolve computes the inverse of the special "matrix"
   ## returned by
## makeCacheMatrix above. If the inverse has already been
## calculated (and the
## matrix has not changed), then the cachesolve should retrieve
## the inverse from
## the cache.

30 cacheSolve <- function(x, ...) {
  ## Return a matrix that is the inverse of 'x'
  i <- x$getSolved()
  if(!is.null(i)) {
    message("getting cached data")
    35 return(i)
  }
  data <- x$get()
  i <- solve(data, ...)
  x$setSolved(i)
40 i
}

```

Листинг А.4 подгружается из внешнего файла. Приходится загружать без окружения дополнительного. Иначе по страницам не переносится.

Листинг А.4 Листинг из внешнего файла

```

# Analysis of data on Course Project at Getting and Cleaning data
# course of Data Science track at Coursera.

# Part 1. Merges the training and the test sets to create one data
# set.
# 3. Uses descriptive activity names to name the activities in the
# data set
5 # 4. Appropriately labels the data set with descriptive variable
# names.

if (!file.exists("UCI HAR Dataset")) {
  stop("You need 'UCI HAR Dataset' folder full of data")
}

10 library(plyr) # for mapvalues

```

```

15 #getting common data
features <- read.csv("UCI HAR Dataset/features.txt",sep=" ",
header = FALSE,
          colClasses = c("numeric","character"))
activity_labels <- read.csv("UCI HAR Dataset/activity_labels.txt",
sep="",
header = FALSE,colClasses = c("numeric
","character"))

20 #getting train set data
subject_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/subject_train.txt
",
header = FALSE,colClasses = "numeric",
col.names="Subject")
y_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/y_train.txt", header =
FALSE,
colClasses = "numeric")
x_train <- read.csv("UCI HAR Dataset/train/X_train.txt",sep="",
header = FALSE,
colClasses = "numeric",col.names=features$V2,
check.names = FALSE)

activity_train <- as.data.frame(mapvalues(y_train$V1, from =
activity_labels$V1,
30                                     to = activity_labels$V2)
)
names(activity_train) <- "Activity"

35 #getting test set data
subject_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/subject_test.txt",
header = FALSE,colClasses = "numeric",col
.names="Subject")
y_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/y_test.txt", header =
FALSE,
colClasses = "numeric")
x_test <- read.csv("UCI HAR Dataset/test/X_test.txt",sep="",
header = FALSE,
colClasses = "numeric",col.names=features$V2,
40 check.names = FALSE)

```

```

activity_test <- as.data.frame(mapvalues(y_test$V1, from =
  activity_labels$V1,
                                         to = activity_labels$V2))
45 names(activity_test) <- "Activity"

# Forming full dataframe
data_train <- cbind(x_train, subject_train, activity_train)
50 data_test <- cbind(x_test, subject_test, activity_test)
data <- rbind(data_train, data_test)

# Cleaning memory
rm(features, activity_labels, subject_train, y_train, x_train,
  activity_train,
  subject_test, y_test, x_test, activity_test, data_train, data_
55 test)

# Part 2. Extracts only the measurements on the mean and standard
  deviation for each measurement.

60 cols2match <- grep("(mean|std)", names(data))

# Excluded gravityMean, tBodyAccMean, tBodyAccJerkMean,
# tBodyGyroMean,
# tBodyGyroJerkMean, as these represent derivations of angle data,
# as
# opposed to the original feature vector.

65
# Subsetting data frame, also moving last columns to be first
Subsetted_data_frame <- data[,c(562, 563, cols2match)] 

# Part 5. From the data set in step 4, creates a second,
# independent tidy data set
70 # with the average of each variable for each activity and each
  subject.

library(dplyr) # for %>% and summarise_each

75 tidydata <- Subsetted_data_frame %>% group_by(Subject, Activity)
  %>%

```

```
    summarise_each(funсs(мean))  
  
write.table(tidydata, "tidydata.txt", row.names=FALSE)
```

Приложение Б**Спектр резонансной флуоресценции****Б.1 Случай слабого поля**

Рассмотрим двухуровневый атом, описываемый оператором плотности
 $\rho = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix}$.

Приложение В

**Очень длинное название второго приложения, в котором
продемонстрирована работа с длинными таблицами**

B.1 Подраздел приложения

Вот размещается длинная таблица:

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
продолжение следует			

(продолжение)			
Параметр	Умолч.	Тип	Описание
mars kick	0 1	int int	экватора 1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

B.2 Ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения! Конвынёры витюпирата но нам, тебиквюэ мэнтётюм поэтюлант ед про. Дуо эа лаудым копиожаы, нык мовэт вениам льебэривичсы эю, нам эпикюре дэтракто рыкючабо ыт.

Пример длинной таблицы с записью продолжения по ГОСТ 2.105:

Таблица 7 — Наименование таблицы средней длины

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
&INP			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars kick	0 1	int int	1: инициализация модели для планеты Марс 0: инициализация без шума ($p_s = const$)

Продолжение таблицы 7

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора

Продолжение таблицы 7

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
			1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
			1: инициализация модели для планеты Марс
mars	0	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	1	int	1: инициализация модели для планеты Марс
			1: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
			1: инициализация модели для планеты Марс
&SURFPAR			
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
			1: инициализация модели для планеты Марс
mars	0	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	1	int	1: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
			1: инициализация модели для планеты Марс
mars	0	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
kick	1	int	1: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
			1: инициализация модели для планеты Марс
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

Продолжение таблицы 7

Параметр	Умолч.	Тип	Описание
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс
kick	1	int	0: инициализация без шума ($p_s = const$) 1: генерация белого шума 2: генерация белого шума симметрично относительно экватора
mars	0	int	1: инициализация модели для планеты Марс

B.3 Использование длинных таблиц с окружением *longtabu*

В таблице ?? более книжный вариант длинной таблицы, используя окружение *longtabu* и разнообразные *toprule* *midrule* *bottomrule* из пакета *booktabs*. Чтобы визуально таблица смотрелась лучше, можно использовать

следующие параметры: в самом начале задаётся расстояние между строчками с помощью `arraystretch`. Таблица задаётся на всю ширину, `longtabu` позволяет делить ширину колонок пропорционально — тут три колонки в пропорции 1.1:1:4 — для каждой колонки первый параметр в описании `X[]`. Кроме того, в таблице убраны отступы слева и справа с помощью `\{ \}` в преамбуле таблицы. К первому и второму столбцу применяется модификатор

```
> {\setlength{\baselineskip}{0.7\baselineskip}},
```

который уменьшает межстрочный интервал в для текста таблиц (иначе заголовок второго столбца значительно шире, а двухстрочное имя сливаются с окружающими). Для первой и второй колонки текст в ячейках выравнивается по центру как по вертикали, так и по горизонтали — задаётся буквами `m` и `c` в описании столбца `X[]`.

Так как формулы большие — используется окружение `alignedat`, чтобы отступ был одинаковый у всех формул — он сделан для всех, хотя для большей части можно было и не использовать. Чтобы формулы занимали поменьше места в каждом столбце формулы (где надо) используется `\textstyle` — он делает дроби меньше, у знаков суммы и произведения — индексы сбоку. Иногда формулы слишком большая, сливается со следующей, поэтому после неё ставится небольшой дополнительный отступ `\vspace*{2ex}` Для штрафных функций — размер фигурных скобок задан вручную `\Big\{`, т.к. не умеет `alignedat` работать с `\left` и `\right` через несколько строк/колонок.

В примечании к таблице наоборот, окружение `cases` даёт слишком большие промежутки между вариантами, чтобы их уменьшить, в конце каждой строчки окружения использовался отрицательный дополнительный отступ `\[-0.5em]`.

B.4 Форматирование внутри таблиц

В таблице ?? пример с чересстрочным форматированием. В файле `userstyles.tex` задаётся счётчик `\newcounter{rowcnt}` который увеличивается на 1 после каждой строчки (как указано в преамбуле таблицы). Кроме того, задаётся условный макрос `\altshape` который выдаёт одно из двух типов форматирования в зависимости от чётности счётчика.

В таблице ?? каждая чётная строчка — синяя, нечётная — с наклоном и слегка поднята вверх. Визуально это приводит к тому, что среднее значение и среднеквадратичное изменение группируются и хорошо выделяются взглядом в таблице. Сохраняется возможность отдельные значения в таблице выделить цветом или шрифтом. К первому и второму столбцу форматирование не применяется по сути таблицы, к шестому общее форматирование не применяется для наглядности.

Так как заголовок таблицы тоже считается за строчку, то перед ним (для первого, промежуточного и финального варианта) счётчик обнуляется, а в `\altshape` для нулевого значения счётчика форматирования не применяется.

B.5 Очередной подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!

B.6 И ещё один подраздел приложения

Нужно больше подразделов приложения!