|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН11)

**РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

***К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ***

***НА ТЕМУ:***

«Численное моделирование процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя»

Студент ФН11-81Б **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** Д.Е.Глушков

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель ВКР **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** А.А.Захаров

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Нормоконтролер **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_** С.С. Кудрявцева

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

*2021 г.*

# РЕФЕРАТ

Расчетно-пояснительная записка 25 с., 2 рис., 1 табл., 6 источников.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫГОРАНИЯ ЗАРЯДА ТВЕРДОТОПЛИВНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ, ЕСТЕСТВЕННЫЙ КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН, ЕСТЕСТВЕННЫЙ БИКУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН, МЕТОД ПРОГОНКИ

Целью данной выпускной квалификационной работы является решение задачи численного моделирования процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя (РДТТ).

Задачи выпускной квалификационной работы:

* концептуальная постановка задачи численного моделирования процесса выгорания заряда РДТТ;
* математическая постановка задачи численного моделирования процесса выгорания заряда РДТТ;
* разработка метода инициализации начальной геометрии поверхности заряда;
* разработка метода интерполяции поверхностей с помощью бикубических сплайнов;
* разработка алгоритма, производящего моделирование процесса горения;
* разработка метода расчета площади горения заряда РДТТ;
* разработка программы, визуализирующей полученные результаты.

**СОДЕРЖАНИЕ**

[РЕФЕРАТ 2](#_Toc71587741)

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc71587742)

[1 Заряд твердотопливного ракетного двигателя 5](#_Toc71587743)

[2 Постановка задачи 7](#_Toc71587744)

[2.1 Концептуальная постановка задачи 7](#_Toc71587745)

[2.2 Математическая постановка задачи 8](#_Toc71587746)

[3 Теоретическая часть 9](#_Toc71587747)

[3.1 Кубический сплайн 10](#_Toc71587748)

[3.2 Алгоритм построения интерполяционного кубического сплайна 11](#_Toc71587749)

[3.3 Метод прогонки 13](#_Toc71587750)

[3.3 Бикубическийсплайн 15](#_Toc71587751)

[3.4 Алгоритм вычисления бикубического сплайна 18](#_Toc71587752)

[3.5 Нахождение нормалей 20](#_Toc71587753)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 22](#_Toc71587754)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 23](#_Toc71587755)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А 24](#_Toc71587756)

# ВВЕДЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе рассматривается метод численного моделирования процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя с помощью естественных бикубических сплайнов. Данный метод позволяет провести моделирование процесса выгорания для зарядов РДТТ с различными начальными формами. В данной работе основным исследуемым показателем является площадь поверхности горения заряда, поскольку сила тяги напрямую зависит от нее.

Процесс численного моделирования процесса горения заряда твердотопливного ракетного двигателя для начала строится некоторый инициализирующий набор точек, описывающий начальную геометрию заряда РДТТ, затем по этим точкам строятся интерполяционные бикубические сплайны с естественным краевыми условиями, далее происходит сдвиг контрольных точек и удаление точек самопересечения. Данный процесс повторяется до тех пор, пока весь заряд не выгорит.

В ходе работы был реализован программный модуль, реализующий данный процесс, а также визуализирующий полученные результаты.

# 1 Заряд твердотопливного ракетного двигателя

Виды ракетных двигателей можно разделить на две основный группы:

1. жидкостные,
2. твердотопливные.

Принцип работы у жидкостных и твердотопливных ракетных двигателей не зависит от вида горючего, из которого состоит заряд, и опирается на химическую реакцию самого заряда двигателя и некоторого окислителя, в результате которой происходит выброс вещества и возникает реактивная тяга.

Одним из основных отличий твердотопливного ракетного двигателя от жидкостного является неконтролируемость процесса горения. Однако, сам процесс горения достаточно сильно зависит от начальной формы поверхности заряда, в результате чего возникает задача нахождения оптимальной формы, которая являлась бы оптимальной для поставленной задачи. Кроме того, процессы конструирования, хранения и содержания, производства, а также использования отличаются меньшими трудозатратами и стоимостями, в отличие от жидкостных аналогов.

Твердотопливные ракетные двигатели – это первые в истории человечества ракетные двигатели. Первые такие двигатели были использованы еще около тысячи лет назад, так, например, первая в мире система залпового огня Хвачха, была сделана с помощью использования дымного пороха. Позже на замену дымного пороха пришли более эффективные компоненты.

На данный момент твердотопливные ракетные двигатели (РДТТ) применяются при конструировании ракет из достаточно широкой области применения, поскольку процесс их создание и использования значительно проще, чем для жидкостных ракетных двигателей:

* метеорологические ракеты;
* стартовые ускорители;
* военные ракеты;
* разгонные блоки;
* фейерверки и ракетомоделизм.

Как видно из данного списка, область применения РДТТ достаточно обширна. В каждой из сфер есть свои требования к поведению ракеты, в результате чего возникает необходимость определения оптимальной формы заряда РДТТ, поскольку она напрямую влияет на изменение площади поверхности горения заряда РДТТ во времени, которая в свою очередь влияет на реактивную тягу и, естественно, на поведение ракеты.

Твердотопливный ракетный двигатель состоит из оболочки, содержащей внутри себя твердотопливный заряд, и сопла. При конструировании ракетного двигателя используют различные формы заряда твердого топлива, само твердое топливо может разделяться на несколько слоев с различной скоростью горения.

Существует несколько основных видов заряда твердотопливного ракетного двигателя, каждый из которых отличается характером горения и, следовательно, силой реактивной тяги, что изображено на рисунке 1.

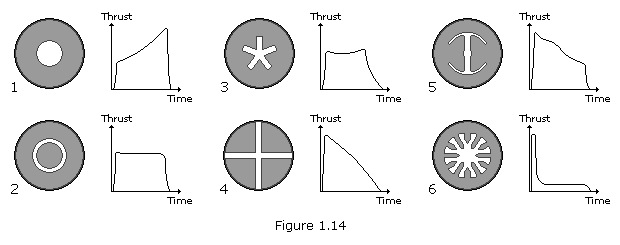


Рисунок 1 – Зависимость реактивной тяги от формы заряда РДТТ

В данной работе будет рассмотрена канально-щелевая форма заряда РДТТ, которая имеет следующий вид:

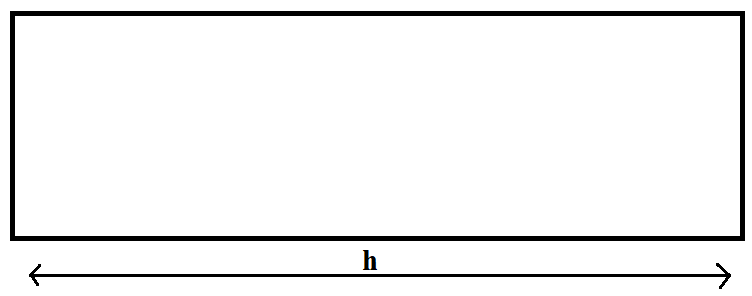
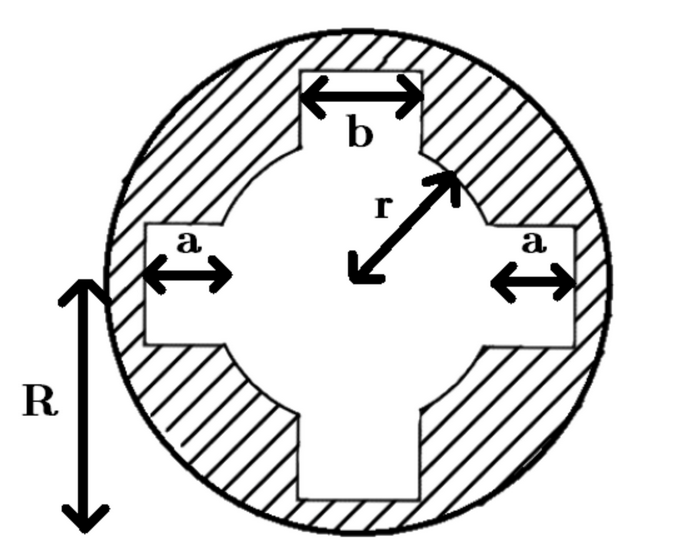


Рисунок 2 – Канально-щелевая форма заряда РДТТ и параметры, описывающие поверхность заряда

На рисунке 2 можно видеть форму заряда РДТТ, которая будет рассмотрена в данной работе, а также параметры, описывающие форму поверхности заряда в начальный момент времени.

Как правило, на практике используются заряды твердого топлива с длиной щели значительно большей ширины щели , а также достаточно малые значения радиуса .

Основным показателем эффективности ракетного двигателя является значение удельной тяги, которое, при некоторых допущениях, например, допущение о том, что давление внутри двигателя не меняется в процессе выгорания заряда, пропорционально значению площади поверхности горения.

**2 Параметрическое описание поверхностей**

Существует несколько способов описания трехмерных поверхностей: явное задание в виде , неявное задание в виде  и параметрический метод описания поверхностей, который широко применяется в областях компьютерного моделирования. В данной работе будет использоваться параметрический способ задания поверхности:

,

где значения координат в свою очередь также зависят от параметров и :



Область изменения параметров и обычно задается в зависимости от описываемой поверхности. Так, например при описании сферы область определения параметров имеют следующий вид: , . В ходе выполнения данной работы были опробованы два способа задания области определения параметров:

1. , . При данном способе задания области определения параметров, точность вычислений в ходе моделирования была достаточна высока, однако при визуализации были видны некоторые неточности, проявлявшиеся в небольших неточностях при интерполяции точек, лежащих на одной прямой.
2. , . При данном способе точность вычислений в ходе моделирования оказалась лучше, чем при первом способе задания области определения, также точки, лежащие на одной прямой, интерполировались несколько точнее.

# 3 Постановка задачи

## **3.1 Концептуальная постановка задачи**

Задача численного моделирования процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя состоит из нескольких основных этапов:

* Инициализация начальной формы заряда (контрольных точек) по входным параметрам: внутренний радиус , радиус заряда, длина щели , ширина щели и высоты заряда h;
* Интерполяция контрольных точек естественными бикубическими сплайнами;
* Имитация процесса горения путем сдвига точек сплайновой поверхности в направлении нормали к поверхности в данной точке, интерполяции новых полученных контрольных точек естественными бикубическими сплайнами и повторения данного процесса до момента полного выгорания заряда РДТТ;
* Расчет площади поверхности горения в заданный момент времени.

Кроме того, в процессе сдвига точек, на сплайновой поверхности будут образовываться точки самопересечения, т.е. будут возникать некоторые петли на поверхности, которые отрицательно сказываются на точности построения численной модели процесса горения и вычисления площади поверхности горения. Таким образом от данных петель на поверхности необходимо избавляться путем удаления точек, находящихся на петле, сразу после их сдвига при моделировании процесса горения, чтобы они не вносили свой вклад при последующих итерациях моделирования.

## **3.2 Математическая постановка задачи**

Типичная зада интерполяции состоит в восстановлении с той или иной точностью функции .

Пусть на прямоугольной области



задана сетка , где

,



Требуется восстановить функцию  с помощью некоторой легко вычислимой гладкой функции по таблице чисел

,

где .

Для решения данной задачи существует достаточно большое количество методов интерполяции. В данной работе будет рассмотрен способ решения поставленной задачи путем построения интерполяционного бикубического сплайна:

,

который удовлетворяет следующим краевым условиям:

,

,

.

И для естественного бикубического сплайна: .

Кроме того, в каждой точке  необходимо вычислить нормаль к сплайновой поверхности для движения точек, находящихся на поверхности горения заряда. Для вычисления площади поверхности горения будем суммировать площадь всех элементарных площадок , находящихся на поверхности горения:



# 4 Теоретическая часть

В данной главе будут последовательно изложены необходимая теория и методы построения кубических и бикубических сплайнов, поскольку способ построения бикубического сплайна в достаточно большой части основывается на методах построения кубического сплайна. Кроме того, при фиксации одного из параметров бикубического сплайна будет получаться кубический сплайн, зависящий от другого, нефиксированного параметра, что способствует упрощению некоторых действий со сплайновыми поверхностями, например нахождение нормали к поверхности в некоторой точке. Также будет описан метод прогонки, эффективный алгоритм решения систем линейных уравнений, представимых в виде трехдиагональных матриц.

При выполнении данной работы, стояла задача выполнения интерполяции некоторого набора данных. Для решения данной задачи существует достаточно большое количество методов, одним из которых является метод интерполяции при помощи кубических сплайнов, которые выявляют зависимость между значениями одного параметра и некоторой неизвестной функции в данной точке, для кривых и метод интерполяции при помощи бикубических сплайнов, которые строят зависимость по двум параметрам, для поверхностей. Интерполяция с помощью кубических и бикубических сплайнов является достаточно точной, также данный метод позволяет накладывать некоторые ограничения на значения первых и вторых производных в крайних точках заданной последовательности значений, описывающих некоторую неизвестную функцию, что позволяет задавать необходимую кривизну восстанавливающей функции в начальной и конечной точках.

Также одной из задач данной работы является реализация метода, имитирующего процесс горения, т.е. определяющего некоторое движение точек поверхности по нормали к поверхности в заданных точках. Способов расчета нормали к поверхности в точке также существует несколько. В данной работе выбор был сделан в пользу численного, но при этом точного метода.

## **4.1 Кубический сплайн**

Пусть нам известна некоторая последовательность , , которая является упорядоченной: . А также известны значения некоторой функции  в точках данной последовательности . Необходимо с той или иной точностью восстановить функцию . Для решения данной задачи будет проводить интерполяцию кубическим сплайном.

Для начала введем определение интерполяционного кубического сплайна с естественными краевыми условиями:

Функция , которая определена на отрезке , называется интерполяционным кубическим сплайном, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. на каждом отрезке  функция  представляет собой кубический многочлен



для 

1. Соседние многочлены гладко состыкованы между собой

;

1. Выполнено условие интерполяции

.

В данной работе будут рассмотрены кубические сплайны с естественными краевыми условиями, накладывающими ограничения на значения второй производной сплайна на концах отрезка , имеющие следующий вид:

,

.

## **4.2 Алгоритм построения интерполяционного кубического сплайна**

Из условия непрерывности второй производной кубического сплайна  и обозначения  можно записать

,

где 

Далее, проинтегрируем (2) дважды, из чего получим



Подставим сюда  и , а также учтем условие интерполяции . Найдем

 ,

.

Выразим  и  и подставим в (3), в следствии чего получим формулу кубического сплайна на подотрезке :



Для нахождения неизвестных коэффициентов  используем непрерывность первой производной сплайна . По формуле (4) имеем:



Подставим , найдем:

,

где

.

Заменим в (5)  на . Подставим :



Далее из условия  приходим к системе линейных уравнений



где



Данная система является недоопределенной, так как содержит  уравнений для нахождения  неизвестных. Для замыкания данной системы воспользуемся естественными краевыми условиями:





Систему уравнений 6 можно представить в матричном виде :



где



Видно, что данная система уравнений (6), представленная в матричном виде (7), имеет трехдиагональную матрицу. Такие системы уравнений удобно решать с помощью метода прогонки.

## **4.3 Метод прогонки**

Несложно заметить, что система уравнений в матричном виде (7) имеет трехдиагональную матрицу. Рассмотрим эффективный алгоритм решения таких систем линейных уравнений в общем виде.

Пусть дана некоторая система линейных уравнений в матричном виде

, где  – трехдиагональная матрица. Запишем соотношение:



Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:



где .

Используя это соотношение, выразим  и  через  и подставим в уравнение (8):



А также введем следующие условия для справедливости данного соотношения:



Выразим , :



из 8 получим:



В результате имеем значения коэффициентов  и , необходимых для нахождения значений :



**4.4 Бикубический сплайн**

Пусть на прямоугольной области



задана сетка , где

,

.

Требуется восстановить функцию  по таблице известных чисел , где , с помощью некоторой легко вычислимой гладкой функции. Эта задача решается путем построения интерполяционного бикубического сплайна.

Сетка  делит область  на прямоугольные ячейки



.

Функция  называется бикубическим сплайном, если:

* В каждой ячейке  функция  является кубическим многочленом отдельно по переменным  и , т.е.

 для всех ,

;

* Бикубический сплайн  имеет непрерывные частные и смешанные производные до второго порядка включительно по переменным  и :



Бикубический сплайн  называется интерполяционным если он удовлетворяет условиям равенства значения сплайна в узле значению неизвестной функции в этом же узле:



Также запишем естественные краевые условия для бикубического сплайна:

,

,

.

Во всякой ячейке  бикубический сплайн  может быть записан в виде



или



Первая запись позволяет сказать, что в  бикубический сплайн  является кубическим многочленом по переменной , коэффициенты которого являются кубическими многочленами от . Вторая запись имеет аналогичный смысл. Таким образом, ясно, что алгоритм построения бикубического сплайна должен основываться на алгоритмах построения одномерных кубических сплайнов.

Запишем следующее выражение для  и его производной по  на нижней и верхней границах ячейки :







где, в свою очередь



,

.

Аналогично при фиксированном  в силу формулы (9) имеем:



где



.

Подставляя сюда выражения для  из формул (11), приходим к формуле

,

где

,

,

,







## **4.5 Алгоритм вычисления бикубического сплайна**

Исходные данные удобно расположить в виде таблицы 1. Во внутренней части таблицы размещаются значения функции. Окаймляющие строки и столбцы, с учетом естественных краевых условий, заполнены нулями.



Таблица 1. Данные для двумерной задачи

Алгоритм решения задачи интерполяции строится с учетом того, что при фиксированном значении одной из переменных, например , сплайн и его частные производные по  являются кубическими сплайнами от переменной . Каждая строка или столбец табл. 1 содержит данные, достаточные для построения кубического сплайна вдоль одной из линий  или .

Шаг 1. Строятся кубические сплайны от переменной , ,  по строкам табл. 1, включая граничные, с краевыми условиями из граничных столбцов. Дело сводится к решению трехдиагональных систем уравнений. В результате находятся значения . Эти значения располагаем снова в виде таблицы, аналогичной табл. 1, без граничных столбцов. В граничных строках помещаются, в силу естественных краевых условий, нули.

Шаг 2. По данным исходной табл. 1 строятся сплайны , в результате чего находятся значения .

Шаг 3. Строятся кубические сплайны по переменной , , по столбцам таблицы, полученной на шаге 1. Это будут частные производные по  , искомого сплайна на линиях . Значения производных сплайнов  в узлах сетки  являются смешанными производными искомого сплайн на сетке, т.е. 

В итоге получены значения величин  в узлах сетки  Эти значения полностью определяют интерполяционный бикубический сплайн.

## **4.6 Нахождение нормалей**

Для вычисления нормали к сплайновой поверхности  будем пользоваться следующими формулами вычисления касательных к поверхности в точке для внутренних контрольных точек:



и для крайних контрольных точек:



Имея известные векторы касательных к поверхности в точке по двум направлениям, нормаль к поверхности в данной точке можно вычислить как векторное произведение данных векторов. Для нахождения нормали к поверхности в точке  воспользуемся следующей формулой:



1. **Практическая часть**

В данной части будет описан процесс реализации программного модуля для численного моделирования процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя на основании ранее изложенной теории, также будут описаны некоторые особенности данного способа численного моделирования для поставленной задачи.

Для программной реализации поставленной задачи был выбран язык программирования Python, широко используемый в различных математических задачах, а также, поскольку в данной работе достаточно большое количество векторных и матричных вычислений, была использована библиотека NumPy, являющаяся альтернативой математическому пакету MATLAB и предназначенная для упрощения и оптимизации работы с векторами и матрицами и различными операциями над ними. Данная библиотека реализована с помощью языков программирования C и Fortran, что позволяет добиться оптимизации различных векторных и матричных операций. Графическая часть программы была реализована с помощью библиотеки PyGame, которая полностью реализована на языке программирования C, что также позволяет оптимизировать процесс отрисовки полученных результатов.

Также в данной части будут описаны некоторые модернизации вычислений, которые были описаны в теоретической части данной работы.

Весь исходный код реализованной программы находится в открытом доступе на GitHub.

* 1. **Реализация вычислений**

Началом реализации численного моделирования процесса выгорания заряда твердого топлива является инициализация начальной геометрии поверхности заряда. Для этого необходимы значения параметров: – длина щели, – ширина щели, – внутренний радиус, – радиус оболочки и – высота заряда, которые описывают начальную форму заряда РДТТ.

Вновь рассмотрим поверхность заряда в начальный момент времени, изображенной на рисунке 3.

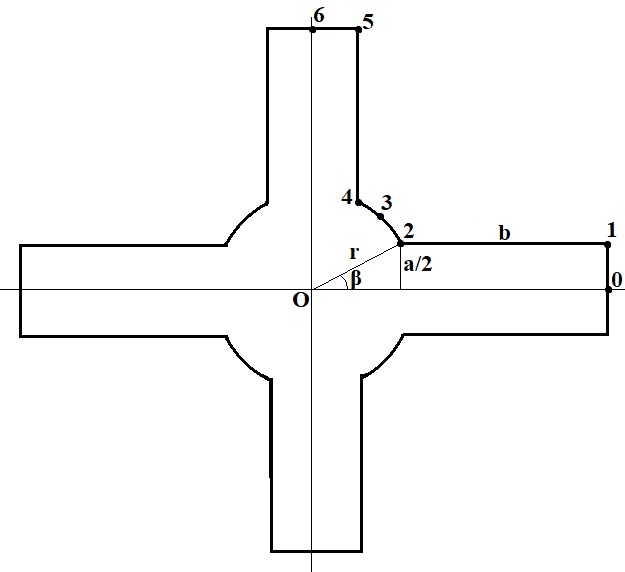


Рисунок 3 – поверхность заряда в начальный момент времени, вид сверху

В силу симметрии данной поверхности, для определения координат начальных точек, описывающих ее, более чем достаточно определить закон изменения координат между вершинами 0 – 6. Рассмотрим значения координат для каждой из них:

, ;

;

;

;

;

;

;

.

Несложно заметить, что определить значения координат точек, находящихся между данными вершинами, можно следующим образом:

для ;

для ;

для ;

для ;

для ,

где  – количество точек на заданном промежутке.

Далее, имея набор точек, описывающих поверхность заряда в начальный момент времени, мы можем с их помощью построить интерполирующую сплайновую поверхность. Поскольку заряд является трехмерным объектом, то для полного описания сплайновой поверхности необходимо задать три бикубических сплайна, описывающих зависимости значений координат от параметров.



Как следует из теории, процесс построения бикубического сплайна опирается на процесс построения кубического сплайна, поэтому сначала опишем реализацию класса CubicSpline. Данный класс имеет следующие методы:

1. calculate\_spline. Данный метод позволяет по наборы известных пар вычислить неизвестные значения , которые описывают сплайн на всей его области определения. Для этого вычисляются вспомогательные значения , и вектор , описанные в теоретической части данной работы. Далее по полученным значениям строятся вектор значений главной диагонали, вектор значений диагонали, находящейся над главной и вектор значений диагонали, находящейся под главной. Для данных векторов, а также вектора вызывается функция TDMA\_Solver, реализующая метод прогонки, данная функция возвращает вектор найденных коэффициентов кубического сплайна.
2. get\_point. Данный метод принимает значение параметра и возвращает соответствующее ему значение сплайна. Является реализацией функции (4).

Перейдем к описанию класса BicubicSpline. Данный класс имеет следующие методы:

1. calculate\_spline. Данный метод по известным значениям векторов параметров и , а также матрице значений функции . В строках данной матрицы находятся значения функции для фиксированного параметра и переменного параметра . Для начала матрица поворачивается на 90 градусов. Далее, аналогично реализации данного метода для класса CubicSpline, сначала формируются необходимые для вычислений вспомогательные значения, а затем по алгоритму, который был описан в теоретической части, вычисляются значения параметров , которые определяют бикубический сплайн.
2. get\_point. Данный метод получает на вход значения параметров и и по ним, согласно теории, вычисляет значение сплайна в данной точке.

Далее опишем метод имитации процесса горения, который, при некоторых допущениях можно моделировать путем сдвига точек поверхности в направлении нормали к данной поверхности в соответствующей точке. Пример поверхности, касательных векторов к ней в точке и нормаль к данной поверхности в той же точке изображены на рисунке 4. Нормаль к сплайновой поверхности в точке  можно вычислить как векторное произведение касательных к поверхности в данной точке по направлениям и :



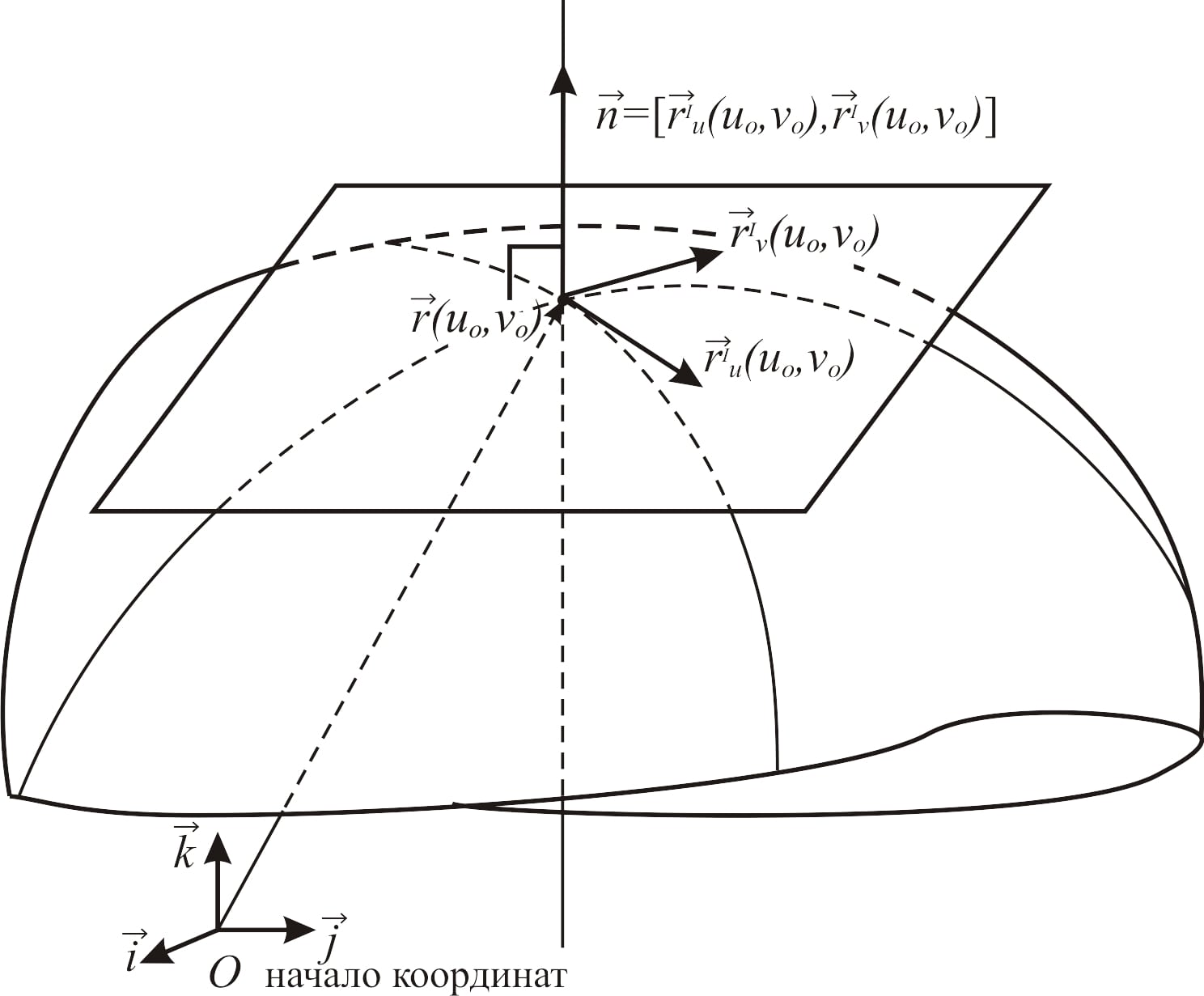


Рисунок 4 – касательные к поверхности в точке

Сами касательные будем находить с помощью метода, описанного в теоретической части данной работы, с некоторой модификацией, позволяющей повысить точность вычислений: пусть нужно найти касательную к поверхности по параметру в некоторой точке , тогда вместо вычисления ее с помощью параметров, описывающих соседние точки и , будем брать значения для параметров и , где – достаточно малое значение.

После нахождения нормали к поверхности в заданной точке , добавим полученный вектор нормали к уже известному вектору , однако точность данного способа будет достаточно мала. Для повышения точности достаточно домножить полученный ранее вектор нормали на некоторое положительное число меньшее 1. Чем это число меньше, тем выше точность моделирования процесса горения.

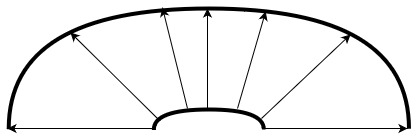


Рисунок 5 – пример шага итерации без корректирования значения нормали при вычислении сдвига точек

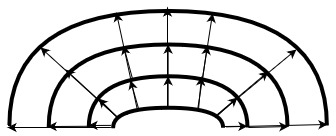


Рисунок 6 – пример шага итерации при добавлении корректирования значения нормали при вычислении сдвига точек.

На рисунке 5 изображен пример сдвига точек некоторой кривой без уменьшения значения длины вектора нормали. На рисунке 6 изображен пример сдвига точек той же кривой, но при уменьшении длины вектора нормали. Как видно, особо значимой разницы в полученных результатах для данной кривой нет, но на практике уменьшение длины вектора нормали позволяет получить более точные значения, а также убрать резкость в смещении точек при моделировании процесса горения.

Также в ходе смещения точек, необходимо проверять координаты новых точек на выход за пределы заряда, поскольку очевидно, что заряд не может выгореть дальше своих границ. Если это происходит, то необходимо смещать точки, которые вышли за пределы заряда, обратно на границу заряда по кратчайшему пути. Для этого достаточно просто спроецировать данные точки на цилиндр радиуса , который представляет собой оболочку заряда.

Проведем несколько итераций моделирования процесса выгорания заряда.

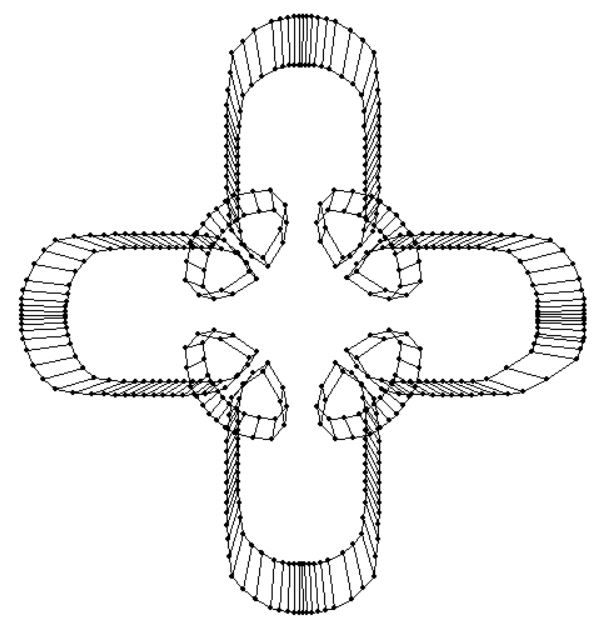


Рисунок 7 – образование точек самопересечения на сплайновой поверхности при моделировании процесса горения

Как видно на рисунке 7, спустя несколько итераций на сплайновой поверхности, которая описывает поверхность заряда, возникают точки самопересечения. От данных точек необходимо избавляться, поскольку они влияют на точность моделирования процесса горения, внесением неточностей при расчете нормалей поверхности в точках, находящихся по соседству с точками внутри петли. Также данное явление мешает точному вычислению площади поверхности заряда в текущий момент времени.

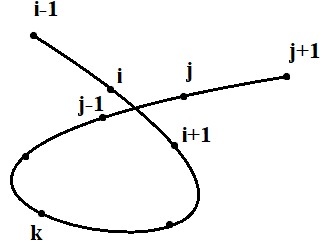


Рисунок 8 – схематичное изображение участка с самопересечением

Рассмотрим участок с самопересечением, изображенный на рисунке 8, подробнее. Из рисунка видно, что необходимо удалить точки с индексами . Для этого достаточно знать индексы и . Если учесть, что по индексу происходит итерация, то для нахождения индекса необходимо и достаточно потребовать выполнения следующего условия:

 ∧ 

Имея реализованные функции и классы, которые были описаны выше, можно приступить к реализации алгоритма, моделирующего процесс выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя. Для начала необходимо инициализировать начальный набор точек, которые описывают поверхность заряда в начальный момент времени.

Далее по данному набору точек строим интерполирующие бикубические сплайны с естественными краевыми условиями, и с помощью метода get\_point для объекта класса BicubicSpline получаем новый набор точек, описывающих данную поверхность в начальный момент времени. При этом, новый набор состоит из большего количества точек, что позволяет повысить точность вычислений. Само количество точек, полученных в результате, можно задавать произвольно. После этого, с помощью созданного ранее визуализатора, выводим полученную сплайновую поверхность, которая репрезентирует поверхность заряда в начальный момент времени.

Далее в теле цикла, работающего до закрытия программы, производим моделирование процесса горения. Реализация данного алгоритма состоит из нескольких основных действий: для начала производит сдвиг точек, получаем новый набор точек, далее из этого набора точек удаляем все самопересечения, после этого интерполируем бикубическими сплайнами данные точки, для увеличения точности вновь вычисляем новый набор контрольных точек, размер которого точно не меньше размера предыдущего набора контрольных точек, и, для отображения полученного результата, передаем в визуализатор новый набор точек.

Осталось добавить расчет площади поверхности горения заряда в данный момент времени. Рассмотрим некоторую поверхность 2, находящуюся между четырьмя соседними точками и поверхность 1, которая является проекцией поверхности 2 на плоскость, проходящую через данные 4 точки, изображенные на рисунке 9. В силу достаточно большой плотности расположения точек, можно сделать допущение, которое заключается в том, что площадь . Значения этих площадей тем ближе друг к другу, чем больше задано точек.

Площадь  можно легко вычислить как площадь обычного прямоугольника:

,

где – расстояние между двумя соседними вершинами по параметру ,

b – расстояние между двумя соседними вершинами по параметру .

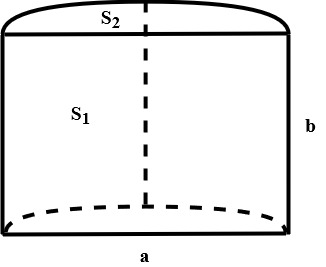


Рисунок 9 – Вид поверхности 2, описывающей истинную геометрию участка, и поверхности 1, являющейся проекцией поверхности 2 на некоторую плоскость

Для вычисления площади поверхности горения заряда в данный момент времени, имея набор точек, который описывают данную поверхность, осталось только вычислить площадь всех элементарных площадок, построенных по соседним вершинам. Для избегания суммирования площадок, лежащих на границе заряда, достаточно не рассматривать точки, которые лежат на границах заряда.

,

,

где – общее количество вершин,

 – площадь -ой элементарной площадки.

Далее, достаточно добавить вызов данной функции в описанном ранее цикле. В результате чего, к концу численного моделирования процесса горения, будем иметь набор значений площади поверхности горения в соответствующий момент времени (в соответствующую итерацию).

1. **Результаты**

Ниже будут приведены примеры работы данной программы для различных начальных форм поверхности заряда РДТТ, также будут приведены графики изменения площади поверхности горения заряда во времени.

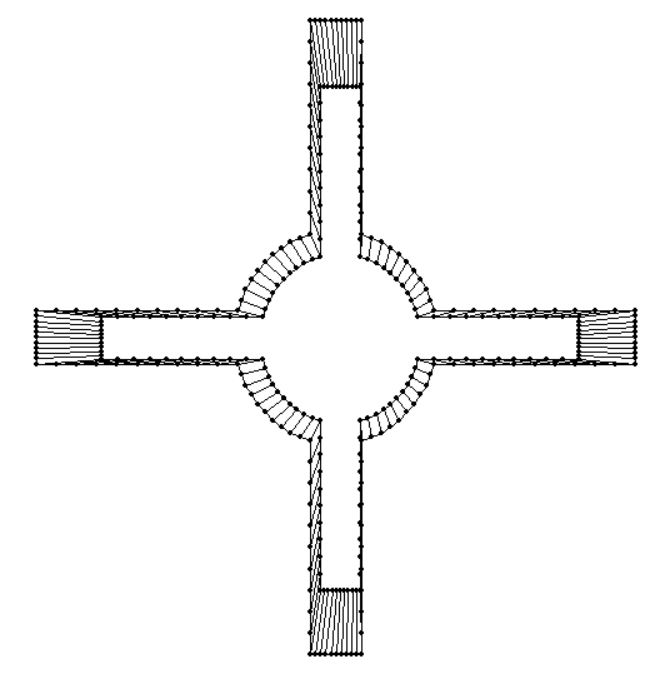


Рисунок 10 – Начальная форма поверхности заряда

На рисунке 10 изображена форма поверхности заряда при следующих значениях параметров, которые описывают ее: ширина щели , длина щели , внутренний радиус , радиус оболочки , высота заряда .

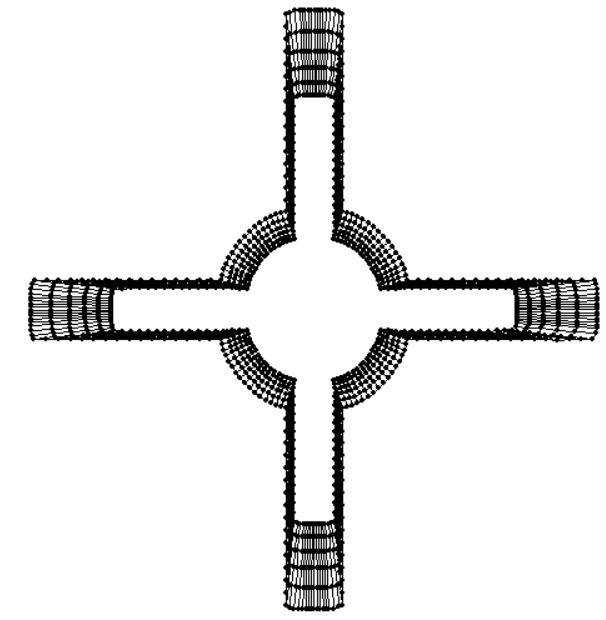


Рисунок 11 – Поверхность заряда через одну итерацию моделирования процесса горения

На рисунке 11 можно увидеть динамику изменения поверхности заряда. Благодаря тому, что при моделировании процесса горения, а именно при нахождении нового положения точек после их сдвига вектор нормали к поверхности в точке уменьшается по своей длине, сам процесс моделирования получается более точными, без резких скачков точек.

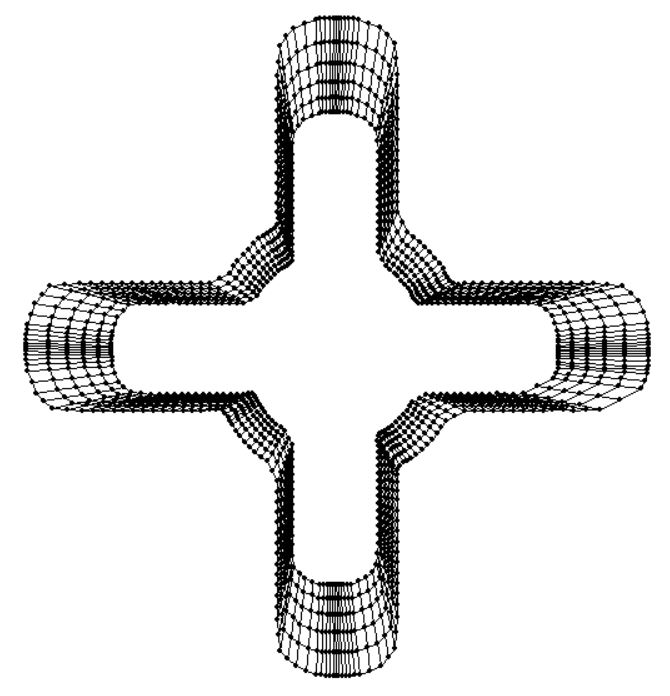
****

Рисунок 12 – Поверхность заряда спустя несколько итераций моделирования процесса горения

На рисунке 12 можно видеть поверхность горения заряда спустя несколько итераций моделирования. Видно, что точки самопересечения, которые образовывались в процессе сдвига точек, устраняются, при этом форма поверхности и кривизна всех показательных частей данной формы остается или очень близкой или не отличной от формы поверхности до удаления петель.

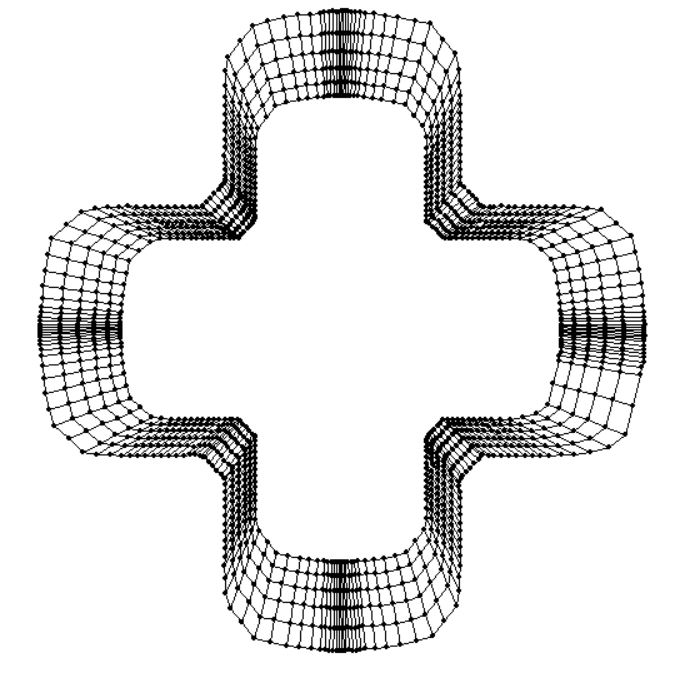
****

Рисунок 13 – Поверхность заряда спустя несколько итераций моделирования процесса горения

На рисунке 13 можно видеть поверхность заряда в момент времени, когда боковые части (щели), уже выгорели, и происходит процесс догорания участков между этими щелями, при этом, как видно, боковые части щелей еще некоторое время сохраняют свой прямолинейный вид.

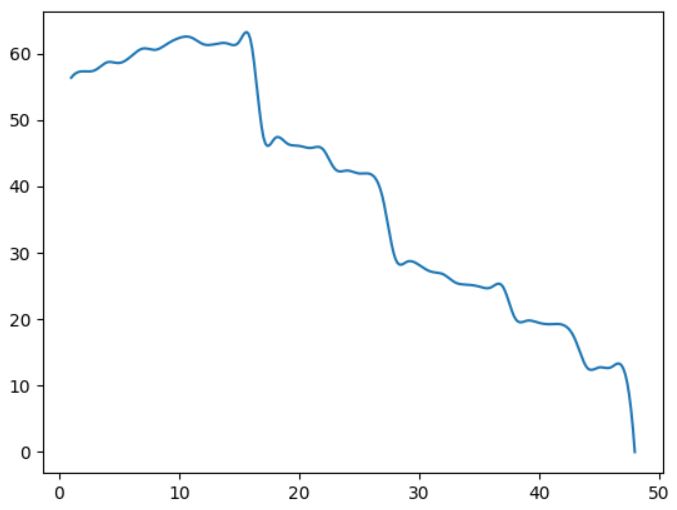
****

Рисунок 14 – График изменения площади во времени

На рисунке 14 можно наблюдать за изменением площади поверхности горения заряда в каждый момент времени до полного его выгорания. Примерно на 15 итерации можно наблюдать резкое уменьшение площади, это совпадает с тем моментом времени, когда глубинные части щелей в процессе горения доходят до оболочки, то есть выгорают. В целом данную форму заряда можно охарактеризовать достаточно равномерным, но все же с небольшим прогрессивным, процессом горения до пятнадцатой итерации, после чего оставшаяся часть заряда выгорает еще в течении примерно тридцати пяти итераций с достаточно быстро уменьшающейся площадью горения.

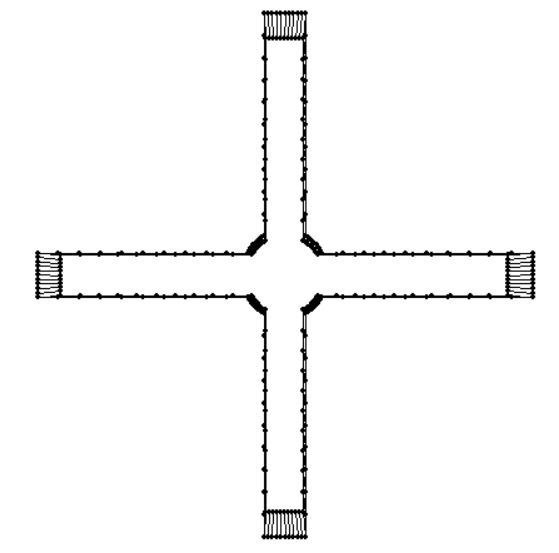
****

Рисунок 15 – Начальная форма поверхности заряда

На рисунке 15 изображена форма поверхности заряда при следующих значениях параметров, которые описывают ее: ширина щели , длина щели , внутренний радиус , радиус оболочки , высота заряда .

Данная форма отличается от ранее рассмотренной тем, что ее щели находятся достаточно близко к самой оболочке, в результате чего они достаточно быстро выгорят. Также в данном варианте внутренний радиус значительно меньше, чем в предыдущем варианте форму заряда. Таким образом, данная форма поверхности заряда достаточно близка к форме под номером 4 на рисунке 1.

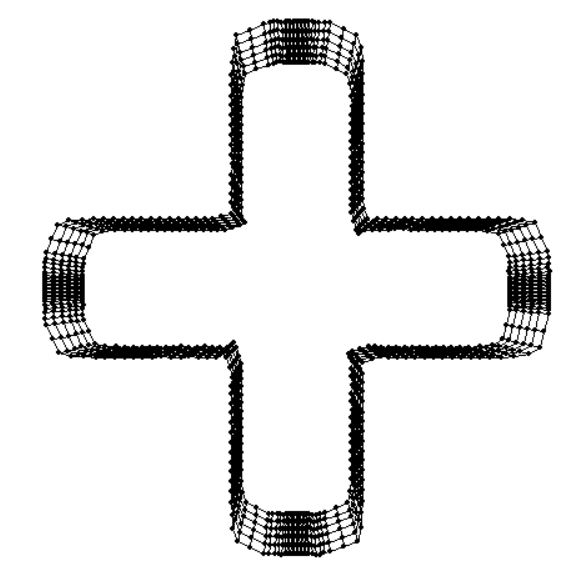
****

Рисунок 16 – Поверхность заряда спустя несколько итераций моделирования процесса горения

Как видно, данную поверхность заряда можно охарактеризовать тем, что в ходе горения ее округлые части, определяемые внутренним радиусом, достаточно быстро вырождаются, внося при этом небольшую кривизну в окрестности точки стыковки боковых частей двух соседних щелей. Также в следствии близости ее щелей к границам горения в виде оболочки заряда, данные участки достаточно быстро выгорают и не вносят значительных изменений в кривизну боковых частей щелей, что может привести к более долгому процессу горения, но при этом весь процесс горения должен характеризоваться более равномерным уменьшением площади горения, чем в прошлом виде заряда.

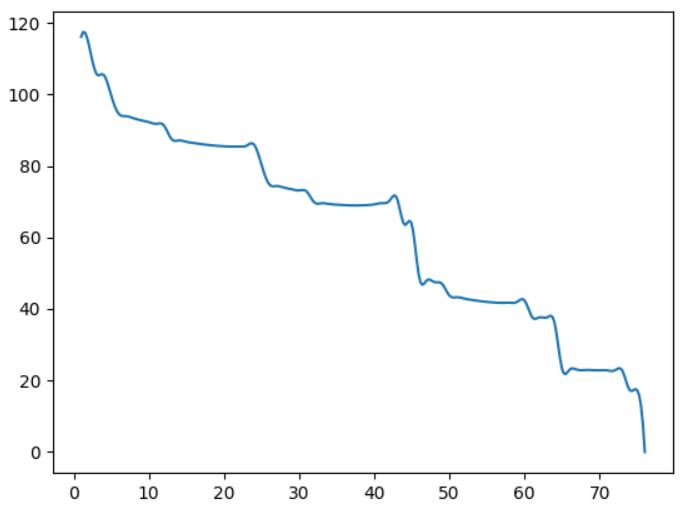
****

Рисунок 17 – График изменения площади во времени

Исходя из вида графика изменения площади для данной формы заряда, этот заряд можно охарактеризовать как заряд, который должен работать дольше, но при этом для данной формы поверхности заряда нет участка времени, где процесс горения имел бы прогрессивный характер. При этом можно видеть, как на промежутках между резкими падениями площади поверхности горения, площадь поверхности горения практически не изменяется, и чем процесс горения ближе к концу, тем меньше данные промежутки: самом начале – это примерно 20 итераций, после первого скачка – около 15 итераций, затем около 10, и перед завершением процесса горения длина промежутка равна примерно пяти.

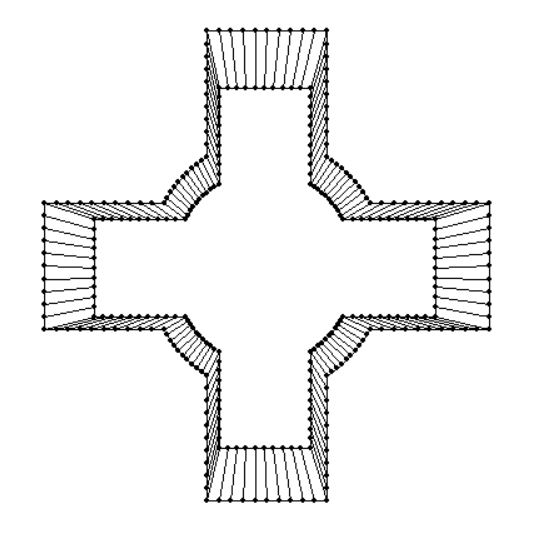
****

Рисунок 18 – Начальная форма поверхности заряда

На рисунке 18 изображена форма поверхности заряда при следующих значениях параметров, которые описывают ее: ширина щели , длина щели , внутренний радиус , радиус оболочки , высота заряда . Как видно, данная форма отличается и неглубокими щелями, и достаточно большим значением внутреннего радиуса.

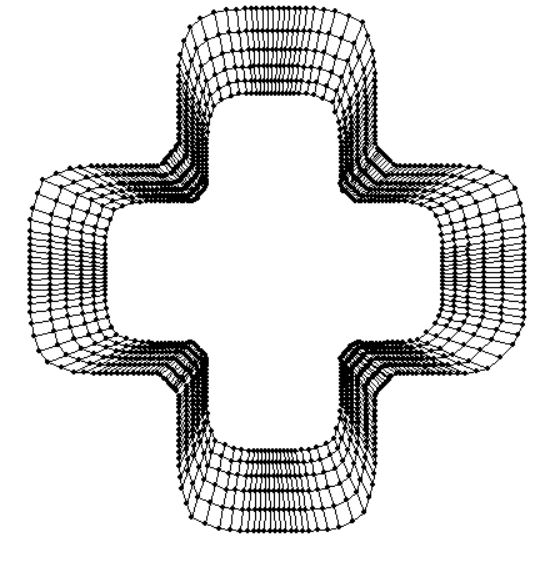
****

Рисунок 19 – Поверхность заряда спустя несколько итераций моделирования процесса горения

Исходя из вида поверхности горения спустя несколько итераций моделирования процесса горения, изображенного на рисунке 19 можно сделать вывод о том, что данная форма должна характеризоваться постоянным увеличением площади горения до того момента, как края щелей дойдут до оболочки, после этого площадь должна достаточно быстро уменьшаться. Также видно, что округлая часть поверхности, которая в начальный момент была достаточно большой, спустя несколько итераций стремится к вырождению. Таким образом, можно сделать вывод о том, что процесс горения боковых частей щелей происходит несколько быстрее, чем у округлого участка, который постепенно поглощается.

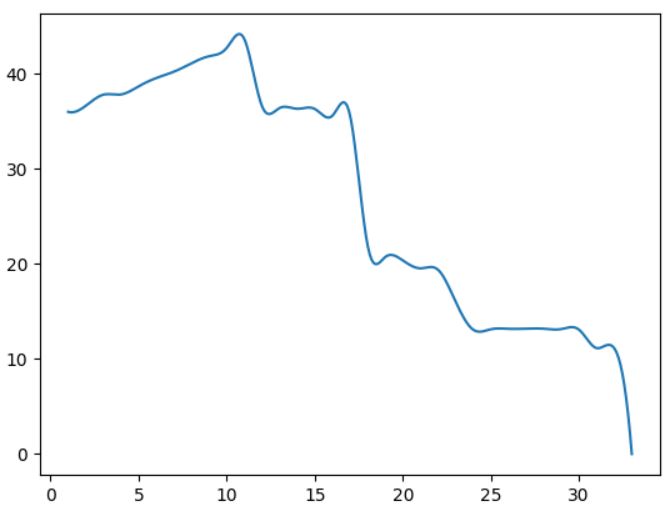
****

Рисунок 20 – График изменения площади во времени

Как видно по графику изменения площади поверхности горения для данной формы заряда, изображенному на рисунке 20, процесс горения данной формы действительно характеризуется постепенным увеличением площади горения до того момента, пока щели не доходят до оболочки, что при данных параметрах происходит примерно на 12 итерации. После этого площадь поверхности горения достаточно быстро уменьшается, причем с достаточно большими скачками.

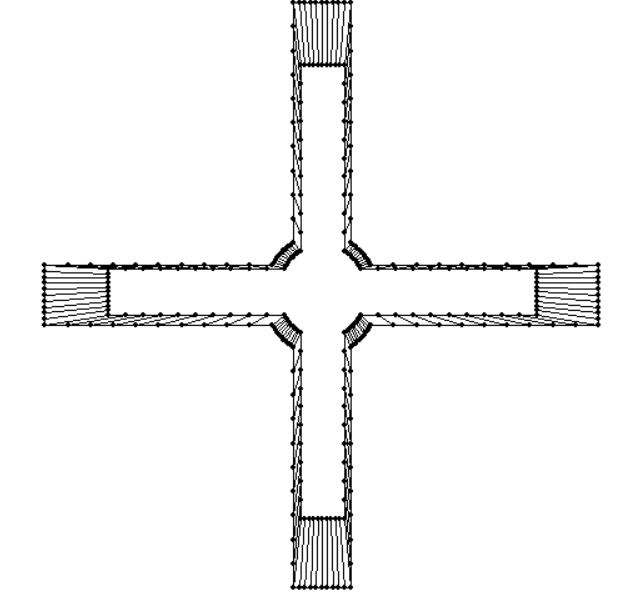
****

Рисунок 21 – Начальная форма поверхности заряда

На рисунке 21 изображена форма поверхности заряда при следующих значениях параметров, которые описывают ее: ширина щели , длина щели , внутренний радиус , радиус оболочки , высота заряда .

Данную поверхности интересно рассмотреть, поскольку она имеет, аналогично предыдущей, щели, находящиеся достаточно далеко от оболочки, несколько увеличенный внутренний радиус, но при этом достаточно тонкие и длинные щели.

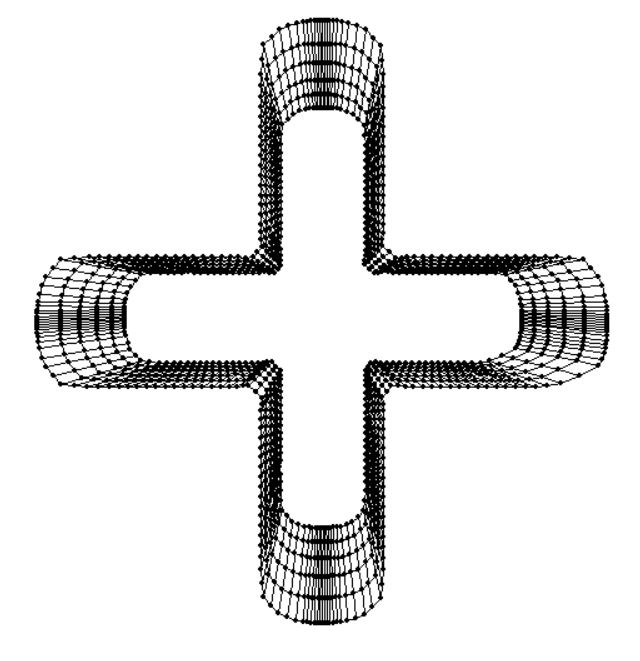
****

Рисунок 22 – Поверхность заряда спустя несколько итераций моделирования процесса горения

На рисунке 22 можно видеть, что процесс горения для данной формы заряда в первое время имеет прогрессивный характер. Также, аналогично предыдущим рассмотренным вариантам, округлая часть, задаваемая параметром внутреннего радиуса, значительных особенностей в изменение поверхности горения не вносит, более того, постепенно стремится к вырождению.

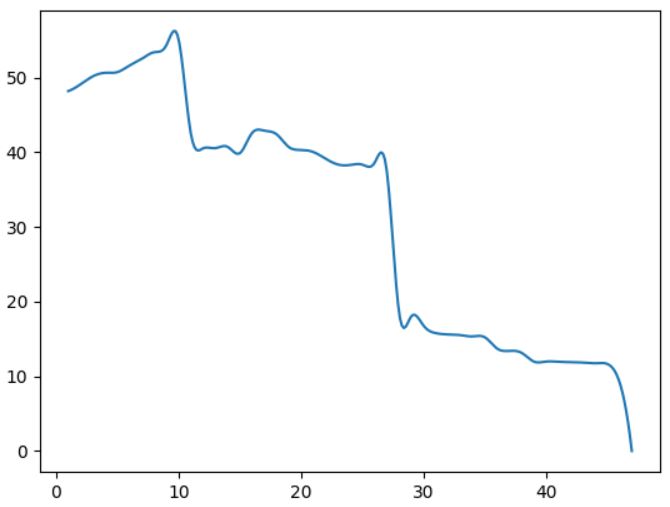
****

Рисунок 22 – График изменения площади во времени

На рисунке 22 можно видеть, что данная форма поверхности заряда отличается возрастанием площади горения до момента догорания щели до оболочки, что для данных параметров происходит примерно на десятой итерации, затем площадь горения некоторое время остается почти постоянной, далее на 25 итерации происходит резкое уменьшение площади горения, после чего площадь также остается почти постоянной, с малым уменьшением в ходе горения, до момента полного выгорания заряда.

На основании всех рассмотренных ранее форм, можно сделать вывод о том что на прогрессивность процесса горения, то есть увеличение площади горения, в самом начале процесса горения влияет удаленность щелей от оболочки заряда, отношение ширины щели к ее длине влияет на длительность процесса горения: чем это значение меньше, тем дольше горит заряд, кроме того, данное отношение влияет на наличие и величину резких скачков в изменении площади поверхности горения: чем меньше данное отношение, тем меньше значение скачков и сам процесс горения получается более равномерным в своем убывании, с меньшей скоростью уменьшения площади горения.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе научно-исследовательской работы были рассмотрены методы построения численной модели процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя, а именно:

* сформулирована концептуальная и математическая постановки задачи;
* описаны методы интерполяции кривых и поверхностей кубическими и бикубическими сплайнами соответственно;
* описан способ моделирования процесса путем движения точек находящихся на поверхности горения по нормалям к данной поверхности;
* введен метод измерения площади поверхности горения заряда.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 360 с.;
2. Шикин Е. В., Плис А. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. – 240 с.;
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
4. Погорелов А. И. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
5. Волков Е. А. Численные методы – М.: Наука, 1987. – 248 с.
6. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ – М. МЦНМО, 2000. – 960с.
7. d
8. f
9. d
10. f
11. df
12. d
13. d
14. d
15. d
16. d
17. d

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана**

**(национальный исследовательский университет)»**

**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ФН-11

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ / Ю.И. Димитриенко /

« 10 » февраля 2021 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение научно-исследовательской работы**

по теме *Численное моделирование процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя*

Студент группы ФН11-81Б Глушков Дмитрий Евгеньевич

Направленность НИР: учебная

Источник тематики: кафедра

График выполнения НИР: 25% к 2 нед., 50% к 6 нед., 75% к 10 нед., 100% к 12 нед.

1. ***Техническое задание:***

* сформулировать математическую постановку задачи моделирования процесса выгорания заряда твердотопливного ракетного двигателя (РДТТ);
* изучить и описать методы интерполяции кривых и поверхностей кубическими и бикубическими сплайнами соответственно;
* описать метод движения поверхности горения заряда РДТТ;
* разработать алгоритм интерполяции поверхности заряда РДТТ по входным параметрам, описывающим ее начальную геометрию;
* разработать визуализатор, позволяющий показывать начальное состояние заряда, а также анимировать процесс движения поверхности горения;
* изучить методы измерения площади поверхности горения заряда РДТТ;
* изучить способы оптимизации программных компонент, выполняющих расчеты.

1. ***Оформление научно-исследовательской работы:***

2.1 Расчетно-пояснительная записка на \_\_\_\_\_ листах формата А4.

2.2 Перечень графического (иллюстративного) материала (чертежи, плакаты, слайды и т.п.)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Электронную версию готовой расчётно-пояснительной записки (формат Word) выслать в электронный архив кафедры – на адрес электронной почты archive-fn@mail.ru

Дата выдачи задания « 10 » февраля 2021 г.

**Руководитель НИР**  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ / А.А. Захаров /

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

**Студент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ /** Д.Е. Глушков

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)