$\boxed{1.3}$ Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=(1)$$

$$\lim_{x\to 7}\sqrt[4]{x+9}-2=\left(\sqrt[4]{x+9}-2\right)_{x=7}=\sqrt[4]{7+9}-2=\sqrt[4]{16}-2=2-2=0$$

$$\lim_{x\to 7}\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}\right)_{x=7}=\sqrt{7+2}-\sqrt[3]{7+20}=\sqrt{9}-\sqrt[3]{27}=3-3=0$$

$$(1)=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\Big\{$$

$$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

$$\Big\}=\frac{\left(\sqrt[4]{x+9}+2\right)\left(\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^2+2^2\right)}{\left(\sqrt[4]{x+9}-2\right)\left(\sqrt[4]{x+9}+2\right)\left(\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^2+2^2\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{x+9}+2\right)\left(\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^2+2^2\right)}{\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^4-2^4}=(2)$$

$$\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^4-2^4=(x+9)-16=x+9-16=x-7$$

$$\left(\sqrt[4]{x+9}\right)^2+2^2=\sqrt{x+9}+4$$

$$(2)=\frac{\left(\sqrt[4]{x+9}+2\right)\left(\sqrt{x+9}+4\right)}{x-7}$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}=\Big\}$$

$$a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3)=$$

$$\Big\}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}\right)\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x+20}+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^3\right)}{\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x+20}+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^3\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^6}{\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x+20}+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^3\right)}=\Big(3$$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2+\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x+20}+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^2=(x+2)^{\frac{2}{2}}+(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+20)^{\frac{1}{3}}+(x+20)^{\frac{2}{3}}=$$

$$=(x+2)+(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+20)^{\frac{1}{3}}+(x+20)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^3=(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+20)^{\frac{3}{3}}=(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+20)$$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{x+20}\right)^6=(x+2)^{\frac{6}{2}}-(x+20)^{\frac{6}{3}}=(x+2)^3-(x+20)^2=$$

$$=\left(x^3+3x^2 2+3x2^2+2^3\right)-\left(x^2+2x\cdot 20+20^2\right)=$$

$$=\left(x^3+2\cdot 3\cdot x^2+3\cdot 4x+2^3\right)-\left(x^2+2\cdot 20x+2^2\cdot 10^2\right)=$$

$$=\left(x^3+6x^2+12x+8\right)-\left(x^2+40x+400\right)=$$

$$=x^3+(6-1)x^2+(12-40)x+(8-400)=$$

$$=x^3+5x^2-28x-392=\Big\}$$

$$28=4\cdot 7$$

$$392=400-8=40\cdot 10-8=5\cdot 8\cdot 10-8=8(5\cdot 10-1)=8\cdot(50-1)=8\cdot 49=8\cdot 7^2$$

$$\Big\}=x^3+5x^2-4\cdot 7x-8\cdot 7^2=\Big\{$$

x

$$x^3+5x^2-4\cdot 7x-8\cdot 7^2 \Big|_{x=7} = 7^3+5\cdot 7^2-4\cdot 7\cdot 7-8\cdot 7^2 =$$

$$= 7^3+5\cdot 7^2-4\cdot 7^2-8\cdot 7^2 = 7^3+(5-4-8)\,7^2 = 7^3+(-7)\,7^2 = 7^3-7^3=0$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+5x^2-4\cdot 7x-8\cdot 7^2 & x-7 \\ \underline{x^3-7x^2} & \overline{x^2+12x+7\cdot 8} \\ \quad 12x^2-4\cdot 7x & \\ \quad \underline{12x^2-7\cdot 12x} & \\ \qquad 7\cdot 8x-8\cdot 7^2 & \\ \qquad \underline{7\cdot 8x-8\cdot 7^2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\} = (x-7)(x^2+12x+7\cdot 8)$$

$$(3) = \frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{\left((x+2)+(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+20)^{\frac{1}{3}}+(x+20)^{\frac{2}{3}}\right)\left((x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+20)\right)}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} =$$

$$= \frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{\left((x+2)+(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+20)^{\frac{1}{3}}+(x+20)^{\frac{2}{3}}\right)\left((x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+20)\right)} \cdot \frac{\left((x+9)^{\frac{1}{4}}+2\right)\left((x+9)^{\frac{1}{2}}+4\right)}{(x-7)} =$$

$$= \{x-7\neq 0;\ x\neq 7\} =$$

$$= \frac{(x^2+12x+56)\left((x+9)^{\frac{1}{4}}+2\right)\left((x+9)^{\frac{1}{2}}+4\right)}{\left((x+2)+(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+20)^{\frac{1}{3}}+(x+20)^{\frac{2}{3}}\right)\left((x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+20)\right)}$$

$$(1) = \lim_{x \to 7} \frac{(x^2+12x+56)\left((x+9)^{\frac{1}{4}}+2\right)\left((x+9)^{\frac{1}{2}}+4\right)}{\left((x+2)+(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+20)^{\frac{1}{3}}+(x+20)^{\frac{2}{3}}\right)\left((x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+20)\right)} = (4)$$

$$\left((x+2)+(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+20)^{\frac{1}{3}}+(x+20)^{\frac{2}{3}}\right)\left((x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+20)\right)\Big|_{x=7} =$$

$$= \left((7+2)+(7+2)^{\frac{1}{2}}(7+20)^{\frac{1}{3}}+(7+20)^{\frac{2}{3}}\right)\left((7+2)^{\frac{3}{2}}+(7+20)\right) =$$

$$= \left(9+9^{\frac{1}{2}}27^{\frac{1}{3}}+27^{\frac{2}{3}}\right)\left(9^{\frac{3}{2}}+27\right) =$$

$$= \left(3^2+(3^2)^{\frac{1}{2}}(3^3)^{\frac{1}{3}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}\right)\left((3^2)^{\frac{3}{2}}+3^3\right) =$$

$$= (3^2+3\cdot 3+3^2)(3^3+3^3) = (3^2+3^2+3^2)(3^3+3^3) =$$

$$= (3\cdot 3^2)(2\cdot 3^3) = 2\cdot 3^6$$

$$(x^2+12x+56)\left((x+9)^{\frac{1}{4}}+2\right)\left((x+9)^{\frac{1}{2}}+4\right)\Big|_{x=7} =$$

$$= (7^2+12\cdot 7+7\cdot 8)\left((7+9)^{\frac{1}{4}}+2\right)\left((7+9)^{\frac{1}{2}}+4\right) =$$

$$= \left(7^2+7(12+8)\right)\left(16^{\frac{1}{4}}+2\right)\left(16^{\frac{1}{2}}+4\right) = 7(7+12+8)(2+2)(4+4) =$$

$$= (7\cdot 27)(2\cdot 2)(2\cdot 4) = (7\cdot 3^3)2^2(2\cdot 2^2) = 2^5 3^3 7$$

$$(4) = \frac{2^5 3^3 7}{2\, 3^6} = \frac{2^4 7}{3^3} = \left\{2^4 7 = 16\cdot 7 = 70+42 = 112\right\} =$$

$$= \frac{112}{27}$$

Ontem:

$$\boxed{\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} = \frac{112}{27}}$$