5. Исследовать на сходимость

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

Решение:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$$

1. Необходимое условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}(2n-1)}{\frac{d}{dn}(2^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n2^{n-1}}=0$$

2. Достаточное условие

$$n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\geq 1\Leftrightarrow 2^n\geq 2^1=2\Leftrightarrow 0<\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2^n}>0$$

$$n\geq 1\Leftrightarrow 2n\geq 2\cdot 1=2\Leftrightarrow 2n-1\geq 2-1=1\Rightarrow 2n-1>0$$

$$\frac{1}{2^n}>0\wedge 2n-1>0\Rightarrow\frac{2n-1}{2^n}>0$$

2.1 Признак д'Аламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}\left(\frac{2n-1}{2^n}\right)^{-1}=\frac{2(n+1)-1}{2n-1}\,\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{2n+2-1}{2n-1}\,\frac{2^n}{2^n\,2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\,\frac{2+0}{2-0}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$$

Ответ:

| | |
|---|---|
| $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ | сходится по признаку д'Аламбера для знакопостоянных рядов |
| $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ | $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n>0$ |
| | $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ |