$\boxed{4}$ Исследовать на сходимость

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Решение:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots = a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

1. Необходимое условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

2. Достаточное условие

$$n\in\mathbb{N} \Rightarrow n\geq 1 \Leftrightarrow 2^n \geq 2^1 = 2 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<a_n\leq\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n>0$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ a_n>0$$

2.1 Признак д'Аламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{-1} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^n\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$	Сходится по признаку д'Аламбера для знакопостоянных рядов
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	$\forall n\in\mathbb{N}\ a_n>0$
	$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$