1) Исследовать на сходимость

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$$

Решение:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}:\ a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}=\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

1. Необходимое условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}=(1)$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{3}{2}}=\infty$$

$$(1)=\frac{1}{\infty}$$

$$a_n=\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{0^{\frac{3}{2}}}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

2. Достаточное условие

$$n \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 1+1 = 2 \Leftrightarrow (n+1)^{\frac{3}{2}} \geq 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < a_n \leq \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$$

2.1 Второй признак сравнения

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow a_n n^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \quad n \to \infty$$

Ответ:

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	
$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$ $a_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$	