$\boxed{1}$ Исследовать на сходимость

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \ldots$$

Решение:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} + \ldots = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-\frac{3}{2}}$$

1. Необходимое условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{-\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{0}{1+0}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{0}{1}\right)^{\frac{3}{2}} = 0^{\frac{3}{2}} = 0$$

2. Достаточное условие

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 1+1 = 2 \Leftrightarrow (n+1)^{\frac{3}{2}} \geq 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < (n+1)^{-\frac{3}{2}} \leq 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 0 < a_n \leq 2^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow a_n > 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$

2.1 Второй признак сравнения

$$a_n = (n+1)^{-\frac{3}{2}} = \left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{-\frac{3}{2}} = n^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a_n\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}} = (1+0)^{-\frac{3}{2}} = 1^{-\frac{3}{2}} = 1 \neq 0$$

$a_n = O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ $n \to \infty$

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}$	сходимая по второму признаку сравнения
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ $a_n = O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$ $n \to \infty$