1. Исследовать на сходимость

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$$

Решение:

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots = a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000n+1}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n = \frac{1}{1000n+1}$$

1. Необходимое условие

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1000n+1} = (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}(1000n+1) = \infty$$

$$(1) = \frac{1}{\infty}$$

$$a_n = \frac{1}{1000n+1} = \frac{1}{n\left(1000+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n}}{1000+\frac{1}{n}}$$

$$(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1000+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1000+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{0}{1000+0} = \frac{0}{1000} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2. Достаточное условие

$n \geq 1 \Leftrightarrow 1000n \geq 1000 \cdot 1 = 1000 \Leftrightarrow 1000n+1 \geq 1000+1 = 1001 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1000n+1} \leq \frac{1}{1001} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < a_n \leq \frac{1}{1001}$

$\forall n \in \mathbb{N} \; a_n > 0$

2.1 Второй признак сравнения

$a_n = \frac{1}{1000n+1} = \frac{1}{n\left(1000 + \frac{1}{n}\right)} \Leftrightarrow a_n \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{1000 + \frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1000 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1000 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1000+0} = \frac{1}{1000} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \; n\to\infty$

Ответ:

$\{a_n\}: a_n = \frac{1}{1000n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	
$\forall n \in \mathbb{N} \; a_n > 0$ $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \; n\to\infty$	