$\boxed{6}$ Исследовать на сходимость

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\dots$$

Решение:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\dots=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

1. Необходимое условие

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(n\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^2=\left(\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{0}{2-0}\right)^2=\left(\frac{0}{2}\right)^2=0^2=0$$

2. Достаточное условие

$$n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\geq 1\Leftrightarrow 2n\geq 2\cdot 1=2\Leftrightarrow 2n-1\geq 2-1=1\Leftrightarrow 0<\frac{1}{2n-1}\leq 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<a_n\leq 1\Rightarrow a_n>0$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ a_n>0$$

2.1 Признак сравнения

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{\left(n\left(2-\frac{1}{n}\right)\right)^2}=\frac{1}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}\Leftrightarrow a_n\left(\frac{1}{n^2}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n\left(\frac{1}{n^2}\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{\left(2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{(2-0)^2}=\frac{1}{2^2}\neq 0$$

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\to\infty$$

2.2 Признак д'Аламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(2(n+1)-1)^2}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}\right)^{-1}=\frac{(2n-1)^2}{(2(n+1)-1)^2}=\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)^2=\left(\frac{2-0}{2+0}\right)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1^2=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

Ответ:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$	сходится по второму признаку сравнения для знакопостоянных рядов
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$
	$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ n \to \infty$
	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$