

II) Исследовать на сходимость

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$$

Решение:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$$

1. Необходимое условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1000n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1000 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1000 + \frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{1000 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{0}{1000 + 0} = \frac{0}{1000} = 0$$

2. Достаточное условие

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 \Leftrightarrow 1000n \geq 1000 \cdot 1 = 1000 \Leftrightarrow 1000n+1 \geq 1000+1 = 1001 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1000n+1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < a_n \leq 1 \Rightarrow a_n > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$$

2.1 Вторым признаком сравнения

$$a_n = \frac{1}{1000n+1} = \frac{1}{n(1000 + \frac{1}{n})} \Leftrightarrow a_n \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{1000 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1000 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1000 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1000 + 0} = \frac{1}{1000} \neq 0$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

исходится
по второму признаку сравнения

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty$$