Дано:

линейное пространство $L \subset C(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$

$f_1(x) = x^2+5$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 1 \in L$

Найти:

линейную (не)зависимость $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$

Решение:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = \alpha_1(x^2+5) + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 \cdot 1 =$

$= (\alpha_1+\alpha_2)x^2 + (5\alpha_1+\alpha_3) = (\alpha_1+\alpha_2)x^2 + (5\alpha_1+\alpha_3)\cdot 1 = 0$

$x^2, 1 \in L$ линейно независимы

$(\alpha_1+\alpha_2)x^2 + (5\alpha_1+\alpha_3)\cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_2 = 0 \wedge 5\alpha_1+\alpha_3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=0 \\ 5\alpha_1+\alpha_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_3 = -5\alpha_1 \end{cases}$$

$\exists\, \alpha_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\alpha_2 = -\alpha_1$, $\alpha_3 = -5\alpha_1$ $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ линейно зависимы

Дополнение:

$f_1(x) = x^2+5 = f_2(x) + 5f_3(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ линейно зависимы