Дано:

линейное пр-во L над полем $\mathbb{R}$

$x, y, z \in L$ линейно независимы

$u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$

Найти:

линейную (не)зависимость u, v, w

Решение:

$x, y, z \in L$

$u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$

$u, v, w \in L$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha(x - y) + \beta(y - z) + \gamma(z - x) =$

$= (\alpha - \gamma)x + (-\alpha + \beta)y + (-\beta + \gamma)z =$

$= (\alpha - \gamma)x + (\beta - \alpha)y + (\gamma - \beta)z = 0$

x, y, z - линейно независимы

$(\alpha - \gamma)x + (\beta - \alpha)y + (\gamma - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 0 \wedge \beta - \alpha = 0 \wedge \gamma - \beta = 0$

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta - \alpha = 0 \\ \gamma - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \beta = \alpha \\ \gamma - \beta = \alpha - \alpha = 0 \end{cases}$$

$\exists\, \alpha = \beta = \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u, v, w$ - линейно зависимы

Дополнение:

$u = x - y = x - z - y + z = -(z - x) - (y - z) = -(y - z) - (z - x) = -v - w \Rightarrow$

$\Rightarrow u, v, w$ - линейно зависимы