

Дано:

линейное пространство L над полем R

$x, y, z \in L$ линейно независимы

$$u = x, v = x + y, w = x + y + z$$

Найти:

линейную (не)зависимость u, v, w

Решение:

$$x, y, z \in L$$

$$u = x, v = x + y, w = x + y + z$$

$$u, v, w \in L$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in R$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha x + \beta(x + y) + \gamma(x + y + z) =$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)x + (\beta + \gamma)y + \gamma z = 0$$

x, y, z линейно независимы.

$$(\alpha + \beta + \gamma)x + (\beta + \gamma)y + \gamma z = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \wedge \beta + \gamma = 0 \wedge \gamma = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma = -0 = 0 \\ \alpha = -\beta - \gamma = -0 - 0 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u, v, w \text{ линейно независимы}$$