Дано:

линейное пространство $L \subset C(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$

$f_1(x) = 2,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2,\ f_4(x) = (x+1)^2 \in L$

Найти:

линейную (не) зависимость $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$

Решение:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x) =$$

$$= \alpha_1 2 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 (x+1)^2 =$$

$$= 2\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 (x^2 + 2x + 1) =$$

$$= (\alpha_3 + \alpha_4) x^2 + (\alpha_2 + 2\alpha_4) x + (2\alpha_1 + \alpha_4) =$$

$$= (\alpha_3 + \alpha_4) x^2 + (\alpha_2 + 2\alpha_4) x + (2\alpha_1 + \alpha_4) \cdot 1 = 0$$

$x^2, x, 1 \in L$ линейно независимы

$$(\alpha_3 + \alpha_4) x^2 + (\alpha_2 + 2\alpha_4) x + (2\alpha_1 + \alpha_4) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \wedge \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \wedge 2\alpha_1 + \alpha_4 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_4 \\ \alpha_2 = -2\alpha_4 \\ \alpha_1 = -\frac{\alpha_4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{\alpha_4}{2} \\ \alpha_2 = -2\alpha_4 \\ \alpha_3 = -\alpha_4 \end{cases}$$

$$\exists \alpha_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \alpha_1 = -\frac{\alpha_4}{2}\ \alpha_2 = -2\alpha_4\ \alpha_3 = -\alpha_4\ \ \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) + \alpha_4 f_4(x) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x) \text{ линейно зависимы}}$

Дополнение:

$f_4(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = f_3(x) + 2f_2(x) + 2f_1(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ линейно зависимы