$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \{$$

$\hat{a}_{1\cdot} = a_{1\cdot}$; $a_{1\cdot} = \hat{a}_{1\cdot}$

$\forall i \in \{2,3,\dots,n\}$ $\hat{a}_{i\cdot} = a_{i\cdot} + a_{1\cdot}$; $a_{i\cdot} = \hat{a}_{i\cdot} - a_{1\cdot} = \hat{a}_{i\cdot} - \hat{a}_{1\cdot}$

$$\det A_n = \det\begin{pmatrix} a_{1\cdot} \\ a_{2\cdot} \\ a_{3\cdot} \\ \cdots \\ a_{n\cdot} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \hat{a}_{1\cdot} \\ \hat{a}_{2\cdot} - \hat{a}_{1\cdot} \\ \hat{a}_{3\cdot} - \hat{a}_{1\cdot} \\ \cdots \\ \hat{a}_{n\cdot} - \hat{a}_{1\cdot} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \hat{a}_{1\cdot} \\ \hat{a}_{2\cdot} \\ \hat{a}_{3\cdot} \\ \cdots \\ \hat{a}_{n\cdot} \end{pmatrix} = \det \hat{A}_n$$

$$\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1+1 & 0+2 & 3+3 & \cdots & n+n \\ -1+1 & -2+2 & 0+3 & \cdots & n+n \\ \cdots \\ -1+1 & -2+2 & -3+3 & \cdots & 0+n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots n = \prod_{k=1}^{n} k = n!$$