

Лабораторная работа №2

Выполнил студент Абушек Дмитрий Олегович

1032203018

Цель лабораторной работы

- Изучить основы языков программирования Julia и OpenModelica. Освоить библиотеки этих языков, которые используются для построения графиков и решения дифференциальных уравнений. Решить задачу о погоне.

Задание лабораторной работы

Задания лабораторной работы разделены по вариантам. Мой вариант 1

(исходя из формулы $N_{\text{student}} \bmod K_{\text{of variants}} + 1$).

Задание лабораторной работы

Задача о погоне. Вариант 1:

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3 раза больше скорости браконьерской лодки.

Задачи:

- Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
- Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
- Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретическая справка (1)

Справка о языках программирования

- Julia — высокоуровневый высокопроизводительный свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков (например, MATLAB и Octave), однако имеет некоторые существенные отличия. Julia написан на Си, C++ и Scheme. Имеет встроенную поддержку многопоточности и распределённых вычислений, реализованные в том числе в стандартных конструкциях.

Теоретическая справка (1)

Справка о языках программирования

- OpenModelica — свободное открытое программное обеспечение для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем. Основано на языке Modelica. Активно развивается Open Source Modelica Consortium, некоммерческой неправительственной организацией. Open Source Modelica Consortium является совместным проектом RISE SICS East AB и Линчёпингского университета. По своим возможностям приближается к таким вычислительным средам как Matlab Simulink, Scilab xCos,

имея при этом значительно более удобное представление системы уравнений исследуемого блока.

Теоретическая справка (2)

Математическая справка

- Дифференциальное уравнение — уравнение, которое помимо функции содержит её производные. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен). Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной. Не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным.

Теоретическая справка (3)

Физические термины

- Тангенциальная скорость - составляющая вектора скорости, перпендикулярная линии, соединяющей источник и наблюдателя. Измеряется собственному движению - угловому перемещению источника.
- Радиальная скорость — проекция скорости точки на прямую, соединяющую её с выбранным началом координат.
- Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

Ход выполнения лабораторной работы

Построение математической модели (1)

- Примем за момент отсчета времени момент первого рассеивания тумана. Введем полярные координаты с центром в точке нахождения браконьеров и осью, проходящей через катер береговой охраны. Тогда начальные координаты катера $(12,2; 0)$. Обозначим скорость лодки v .
- Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса. Только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Построение математической модели (2)

- Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить следующие уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $12,2 + x$ (или $12,2 - x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{12,2 - x}{4,1v}$ ($\frac{12,2 + x}{4,1v}$). Так как время должно быть одинаковым, эти величины тоже будут друг другу равны. Из этого получаем объединение из двух уравнений (двух из-за двух разных изначальных позиций катера относительно полюса):

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{v} = \frac{12,2 - x}{4,1v} \\ \frac{x}{v} = \frac{12,2 + x}{4,1v} \end{array} \right]$$

Построение математической модели (3)

Из данных уравнений можно найти расстояние, после которого катер начнёт раскручиваться по спирали. Для данных уравнений решения будут следующими: $x_1 = \frac{12,2}{51}$, $x_2 = \frac{12,2}{31}$. Задачу будем решать для двух случаев. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: $v_r = \frac{dr}{dt}$ = v - радиальная скорость и $v_\tau = r \frac{d\theta}{dt}$ - тангенциальная скорость.

$$v_\tau = \{\frac{\sqrt{1581}v}{10}\}$$

Построение математической модели (4)

4. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{cl} \frac{dr}{dt} = v \cdot r \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{1581}v}{10} \end{array}\right.$$

Построение математической модели (5)

С начальными условиями:

$$\left\{\begin{array}{cl} \theta_0 = 0 \cdot r_0 = x_1 = \frac{122}{51} \end{array}\right.$$

или

$$\left\{\begin{array}{cl} \theta_0 = -\pi \cdot r_0 = x_2 = \frac{122}{31} \end{array}\right.$$

Построение математической модели (5)

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению (с неизменными начальными условиями):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{10r}{\sqrt{1581}}$$

Решением этого уравнения с заданными начальными условиями и будет являться траектория движения катера в полярных координатах.

Решение с помощью программ

OpenModelica

К сожалению, OpenModelica не адаптирована к использованию полярных координат, поэтому адекватное отображение результатов данной задачи там невозможно.

Julia

Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку Plots. [1]

- Установим Julia
- Установим нужные библиотеки, проверим их установку

Результаты работы кода на Julia (1)

На рис. @fig:004 и @fig:005 изображены итоговые графики траектории движения катера и лодки для случая обоих случаев.

Анализ полученных результатов

Мною были построены графики для обоих случаев. На них получилось отрисовать трактерию катера, траекторию лодки и получилось наглядно найти их точки пересечения. Мы успешно решили задачу о погоне.

Вывод

Вывод

Были изучены основы языков программирования Julia и OpenModelica. Освоены библиотеки этих языков, которые используются для построения графиков и решения дифференциальных уравнений. Поскольку OpenModelica не работает с полярными координатами, она пока что не была использована в данной лабораторной работе.

Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>