Производная и ее применения

1. Функции и их свойства

Функцией называется некоторое соответствие между различными значениями аргумента x и значениями функции $f(x)$:

$$x \to f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

при этом каждому значению аргумента соответствует только одно значение $f(x)$.

Область определения функции $E(f)$ — это те значения x, для которых задана функция. Например, функция:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

не определена для $x = 0$, следовательно, ноль не выходит в область определения данной функции.

Область значения функции $D(f)$ — это все значения, которые функция может принимать.

Некоторые примеры:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad E(f) = \mathbb{R} \backslash \{1\}, \quad D(f) = \mathbb{R};$$

$$f(x) = 2^x, \quad E(f) = \mathbb{R}, \quad D(f) = (0, +\infty).$$

Графики помогают визуализировать функцию (см. рис. 1).

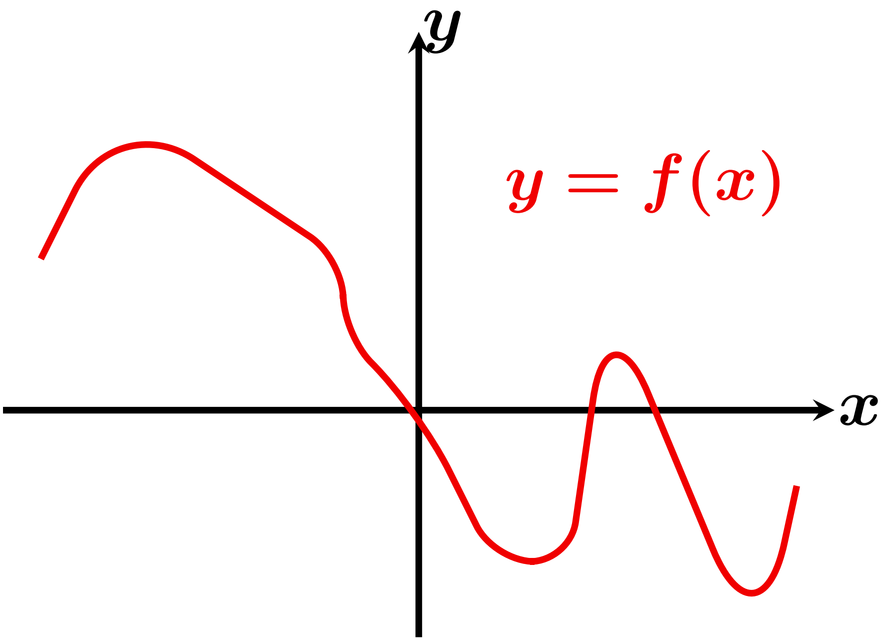

Рис. 1.

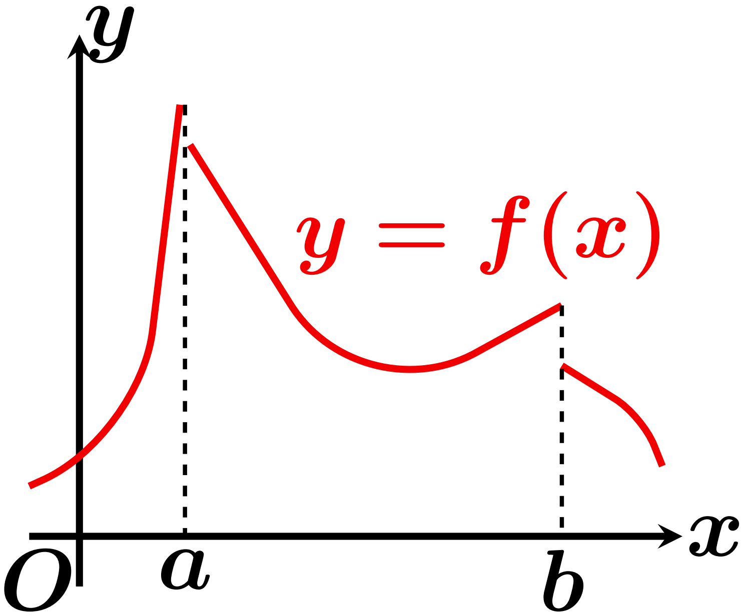

Рис. 2.

Существуют графики с разрывами, например, на рис. 2 разрывы имеются в точках a и b. Функция *непрерывна*, если есть возможность нарисовать график этой функции одним росчерком (нестрогое определение).

Разрывы бывают разными, например, на рис. 3 приведен пример графика функции, на котором только одна точка находится не в том месте, где её ожидали увидеть. Если изменить функцию так, что эта точка «вернется на место», то функция станет непрерывной.

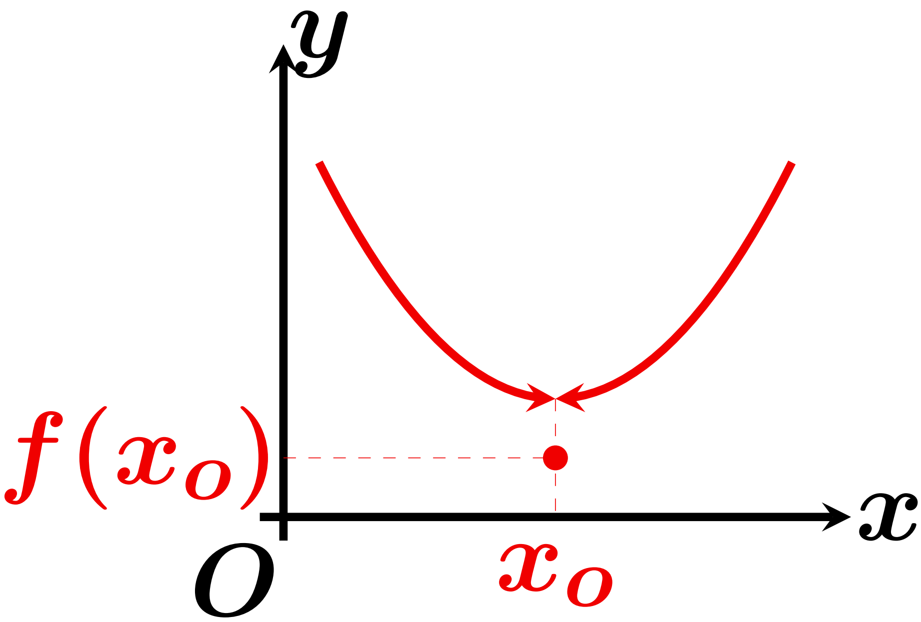

Рис. 3.

Бывают разрывы и другого типа, при которых нельзя легко сделать функцию непрерывной (см. рис. 4).

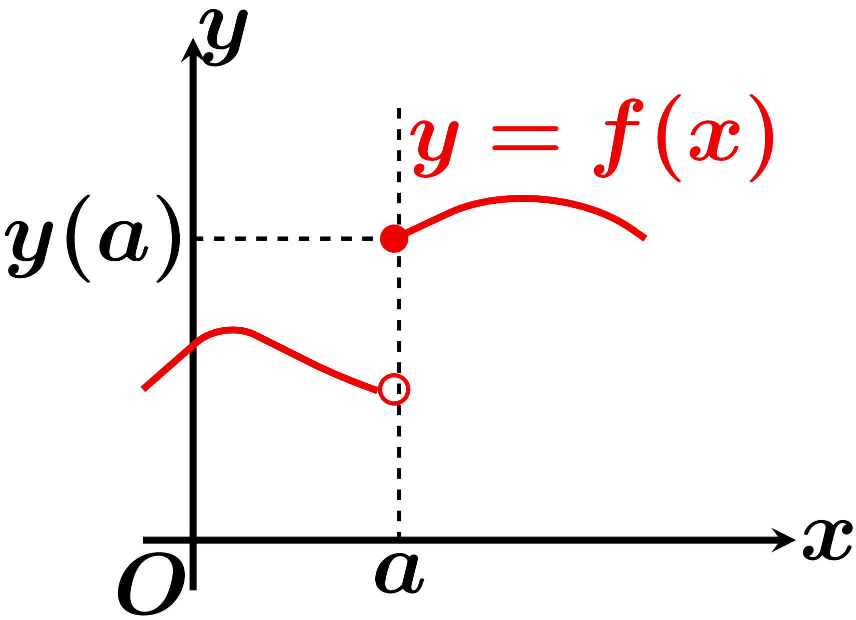

Рис. 4.

Еще одна разновидность разрывов связана с наличием у некоторых функций *асимптоты* (см. рис. 5). К асимптоте функция может бесконечно приближаться, но не может ее пересекать.

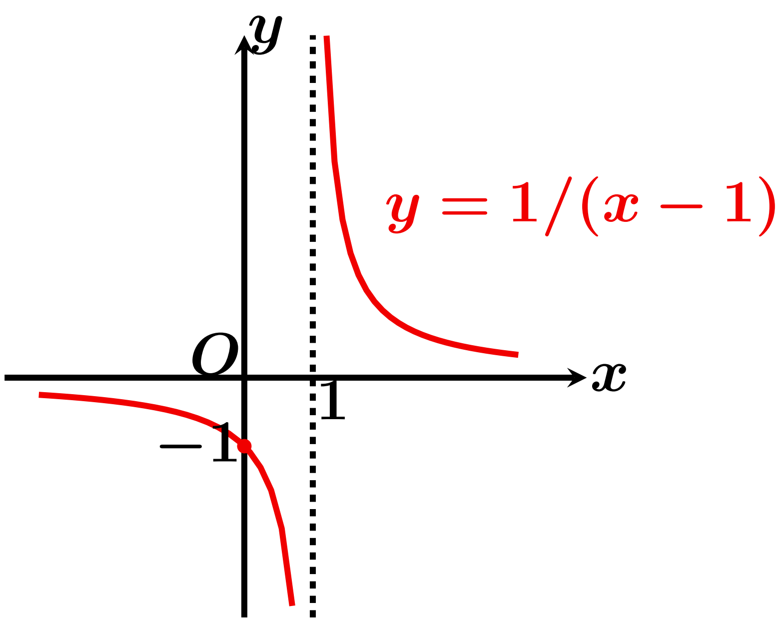

Рис. 5.

Асимптоты бывают и не вертикальными (см. рис. 6).

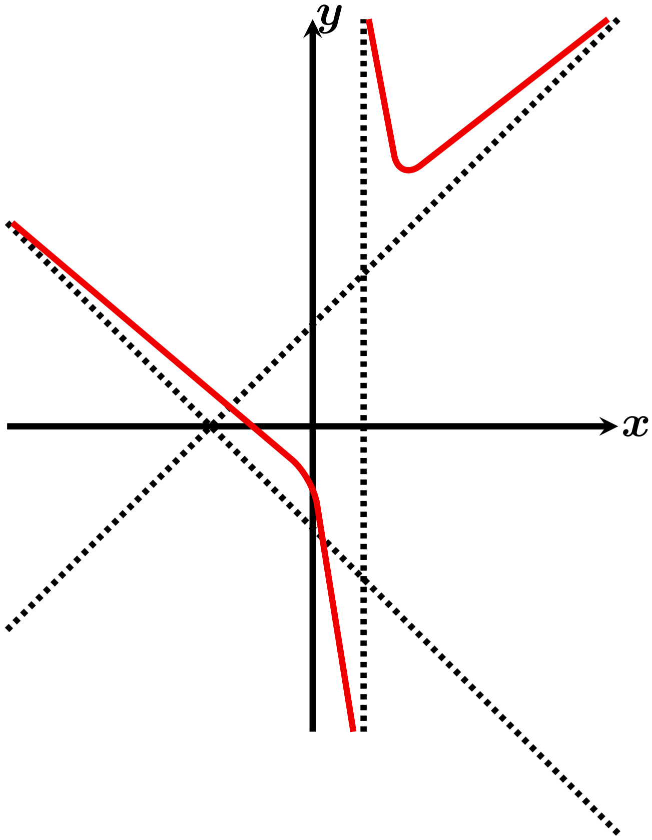

Рис. 6.

У графика функции могут быть не только разрывы, но и углы (см. рис. 7). *Гладкость функции* означает отсутствие углов на ее графике (нестрогое определение). Существуют функции, не являющиеся гладкими ни в одной точке.

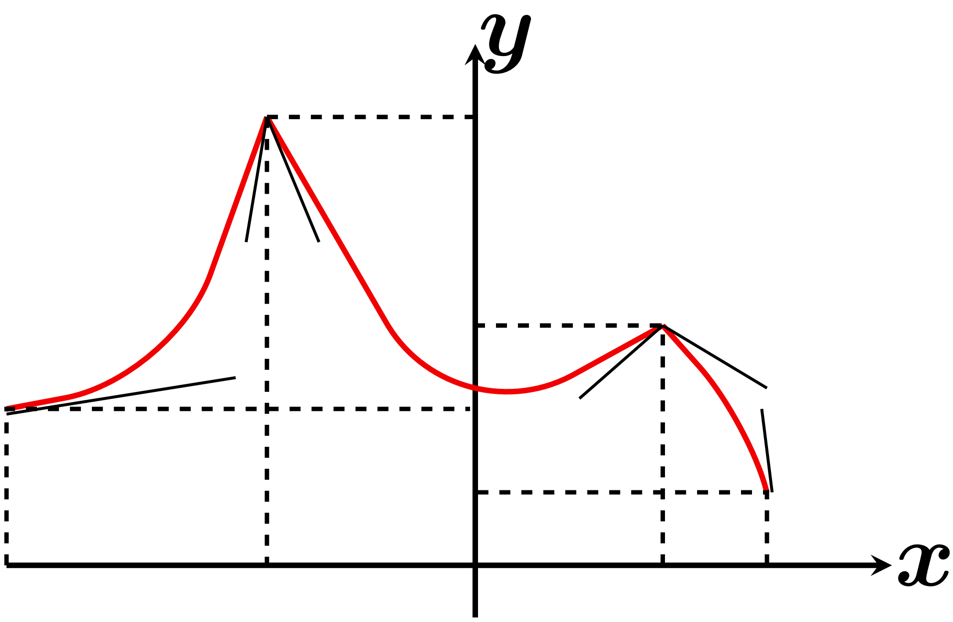

Рис. 7.

2. Предел и производная

Рассматривается следующая функция:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Данная функция не определена при $x = 0$, но можно понять, как она себя ведет при приближении x к нулю. Для этого необходимо подставить в функцию близкое к нулю значение x:

$$x = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2{,}593\ldots.$$

Затем нужно выбрать несколько значений x, которые будут еще ближе к нулю:

$$x = 0{,}01\ f(x) = 2{,}704\ldots, \quad x = 0{,}001\ f(x) = 2{,}716\ldots, \quad x = 0{,}0001\ f(x) = 2{,}718\ldots.$$

Можно заметить, что значение функции приближается к некоторой величине. Эта величина и будет **пределом** данной функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2{,}7182\ldots.$$

Аналогичные операции можно проделать для функции $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$x = 0{,}01\ f(x) = 100, \quad x = 0{,}001\ f(x) = 1000, \quad x = 0{,}0001\ f(x) = 10000.$$

В этом случае функция неограниченно растет при приближении к нулю — имеет *бесконечный предел*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$$

Понятие «предел» позволяет формализовать понятие «непрерывность».

Определение 1. Функция $f(x)$ **непрерывна в точке** $x = a$, если:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right) = f(a).$$

В качестве примера можно рассмотреть следующую функцию:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{a-1}, \quad a \neq 1.$$

В случае $a = 1$ предел такой функции будет бесконечным:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty.$$

Это означает, что в точке $x = 1$ данная функция является разрывной, а во всех остальных точках — непрерывной.

График линейной функции представляет собой прямую (см. рис. 8). При изменении в такой функции x на Δx y будет меняться на $k\Delta x$. Значит, величина k характеризует *скорость роста функции*:

$$k = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Аналогичное понятие можно ввести и для произвольной функции. **Производной** функции $f(x)$ в точке x называется следующая величина:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Тогда **гладкими функциями** называются функции с непрерывной производной.

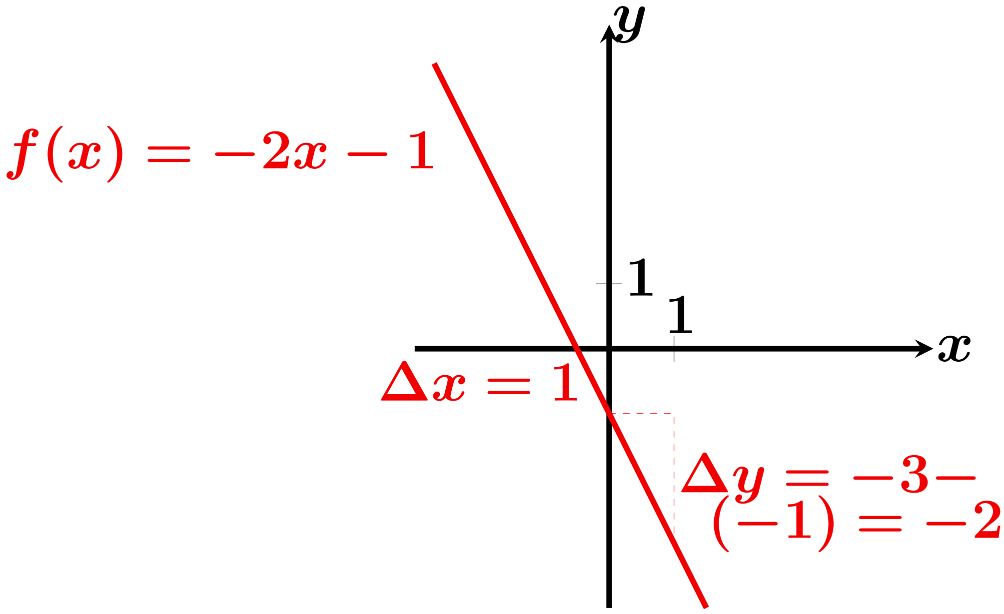

Рис. 8.

3. Геометрический смысл производной

Прямая задается уравнением:

$$y = kx + b,$$

где k — *угловой коэффициент*. По определению (см. рис. 9):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} = \frac{y_0}{x_0},$$

следовательно:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Секущей называется прямая, проходящая через две точки на графике (см. рис. 10). Уравнение секущей записывается следующим образом:

$$y(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0).$$

Если в уравнении секущей устремить Δx к нулю, то секущая перейдет в *касательную* — прямую, пересекающую график функции в одной точке (см. рис. 11). Уравнение касательной имеет вид:

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Если производная резко меняет свое значение в некоторой точке, то меняется направление касательной и получается излом. Именно поэтому гладкие функции — это функции с непрерывной производной (нестрого говоря, функции «без изломов»).

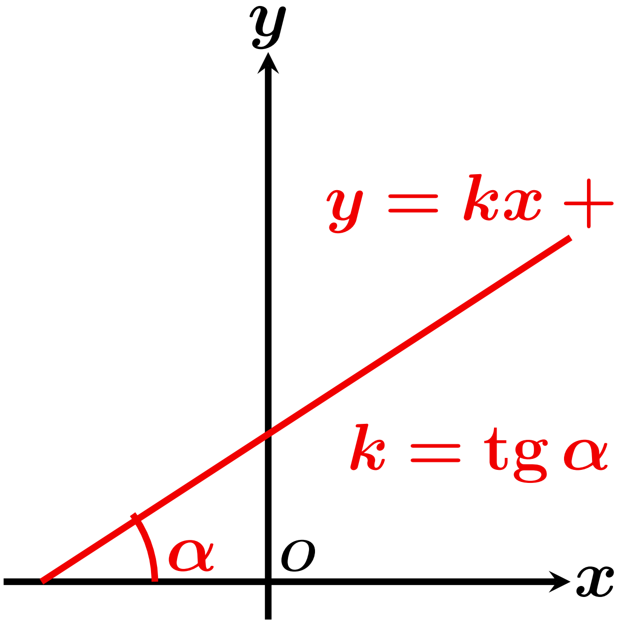

Рис. 9.

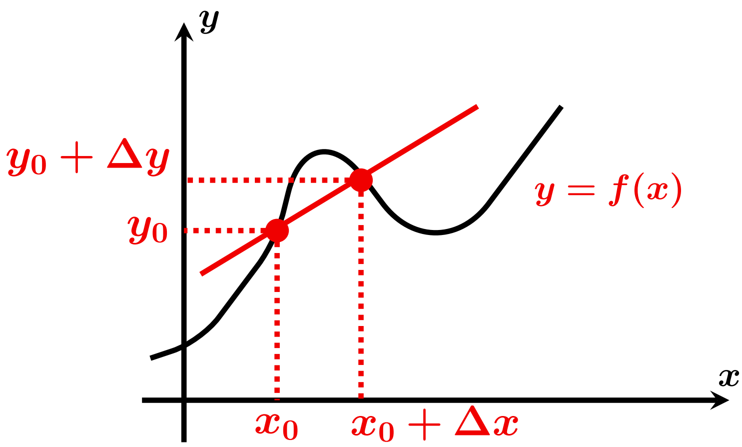

Рис. 10.

4. Производная сложной функции

Сложная функция имеет вид:

$$f(x) = g\big(h(x)\big).$$

Например, такая функция является сложной:

$$ln(1 + x) = g\big(h(x)\big), \quad h(x) = 1 + x, \quad g(x) = \ln h.$$

Дифференциал определяется следующим образом:

$$df = f'(x)\,\Delta x.$$

Для функции $f(x) = x$ дифференциал равен:

$$dx = x'\,\Delta x = \Delta x,$$

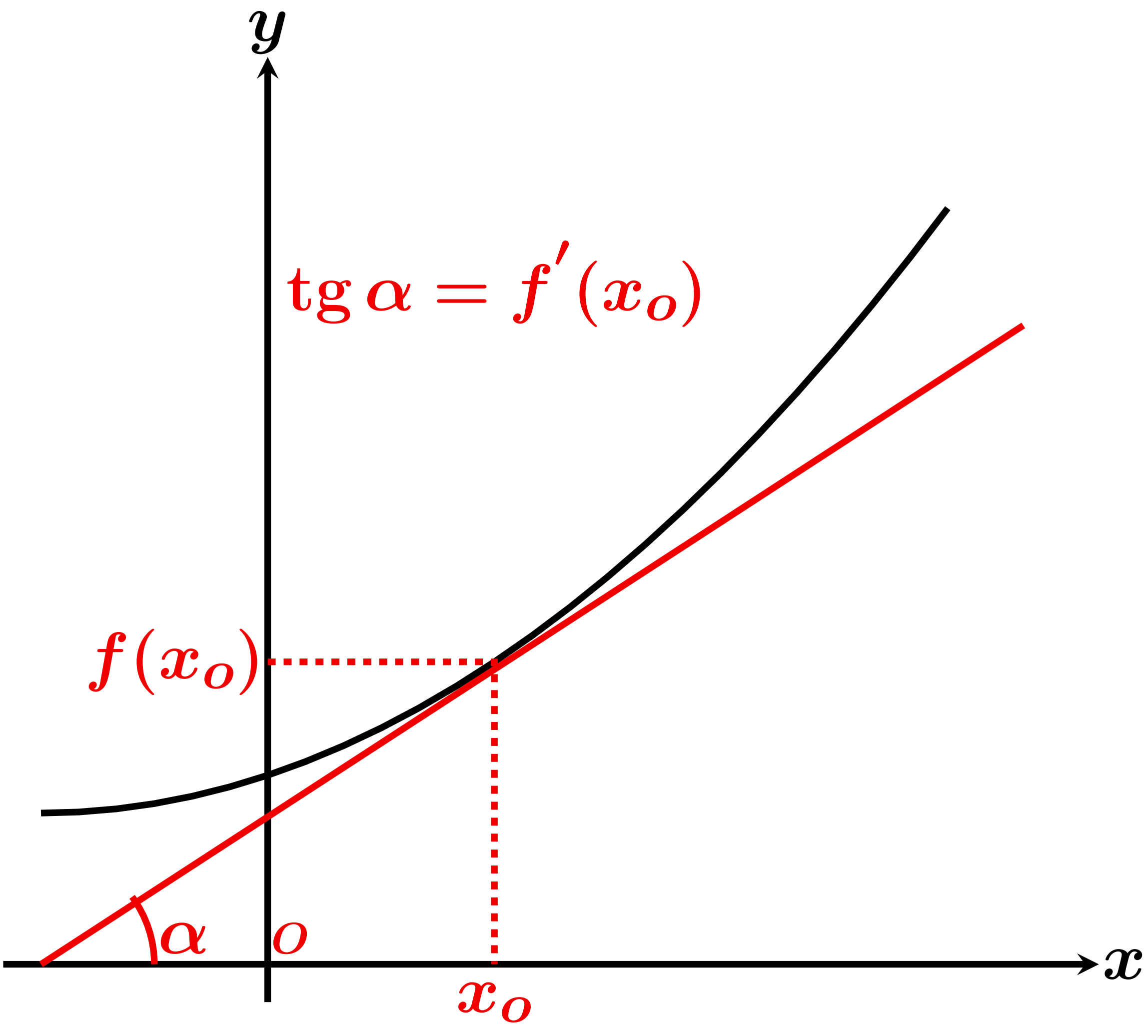

Рис. 11.

следовательно, вместо приращения в выражении для дифференциала можно писать dx:

$$df = f'(x)\,dx.$$

Можно заметить, что производная представима в виде:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Производная сложной функции вычисляется следующим образом:

$$\frac{dg\big(h(x)\big)}{dx} = \frac{dg\big(h(x)\big)}{dh(x)}\frac{dh(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh}\frac{dh(x)}{dx}.$$

Правило вычисления производной сложной функции работает и в случае «более сложной» функции (*chain rule*):

$$\frac{dg\Big(h\big(u(x)\big)\Big)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh}\frac{dh(u)}{du}\frac{du(x)}{dx}.$$

5. Задача нахождения экстремума

Экстремум — это минимум или максимум функции. *Минимум функции* достигается в точке x, если в некоторой окрестности точки x функция не принимает значения меньше, чем $f(x)$ (см. рис. 12). Аналогично вводится понятие *максимум*.

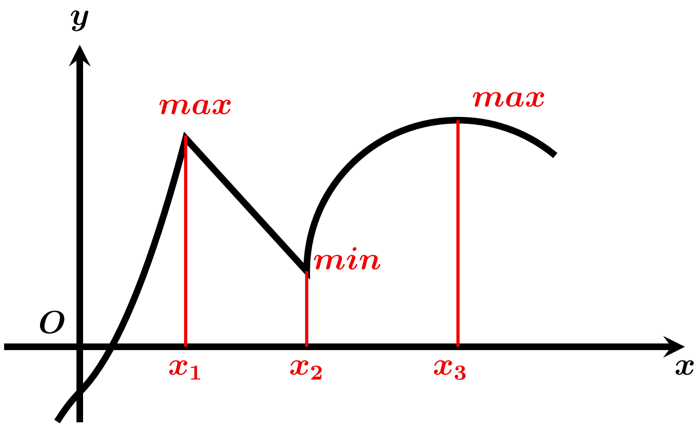

Рис. 12.

В случае *локального экстремума* минимум не является наименьшим значением функции, или же максимум не является наибольшим значением (см. рис. 13).

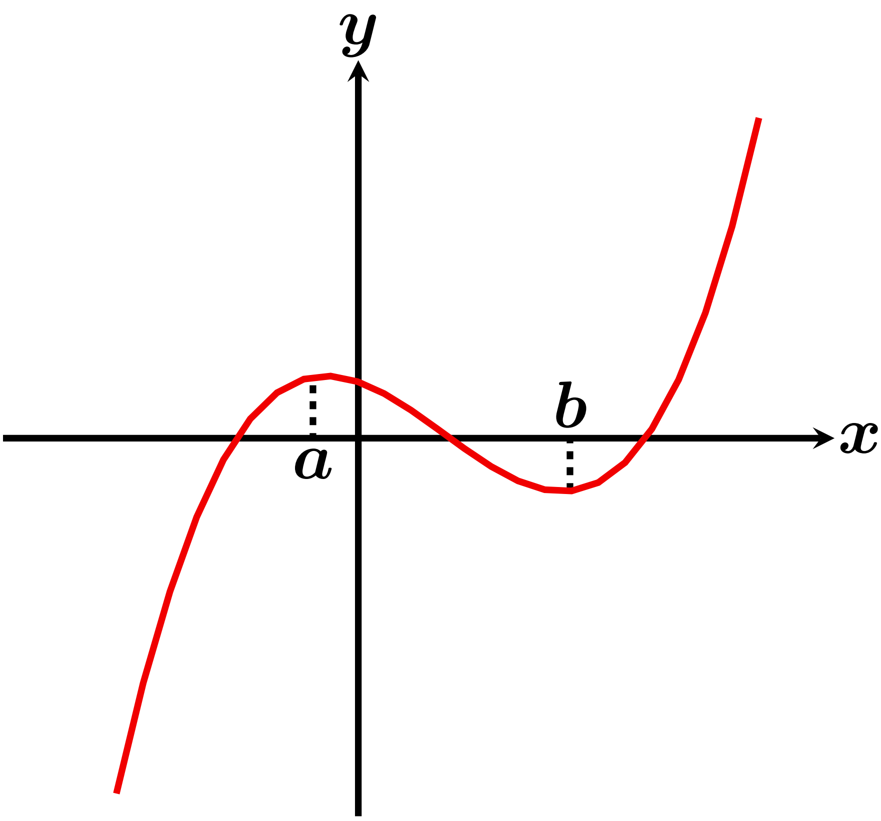

Рис. 13.

В случае *глобального экстремума* минимум является наименьшим значением, или же максимум является наибольшим значением функции.

Если касательная к графику функции в данной точке направлена не под нулевым углом к оси x, то в этой точке не будет экстремума (см. рис. 14).

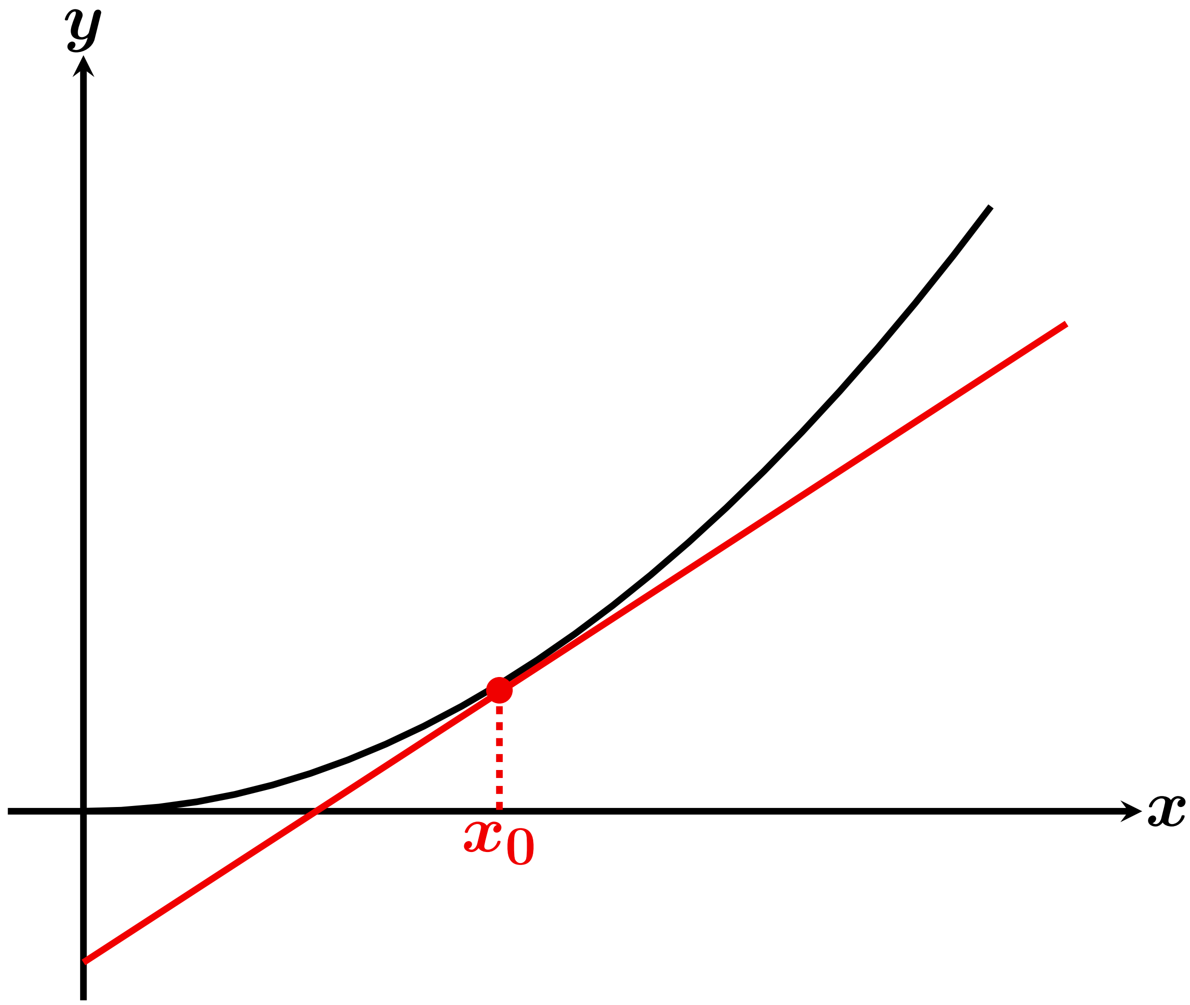

Рис. 14.

Необходимое условие экстремума — равенство нулю производной в данной точке, если такая производная существует (см. рис. 15):

$$f'(x_0) = 0.$$

Данное условие не является достаточным. На рис. 16 показан график функции $y = x^3$. Можно заметить, что производная этой функции в точке x_0 равна нулю, но эта точка не является точкой экстремума.

Производная не обязана равняться нулю в каждой точке экстремума — в некоторых таких точках производной может не существовать (см. рис. 12).

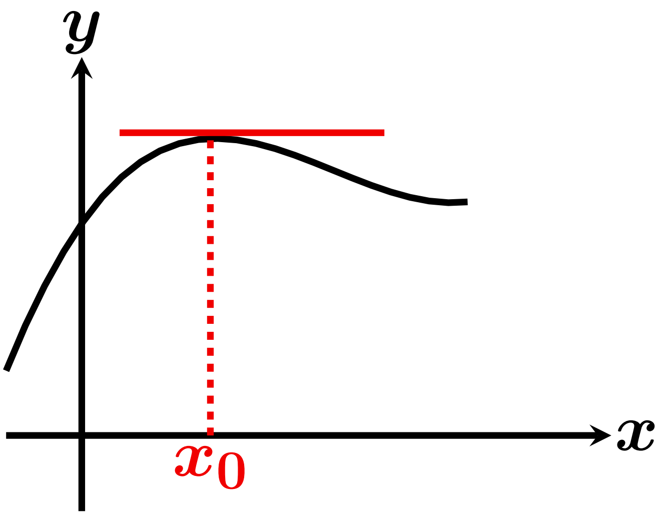

Рис. 15.

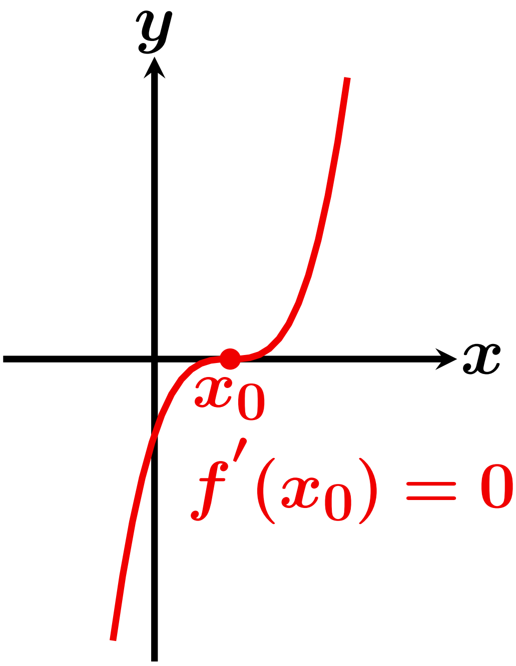

Рис. 16.

6. Вторая производная и выпуклость

Знак производной влияет на рост функции (см. рис. 17):

1) $f'(x) \geqslant 0$ — функция возрастает;
2) $f'(x) > 0$ — функция строго возрастает;
3) $f'(x) \leqslant 0$ — функция убывает;
4) $f'(x) < 0$ — функция строго убывает.

Выпуклой функцией называется функция, для которой касательная с увеличением x постоянно увеличивает свой угловой коэффициент (см. рис. 18). *Вогнутой функцией* называется функция, для которой касательная с увеличением x постоянно уменьшает свой угловой коэффициент (см. рис. 19).

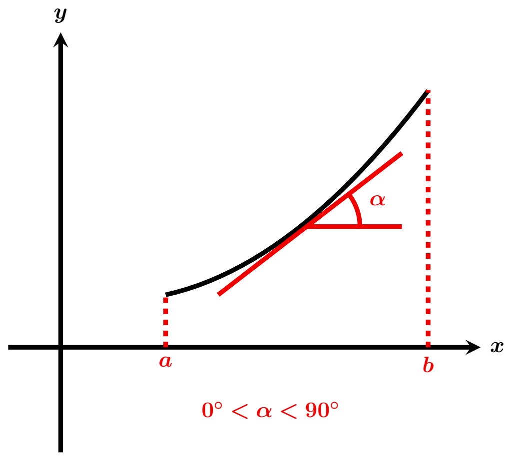

Рис. 17.

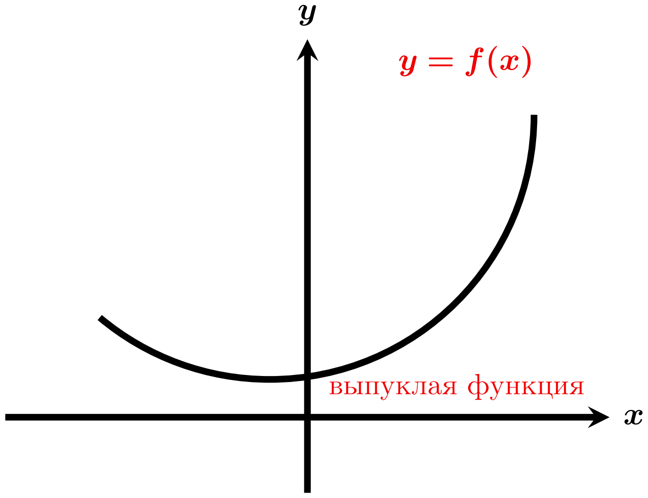

Рис. 18.

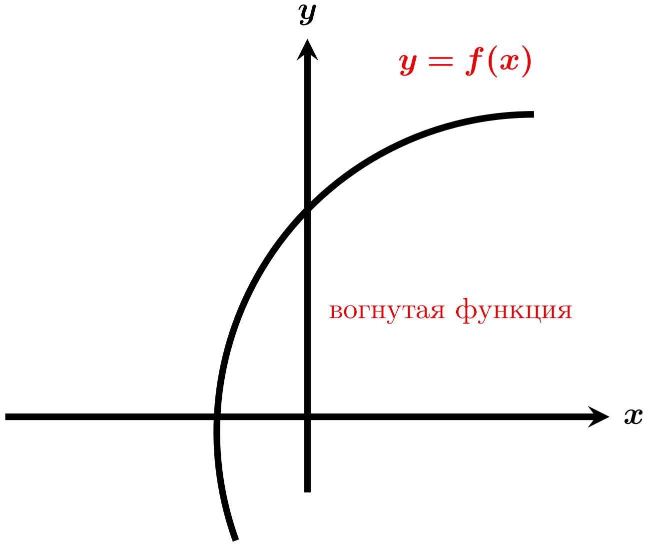

Рис. 19.

В некоторых старых источниках используется терминология «*выпукла вниз*» (для выпуклых функций) и «*выпукла вверх*» (для вогнутых функций).

Если функция выпуклая, то её производная растет, тогда вторая производная имеет вид:

$$f''(x) \geqslant 0.$$

Если функция вогнута, то:

$$f''(x) \leqslant 0.$$

Функция *строго выпукла* или *строго вогнута*, если (соответственно):

$$f''(x) > 0 \quad \text{или} \quad f''(x) < 0.$$

Достаточное условие экстремума: если $f'(x) = 0$ и $f''(x) > 0$, то касательная в точке x^* параллельна оси x, функция выпукла, следовательно, в этой точке будет минимум (см. рис. 20).

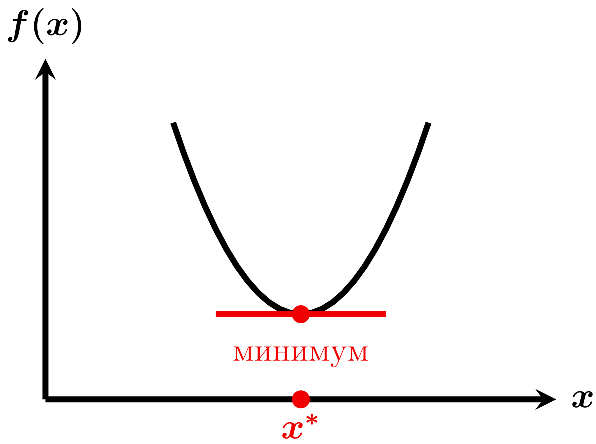

Рис. 20.

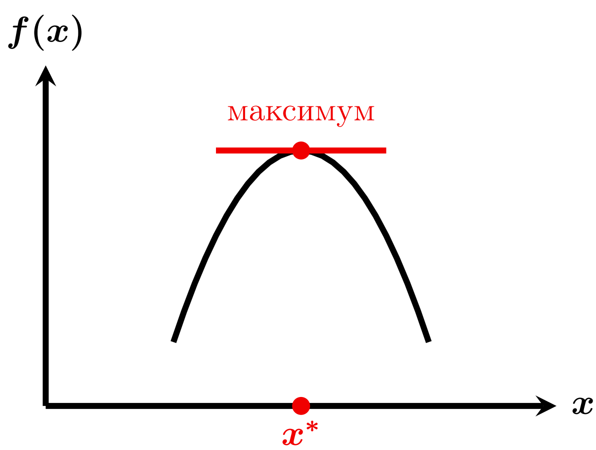

Рис. 21.

Аналогично, если $f'(x) = 0$ и $f''(x) < 0$, то касательная в точке x^* параллельна оси x, функция вогнута, следовательно, в этой точке будет максимум (см. рис. 21).

Таким образом, выпуклость или вогнутость функции превращает необходимое условие экстремума в достаточное.

В более общем виде определение выпуклости выглядит следующим образом. Если отрезок, соединяющий две точки графика функции, проходит над графиком функции, то такая функция является выпуклой (см. рис. 22). Аналогично определяется вогнутая функция.

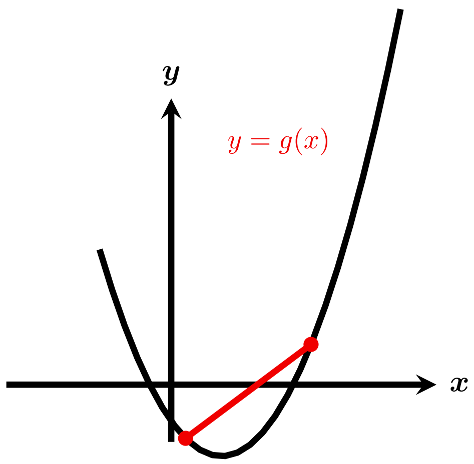

Рис. 22.

Такое определение подходит в том числе для функций, у которых нет производных в некоторых точках. Например, с его помощью можно определить, что функция $y = |x|$ является выпуклой (см. рис. 23).

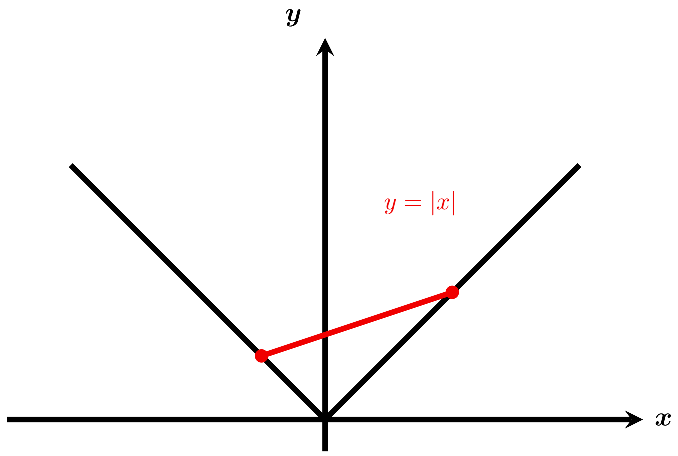

Рис. 23.

Выпуклость или вогнутость на некотором интервале приводит к тому, что наименьшее значение на нем может быть только одно. В случае минимума функция должна быть выпукла в его окрестности, а в случае максимума — вогнута (см. рис. 20 и рис. 21)

С другой стороны, у функции может быть более одного максимума или более одного минимума. При этом иметь более одного максимума, не имея никакого минимума, непрерывная функция не может (см. рис. 12). В случае разрыва может быть два минимума в отсутствие максимума, однако, это приведет к нарушению выпуклости (вогнутости) функции.