**4.1 概览**

术语**过滤(filtering)**指的是信号或图像的频率内容的系统性改变。特别是，我们有时想要“消除”某些频率。该操作通常是线性的，并且通常（但不总是）在信号的时域版本上执行。

在时域中过滤的一个重要工具是卷积。卷积采用的形式取决于信号所在的向量空间。 我们将首先研究有限长度一维信号的卷积，然后观察二维卷积（图像），最后是无限和双无限信号的卷积。我们还介绍z变换，它是信号和图像处理的强大工具。

**4.2 一维卷积**

4.2.1 例子：低频过滤和噪点去除

回想一下2.3节的例子。该例中的目标是去除采样信号中的47 Hz分量，可能是因为它代表了噪声。 在这种情况下，噪音是确定性的，而不是随机的，但目前并不重要。 我们通过频域方法去除了信号的高频部分，通过执行离散傅立叶变换（DFT）（虽然我们实际上没有在那个点定义DFT），将47 Hz分量归零，然后重新合成信号 通过使用逆DFT没有噪声。

**4.2.2 卷积**

备注 4.1 如果我们通过将向量周期性地扩展到所有的索引值，则对于任意值

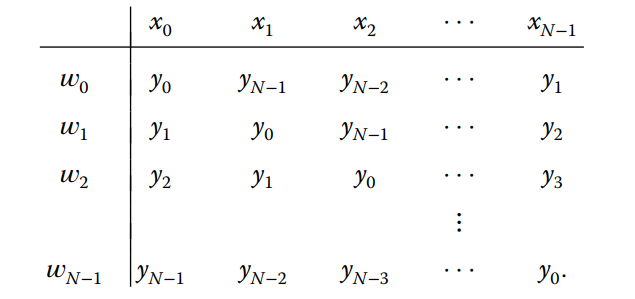
**4.2.2.1 卷积定义**

**定义 4.1** 设和是的向量. 和**的**圆卷积是向量, 其分量

其中. 圆卷积标记为**.**

现在，我们将删除“圆”前缀，并将此操作称为“卷积”。当然，由于我们假设所有向量都是周期性扩展的，我们可以忽略索引上的模N算术。

卷积的运算规则如下所示：



例如，

4.2.2.2 卷积性质

**定理4.1** 设和是中的向量. 下列属性成立：

* 线性: 对于任何标量
* 交换性:
* 矩阵形式:如果**,** 则**,** 其中是矩阵

该矩阵的第k行和第m列的元素为, 行列的索引从0开始，

* 结合性：
* 周期性：如果和是定义在以周期N上的所有k值，则.

**4.3 卷积理论和过滤**

**4.3.1 卷积理论**

**定理4.2 卷积理论** 设和是中的向量，且满足**.** 设和所对应的DFT分别为和. 则

**4.3.2.1 基础波形的过滤效应**

基础波形的卷积效应等价于乘以一个标量. 公式可以被转化成矩阵形式, 其中是公的圆环矩阵，是列向量.

定理 4.3 设的DFT是圆环矩阵的特征向量是基础波形向量**,** 特征值是**.**

**4.3 过滤器设计**

**定义4.2** 过滤器的非零系数被称为该过滤器的taps.

存在多种方法可以设计出为给定频率响应和包含少量taps的过滤器。最简单(并不经常有效)的方法是首先计算出对频率响应的, 计算其逆DFT**,** 然后使低于特定阈值的系数归零.

4.4 2D卷积——过滤图像

设空间，其分量为, 其中. 与一维情况一样，r和s也是关于m,n是周期性的.即

对于任意M,N成立。

定义4.3 设A和B是空间的元素. 圆环卷积定义为，其分量

与一维情况一样，二维圆环卷积拥有同样的属性：线性，交换性，结合性. 但是二维卷积没有矩阵形式。

定理4.4. 卷积定理 设和是空间中的元素，且满足**.** 设和所对应的DFT分别为和. 则

4.5 无限信号模型

定义4.4 对于每一个元素，“离散时域傅里叶变换”(DTFT)是区间上的函数，定义为

“逆离散时域傅里叶变换”(IDTFT)定义为

**五 裁剪和局部化(Windowing and Localization)**

其中是向量的分量，.并假设M整除N，即存在某个整数q使得N=qm.

定义一个向量，其分量为

**5.2.2 裁剪分析(Analysis of Windowing)**

假设我们有一个信号样本并且产生另一个裁剪版本如下

其中. 的定义如公式(5.1)所示.

**命题5.1** 设和是空间中的向量，并且它们对应的DFT分别为为和. 设并且DFT为. 则

其中是圆环卷积。

**命题5.2** 设且DFT为**.** 设是通过圆环偏移得到，偏移过程如下

则的DFT分量为

接下来我们要使用三个步骤确定原始N点DFT和裁剪后的M点DFT之间的关系：

1. 量化x的N点DFT和公式(5.3)中裁剪后的y的N点DFT之间的关系。
2. 确定裁剪信号经过圆环偏移到向量

的频域效应。

1. 确定(5.5)中的N点DFT与的M点DFT之间的关系。

**5.2.2.1 步骤1：和的关系**

命题5.1提供了答案：如果对执行定义在公式(5.3)的N点DFT，则由公式(5.4)得到

显然公式(5.6)证明Y不等于X，但是通过W卷积产生畸变。

例题5.3 如果W是定义在公式(5.1)中w的DFT。则,

**5.2.2.2 步骤2：索引偏移效应**

公式(5.5)中偏移向量的分量为，其中定义在公式(5.3)中. 根据命题5.2

**5.2.2.3 步骤3：N点DFT与M点DFT的比较**

向量的N点DFT为

其中，当时，.

向量的M点DFT如下

其中，我们使用来标记DFT.

回想一下我们假设M整除N, 即N=qM, q为正整数.如果把M=N/q带入到公式(5.9)，我们得到

该公式恰好等于公式(5.8), 而且r=qs. 简单的说，它们之间的关系为

定理5.1 设是根据公式(5.3)被裁剪的向量，其中, 当或时，. 假设. 那么x的N个点DFT与的M个点DFT之间的关系如下

当时成立。从上式得到.

**6.3 框架(frame)——使用更多点积 2019年7月4日12点35分**

**定义6.1** 设是空间中一组有限向量序列（可能重复）并假设存在常量使得所有满足

则被称作是*框架边界(frame bounds)*为A和B的（有限）框架。

如果不等式成立则A和B被称为*最优边界（optimal bounds）*。对于最优边界，比率被称为*框架边界比(frame bounds ratio)*。

一些比较特殊的框架：

如果A=B则被称作是*紧框架(tight frame)*。

如果所有向量满足则被称为*统一框架(uniform frame)*并且如果对所有n都成立则被称为*单位标准框架(unit norm frame)*。

如果对所有成立并且所有向量的长度都相等则被称为*等角框架(equiangular frame)*。

**备注6.1** 框架是紧框架当且仅当存在一个常数满足：

**备注6.2** 对于任意有限集合 公式(6.2)满足

如果包含非0向量，则B>0。如果A=0，则存在一个单位向量x垂直于所有的。因此，A>0当且仅当充满。

**备注6.3** 假设是单位标准框架。如果A非常小，则将存在与中的每个向量几乎正交的向量。这是不可取的，因为我们无法捕获几乎垂直于中的帧矢量的信号的性质。如果B非常大，则的向量在某些方向上聚集得更多。这也是不可取的。因此，使框架边界比B / A接近1表示中的向量在中“很好地分布”。图6.2和6.6说明了这些想法。之后，在6.4.5节中，我们将看到小的框架边界比对于信号分析和合成中的数值稳定性很重要。

**命题6.1** 如果和是紧框架，对应的向量长度分别为和，常数分别为和，则这两个框架的连接

也是一个紧框架，常数为.

**6.4 框架的分析和合成**

**定义1** 如果是一个复矩阵，则的共轭转置，标记为，定义如下

因此列向量的点积可记为矩阵与向量乘积。

6.4.1 分析和合成

分析和合成的目的是找到框架系数使得给定为

可以通过双框架获取，稍后介绍。为了使用框架执行分析和合成，我们将使用矩阵方法，如DFT和DCT的情况。

我们定义框架矩阵F在为

对的分析系数由下式给出

包含成分的向量标记为，这被称为对的*（框架）傅里叶变换*。用矩阵形式表示：

操作符被称为分析操作符。

接下来，给定作为框架系数向量，我们可以从合成信号：

操作符被称为合成操作符。

如果是标准正交基，则为单位矩阵并且我们获得重建公式允许我们从它的傅里叶变换重新构建**。**

寻找一个重建公式，让我们考虑分析之后紧跟合成的组合：

结合操作符

被称为框架操作符。框架操作符和它的伴随Gram矩阵，

在研究框架和属性时是极其重要的。

框架操作符是一个矩阵，作用在信号上。注意是自身伴随的

如果我们假设S是可逆的，那么我们有以下矩阵形式的重建公式

6.4.2 双框架和完美重建

我们继续假设S是可逆的。考虑的列，我们构建双框架

使得

因此是一个框架，我们将在6.6节确定它的边界。为了区分和关联这两种框架，我们标记框架矩阵为

并且

我们称, 和分别为双分析，双合成以及双框架操作符。根据重构，这些操作符满足

并且

最后两个公式展示了分析跟随一个双合成给出了一个完美的重构公式，反过来也如此。

定理6.1 设是一个框架，为该框架的操作符，是一个双框架，则分析紧跟合成可以重构源信号，也就是

完美重建的一个复杂因素是双框架的构造。但是，如果是标量矩阵，那么我们得到双框架的简单公式

命题6.2 假设是一个常数为A的紧框架。则

6.4.3 部分重建

如果我们只知道一组系数的一个子集，则我们可能重建部分信号。特别是，假设已知，。则我们得到部分傅里叶之和

且”极值”

如果我们考虑无限帧，那么极限将是正确的。我们可以明智地选择要像在渐进式JPEG传输中那样考虑哪些部分之和。

的操作可以被写成矩阵形式

部分和操作符同样也有“极值”：

更准确地说，我们将身份有限分解为一级运算符。

6.4.4 其它的双框架

有许多双框架可以完美重建。实际上，假设我们有另一个双框架矩阵的候选者

其中我们假设, 于是. 这里类似于公式(6.12)和(6.13)。通过定理6.1的证明，我们得到完美重建：

且

由于, 因此. 设我们得到

命题6.3 假设是一个框架且标准对偶框架为，给定另一个对偶框架，则下列不等式对每一个成立：

6.4.5 数值问题

6.6 其它框架操作

命题6.5 假设是一个边界为A和B 的框架. 则

1. 框架公式可重写为
2. 框架操作符是可逆的.
3. 框架操作符是埃尔米特伴随的，因此是酉对角化的。也就是说，其中且.
4. 最佳帧边界是S的最小和最大特征值。

命题6.6 设是具有最佳边界为A和B、框架操作符为S的有限框架，则

是一个最佳边界为和的框架. 如果是紧框架，则也是框架常量为的紧框架。

命题6.7 对于紧，单位标准和角框架我们有以下：

如果是紧框架，则并且.

如果是单位标准框架，则对角线上都是1.

如果是是角单位标准框架，则对角线以外的所有元素都相等。

如果是是单位标准紧框架，则.

推论 6.1 设是一组框架，设是连接框架，则的框架操作符S等于各个子框架操作符之和。