定义2.1.1 条件概率 假设我们已知事件B发生并且我们想要计算另一个事件A在事件B已经发生条件下的概率。新的事件A概率则被称为事件A在事件B已经发生条件下的条件概率(conditional probabilty of the event A given that the event B has occurred)，标记为.如果>0，则条件概率为

 (2.1.1)

当=0时，条件概率未定义。

定理2.1.1 条件概率的乘法法则 设A和B是事件。如果>0, 则

.

如果,则

.

定理2.1.2 条件概率的乘法法则 假设事件,...,满足则

 (2.1.2)

条件概率和分割

定义2.1.2 分割 设S为一次实验的样本空间，考虑S中k个不相交事件并且那么这些事件构成了S的一个分割。

分割能促进某些事件概率的计算.

定理2.1.4 全概率公式 假设事件构成空间S的一个分割并且对于任意成立. 那么对于S中的每一个事件A，存在

 (2.1.4)

全概率公式的条件概率：

 (2.1.5)

**增强实验**. 这个概念有点难理解，需要结合中文教材。

定义2.2.1 独立事件 两个事件A和B是独立的当且



假设,那么很容易从独立事件和条件概率的定义得出：

事件A和事件B是独立的当且仅当并且

定理 2.2.1 如果两个事件A和B是独立的，则事件A与,与B,与同样也是独立事件。

定义2.2.2 (互相)独立事件. k个事件是独立的（或相互独立的），对于这些事件的任意子集()，存在

.

贝叶斯定理：设事件是构成空间S的一个分割并且,其中设A是一个事件且则

 (2.3.1)

条件贝叶斯定理：

 (2.3.2)

定义3.1.1 随机变量 设S是一项实现的样本空间。定义在S上的实值函数被称为随机变量。

3.4 二维分布 *2019年6月4日09点51分*

**定义3.4.1 联合/二维分布** 设和是随机变量. 和的联合分布或二维分布是形如所有概率的集合, 对于中所有实数对都是事件。

**定义3.4.2 离散联合分布** 设和是随机变量, 并考虑有序对(). 如果()对数有限或者可数，则我们说和拥有离散联合分布.

**定理3.4.1** 假设两个随机变量和均是离散分布. 则和拥有离散联合分布.

**定义3.4.3** 联合概率函数 p.f. 和的联合概率函数或联合p.f.定义为函数f使得平面上每一个点,

**定理3.4.2** 设是离散联合分布. 如果不是对的可能值，则, 并且

对于C中的每一个有序对, 则

**定义3.4.4** **连续联合分布/联合p.d.f/支持** 两个随机变量和拥有连续联合分布，如果存在一个非负函数定义在整个平面上，使得平面中每一个子集满足，

如果该积分存在. 则函数被称为的联合概率密度函数(或者联合p.d.f.)。 闭集被称为的(分布)支持.

**定理 3.4.3** 一个联合p.d.f.必须满足下列两个条件：

对于

且

**定理3.4.4** 对于每一个在平面上的连续联合分布，下面两个定理成立:

* + 1. 平面上的每一个点，每一组无穷点序列，其概率可为0.
    2. 设是定义在上的一维连续实函数. 则集合和的概率为0.

**定义3.4.5** **联合p.f./p.d.f.** 设和是随机变量，其中是离散的，是连续的. 假设存在一个函数定义在平面上，对于实数子集中的每一对A和B，

如果该积分存在. 则函数被称为和的联合p.f./p.d.f.

定义3.4.5中和互换也同样成立。每一个联合p.f./p.d.f都必须满足两个条件。如果是离散随机变量并且其可能值为并且是连续随机变量，对于所有,则

定义 联合(累加)分布函数c.d.f. 随机变量和的联合分布函数或联合累加分布函数(联合c.d.f)定义为函数F使得和的所有值(),

如果任意随机变量和的联合c.d.f.是函数F, 那么位于平面上的变量对的概率则位于特殊的矩形区域内，对于给定的数字和，

**定理3.4.5** 如果和拥有联合c.d.f.则单个随机变量的c.d.f. 可以导出得到相似的，的.

**3.5 边际分布**

**定义3.5.1** **边际c.d.f/p.f./p.d.f.** 假设和具有联合分布. 通过定理3.4.5导出的c.d.f被称为的边际c.d.f. 同样，与边际c.d.f.相关联的p.f.或p.d.f.被称为的边际p.f.或p.d.f.

**定理3.5.1** 如果和拥有联合分布p.f.*f*，则的边际p.f.为

相似地，的边际p.f.为

**定理3.5.2** 如果和拥有连续联合分布*f*，则的边际p.d.f.为

相似地，的边际p.f.为

**定理3.5.3** 设f是和的联合p.f./p.d.f, 其中是离散的，是连续的. 则的边际p.f.

并且的边际p.f.为

**定义3.5.2** **独立随机变量** 如果随机变量和是独立的，仅当实数子集和满足(是事件)

**定理3.5.4** 设和拥有联合c.d.f., 设的边际c.d.f.为，设的边际c.d.f.为. 则和是独立的当且仅当对于所有的实数和

**定理3.5.5** 设和为随机变量并且拥有联合p.f.*f*. 则设和是独立的当且仅当*f*可以用下列公式表达

其中是单独关于的函数，是单独关于的函数.

**推论3.5.1** 两个随机变量和是独立的当且仅当所有实数和满足下列因式:

**定理3.5.6** 设和拥有连续联合分布. 假设是一个矩形区域(可能无界限)，边界线与坐标轴(可能)平行. 则和是独立的当且仅当公式(3.5.7)在上成立.

3.6 条件分布 2019年6月17日11点50分

**定义3.6.1** **条件分布/p.f.** 设和拥有离散联合分布*f*. 设为的边界p.f. 对于每一个值使得，定义为

则被称为给定情况下的条件p.f. 相似的，如果给定，则的条件p.f.为

**定义3.6.2** **条件p.d.f.** 设和拥有连续联合分布，其p.d.f.为*f*，相应的边际p.d.f.为和. 对于每一个值使得. 则在给定条件下的条件p.d.f.定义如下：

当值使得时，我们可以自由定义，使得作为的p.d.f.函数。

**定理3.6.1** 对于每一个, 定义3.6.2得到的是的一个p.d.f.函数。即

根据公式(3.5.3).

**定义3.6.3** **混合分布的条件p.f.或p.d.f.** 设是离散的，是连续的并且p.f./p.d.f.为f. 则给定条件下的条件p.f.由公式(3.6.2)定义, 在给定条件下的条件p.f.由公式(3.6.3)定义.

**定理3.6.2** **分布的乘法法则** 设和是随机变量，它们对应的边际p.f./p.d.f.分别为和. 假设在给定条件下的条件p.f.或p.d.f.为，在给定条件下的条件p.f.或p.d.f.为. 则对于每一个值使得和每一个,

其中f为和的联合p.f./p.d.f. 类似的，对于每一个值使得和每一个,

**定理3.6.3** **随机变量的总概率定律** 如果是随机变量的边际p.f.或p.d.f., 是给定条件下的条件p.f.或p.d.f. 则的边际p.f.或p.d.f.为

如果上式中是离散的。如果是连选的，则的边际p.f.或p.d.f.为

**定理3.6.4** **随机变量的贝叶斯定理** 如果是随机变量的边际p.f.或p.d.f.并且是给定条件下的条件p.f.或p.d.f. 则在给定条件下的条件p.f.或p.d.f.为

其中是从公式(3.6.11)或(3.6.12)获取。类似的，给定条件下的条件p.f.或p.d.f.为

**定理3.6.5** **独立随机变量** 假设和是两个随机变量并且它们的联合p.f./p.d.f.为*f.*则和是独立的当且仅当对于每一个值使得和每一个, 满足下列公式

3.7 多变量分布 2019年6月19日16点48分

**定义3.7.1 联合分布函数/c.d.f.** 多变量的联合c.d.f.用表示，其值分布在维空间各个点()上，存在如下关系：

每一个多变量c.d.f.都满足之前单变量和二元变量c.d.f.的定义的属性。

**定义3.7.2** **联合离散分布/p.f.** 如果随机向量()拥有有限值或者是中()不同可能值的无穷序列，那么个随机变量拥有离散联合分布。则的联合p.f.定义为函数使得每一个点,

用向量标记

**定理3.7.1** 如果是联合离散分布并且联合p.f.为, 则对于每一个子集

**定义3.7.3** **连续分布/p.d.f.** 如果在上存在一个非负函数使得对于每一个子集满足

则称这个随机变量拥有连续联合分布。函数被称为的联合p.d.f.

用向量标记

**定理3.7.2** 如果的联合分布是连续的，则联合p.d.f.函数可以从联合c.d.f.函数导出

**推导边际p.d.f.** 如果个随机变量的联合分布是已知的，那么单个随机变量的边际分布能够从它们的联合分布导出。例如，如果的联合p.d.f.为, 则的边际分布在每个值处为

更一般的说，个随机变量中任意个联合边际p.d.f.可以通过在其余个变量对联合p.d.f.作积分获得。例如，设四个随机变量和的联合p.d.f.为，则和的边际二元p.d.f.在每个点()定于为

**推到边际c.d.f.** 如果个随机变量的联合c.d.f.为. 则的边际c.d.f.可以通过下列关系获得：

**定义3.7.5** 如果实数的任意个集合满足下列等式

则个随机变量是独立的。

**定理3.7.3** 设随机变量的联合c.d.f.为F, 的边际单变量c.d.f.为，其中. 则随机变量是独立的当且仅当，对于所有点，满足

**定理3.7.4** 如果随机变量是离散的，连续的，或者是混合的。设它们的联合p.d.f.,联合p.f.或联合p.f./p.d.f.为f, 并且是的边际单变量p.d.f.或p.f., 则随机变量是独立的当且仅当，对于所有点，满足

**定义3.7.6** **随机样本/i.i.d./样本大小**. 考虑实线上一个给定的概率分布，用p.f.或p.d.f. 表示。如果这些随机变量是独立的并且它们的边际p.f.或p.d.f.为，那么这个随机变量构成该分布的一个随机样本。这样的随机变量也被称为独立同分布(independent and identically distributed)，简称i.i.d. 我们把随机变量的数目称为样本大小。

定义3.7.6称构成分布f的一个样本空间，如果它们的联合p.f.或p.d.f. g对于所有点满足如下等式:

显然，i.i.d.样本不能有混合分布。

**定义3.7.7** 条件p.f.,p.d.f,或p.f./p.d.f. 假设随机变量被分割成两个子向量和, 其中是一个维随机向量，包含中个随机变量，是一个维随机向量包含另外个随机变量。假设的n维联合p.f.,p.d.f.,或p.f./p.d.f.是并且的边际维p.f.,p.d.f.,或p.f./p.d.f为. 对于给定的使得，则在给定条件下的条件维p.f.,p.d.f.,或p.f./p.d.f. 定义如下：

公式(3.7.8)可以被写为

**定理3.7.5** **多变量总概率定律和贝叶斯理论** 假设条件和符号如定义3.7.7。如果拥有连续联合分布，则的边际p.d.f.为

并且在给定条件下的条件p.d.f为

**定义3.7.8 条件独立随机变量** 设是一个随机向量并且它的联合p.f.,p.d.f.,或p.f./p.d.f.为. 多个随机变量在给定的情况下是条件独立的，当且对于所有值使得,满足

其中代表在给定条件下的条件多变量p.f.,p.d.f.,或p.f./p.d.f. 代表在给定条件下条件变量p.f或,p.d.f.

**定义3.7.9 直方图.** 设是一组位于之间的数字，. 选择某些整数，将区间分割成长度为的k个等长子区间。对于每一个子区间，统计有多少数字在该子区间。设为子区间的个数, . 选择一个数字(一般或或). 绘制一个二维图像，其横轴范围从到. 对每一个子区间绘制一个长为，高为，横过第个区间的矩形条。这样的图像被称为直方图。

3.8 随机变量函数

**定理3.8.1 离散随机变量函数** 设是离散分布，其p.f.为，设是定义在所有值集合上某个函数。对于的每一个值，的p.f. g为

一般的，假设的p.d.f.为，另一个随机变量定义为。对于每一个实数，的c.d.f. 可以从下列公式导出：

如果随机变量同样拥有连续分布，它的p.d.f. 可以由下列公式获得：

**定理3.8.2 线性函数**. 假设是一个随机变量，其p.d.f.为，设 则的p.d.f.为

**定理3.8.3 概率积分变换** 设的连续c.d.f为，设. (从的变换被称为概率积分变换。)则的分布是区间[0,1]上的均匀分布。

**推论3.8.1** 设在[0,1]区间上是均匀分布，设是一个连续的c.d.f并且分位函数为. 则拥有c.d.f. F.

**定理3.8.4** 设是一个随机变量，其p.d.f.为， (这里和/或既可以是有限的也可以是无限的。)设并假设是可微的并且在是一对一的。设是区间在函数映射后的图像。设是在区间上的反函数。则的p.d.f. 为

3.9 二元或多元随机变量函数 2019年7月1日09点21分

**定理3.9.1 离散随机变量函数** 假设个随机变量拥有联合分布，其联合p.f.为，由这个随机变量构成的个函数定义如下：

为这个函数随机变量给定一些初始值，用标记全部点的集合使得

的联合p.f. g在特定点是通过关系

**定理3.9.2 二项和伯努利分布** 假设是i.i.d随机变量并拥有参数为p的伯努利分布。设。则拥有参数为和p的二项分布。

**定理3.9.3 蛮力分布** 假设的联合p.d.f.为，设. 对于每一个实数，定义。则Y的c.d.f G(y)为

**定理3.9.4 两个随机变量的线性函数** 设拥有联合p.d.f. ，设并且. 则拥有连续分布，其p.d.f.为

**定义3.9.1 卷积** 设是独立随机变量，设. 的分布被称为分布的卷积。的p.d.f.有时被称为的p.d.f.的卷积。

**定理3.9.5 多变量变换** 设拥有连续联合分布，其联合p.d.f.为. 假设存在一个子集S使得. 定义n个新的随机变量如下：

其中我们假设这n个函数定义了S到子集T的变换，并且是一对一可微的。设其逆变换如下定义：

则的联合p.d.f.为

其中的行列式为

表示行列式的绝对值。

**定理3.9.6 线性变换** 设拥有连续联合分布，其联合p.d.f.为. 定义通过下列变换

其中是一个非奇异矩阵。则拥有连续联合分布，其p.d.f.为

3.10 马尔科夫链 2019年7月2日10点26分

**定义3.10.1 随机过程** 随机变量组成的序列被称为离散时间参数的随机过程(stochastic process, random process)。第一个随机变量被称为过程的初始状态；当时，随机变量被称为在时间的过程状态。

**定义3.10.2 马尔科夫链** 一个离散时间参数的随机过程被称为马尔科夫链，当且，对于每一个时间n,在给定条件下，所有的条件分布仅依赖而不是早期状态。用符号表示如下所示：

**定理3.10.1**对于一个有限马尔科夫链，前n个状态的联合p.f.为

同样，对于每一个n和m>0，

**定义3.10.3 过渡分布/平稳过渡分布** 考虑一个由k个状态的马尔科夫链。在时间n+1状态的条件分布是根据在时间n上的状态给出的，也就是，其中并且 ，被称为马尔科夫链的过渡分布。如果过渡分布在每一次时间点n的值都是一样的，则该马尔科夫链拥有平稳过渡分布。用公式表示为

**定义3.10.4 过渡矩阵** 考虑一个平稳过渡分布的有限马尔科夫链，其概率分布为对于所有的. 马尔科夫链的过渡矩阵被定义成矩阵，也就是

列表示当前状态，行预测下一状态。

**定义3.10.5 随机矩阵** 如果一个方阵的所有元素非负并且每一行的元素之和为1，则该矩阵被称为随机矩阵。

**定理3.10.2 多步过渡** 设是一个平稳过渡分布有限马尔科夫链的过渡矩阵。对于每一个，矩阵的第个指数中第行第列的概率表示从状态到状态的步转移。(**这里应该是从状态到状态的步转移**)

**定义3.10.6 多布过渡矩阵** 在定理3.10.2条件下，矩阵被称为马尔科夫链的步*过渡矩阵*。

**定义3.10.7 吸收状态** 在马尔科夫链中，如果对于某些状态，则这种状态被称为吸收状态。

**定义3.10.8** 一个包含非负元素且总和为1的向量被称为概率向量。概率向量被称为链的初始分布或初始概率向量，其坐标设定马尔科夫链将要进入每一个时间1状态时的概率。

初始分布和过渡矩阵共同决定了马尔科夫链的联合分布。设为厨师分布，公式(3.10.1)则被重写为

**定理3.10.3 时间n的边际分布** 考虑一个平稳过渡分布的有限马尔科夫链，其初始分布为,过渡矩阵为。则在时间n的边际分布为.(**证明过程每看懂**)

**定义3.10.9 平稳分布** 设是马尔科夫链的一个过渡矩阵。概率向量满足被称为马尔科夫链的平稳分布。

**定理3.10.4** 如果存在使得每一个元素都为正数，则

* 该马尔科夫链存在唯一的平稳分布,
* 是一个矩阵，其所有的行都等于，并且
* 不论马尔科夫链以哪种分布开始，其分布经过步过渡之后随收敛于.

**4.1 随机变量的期望** 2019年7月3日09点43分

**定义4.1.1 有界离散随机变量的均值** 设是一个有界离散随机变量，其p.f.为。 的期望，标记未，定义如下：

的期望也被称为的均值或的期望值.

**定义4.1.2 一般随机变量的均值** 设是一个随机变量，其p.d.f.为。假设下列之至少有一个是有限的：

则的均值或期望存在，定义如下

如果(4.1.2)中的两个和式都是无限的，则不存在。

**定义4.1.3 有界连续随机变量均值** 设是一个有界连续随机变量，其p.d.f.为。的期望标记为，定义为:

**定义4.1.4 一般有界连续随机变量均值** 设是一个有界连续随机变量，其p.d.f.为。假设下列积分至少有一个是有限的：

则的均值或期望存在，定义如下

**定理4.1.1 佚名统计学家定理(Law of unconscious statistician)** 设是一个随机变量，设是一个实变量的实值函数。如果是连续分布并且均值存在，则

如果是离散分布且均值存在，则

**定理4.1.2 佚名统计学家定理(Law of unconscious statistician)** 假设是随机变量联合p.d.f.为并且存在均值。设r是n个实变量的实值函数，假设。则可以从下列关系中直接得出

相似地，如果是离散联合分布，p.f.为并且存在均值，则的均值为

4.2 期望的属性 2019年7月8日09点10分

**定理4.2.1 线性函数** 如果，其中和都是有限常量，则

**推论 4.2.1** 如果且概率为1，则.

**定理4.2.2** 如果存在一个常数使得，则. 如果存在一个常数b使得，则。

**定理4.2.3** 假设，并且或. 则

**定理4.2.4** 如果是n个随机变量使得每一个期望是有限的()，则

**推论4.2.2.** 假设期望是有限的(). 所有常数和b存在下列关系:

**定义4.2.1** 凸函数 一个以向量为参数的函数是凸的，当且对于每一个,和每一个，,满足下列不等式

**定理4.2.5 Jensen’s不等式** 设是一个凸函数，设是一个有限均值的随机变量. 则

**定理4.2.6** 如果是n个独立随机变量使得每一个期望是有限的()，则

**定理4.2.7 整型随机变量** 设是一个随机变量只能取值则

**定理4.2.8 一般非负随机变量** 设是一个非负随机变量，其c.d.f.为. 则

4.3 方差 2019年7月9日09点34分

**定义4.3.1 方差/标准偏差** 设是一个随机变量，其有限均值. 的方差，标记为，定义如下：

如果具有无限均值或者如果的均值不存在，我们说不存在. 如果方差存在，则的标准偏差是的非负平方根。

当仅讨论一个随机变量时，通常用符号表示其标准偏差，方差用表示. 当讨论多个随机变量时，随机变量的名称作为符号的下标包括在内，例如，将是的标准偏差，而将是的方差。

**注意：方差仅取决于分布.** 随机变量的方差和标准差仅取决于的分布，正如的期望仅取决于分布。 事实上，所有可以从p.f. 或者p.d.f.计算的东西仅取决于分布。具有相同分布的两个随机变量将具有相同的方差，即使它们彼此无关。

**定理4.3.1 计算方差的另一种方法** 对于每一个随机变量，.

方差（以及标准偏差）提供了围绕其均值分布的扩散或分散的确定性。较小的方差值表示概率分布紧密集中在附近; 较大的方差值通常表示概率分布在附近具有较宽的范围。然而，将非常小但正的概率放置在距离实线上原点足够远的地方，可以使分布的方差及其均值任意大。

**定理4.3.2** 对于每一个, . 如果是一个有界随机变量，则必定存在并且是有限的。

**定理4.3.3** 当且仅当存在一个常数c使得.

**定理4.3.4** 对于常数和, 设. 则

且

**定理4.3.5** 如果是n个独立随机变量且包含有限均值，则

**推论4.3.1** 如果是n个独立随机变量且包含有限均值，如果和b是任意常数，则

**定义4.3.2 四分位距(Interquartile Range IQR)** 设是一个随机变量且分位函数为. 则四分位距(IQR)定义为.

换句话说，IQR是包含分布中间一半长度的区间。

4.4 距 2019年7月10日09点42分

**定理4.4.1** 如果对于某些正整数成立，则对于任意正整数成立使得.

**中心距**：假设是一个随机变量且. 对于每一个正整数，期望被称为的阶中心距，或关于均值的阶距. 特别的，根据该术语，的方差就是的二阶中心距。

对于任意分布，一阶中心距必须为0，因为

**定义4.4.1 偏斜(skewness)** 设是一个随机变量，其，标准差为，并且是有限三阶距。的偏斜定义为.

**定义4.4.2 矩量母函数(Moment Generating Function)** 设是一个随机变量. 对于每一个实值, 定义

函数被称为的距量母函数。

**注意：的距量母函数仅取决于的分布。**引文m.g.f.是函数的期望值，它必须仅取决于v的分布。如果和具有相同的分布，它们必须具有相同的m.g.f.

**定理4.4.2** 设是一个随机变量，其m.g.f. 在点附近的开区间是有限的. 则，对于每一个整型, 的阶矩, 是有限的且在处等于阶导数. 也就是,

**定理4.4.3** 设是一个随机变量，m.g.f.为; 设, 其中a和b是给定的常数；设为的m.g.f. 对于每一个t值使得是有限的，则

**定理4.4.4** 假设是n个独立随机变量，对于, 设为的m.g.f. , 设为的m.g.f. 对于每一个t值使得是有限的，则

**定理4.4.5** 如果随机变量和的m.g.f.是有限的且在点t=0附近的开区间对所有的t值都是相等的，则和的概率分布也是相等的。

**定理4.4.6** 如果和是独立随机变量，如果拥有二项分布，参数为和p，则同样也是二项分布，参数为和p.

4.5 均值和中位数 2019年7月15日10点42分

**定义4.5.1 中位数** 设是一个随机变量，每一个满足下列属性的m被称为分布的中位数：

**定理4.5.1 一对一函数** 设是一个随机变量，其取值范围再实数区间I上. 设r是一个定义在区间I上的一对一函数. 如果m是的均值，则r(m)是r(X)的均值。

**定义4.5.2 均方误差/M.S.E.** 数字被称为估算量d的均方误差。

**定理4.5.2** 设是一个随机变量，其有限方差为, 设. 对于每一个d值，下列不等式成立

**定义4.5.3 平均绝对误差/M.A.E.** 数字被称为估算量d的平均绝对误差。

**定理4.5.3** 设是一个有限均值的随机变量，设m是分布的中位数。对于每一个d值，下列不等式成立

4.6 协方差和相关性 2019年7月16日09点54分

**定义4.6.1 协方差** 设和是有限均值的随机变量. 设. 和的协方差标记为, 定义为

当且公式(4.6.1)期望存在。

**定理4.6.1** 所有随机变量和满足和条件时，则下列公式成立

**定义4.6.2 相关性** 设和是有限方差的随机变量，其方差分别为和. 和的相关性标记为, 定义为:

**定理4.6.2 施瓦茨不等式** 对于所有随机变量和, 当存在时，下列不等式成立：

**定理4.6.3 柯西-施瓦茨不等式** 设和是有限方差的随机变量，则下列不等式成立，

且

**定义4.6.3 正相关，负相关，非相关** 如果则称和是正相关，如果则称和是负相关，如果则称和是非相关。

**定理4.6.4** 如果和是独立随机变量且, 则

**定理4.6.5** 假设是一个随机变量使得, 且，,为常量，. 如果, 则. 如果, 则.

**定理4.6.6** 如果和是随机变量使得. 则

**推论4.6.1** 设为常数. 则定理4.6.6条件下

另一个特别有用的推论是

**定理4.6.7** 如果是随机变量使得 则

**推论4.6.2** 如果是非相关的随机变量（当时，和是非相关的），则

4.7 条件期望 2019年7月17日09点49分

定义4.7.1 条件期望/均值 设和是随机变量，存在有限均值。在条件下的条件期望（或条件均值）标记为，定义为在条件下的条件分布的期望。

例如，如果是连续分布在给定且条件p.d.f.为，则

类似的，如果是离散分布在给定且条件p.f.为，则

定义4.7.2 条件均值作为随机变量 设代表公式(4.7.1)或(4.7.2)关于的函数. 定于符号等价于，该函数被称为给定下的条件均值。

定理4.7.1 总概率期望定律 设和是随机变量，拥有有限均值. 则

定理4.7.2 设和是随机变量, 设. 在给定条件下的条件分布等于在条件下的条件分布。

当和具有连续的联合分布时，定理4.7.2的结果为

定义4.7.3 条件方差 对于每一个给定值, 设为在给定条件下的条件分布方差，即

我们称是在给定条件下的条件方差.

定理4.7.3 估算量最小化为.

定理4.7.4 总概率方差定律 如果和是任意随机变量，且必要的期望和方差都存在，则.

4.8 效应

定义4.8.1 效应函数 效应函数是将赋值给每一个可能值，U(x)表示获取数量的实际价值。

定义4.8.2 最大化期望效应 我们说如果以下条件成立，一个人通过最大化预期效应在博弈之间选择。存在一个效应函数, 以个人必须在博弈X和Y之间做出选择，如果, 他对于Y更喜欢X，如果，则二者之间任选其一。

5.2 伯努利和比努力分布

定义5.2.1 如果一个随机变量取值只能为0和1，并且概率为

则被称为参数为的伯努利分布。

的p.f.可以被写为：

伯努利分布的一些属性

定义5.2.2 伯努利实验/过程 如果一组有限或无限的随机变量是i.i.d., 假如每一个随机变量都是参数为的伯努利分布，则称是参数为的伯努利实验. 无限伯努利实验被称为伯努利过程。

定义5.2.3 二项分布 如果一个离散随机变量的p.f.为下列：

则被称为参数为的二项分布。在该分布中, 被称为正整数，并且必须满足.

定理5.2.1 如果随机变量是n个参数为p的伯努利试验，并且, 则是参数为n和p的二项分布。二项分布的期望，方差，边际m.f.g.分别为

定理5.2.2 如果是独立随机变量，如果是参数为和的二项分布，则是参数为和的二项分布。

定理5.3 超几何分布

定理5.3.1 概率函数 假设一个盒子中包含个红球和个蓝球。同样假设从该盒子中不放回地随机选择个球，并且设为获得的红球数量。显然，. 同样，如果，则.当时，如果第次选取的是红球则令, 否则. 显然. 则每一个都是伯努利分布，但不是相互独立的。的分布为

其中

否则.

定义5.3.1 超几何分布 设和是非负整数且. 如果一个随机变量是离散的且p.f.如公式(5.3.1)和(5.3.2)所示，则被称作是参数为和的超几何分布。

定理5.3.2 设是超几何分布，则

定理5.3.3 设和是实数序列，如果收敛至0，同样收敛至0. 则

特别地，如果收敛至b, 则收敛至.

定理5.3.4 二项式和超几何分布的接近程度 设, 设n是一个正整数. 设Y是一个参数为n和p的二项分布. 对于每一个正整数T使得, , . 其中和是整数. 设是参数为,和n的超几何分布. 对于每一个固定n和每一个.

5.4 泊松分布

定义5.4.1 泊松分布 设. 如果随机变量的p.f.如下所示：

则称为均值为的泊松分布。

定理5.4.1 均值 泊松分布的均值为，即公式(5.4.2)的均值为。

定理5.4.2 方差 均值为的泊松分布的方差同样也是。

定理5.4.3 矩母函数 均值为的泊松分布的m.g.f为

定理5.4.4 是相互独立的，如果是均值为的泊松分布，则是均值为的泊松分布。

定理5.4.5 二项式和泊松分布的接近程度 对于每一个整数n和每一个，设为参数为n,p的二项分布，设为均值为的泊松分布。设是数值为0到1的序列且. 则

定理5.4.6 超几何和泊松分布的接近程度 设. 设Y是一个正整数. 设Y是均值为的泊松分布. 对于每一个正整数T使得, , . 其中, 和是整数. 设是参数为,和的超几何分布. 对于每一个固定n和每一个.

定义5.4.2 泊松过程 一个单位时间内频率为的泊松过程是满足下列两个属性的过程：

在每个固定时间t区间的抵达数量是均值为的泊松分布。

在每个离散时间区间的抵达数量是相互独立的。

5.5 负二项分布

定理5.5.1 采样直到固定次数成功为止 假设一个无穷的伯努利实验，其成功率为p. 在第r次成功前出现的失败次数X的p.f.为:

定义5.5.1 负二项分布 如果离散随机变量的p.f.如公式(5.5.1)中所示，则被称为参数为r和p的负二项分布。

定理5.5.2 如果是i.i.d.随机变量并且每一个都是参数为p的几何分布，则是参数为r和p的负二项分布。

定理5.5.3 矩母函数 如果被称为参数为r和p的负二项分布，则m.g.f.为

定理5.5.4 均值和方差 如果被称为参数为r和p的负二项分布，则均值和方差分别为

5.6 正态分布 2019年7月25日13点40分

定义5.6.1 定义和p.d.f. 如果一个连续随机变量的p.d.f.为：

则称为均值，方差的正态分布。

定理5.6.2 矩母函数 正态分布(5.6.1)的m.g.f.为

定理5.6.4 如果是正态分布，均值和方差分别为和, 如果，其中和是给定常数且，则是均值为，方差为的正态分布。

定义5.6.2 标准正态分布 均值为0和方差为1的正态分布被称为标准正态分布. 标准正态分布的p.d.f.一般用符号表示，c.d.f.一般用符号表示. 因此，

定理5.6.5 对称结果 对于所有的和

定理5.6.6 转换成标准正态分布 设是正态分布，均值和方差分别为和. 设F为X的c.d.f. 则是标准正态分布，对所有的和

定理5.6.7 如果随机变量是独立的并且是均值为, 方差为的正态分布, 则是均值为, 方差为的正态分布.

推论5.6.1 如果随机变量是独立的并且是均值为, 方差为的正态分布, 假设和b是常数并且这些值至少有一个不为0，则变量是均值为, 方差为的正态分布。

定义5.6.3 采样均值 设是随机变量. N个随机变量的均值，即被称为采样均值且通常标记为.

推论5.6.2 假设随机变量是从均值和方差的正态分布得到的样点，设为它们的样点均值. 则是均值为和方差为的正态分布.

定义5.6.4 对数分布 如果是均值和方差的正态分布，我们说是均值和方差的对数分布。对数分布的矩母函数m.g.f, 期望和方差分别为：

5.7 伽马分布 2019年8月13日11点13分

定义5.7.1 伽马函数 对于每一个正数值, 设定义为下列积分：

函数被称为伽马函数.

定理5.7.1 如果则

定理5.7.2 对于每一个正整数,

定理5.7.3 对于每一个和每一个,

定理5.7.4 斯特林(Stirling)公式

定义5.7.2 伽马分布 设和是正数. 如果连续随机变量的分布如下所示：

则被称为参数为和的伽马分布.

定理5.7.5 矩 设是参数为和的伽马分布. 对于

特别地，

定理5.7.6 矩母函数 设是参数为和的伽马分布. 则的m.g.f.为

定理5.7.7 如果随机变量是独立的，并且假设是参数为和的伽马分布, 则之和是参数为和的伽马分布.

定义5.7.3 指数分布. 设. 如果随机变量的连续p.d.f.定义如下：

则被称为参数为的指数分布.

定理5.7.8 如果， 则伽马分布退化为指数分布. 如果是为参数为的指数分布，则

定理5.7.9 指数分布的无记忆性 设是参数为的指数分布，令. 则对于每一个值,

定理5.7.10 假设一组随机变量是参数为的指数分布. 则的分布是参数为的指数分布.

定理5.7.11 假设一组随机变量是参数为的指数分布. 设是随机变量从小到大的排列. 对于每一个, 设, 则的分布是参数为的指数分布.

定理5.7.12 泊松过程中抵达时间 假设抵达事件符合频率为的泊松过程. 设是第次抵达的时间，. 令, , . 则是i.i.d并且每一个参数为的指数分布.

推论5.7.1 第次抵达时间 在定理5.7.12情况下，的分布是参数为和的伽马分布.

5.8 贝塔分布 2019年8月19日10点25分

定义5.8.1 贝塔函数 对于每一个正数和，定义

函数被称为贝塔函数.

定理5.8.1 对于所有的

定义5.8.2 贝塔分布 设, 设是一个随机变量且p.d.f.为

则是被称为参数为贝塔分布.

定理5.8.2 假设P是参数为贝塔分布，并且在给定P=p条件下X的条件分布是参数为n和p的二项分布. 在给定X=x条件下P的条件分布是参数为贝塔分布.

定理5.8.3 矩 假设X是参数为贝塔分布. 则对每一个正整数k,

特别的，

定理5.8.4 设U和V是独立随机变量，其中U是参数为和1的伽马分布，V是参数为和1 的伽马分布. 则

* 和是独立的.
* 是参数为和的贝塔分布，并且
* 是参数为和1的伽马分布.

同时，公式(5.8.2)成立.