小波(Wavelets) 2019年11月19日09点56分

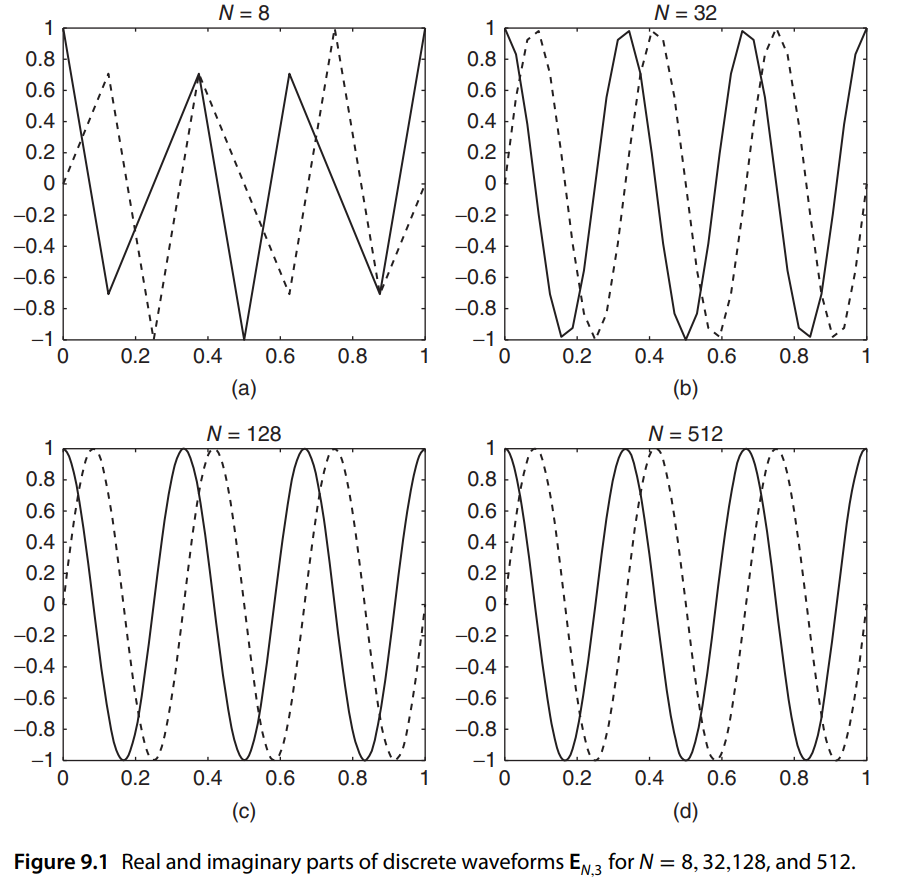
9.1 概览

9.1.1 本章大纲

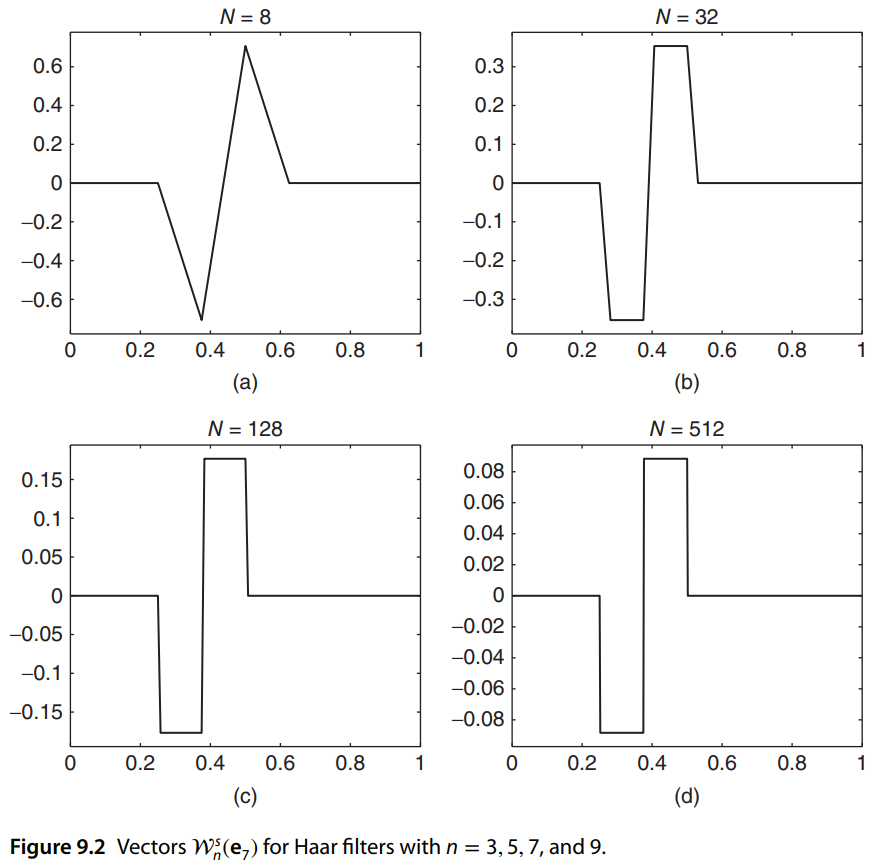
在第7章中，我们定义了滤波器组，并开始在有限维情况下引用“离散小波变换”。在本章中，我们将明确说明什么是小波以及它们与滤波器组有什么关系。本章包含一定数量的不可避免但基本的分析。我们的目标是对小波，它们与滤波器组的关系以及如何发挥作用提供基本的了解。 我们陈述并提供有关小波的基本事实的示例，以及一些严格的证明。但是，我们仅提供有关小波的其他更多技术事实的参考，例如缩放函数的存在，用于计算缩放函数的级联算法的收敛性以及小波的某些属性[12，20]。

9.1.2 从离散到连续

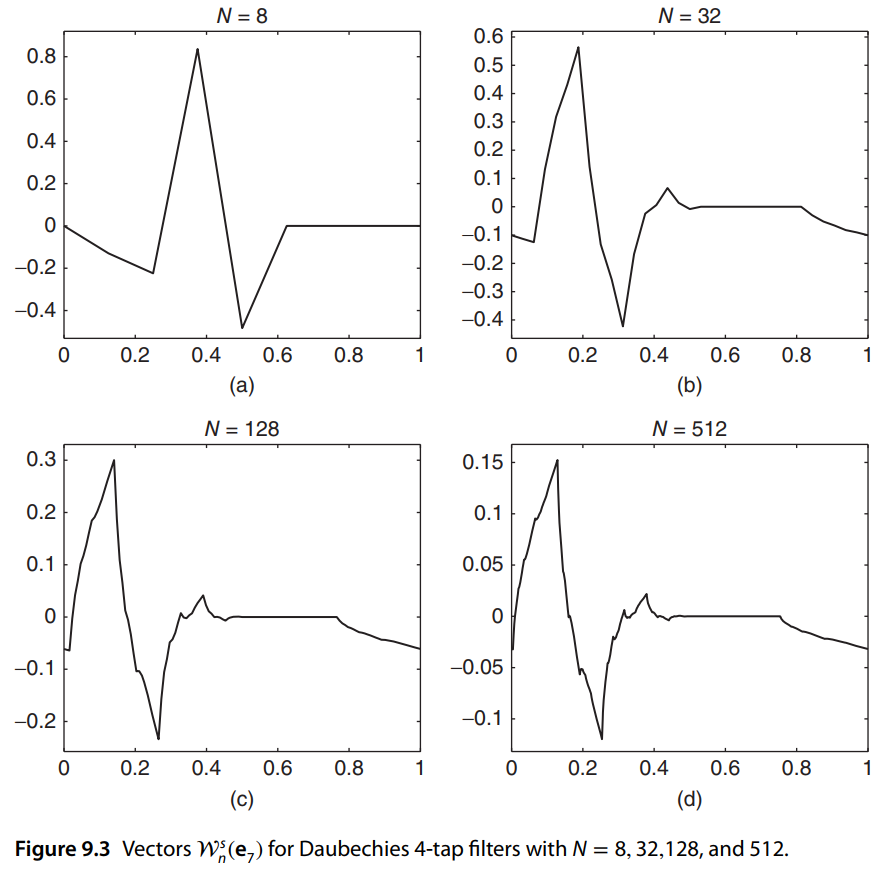
假设通过某种奇迹，我们为采样信号开发了离散傅立叶变换，但是对于连续情况，即傅立叶级数，没有任何理论基础的概念。从第一章我们知道，空间中的任何向量都可以构造成公式(1.22)所定义的基础离散波形的叠加. 当我们固定值, 并绘制出随增加的分量时, 向量似乎稳定在某些“神秘的”基本功能上. 当然，这只是在时间时对进行采样，如图9.1所示，其中. 注意，只是离散傅立叶逆变换（IDFT）矩阵的列, 或者将IDFT应用于中的标准基础向量ek（请参见示例1.18），也可以得到.



即使我们不了解基本函数，图9.1也可能引导我们推测某些函数是离散量的基础. 我们可能会认为一些更通用的连续理论是我们离散计算的基础. 现在，我们可以开发离散傅立叶变换（DFT）而无需了解基本波形的想法似乎有些牵强，但就小波而言，我们正处于这一位置! 为了说明这一点，让我们使用多级正交离散Haar变换（例7.5中的滤波器，信号的周期性扩展）代替DFT再次执行上述实验. 对于和的情况，我们将分别使用和9控制级逆变换的矩阵应用于标准基向量(我们可以在此处执行的最大阶段数为). 结果如图9.2所示. 在每种情况下，我们绘制分量与的关系. 除了在垂直方向上的归一化以外，似乎离散波形稳定在某些基本函数上.



让我们用Daubechies 4采样正交滤波器重复此实验. 在N = 8、32、128和512的情况下，分别使用n = 1、3、5和7阶段（每个N可以做的最大数目），我们得到的结果如图9.3所示. 再次，除了归一化，似乎离散波形正在收敛到某些基本函数.似乎可能有一个连续的理论潜伏在滤波器组的后面！



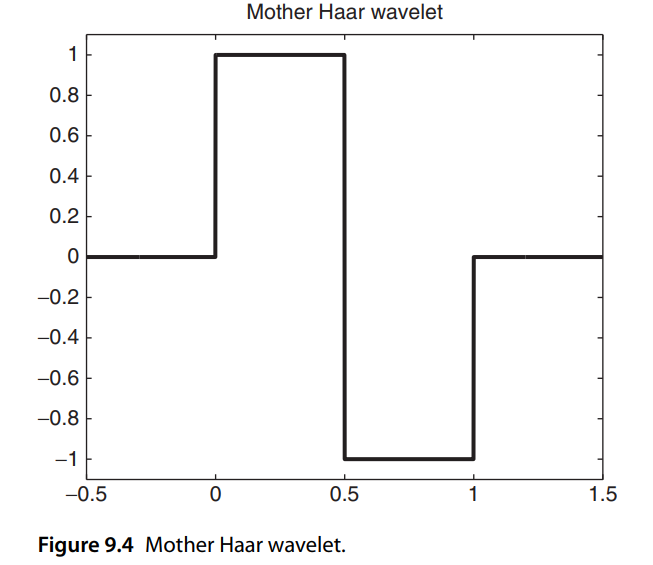
9.2.1 Haar函数作为的基

Haar函数为空间提供了正交基, 但为了简单化, 我们一开始只将注意力放在. 设是定义在上的函数

[0，1]之外的定义是为了方便,我们称为哈尔母波. 在图9.4中, 我们提供了的图像. 与图9.2中图表的相似之处并非巧合!

从我们能构造出函数的无穷集合, 哈尔小波, 在区间上定义为

其中并且. 项用于标准化使得, 我们使用符号表示在区间上的模. 为了避免多区间函数产生混淆.我们还将抛出函数



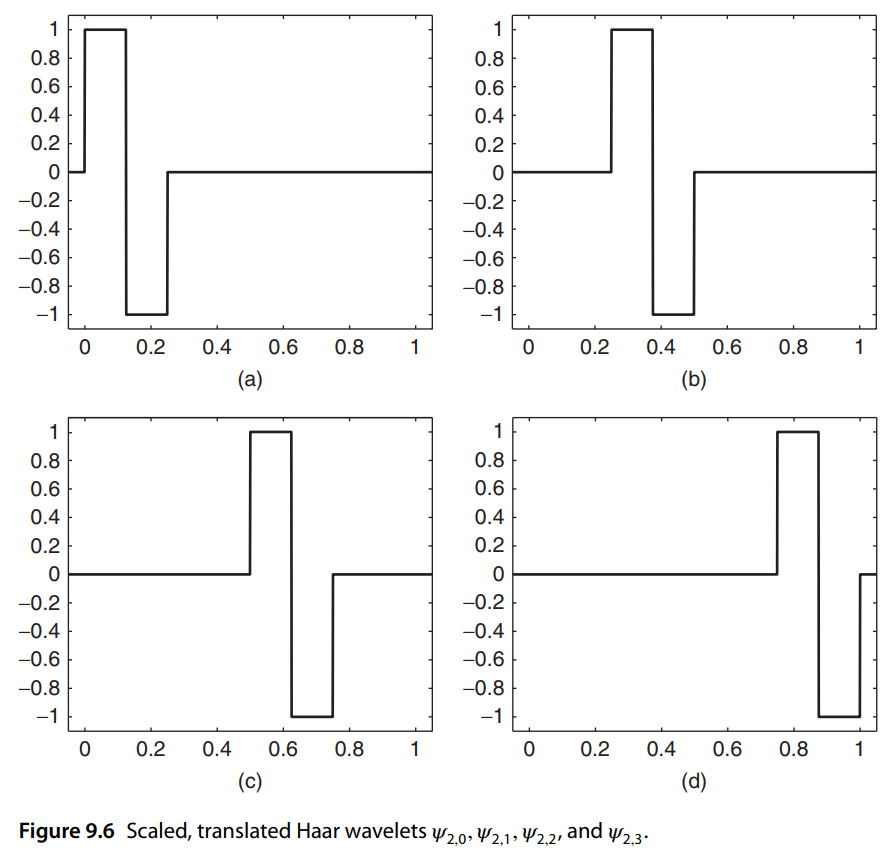
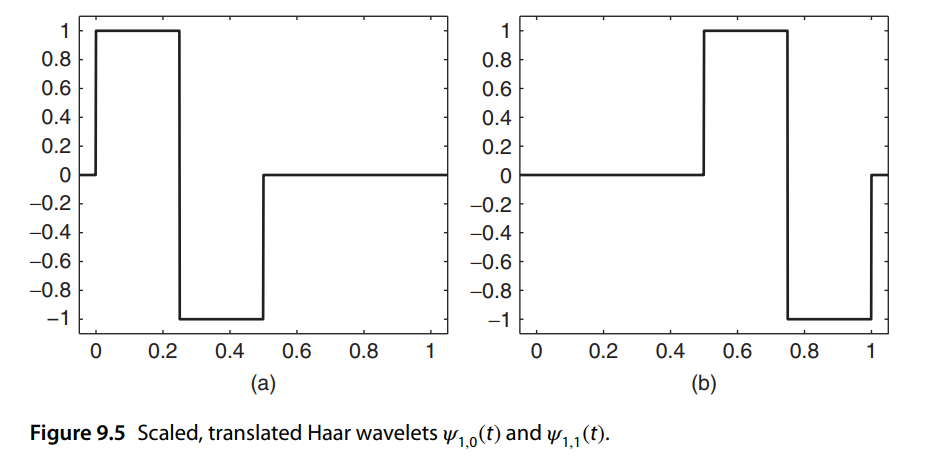
被称为哈尔缩放函数(Haar scaling function); 再一次,我们在[0，1]之外定义只是为了以后的方便. 事实证明, 无穷族与在上构成了正交基.

为了建立直观感觉, 我们绘制了这些基础函数的图像. 缩放函数是常数，因此更加容易, 如图9.4所示. 当时,图9.5展示了和. 这是母波长度的一半, 垂直缩放和水平平移. 当时,图9.6展示了和. 这是母波长度的1/4缩放和平移. 一般地, 公式中可写为直接形式

特别地, 只有在区间不为0, 其长度为, 并且对于任意固定值, 函数可以通过将向右平移个单位获得. 中第一个索引表示缩放,第二个索引控制位置.

2019年11月26日10点52分

在继续之前，定义一些术语将很有帮助.回想一下，集合的闭包由所有组成，可以作为S中元素的极限获得;当然，的闭包包含本身.



定义9.1 在上定义的函数的支持是在非零值上的集合的闭包.如果的支持包含在中，则称函数被支持在集合中.如果在有界区间支持函数,则称具有紧支持.

“紧”一词源于封闭的事实，有界的子集是紧集合的例子.参见[24]或任何有关真实分析的介绍性文字。

很容易看出，如果函数在某个集合中包含支持，则在之外等于零(或未定义).哈尔缩放函数的支持是区间.哈尔小波的支持是闭区间.

**9.2.1.2 正交性**

回想的一下符号

是两个函数在上的内积.

**命题9.1** 集合在上是正交的.

当然，该推论暗示集合S是线性独立的.

**9.2.1.3 上的完整性**

命题9.1中的集合不仅在上是正交的,而且是完整的;使用中元素的线性组合,可以将任意函数近似到模中的任意精度.具体来说,对于每一个,令

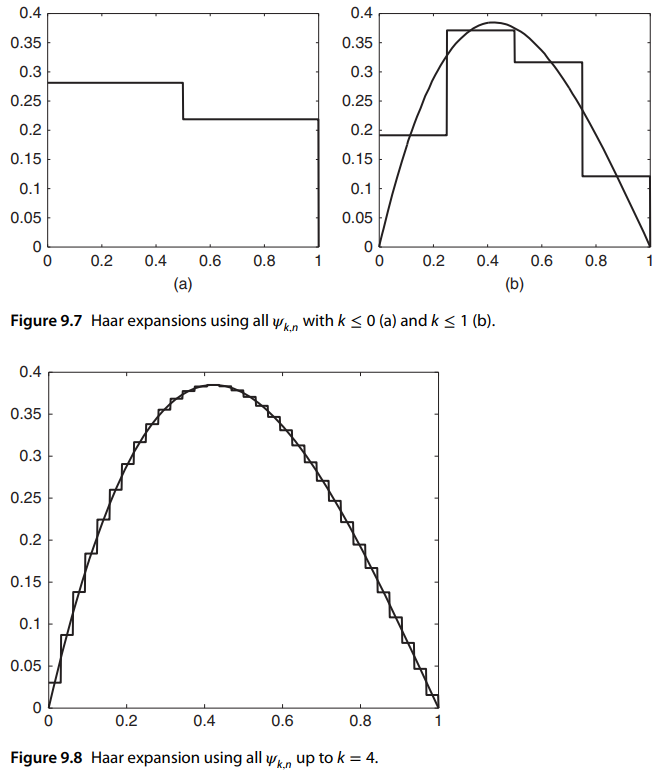
其中并且

因为,因此不需要出现在的分母中.为了方便,我们同样定义.我们取足够大的值使得任意小.我们将要在下面证明该结论,但是现在来看另一个例子.

**例9.1** 设定义在上.只需使用哈尔缩放函数即可获得最粗略的近似值.我们获取,其中, 在区间上，它仅以其自身的平均值近似.

如果我们在公式(9.5)中取,则包含,我们得到的近似展示在图9.7a中.我们简短的定义,是映射到由和(包含两个常函数和)构成的子空间的投影.在图9.7b中,我们从公式(9.5)(其中)获得了近似值,混合了和.这是在常函数在区间上的子空间的投影.在图9.8中,我们展示了使用所有的获得的近似值.看起来我们似乎可以用这种方式近似任何连续函数!在任意情况下,请注意在形式的区间中是恒定的,其中.

**命题9.2** 对任意函数,在任意区间上的近似(常)值等于在该区间的平均值.



**备注9.1** 命题9.2的一个简单推论是,如果函数在每一个区间上是常数,则可以从缩放函数和哈尔小波有限叠加来精确构建,其中.

**定理9.1** 在上的任何连续函数都可以使用公式(9.5)和(9.6)以任意精度近似.

**备注9.2** 这意味着对于任意,任意连续函数和适当大的值,我们获得,并且有

命题9.1的集合S因此在上是完整的.

**9.2.2 哈尔函数作为的正交基** 2020年1月7日10点19分

我们可以使用缩放函数和小波来定义的正交基.集合

在上是正交的.该集合将成为的正交基的一部分.我们还将继续使用函数（等式（9.4））,其中,但现在允许在整个上取值.这意味着允许在实数域上平移.且仍然

设是集合

与命题9.1相同的推理表明是中的正交集合.而且,对于每个,的某些子集为提供正交基.例如,与所有一起,使得是的基,对该集合而言,这仅仅是上述所考虑的上的基和.类似地，和(其中,)是的基,因为它们只是将的基础元素向右平移一个单位.更一般而言,与所有的集合一起,使得使得是的基.

结果,对于任何,任何,以及任何函数,我们可以获得

其中是中元素的线性组合.

**定理9.2** 公式(9.7)的集合是的一个正交基.

因为是一个正交基,则根据定理1.4

则

完全平行于方程和,只是积分间隔不限于.

**9.2.3 投影和近似**

在继续之前,了解内积空间中的“正交投影”概念将很有用.通常,投影的概念在逼近理论,数值分析和应用数学中都起着巨大的作用.为了避免长时间走弯路,我们将仅针对当前情况开发我们需要的东西.我们将在内积空间(允许)中工作,尽管结果适用于更一般的希尔伯特空间[Hilbert space].另外,尽管我们假设空间是无限维的，但下面的所有内容都在起作用;的确,因为和是有限的,并且没有收敛问题,所以更容易.

令为的子空间,其正交基为(或者,基可以是有限的).我们假设所有线性组合

其中是的元素,使得每一个平方和序列对应的一个元素,且反之亦然(回顾定理1.5及其备注).公式右边无穷之和的精确含义是:

**定义9.2** 令为的子空间,并且是如上所述的正交基.如果,则“在上的正交投影”是的元素,定义为

根据贝塞尔[Bessel]不等式(方程(1.55),练习36),我们有,因此由式(9.13)定义的元素确实在中.

和之间的关系是什么?首先,如果,则,因为是的基.如果不在中,那么可以证明是的最佳近似,可以构造为的叠加.换句话说,是中最接近的元素,如以下命题所量化: