小波(Wavelets) 2019年11月19日09点56分

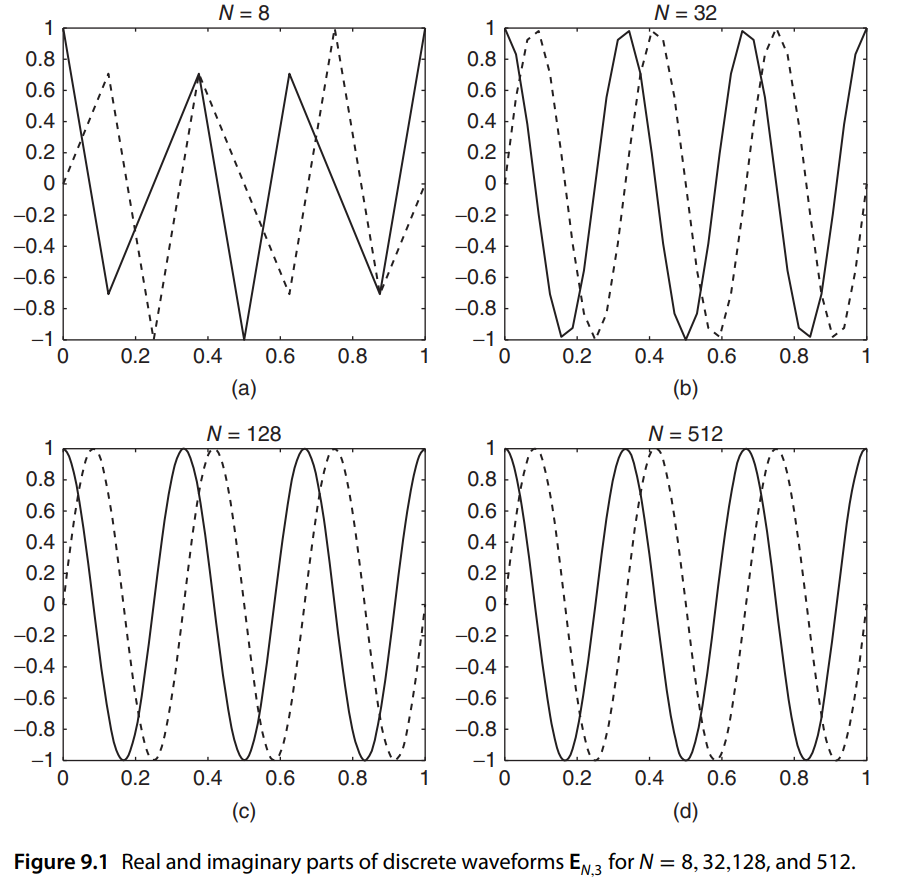
9.1 概览

9.1.1 本章大纲

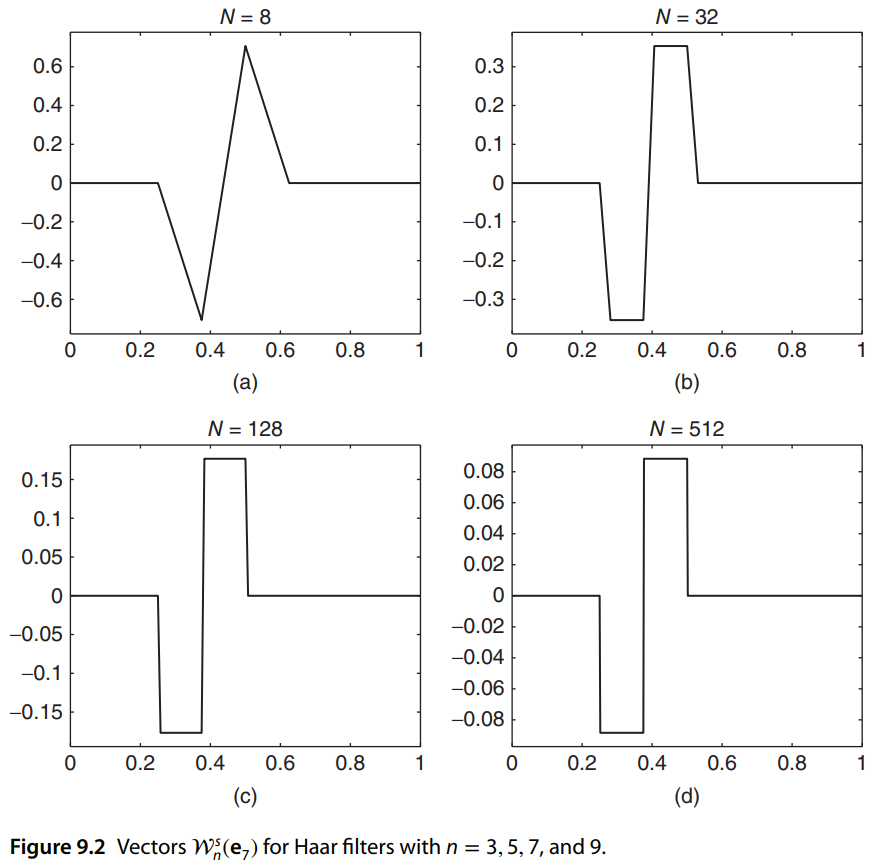
在第7章中，我们定义了滤波器组，并开始在有限维情况下引用“离散小波变换”。在本章中，我们将明确说明什么是小波以及它们与滤波器组有什么关系。本章包含一定数量的不可避免但基本的分析。我们的目标是对小波，它们与滤波器组的关系以及如何发挥作用提供基本的了解。 我们陈述并提供有关小波的基本事实的示例，以及一些严格的证明。但是，我们仅提供有关小波的其他更多技术事实的参考，例如缩放函数的存在，用于计算缩放函数的级联算法的收敛性以及小波的某些属性[12，20]。

9.1.2 从离散到连续

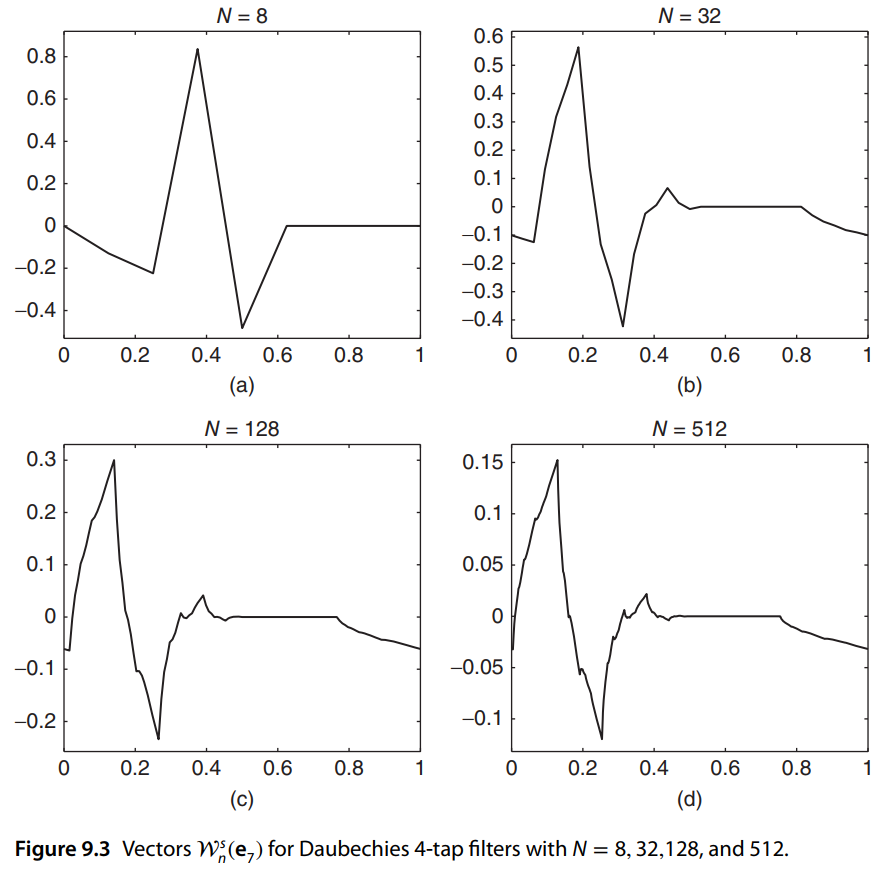
假设通过某种奇迹，我们为采样信号开发了离散傅立叶变换，但是对于连续情况，即傅立叶级数，没有任何理论基础的概念。从第一章我们知道，空间中的任何向量都可以构造成公式(1.22)所定义的基础离散波形的叠加. 当我们固定值, 并绘制出随增加的分量时, 向量似乎稳定在某些“神秘的”基本功能上. 当然，这只是在时间时对进行采样，如图9.1所示，其中. 注意，只是离散傅立叶逆变换（IDFT）矩阵的列, 或者将IDFT应用于中的标准基础向量ek（请参见示例1.18），也可以得到.



即使我们不了解基本函数，图9.1也可能引导我们推测某些函数是离散量的基础. 我们可能会认为一些更通用的连续理论是我们离散计算的基础. 现在，我们可以开发离散傅立叶变换（DFT）而无需了解基本波形的想法似乎有些牵强，但就小波而言，我们正处于这一位置! 为了说明这一点，让我们使用多级正交离散Haar变换（例7.5中的滤波器，信号的周期性扩展）代替DFT再次执行上述实验. 对于和的情况，我们将分别使用和9控制级逆变换的矩阵应用于标准基向量(我们可以在此处执行的最大阶段数为).结果如图9.2所示.在每种情况下，我们绘制分量与的关系.除了在垂直方向上的归一化以外，似乎离散波形稳定在某些基本函数上.



让我们用Daubechies 4采样正交滤波器重复此实验. 在N = 8、32、128和512的情况下，分别使用n = 1、3、5和7阶段（每个N可以做的最大数目），我们得到的结果如图9.3所示. 再次，除了归一化，似乎离散波形正在收敛到某些基本函数.似乎可能有一个连续的理论潜伏在滤波器组的后面！



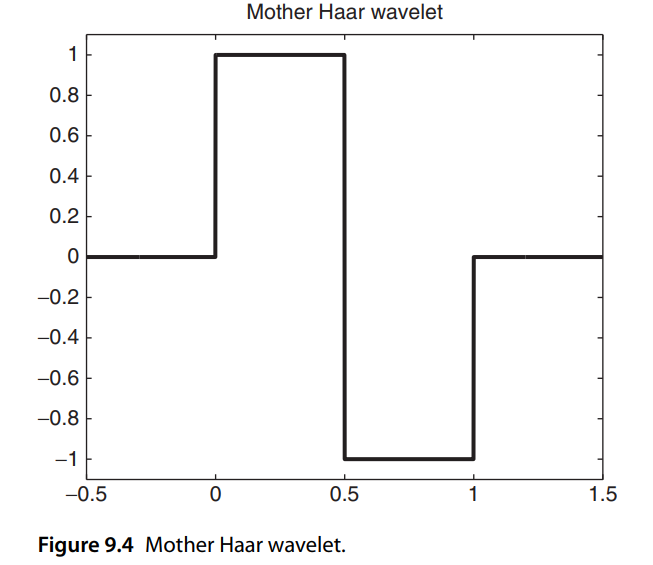
9.2.1 Haar函数作为的基

Haar函数为空间提供了正交基, 但为了简单化, 我们一开始只将注意力放在. 设是定义在上的函数

[0，1]之外的定义是为了方便,我们称为哈尔母波. 在图9.4中, 我们提供了的图像. 与图9.2中图表的相似之处并非巧合!

从我们能构造出函数的无穷集合, 哈尔小波, 在区间上定义为

其中并且. 项用于标准化使得, 我们使用符号表示在区间上的模.为了避免多区间函数产生混淆.我们还将抛出函数



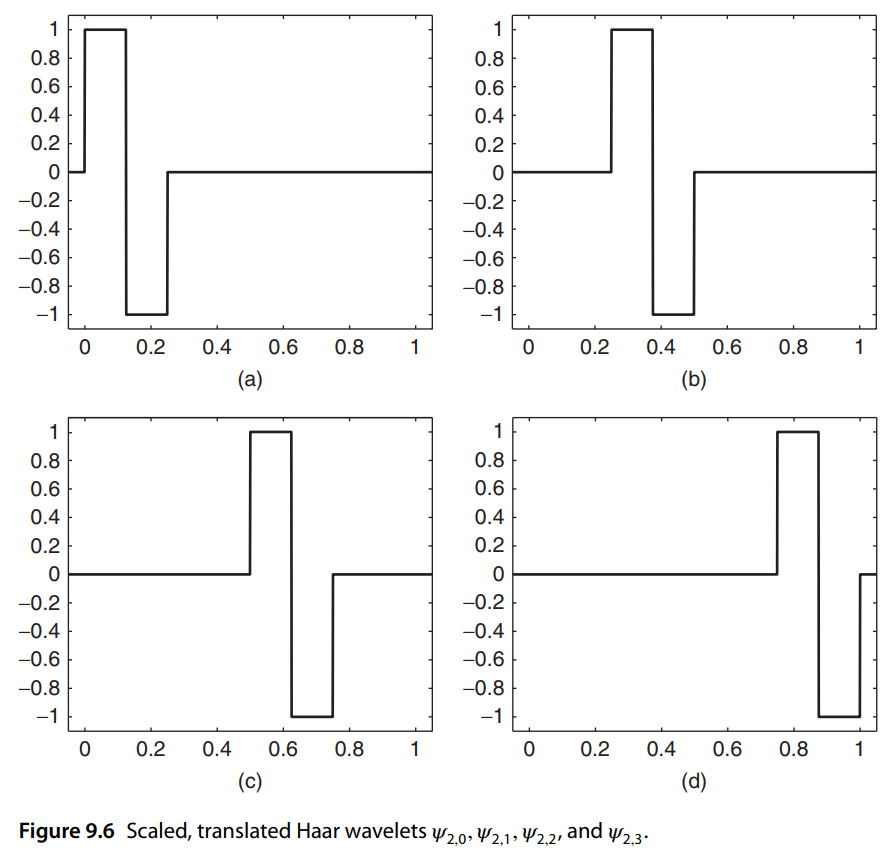
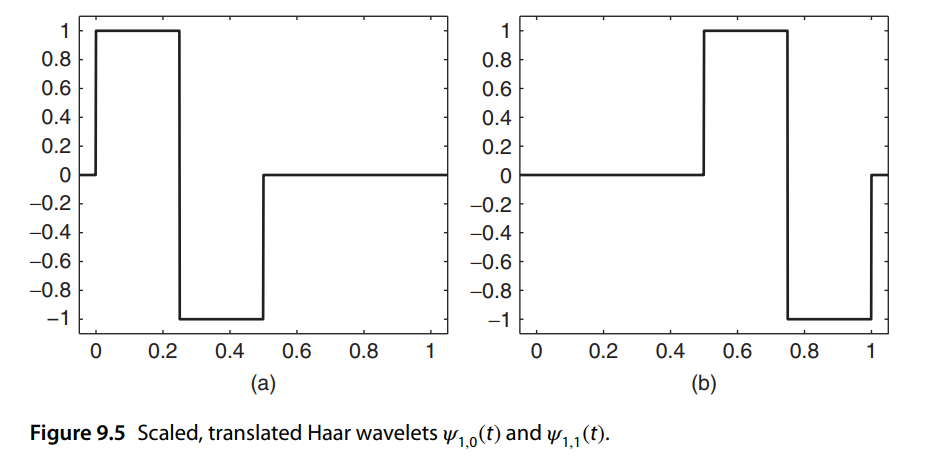
被称为哈尔缩放函数(Haar scaling function); 再一次,我们在[0，1]之外定义只是为了以后的方便. 事实证明, 无穷族与在上构成了正交基.

为了建立直观感觉, 我们绘制了这些基础函数的图像. 缩放函数是常数，因此更加容易, 如图9.4所示. 当时,图9.5展示了和. 这是母波长度的一半, 垂直缩放和水平平移. 当时,图9.6展示了和. 这是母波长度的1/4缩放和平移. 一般地, 公式中可写为直接形式

特别地, 只有在区间不为0, 其长度为, 并且对于任意固定值, 函数可以通过将向右平移个单位获得. 中第一个索引表示缩放,第二个索引控制位置.

2019年11月26日10点52分

在继续之前，定义一些术语将很有帮助.回想一下，集合的闭包由所有组成，可以作为S中元素的极限获得;当然，的闭包包含本身.



定义9.1 在上定义的函数的支持是在非零值上的集合的闭包.如果的支持包含在中，则称函数被支持在集合中.如果在有界区间支持函数,则称具有紧支持.

“紧”一词源于封闭的事实，有界的子集是紧集合的例子.参见[24]或任何有关真实分析的介绍性文字。

很容易看出，如果函数在某个集合中包含支持，则在之外等于零(或未定义).哈尔缩放函数的支持是区间.哈尔小波的支持是闭区间.

**9.2.1.2 正交性**

回想的一下符号

是两个函数在上的内积.

**命题9.1** 集合在上是正交的.

当然，该推论暗示集合S是线性独立的.

**9.2.1.3 上的完整性**

命题9.1中的集合不仅在上是正交的,而且是完整的;使用中元素的线性组合,可以将任意函数近似到模中的任意精度.具体来说,对于每一个,令

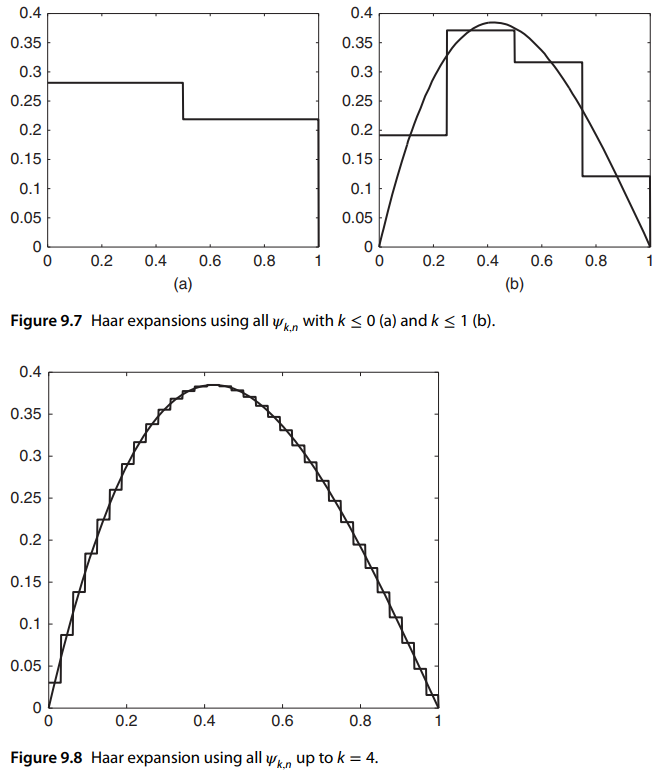
其中并且

因为,因此不需要出现在的分母中.为了方便,我们同样定义.我们取足够大的值使得任意小.我们将要在下面证明该结论,但是现在来看另一个例子.

**例9.1** 设定义在上.只需使用哈尔缩放函数即可获得最粗略的近似值.我们获取,其中, 在区间上，它仅以其自身的平均值近似.

如果我们在公式(9.5)中取,则包含,我们得到的近似展示在图9.7a中.我们简短的定义,是映射到由和(包含两个常函数和)构成的子空间的投影.在图9.7b中,我们从公式(9.5)(其中)获得了近似值,混合了和.这是在常函数在区间上的子空间的投影.在图9.8中,我们展示了使用所有的获得的近似值.看起来我们似乎可以用这种方式近似任何连续函数!在任意情况下,请注意在形式的区间中是恒定的,其中.

**命题9.2** 对任意函数,在任意区间上的近似(常)值等于在该区间的平均值.



**备注9.1** 命题9.2的一个简单推论是,如果函数在每一个区间上是常数,则可以从缩放函数和哈尔小波有限叠加来精确构建,其中.

**定理9.1** 在上的任何连续函数都可以使用公式(9.5)和(9.6)以任意精度近似.

**备注9.2** 这意味着对于任意,任意连续函数和适当大的值,我们获得,并且有

命题9.1的集合S因此在上是完整的.

**9.2.2 哈尔函数作为的正交基** 2020年1月7日10点19分

我们可以使用缩放函数和小波来定义的正交基.集合

在上是正交的.该集合将成为的正交基的一部分.我们还将继续使用函数（等式（9.4））,其中,但现在允许在整个上取值.这意味着允许在实数域上平移.且仍然

设是集合

与命题9.1相同的推理表明是中的正交集合.而且,对于每个,的某些子集为提供正交基.例如,与所有一起,使得是的基,对该集合而言,这仅仅是上述所考虑的上的基和.类似地，和(其中,)是的基,因为它们只是将的基础元素向右平移一个单位.更一般而言,与所有的集合一起,使得使得是的基.

结果,对于任何,任何,以及任何函数,我们可以获得

其中是中元素的线性组合.

**定理9.2** 公式(9.7)的集合是的一个正交基.

因为是一个正交基,则根据定理1.4

则

完全平行于方程和,只是积分间隔不限于.

**9.2.3 投影和近似**

在继续之前,了解内积空间中的“正交投影”概念将很有用.通常,投影的概念在逼近理论,数值分析和应用数学中都起着巨大的作用.为了避免长时间走弯路,我们将仅针对当前情况开发我们需要的东西.我们将在内积空间(允许)中工作,尽管结果适用于更一般的希尔伯特空间[Hilbert space].另外,尽管我们假设空间是无限维的，但下面的所有内容都在起作用;的确,因为和是有限的,并且没有收敛问题,所以更容易.

令为的子空间,其正交基为(或者,基可以是有限的).我们假设所有线性组合

其中是的元素,使得每一个平方和序列对应的一个元素,且反之亦然(回顾定理1.5及其备注).公式右边无穷之和的精确含义是:

**定义9.2** 令为的子空间,并且是如上所述的正交基.如果,则“在上的正交投影”是的元素,定义为

根据贝塞尔[Bessel]不等式(方程(1.55),练习36),我们有,因此由式(9.13)定义的元素确实在中.

和之间的关系是什么?首先,如果,则,因为是的基.如果不在中,那么可以证明是的最佳近似,可以构造为的叠加.换句话说,是中最接近的元素,如以下命题所量化:

2020年1月14日11点13分

命题9.3 设和如定义9.2所示.对于,设是在上的投影,由公式给出.则对所有的成立.等号成立时仅当.(**证明过程没有看懂**)

**9.3 哈尔小波与哈尔滤波器组[Haar Wavelets Versus the Haar Filter Back]**

在继续分析的Haar基础之前,暂停并回顾方程(9.8)到(9.10)所示函数的Haar分解与Haar滤波器组之间的一些相似之处可能会有所帮助.

9.3.1 单阶段情况

9.3.1.1 序列函数

设.为了说明哈尔滤波器组和哈尔小波之间的对比,让我们使用在实线上制造分段常数,

为正数.例如,.我们使用代替公式(9.17)的右侧使公式更优雅.任何都可以生成此类函数,反过来,任意函数在半个整型区间上均为常数,以对应.

9.3.1.2 滤波器分析和合成

我们使通过一阶段过滤器为的哈尔分析滤波,但是有一个小改变.如果我们使用低通系数在哈尔滤波器组和哈尔小波框架之间构建完美对应,但是在哈尔滤波器组中反转的符号,取,.这仍然是一个高通滤波器,如果我们也对合成滤波器求反,那么滤波器组将提供完美的重构.我们获得过滤的,下采样的向量

类似于先前在等式(7.3)和(7.4)中计算的结果.通常,这些向量的分量由下式给出

为了重建,我们首先上采样.上采样的向量具有分量

其中是偶数,当是奇数时.然后应用系数为,(注意的系数是负的)的合成滤波器.这产生

最终,我们利用重构.即

9.3.1.3 Haar扩展和滤波器组并行 2020年2月6日13点24分

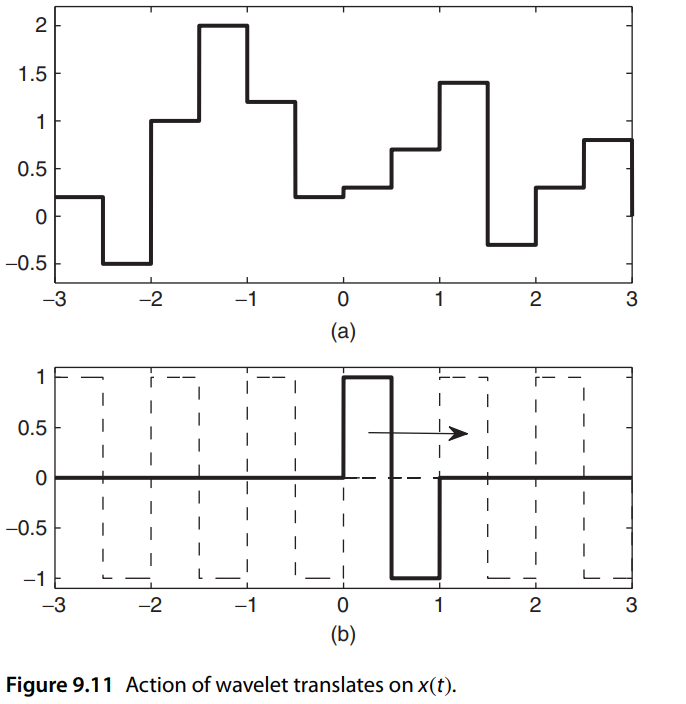
上面的滤波器组操作在等式(9.8)至(9.10)中具有精确的并行度.如果我们用等式(9.9)和(9.10)相对于Haar基础扩展,则可以获得系数

将上面的方程与方程和进行比较,以找到

这些序列是相同的!与缩放函数的整数平移的内积恰好平行于上的低通滤波器的作用.这种情况如图9.10所示.的每个内积与缩放函数的整数平移都具有对的相邻值求平均的效果,就像低通滤波器一样.与最长尺度小波的内积与高通滤波器的作用平行,如图9.11所示.与小波的整数平移的每个内积都具有区分相邻值的效果,就像高通滤波器一样.因为缩放函数和小波一次转换一个单位(而不是),所以“下采样”被内置到该过程中.

与任意小尺度小波的内积为零,其中,因为被构造为在半整数间隔上是恒定的，因此在这样的小尺度上的变化为零.当然,对于更一般的函数,情况并非如此.这就是多级转换起作用的地方,我们将在稍后讨论.

现在考虑使用公式(9.8)从和合成的过程.这精确地反映了使用合成滤波器组从和重建的情况。具体来说，我们从公式(9.8)得到，



对于任何中只有两个右项不为零:即,如果,则变为

因为上的.如果在区间的右半部分,则,其中.这里和.在这种情况下,公式变为

根据公式,这只是根据公式 的陈述.

如果在区间的左半部分,则,其中.这里和.在这种情况下,公式变为

这只是根据公式 的陈述.根据其Haar基系数对信号进行合成,可以精确反映来自合成滤波器组的重构.

9.3.2 多级Haar滤波器组和多分辨率

在多级滤波器组中,我们迭代地将输出的一部分传递回滤波器组,在功能设置上也具有并行性.首先奠定一点基础很有帮助.

9.3.2.1 一些子空间和基

对于定义集合

类似于示例9.2的表示法,只不过现在我们正在研究整个实线.定义子空间

在上对于.集合是的正交基.同样,让我们再定义子空间,该子空间由整数区间上的恒定函数组成.缩放函数将转换为形成的正交基.

值得注意的是,精确地由中那些在区间上恒定的函数组成,对于的形式.要看到这一点,请注意,在任何区间上的任何元素都是元素的有限线性组合,每一个在区间上是恒定的.因此,的元素在这些间隔上也是恒定的.相反,根据命题9.2可以得出,在区间上恒定的任何函数都可以构建为元素的线性组合.

还有另一个“显而易见的”基.定义函数

其中和是公式（9.3）中定义的Haar缩放函数.函数仅是将缩放为基宽度并平移个单位;前面的因子将范数缩放为1.很容易看出该集合

也是的一个正交.基比更简单,因为所有基元素都是相互转化的.但是基具有其自身的某些优点,我们将在下面详细介绍.

9.3.2.2 多分辨率和正交分解

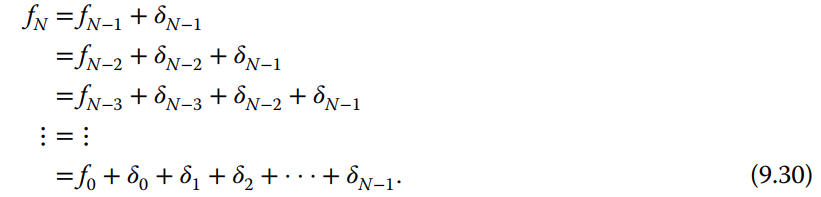
当我们针对的正交基展开函数时,无论该基是还是任何其它正交基,我们都按照公式(9.13)将投影到上.投影是唯一的,并且是子空间中可用的最佳近似.在目前的情况下,定理9.2向我们保证在上随收敛.

当然,在实践中,我们将设置为近似值,以便足够“好”.假设我们手头有近似值,但希望有一个更好的近似值.显然,我们必须计算或更高阶.在目前的情况下,有两种方法可以做到这一点.我们可以使用基来“直接”重新计算,即形成内积然后计算.或者,我们可以将计算为的“细化”.具体来说,我们有

其中

这是由于.公式和显示了如何从较粗略的近似跳至较细的近似;𝛿是必需的校正.

当然,此过程可以迭代.从近似值开始,我们有



公式(9.30)与第7章中的公式(7.28)非常相似,只有一个小差异.在公式式(7.28)中,随着索引的增加,近似值变得更粗糙,而在公式(9.30)中,增加索引对应于越来越精细的特征.

不过,无论哪种情况,关键是我们有一种定量的方法可以关联粗略和精细的近似值,并使用小波从一个逼近到另一个.这是多分辨率的中心思想.在当前情况下,我们有一个嵌套的子空间序列

小波为我们提供了一种通过公式(9.28)和(9.29)将细化为的方法.在计算中包括较短尺度的小波使我们可以将细化为,依此类推.因为,所以, 我们可以迭代地将近似值提高到任何所需的准确度(由范数量化).

9.3.2.3 直接累加

对于任何固定的,令为下列定义的子空间

由尺度小波构成.也就是说,由以下形式的函数组成

其中;从公式(9.11)和(9.12)的意义上理解的无穷和.很容易看出,因为每个子空间中元素都与另一个子空间中的所有元素正交.

根据方程(9.28),我们可以表示,其中和.实际上,和都是唯一的(请参阅练习9);由公式(9.29)给出.由于的每个元素都可以写成的唯一元素与的唯一元素之和,因此我们

我们说子空间是子空间和的“直接和”.让我们做出更一般的定义.

定义9.3 如果和是向量空间的子空间,我们写

表示对于每一个元素存在唯一向量使得

根据定义9.3,公式(9.30)可写为

公式(9.30)中在上的投影可以写成

其中表示在小波空间上的投影(而是在上的投影).每个小波空间投影的相加会增加一层分辨率.而且,根据定理9.2,随着,因此我们可以合理地写

在上述所有情况下,我们不必使用作为基空间;我们也可以写

满足任意,因此

实际上,我们甚至可以取.在这种情况下,由在每个区间上恒定的函数组成，其中,如果则区间长度为.由公式(9.27)定义的函数为空间提供正交基;当时,缩放函数变宽和变低.小波也针对任何定义.

例题9.3 回顾示例9.1,我们在的情况下计算函数的近似值.函数定义在上,但让我们通过零扩展将视为的成员.仅使用Haar比例函数进行近似即可得出近似值

包含小波（此处仅转换很重要）使我们可以通过在区间的左右两半上添加适当的变化来将细化为,如图9.7a所示.如图9.7b所示，包含小波得出.函数和未显示,但图9.8显示了.

**9.3.2.4 连接到多级Haar滤波器组**

让我们再次考虑第9.3节的计算.特别是,考虑一下如果将方程式(9.17)定义的函数投影到不同N值的子空间上,会发生什么情况.使用是没有意义的,因为在此水平下不变.实际上,如果表示在上的投影,则对于所有.

我们使用等式(9.21)计算了将投影到上所需的系数(函数在整数区间上恒定),这些系数就是相关向量低通滤波/下采样的版本.小波系数产生必要的调整,以获得在上的投影;此外,对应的高通滤波/下采样版本.

让我们代之以计算在子空间上的投影,子空间由区间上恒定函数组成.缩放函数基包含

是Haar缩放函数.这些函数的基本宽度为两个单位.将更改为会将函数右移2个单位.一个简单的计算表明我们可以获得系数

最终在上的投影由给出.

我们可以通过将小波丢入基来完善近似.相应的系数由下式给出

然后可以计算出在上的投影

我们可以利用小波进一步细化近似值.系数由公式(9.22)给出,我们发现

如前所述,,因此没有必要进一步细化.

我们已经在等式(9.23)中看到,即,最短尺度小波的系数对应于的高通滤波,下采样版本.那和对应什么?对应向量和或它们的微小变化!在当前情况下(使用Haar滤波器和),很容易检查出

简而言之,尽管不完全相同,但和均由四个连续值的移动平均值组成,而和则由平均/差分连续值的混合组成.(通过足够聪明的索引和重新缩放,我们可以使相应的量相同.)

对于相应的合成滤波器组以及从函数和合成,类似的情况成立.此外,对于三个及更高阶段的滤波器组也存在相似之处.与中的信号一样,对于任何函数,我们都可以在任何程度上产生越来越近似的值(类似于对中的信号进行反复低通滤波).但是,在函数设置中,我们可以采用另一种方法,以生成与原始函数越来越近的值. 在离散信号的情况下,此过程受到采样率的限制.