小波(Wavelets) 2019年11月19日09点56分

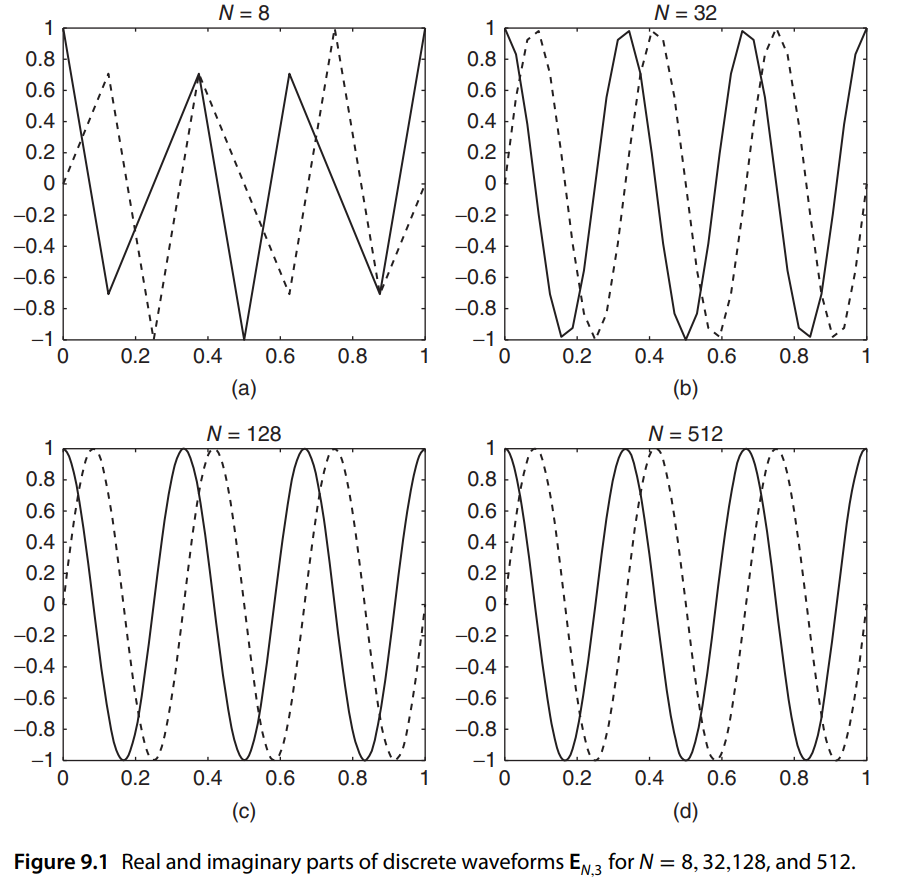
9.1 概览

9.1.1 本章大纲

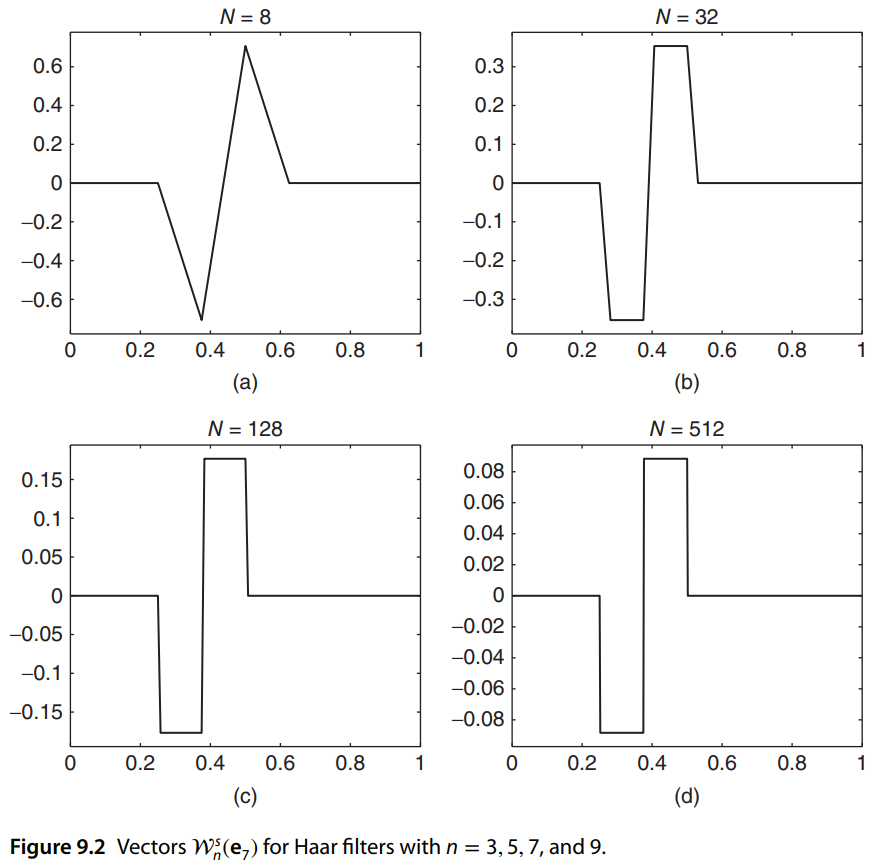
在第7章中，我们定义了滤波器组，并开始在有限维情况下引用“离散小波变换”。在本章中，我们将明确说明什么是小波以及它们与滤波器组有什么关系。本章包含一定数量的不可避免但基本的分析。我们的目标是对小波，它们与滤波器组的关系以及如何发挥作用提供基本的了解。 我们陈述并提供有关小波的基本事实的示例，以及一些严格的证明。但是，我们仅提供有关小波的其他更多技术事实的参考，例如缩放函数的存在，用于计算缩放函数的级联算法的收敛性以及小波的某些属性[12，20]。

9.1.2 从离散到连续

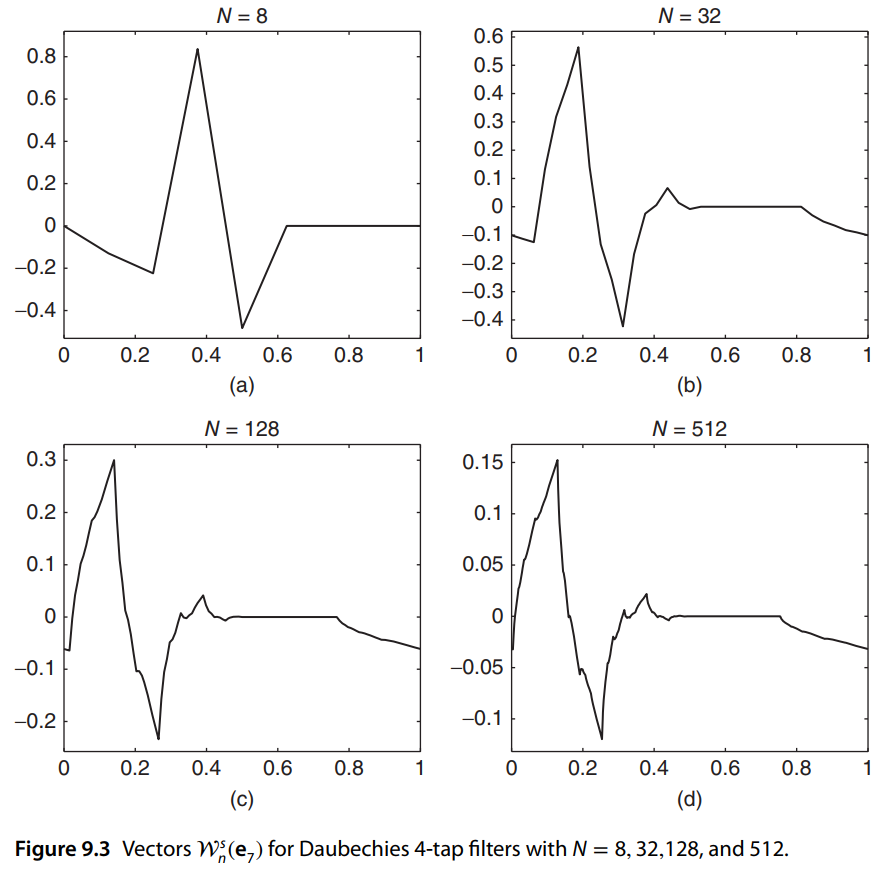
假设通过某种奇迹，我们为采样信号开发了离散傅立叶变换，但是对于连续情况，即傅立叶级数，没有任何理论基础的概念。从第一章我们知道，空间中的任何向量都可以构造成公式(1.22)所定义的基础离散波形的叠加. 当我们固定值, 并绘制出随增加的分量时, 向量似乎稳定在某些“神秘的”基本功能上. 当然，这只是在时间时对进行采样，如图9.1所示，其中. 注意，只是离散傅立叶逆变换（IDFT）矩阵的列, 或者将IDFT应用于中的标准基础向量ek（请参见示例1.18），也可以得到.



即使我们不了解基本函数，图9.1也可能引导我们推测某些函数是离散量的基础. 我们可能会认为一些更通用的连续理论是我们离散计算的基础. 现在，我们可以开发离散傅立叶变换（DFT）而无需了解基本波形的想法似乎有些牵强，但就小波而言，我们正处于这一位置! 为了说明这一点，让我们使用多级正交离散Haar变换（例7.5中的滤波器，信号的周期性扩展）代替DFT再次执行上述实验. 对于和的情况，我们将分别使用和9控制级逆变换的矩阵应用于标准基向量(我们可以在此处执行的最大阶段数为).结果如图9.2所示.在每种情况下，我们绘制分量与的关系.除了在垂直方向上的归一化以外，似乎离散波形稳定在某些基本函数上.



让我们用Daubechies 4采样正交滤波器重复此实验. 在N = 8、32、128和512的情况下，分别使用n = 1、3、5和7阶段（每个N可以做的最大数目），我们得到的结果如图9.3所示. 再次，除了归一化，似乎离散波形正在收敛到某些基本函数.似乎可能有一个连续的理论潜伏在滤波器组的后面！



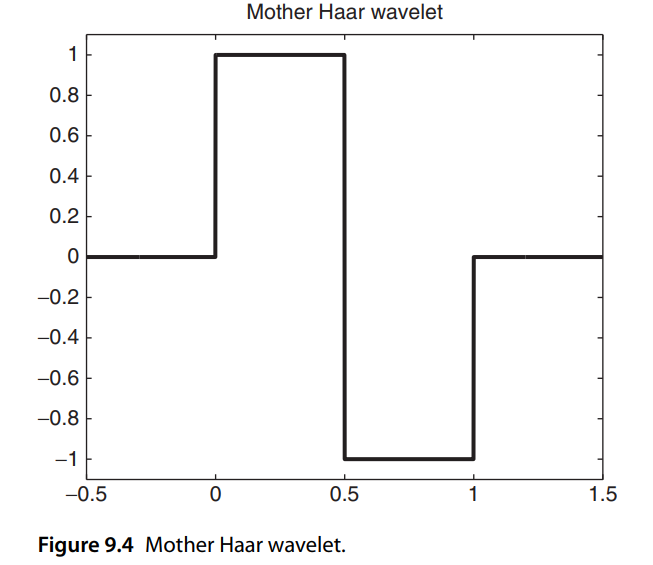
9.2.1 Haar函数作为的基

Haar函数为空间提供了正交基, 但为了简单化, 我们一开始只将注意力放在. 设是定义在上的函数

[0，1]之外的定义是为了方便,我们称为哈尔母波. 在图9.4中, 我们提供了的图像. 与图9.2中图表的相似之处并非巧合!

从我们能构造出函数的无穷集合, 哈尔小波, 在区间上定义为

其中并且. 项用于标准化使得, 我们使用符号表示在区间上的模. 为了避免多区间函数产生混淆.我们还将抛出函数



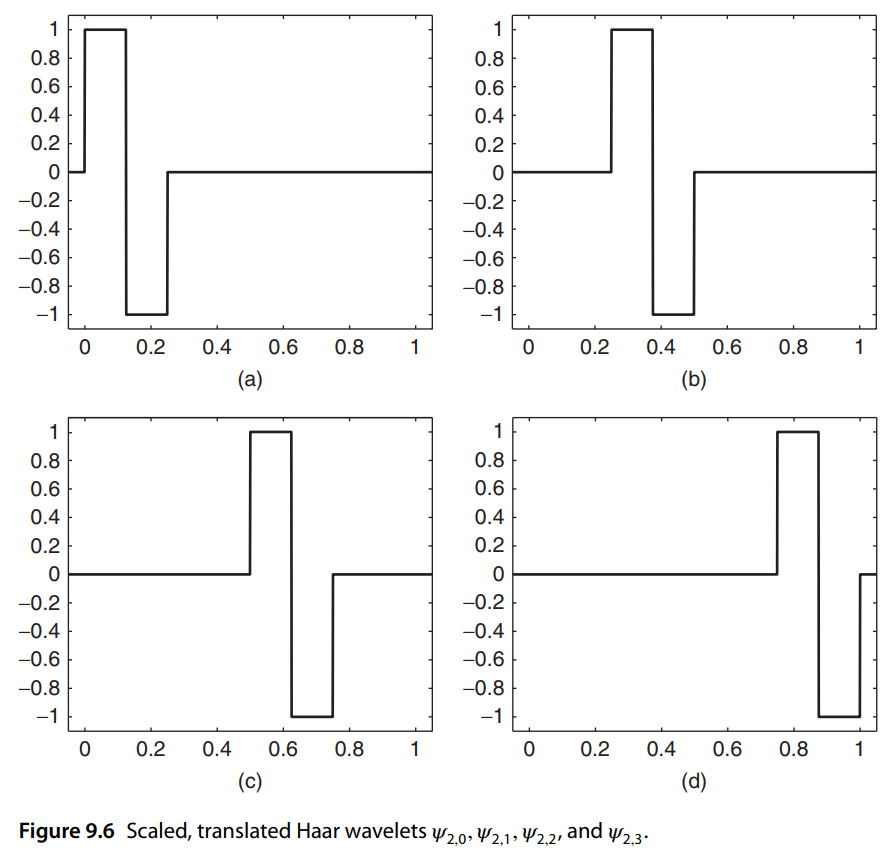
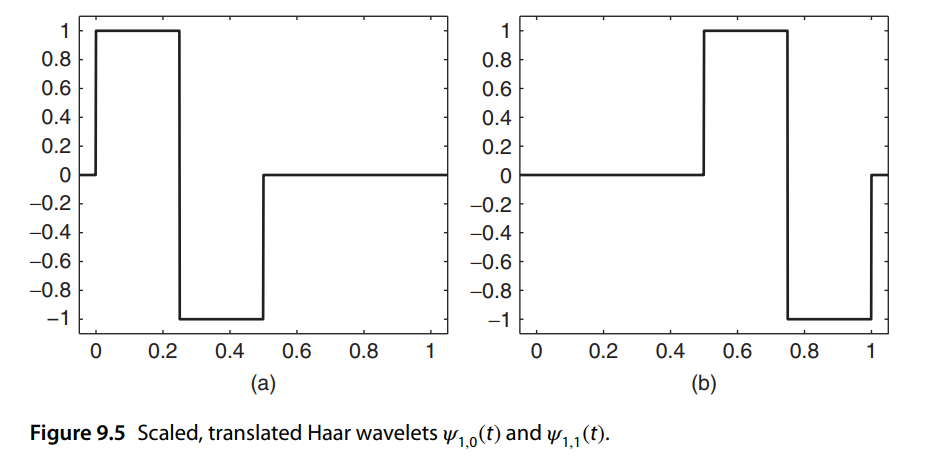
被称为哈尔缩放函数(Haar scaling function); 再一次,我们在[0，1]之外定义只是为了以后的方便. 事实证明, 无穷族与在上构成了正交基.

为了建立直观感觉, 我们绘制了这些基础函数的图像. 缩放函数是常数，因此更加容易, 如图9.4所示. 当时,图9.5展示了和. 这是母波长度的一半, 垂直缩放和水平平移. 当时,图9.6展示了和. 这是母波长度的1/4缩放和平移. 一般地, 公式中可写为直接形式

特别地, 只有在区间不为0, 其长度为, 并且对于任意固定值, 函数可以通过将向右平移个单位获得. 中第一个索引表示缩放,第二个索引控制位置.

2019年11月26日10点52分

在继续之前，定义一些术语将很有帮助.回想一下，集合的闭包由所有组成，可以作为S中元素的极限获得;当然，的闭包包含本身.



定义9.1 在上定义的函数的支持是在非零值上的集合的闭包.如果的支持包含在中，则称函数被支持在集合中.如果在有界区间支持函数,则称具有紧支持.

“紧”一词源于封闭的事实，有界的子集是紧集合的例子.参见[24]或任何有关真实分析的介绍性文字。

很容易看出，如果函数在某个集合中包含支持，则在之外等于零(或未定义).哈尔缩放函数的支持是区间.哈尔小波的支持是闭区间.

**9.2.1.2 正交性**

回想的一下符号

是两个函数在上的内积.

**命题9.1** 集合在上是正交的.

当然，该推论暗示集合S是线性独立的.

**9.2.1.3 上的完整性**

命题9.1中的集合不仅在上是正交的,而且是完整的;使用中元素的线性组合,可以将任意函数近似到模中的任意精度.具体来说,对于每一个,令

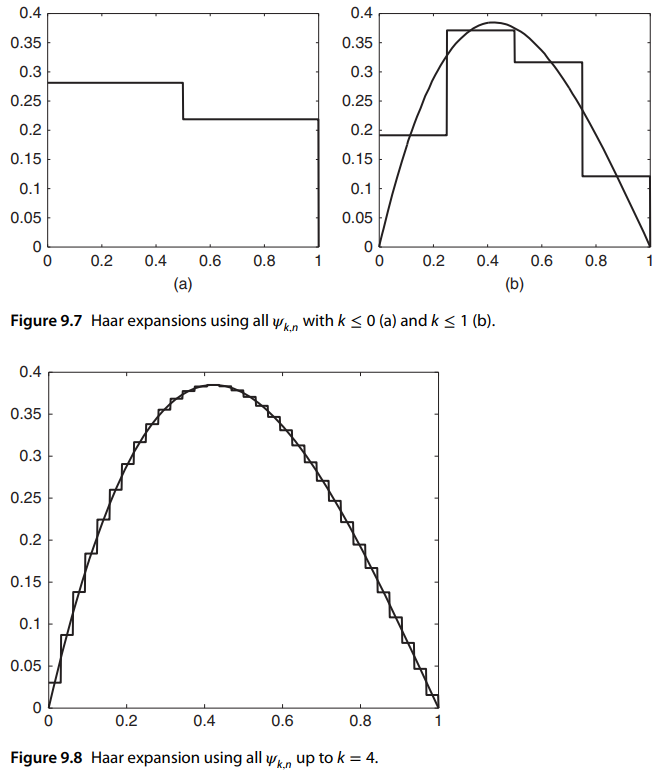
其中并且

因为,因此不需要出现在的分母中.为了方便,我们同样定义.我们取足够大的值使得任意小.我们将要在下面证明该结论,但是现在来看另一个例子.

**例9.1** 设定义在上.只需使用哈尔缩放函数即可获得最粗略的近似值.我们获取,其中, 在区间上，它仅以其自身的平均值近似.

如果我们在公式(9.5)中取,则包含,我们得到的近似展示在图9.7a中.我们简短的定义,是映射到由和(包含两个常函数和)构成的子空间的投影.在图9.7b中,我们从公式(9.5)(其中)获得了近似值,混合了和.这是在常函数在区间上的子空间的投影.在图9.8中,我们展示了使用所有的获得的近似值.看起来我们似乎可以用这种方式近似任何连续函数!在任意情况下,请注意在形式的区间中是恒定的,其中.

**命题9.2** 对任意函数,在任意区间上的近似(常)值等于在该区间的平均值.



**备注9.1** 命题9.2的一个简单推论是,如果函数在每一个区间上是常数,则可以从缩放函数和哈尔小波有限叠加来精确构建,其中.

**定理9.1** 在上的任何连续函数都可以使用公式(9.5)和(9.6)以任意精度近似.

**备注9.2** 这意味着对于任意,任意连续函数和适当大的值,我们获得,并且有

命题9.1的集合S因此在上是完整的.

**9.2.2 哈尔函数作为的正交基** 2020年1月7日10点19分

我们可以使用缩放函数和小波来定义的正交基.集合

在上是正交的.该集合将成为的正交基的一部分.我们还将继续使用函数（等式（9.4））,其中,但现在允许在整个上取值.这意味着允许在实数域上平移.且仍然

设是集合

与命题9.1相同的推理表明是中的正交集合.而且,对于每个,的某些子集为提供正交基.例如,与所有一起,使得是的基,对该集合而言,这仅仅是上述所考虑的上的基和.类似地，和(其中,)是的基,因为它们只是将的基础元素向右平移一个单位.更一般而言,与所有的集合一起,使得使得是的基.

结果,对于任何,任何,以及任何函数,我们可以获得

其中是中元素的线性组合.

**定理9.2** 公式(9.7)的集合是的一个正交基.

因为是一个正交基,则根据定理1.4

则

完全平行于方程和,只是积分间隔不限于.

**9.2.3 投影和近似**

在继续之前,了解内积空间中的“正交投影”概念将很有用.通常,投影的概念在逼近理论,数值分析和应用数学中都起着巨大的作用.为了避免长时间走弯路,我们将仅针对当前情况开发我们需要的东西.我们将在内积空间(允许)中工作,尽管结果适用于更一般的希尔伯特空间[Hilbert space].另外,尽管我们假设空间是无限维的，但下面的所有内容都在起作用;的确,因为和是有限的,并且没有收敛问题,所以更容易.

令为的子空间,其正交基为(或者,基可以是有限的).我们假设所有线性组合

其中是的元素,使得每一个平方和序列对应的一个元素,且反之亦然(回顾定理1.5及其备注).公式右边无穷之和的精确含义是:

**定义9.2** 令为的子空间,并且是如上所述的正交基.如果,则“在上的正交投影”是的元素,定义为

根据贝塞尔[Bessel]不等式(方程(1.55),练习36),我们有,因此由式(9.13)定义的元素确实在中.

和之间的关系是什么?首先,如果,则,因为是的基.如果不在中,那么可以证明是的最佳近似,可以构造为的叠加.换句话说,是中最接近的元素,如以下命题所量化:

2020年1月14日11点13分

命题9.3 设和如定义9.2所示.对于,设是在上的投影,由公式给出.则对所有的成立.等号成立时仅当.(**证明过程没有看懂**)

**9.3 哈尔小波与哈尔滤波器组[Haar Wavelets Versus the Haar Filter Back]**

在继续分析的Haar基础之前,暂停并回顾方程(9.8)到(9.10)所示函数的Haar分解与Haar滤波器组之间的一些相似之处可能会有所帮助.

9.3.1 单阶段情况

9.3.1.1 序列函数

设.为了说明哈尔滤波器组和哈尔小波之间的对比,让我们使用在实线上制造分段常数,

为正数.例如,.我们使用代替公式(9.17)的右侧使公式更优雅.任何都可以生成此类函数,反过来,任意函数在半个整型区间上均为常数,以对应.

9.3.1.2 滤波器分析和合成

我们使通过一阶段过滤器为的哈尔分析滤波,但是有一个小改变.如果我们使用低通系数在哈尔滤波器组和哈尔小波框架之间构建完美对应,但是在哈尔滤波器组中反转的符号,取,.这仍然是一个高通滤波器,如果我们也对合成滤波器求反,那么滤波器组将提供完美的重构.我们获得过滤的,下采样的向量

类似于先前在等式(7.3)和(7.4)中计算的结果.通常,这些向量的分量由下式给出

为了重建,我们首先上采样.上采样的向量具有分量

其中是偶数,当是奇数时.然后应用系数为,(注意的系数是负的)的合成滤波器.这产生

最终,我们利用重构.即