1. Гравитационная постоянная

Локальная гравитационная постоянная (гравитационный параметр) для тел с массами m_1 и m_2

$$\mu = G(m_1 + m_2),$$

если производить вычисления относительно центра тела m_1, и

$$\mu = G\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2},$$

если производить вычисления относительно барицентра системы масс m_1 и m_2.

2. Вычисления характеристик орбит

2.1. Обозначения

Геометрия орбиты

- e – эксцентриситет
- p – фокальный параметр, расстояние до фокуса при истинной аномалии 90°
- a – большая полуось
- r_p – расстояние в перицентре
- r_a – расстояние в апоцентре
- b – малая полуось

Движение по орбите

- n – среднее движение, в угловых единицах / единицу времени (обычно градусы или радианы / сутки)
- T – период обращения
- v_p – скорость в перицентре
- v_a – скорость в апоцентре
- v_∞ – скорость на бесконечности
- $v_{\text{ср}}$ – средняя орбитальная скорость

Сохраняющиеся величины

- ϵ – удельная орбитальная энергия
- h – интеграл энергии

Другие обозначения в формулах

- r – расстояние

- ν – истинная аномалия
- v – скорость

2.2. Связь характеристик и типов орбит

Характеристика	Окружность	Эллипс	Парабола	Гипербола
e	$e = 0$	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
a	$a > 0$	$a > 0$	не определена	$a < 0$
ϵ, h	$\epsilon, h < 0$	$\epsilon, h < 0$	$\epsilon, h = 0$	$\epsilon, h > 0$

2.3. Формулы

2.3.1. Общие формулы

Уравнение конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}$$

Интеграл энергии

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

$$h = 2\epsilon = v^2 - \frac{2\mu}{r}$$

$$h = -\frac{\mu}{a}$$

Скорость

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$v^2 = \frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos\nu + e^2)$$

2.3.2. Непараболические орбиты

Геометрия

	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{r_p}$
$\boldsymbol{p}$	—	$p = a(1 - e^2)$	$p = r_p(1 + e)$
$\boldsymbol{a}$	$a = \dfrac{p}{1 - e^2}$	—	$a = \dfrac{r_p}{1 - e}$
$\boldsymbol{r_p}$	$r_p = \dfrac{p}{1 + e}$	$r_p = a(1 - e)$	—

Среднее движение

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{|a|^3}}$$

$$|a| = \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}}$$

2.3.2.1. Гипербола

Скорость на бесконечности

$$v_\infty = \sqrt{h} = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}$$

2.3.2.2. Эллипс

Геометрия

$$p = r_a(1 - e)$$

$$a = \frac{r_a}{1 + e}$$

$$r_a = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e)$$

$$r_p + r_a = 2a$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Период обращения

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}}$$

2.3.2.3. Окружность

Геометрия

$$r = p = a = r_p = r_a = b$$

Скорость

$$v_p = v_a = v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} = \sqrt{-h}$$

2.3.3. Парабола

Уравнение конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + \cos \nu}$$

Геометрия

$$p = 2r_p$$

$$r_p = \frac{p}{2}$$

Среднее движение

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2r_p^3}}$$

$$r_p = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2n^2}}$$

Скорость

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

– фактически это II космическая скорость;

$$v = \sqrt{\frac{2\mu}{p}(1 + \cos \nu)}$$

Скорость на бесконечности $v_\infty = 0$.

3. Вычисления характеристик орбит по заданным параметрам

<table>
<tr><th></th><th>Парабола через $\boldsymbol{r_p}$</th><th>Гипербола через $\boldsymbol{r_p, e}$</th><th>Эллипс через $\boldsymbol{r_p, e}$</th><th>Эллипс через $\boldsymbol{a, e}$</th><th>Окружность через $\boldsymbol{a}$</th><th>Окружность через $\boldsymbol{T}$</th></tr>
<tr><td>Условия корректности</td><td>$r_p > 0$</td><td>$e > 1, r_p > 0$</td><td>$0 \le e < 1, r_p > 0$</td><td>$0 \le e < 1, a > 0$</td><td>$a > 0$</td><td>$T > 0$</td></tr>
<tr><td>e</td><td>$e = 1$</td><td>set parameter</td><td>set parameter</td><td>set parameter</td><td colspan="2">$e = 0$</td></tr>
<tr><td>p</td><td>$p = 2r_p$</td><td colspan="2">$p = r_p(1 + e)$</td><td>$p = a(1 - e^2)$</td><td colspan="2">$p = a$</td></tr>
<tr><td>a</td><td>—</td><td colspan="2">$a = \frac{r_p}{1 - e}$</td><td>set parameter</td><td>set parameter</td><td>$a = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}}$</td></tr>
<tr><td>b</td><td colspan="2">—</td><td>$b = r_p\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$</td><td>$b = a\sqrt{1 - e^2}$</td><td colspan="2">$b = a$</td></tr>
<tr><td>r_p</td><td>set parameter</td><td>set parameter</td><td>set parameter</td><td>$r_p = a(1 - e)$</td><td colspan="2">$r_p = a$</td></tr>
<tr><td>r_a</td><td colspan="2">—</td><td>$r_a = r_p\frac{1 + e}{1 - e}$</td><td>$r_a = a(1 + e)$</td><td colspan="2">$r_a = a$</td></tr>
<tr><td>r_∞</td><td colspan="2">$r_\infty = +\infty$</td><td colspan="4">—</td></tr>
<tr><td>n</td><td>$n = \frac{1}{r_p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$</td><td colspan="4">$n = \frac{\sqrt{|h|}}{|a|}$</td><td>$n = \frac{2\pi}{T}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Парабола через $\boldsymbol{r_p}$</th><th>Гипербола через $\boldsymbol{r_p, e}$</th><th>Эллипс через $\boldsymbol{r_p, e}$</th><th>Эллипс через $\boldsymbol{a, e}$</th><th>Окружность через $\boldsymbol{a}$</th><th>Окружность через $\boldsymbol{T}$</th></tr>
<tr><td>T</td><td colspan="2">—</td><td colspan="3">$T = \frac{2\pi}{n}$</td><td>set parameter</td></tr>
<tr><td>v_p</td><td>$v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_p}} = \sqrt{\frac{4\mu}{p}}$</td><td colspan="2">$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{r_p}(1+e)}$</td><td>$v_p = \sqrt{\lvert h\rvert \frac{1+e}{1-e}}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$v_p = v_a = v_{\text{ср}} = \sqrt{\lvert h\rvert}$</td></tr>
<tr><td>v_a</td><td colspan="2">—</td><td>$v_a = (1-e)\sqrt{\frac{\mu}{r_p(1+e)}}$</td><td>$v_a = \sqrt{\lvert h\rvert \frac{1-e}{1+e}}$</td></tr>
<tr><td>v_∞</td><td>$v_\infty = 0$</td><td>$v_\infty = \sqrt{h}$</td><td colspan="4">—</td></tr>
<tr><td>h</td><td>$h = 0$</td><td colspan="2">$h = -\frac{\mu}{r_p}(1-e)$</td><td colspan="3">$h = -\frac{\mu}{a}$</td></tr>
</table>

Эллипс через $\boldsymbol{r_p, r_a}$

Условия корректности: $r_p > 0, r_a \geq r_p$

<table>
<tr><th colspan="2">Формулы, которые отличаются от других вариантов</th><th rowspan="2">Формулы, которые общие с другими вариантами (среднее движение, период обращения, интегралы)</th></tr>
<tr><th>Вспомогательные величины</th><th>Геометрические характеристики и скорости</th></tr>
<tr><td>$1 + e = \frac{2r_a}{r_a + r_p}$</td><td>$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$</td><td>$n = \frac{\sqrt{\lvert h\rvert}}{\lvert a\rvert}$</td></tr>
</table>

$1 - e = \frac{2r_p}{r_a + r_p}$ $1 - e^2 = (1+e)(1-e) = \frac{r_a r_p}{a^2}$ $\sqrt{1 - e^2} = \frac{\sqrt{r_a r_p}}{a}$	$p = \frac{2r_a r_p}{r_a + r_p}$ $a = \frac{r_a + r_p}{2}$ $b = \sqrt{r_a r_p}$ $v_p = \sqrt{\lvert h\rvert \frac{r_a}{r_p}}$ $v_a = \sqrt{\lvert h\rvert \frac{r_p}{r_a}}$	$T = \frac{2\pi}{n}$ $h = -\frac{\mu}{a}$

4. Уравнение Кеплера

4.1. Эллипс

Определив эксцентрическую аномалию E, мы можем вычислить расстояние r без напрямую:

$$x = a(\cos E - e),$$

$$y = a\sqrt{1 - e^2}\sin E.$$

Отсюда по теореме Пифагора

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2((\cos E - e)^2 + (1 - e^2)\sin^2 E).$$

Раскроем выражение в скобках:

$$(\cos E - e)^2 + (1 - e^2)\sin^2 E = \cos^2 E - 2e\cos E + e^2 + \sin^2 E - e^2\sin^2 E =$$

$$= 1 - 2e\cos E + e^2(1 - \sin^2 E) = 1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E = (1 - e\cos E)^2$$

Отсюда:

$$r^2 = a^2(1 - e\cos E)^2$$

$$r = a(1 - e\cos E)$$

4.2. Гипербола

Определив эксцентрическую аномалию H, мы можем вычислить расстояние r без напрямую:

$$x = |a|(e - \cosh H),$$

$$y = |a|\sqrt{e^2 - 1}\sinh H.$$

Отсюда по теореме Пифагора

$$r^2 = x^2 + y^2 = |a|^2((e - \cosh H)^2 + (e^2 - 1)\sinh^2 H).$$

Раскроем выражение в скобках:

$$(e - \cosh H)^2 + (e^2 - 1)\sinh^2 H = e^2 - 2e\cosh H + \cosh^2 H + e^2\sinh^2 H - \sinh^2 H =$$

$$= e^2(1 + \sinh^2 H) - 2e\cosh H + 1 = e^2(1 + \cosh^2 H - 1) - 2e\cosh H + 1 =$$

$$= e^2\cosh^2 H - 2e\cosh H + 1 = (e\cosh H - 1)^2$$

Отсюда:

$$r^2 = |a|^2(e\cosh H - 1)^2$$

$$r = |a|(e\cosh H - 1)$$