Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

8 февраля 2022 г.

План

План

Первая часть лекции посвящена функция издержек (не путать с функцией расходов) и минимизация издержек. В частности, мы выведем выпуклость функции издержек по уровню производства, также некоторые приложения.

Вторая часть лекции посвящена более аксиоматической постановке вопроса. Появятся аксиомы производителя, подобно тому, что мы видели в теории потребителя. Эта часть лекции нужна, также, для обоснования вогнутости производственных функций, на которые мы опирались в первой части лекции.

Функция издержек

Функция издержек

Точно так же, как в теории потребителя поведение агента задавалось функцией полезности, в теории производителя поведение агента задается функцией издержек $TC(p, y)$.

Здесь y это количество произведенного товара, а $\vec{p}$ это вектор цен на факторы производства. Не путайте функцию издержек с функцией расходов $E(\vec{p}, \bar{U})$. Обратите внимание, что я буду теперь везде использовать векторные обозначения.

Функция издержек

У нас будут два набора цен: $\vec{q}$ на конечные товары и $\vec{p}$ на факторы. Также, будут два набора координат: $\vec{y}$ для конечных товаров и $\vec{x}$ для факторов. Но в первой части лекции я, для простоты, буду говорить только об одном произведенном товаре.

Таким образом, суммарная прибыль фирмы производителя можно записать в виде:

$$\pi(\vec{p}, q, y) = -FC - \vec{p} \cdot \vec{x} + qy = qy - TC(p, y)$$

Постарайтесь не запутаться.

Функция издержек

Definition 1

Функция издержек (общие издержки) TC определяется как суммарные издержки на все факторы производства, связанные с эффективным производством y единиц конечного товара, плюс, возможно, фиксированные издержки (которые обозначаются FC).

Что значит **эффективность**? Это значит, что из всех производственных планов выбирается тот, который минимизирует издержки.

Функция издержек

То есть функция издержек это, на самом деле, целевая функция следующей оптимизационной задачи:

$$TC(p, y) = \min_{\vec{x}}(FC + \vec{p} \cdot \vec{x}) \quad s.t. \quad F(\vec{x}) \geqslant y,$$

где $\vec{x}$ это вектор использованных факторов производства, а F это **производственная функция**, которая переводит факторы производства $\vec{x}$ в конечный товар y.

То есть функция издержек это тоже огибающая.

Функция издержек

Нас интересует вопрос выпуклости (или вогнутости) функции издержек по ценам факторов $\vec{q}$ и, отдельно, по уровню производства y.

Для простоты, опустим фиксированные издержки.

Lemma 2

Функция издержек *$TC(p, y)$*

- *вогнута по ценам факторов $\vec{p}$*
- *выпукла по уровню производства y,*

если сама производственная функция F:

$$F(\vec{x}) = y$$

вогнута (именно вогнута, квази недостаточно).

Функция издержек

Найдем седловую точку лагранжиана. Но надо аккуратно записать его так, чтобы при выходе за ограничение вас наказали бесконечно большим, положительным значением λ

$$\min_{\vec{x}\geqslant 0}\max_{\lambda\geqslant 0}\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \vec{p}\cdot\vec{x} - \lambda\cdot(F(\vec{x}) - y)$$

Заметим, что лагранжиан линеен по параметрам задачи $\vec{p}$ и y. Это значит чуть больше чем обычно...

Функция издержек

Это значит, что опорные функции - линейны по параметрам.

Огибающие линейного семейства опорных функций они всегда либо выпуклы либо вогнуты, в зависимости от того, с какой стороны происходит огибание. Также, надо помнить, что огибание происходит именно в пространстве параметров, потому что по $\vec{x}$ опорные функции вовсе не линейные.

Также, надо понять, с какой стороны происходит огибание.

Функция издержек

$$\min_{\vec{x} \geqslant 0} \max_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \vec{p} \cdot \vec{x} - \lambda \cdot (F(\vec{x}) - y)$$

Поскольку мы минимизируем $\vec{p} \cdot \vec{x}$, по ценам факторов огибание получается снизу, поэтому функция издержек вогнута по $\vec{p}$.

Функция издержек

$$\min_{\vec{x}\geqslant 0} \max_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \vec{p} \cdot \vec{x} - \lambda \cdot F(\vec{x}) + \lambda \cdot y$$

С другой стороны, по уровням производства огибание происходит сверху, главное не перепутать знак, поэтому функция издержек выпукла по y.

Функция издержек

Осталось убедиться, что вообще можно пользоваться методом Лагранжа здесь. Ответ простой - задача выпуклая, потому что F вогнутая.

Но почему недостаточно квази-вогнутости F?

Ответ - линейные члены в лагранжиане не могут поломать вогнутость, но они могут сломать квази-вогнутость.

Максимизация прибыли

Максимизация прибыли

Теперь, когда у фирмы есть на руках выпуклая функция издержек, она может промаксимизировать свою прибыль по уровню производства.

$$\max_{y} \pi, \quad \pi(\vec{p}, q, y) = qy - TC(\vec{p}, y)$$

Обратите внимание, что эта задача - выпуклая.

Условия первого порядка гласят, что оптимальный уровень производства во внутренней точке y^* удовлетворяет:

$$q = MC(\vec{p}, y^*).$$

Definition 3

Маржинальные издержки MC определяются как приращение функции издежек при увеличении производства, то есть:

$$MC = \frac{\partial}{\partial y} TC(\vec{p}, y).$$

Максимизация прибыли

Получается, что фирма максимизирует прибыль в два шага: сначала для каждого потенциального уровня производства она оптимально подбирает ресурсы, а затем, оптимизирует по уровню производства.

Конечно же, прибыль можно было максимизировать сразу:

$$\max_{x,y}(-\vec{p} \cdot \vec{x} + qy) \quad s.t. \quad F(\vec{x}) \geqslant y,$$

но тогда не было бы так интрересно.

Труд, капитал и Кобб-Дуглас

Труд, капитал и Кобб-Дуглас

Типичная постановка задачи фирмы это когда есть два фактора производства: k - капитал и l - труд. Можно сказать, что рыночные цены этих факторов это r - цена аренды капитала и w - зарплата, соответственно.

Тогда задача фирмы:

$$\max_{y} qy - TC(y), \quad TC(y) = \min_{k,l} rk + wl, \quad s.t. \quad F(k,l) \geqslant y$$

Введем дополнительные обозначения

Definition 4

Предельная отдача на капитал MPK и **предельная отдача на труд** MPL это частные производные производственной функции по капиталу и труду соответственно:

$$MPK = \frac{\partial}{\partial k} F(k, l), \quad MPL = \frac{\partial}{\partial l} F(k, l)$$

Труд, капитал и Кобб-Дуглас

Легко видеть из метода Лагранжа, что в оптимуме, верно:

$$r = \lambda \cdot MPK, \quad w = \lambda \cdot MPL \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{w} = \frac{MPK}{MPL},$$

ведь это всего лишь условия первого порядка для минимизации издержек.

Было бы удобно, если наша производственная функция обладала свойством, позволяющим относительно легко считать MPK и MPL.

Оказывается, такая функция есть, и она называется Кобб-Дуглас.

Труд, капитал и Кобб-Дуглас

Definition 5

Производственная функция называется **Кобб-Дуглас**, если

$$F(k, l) = k^{\alpha} l^{\beta}.$$

Легко видеть, что у Кобб-Дугласа:

$$MPK = \alpha \frac{y}{k}, \quad MPL = \beta \frac{y}{l}$$

Труд, капитал и Кобб-Дуглас

Другими словами,

$$rk^* = \alpha \cdot \lambda y, \quad wl^* = \beta \cdot \lambda y$$

то есть, общие расходы фирмы распределяются между капиталом и трудом в пропорциях α, β. Таким образом, можно, например, откалибровать производственную функцию, обладая доступом к нехитрым налоговым отчетностям фирм.

Труд, капитал и Кобб-Дуглас

Далее, легко видеть, что

$$(rk)^{\alpha} = (\alpha \cdot \lambda y)^{\alpha}, \quad (wl)^{\beta} = (\beta \cdot \lambda y)^{\beta}$$

подставляя в производственную функцию, мы получаем

$$r^{\alpha} w^{\beta} y = \alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \lambda y^{\alpha+\beta}$$

откуда легко вычисляется множитель Лагранжа λ^*.

Труд, капитал и Кобб-Дуглас

Наконец, функция расходов вычисляется как:

$$TC(r, w, y) = rk^* + wl^* = (\alpha + \beta)\lambda^* y$$

от которой мы, конечно, ожидаем, что она будет выпуклой.

Вопрос: при каких значениях α, β, функция издержек выпуклая?

Вопрос: Что произойдет, если $\alpha + \beta = 1$?

Разные спросы

Разные спросы

Рассмотрим задачу минимизации издержек

$$\min_{\vec{x}} \vec{p} \cdot \vec{x} \quad s.t. \quad F(\vec{x}) \geqslant y,$$

Definition 6

Назовем условным спросом $\tilde{x}(p, y)$ на факторы производства - решение задачи минимизации издержек, а обычным спросом

$$x^*(p, q) = \tilde{x}(p, y^*(p, q)).$$

полное решение задачи максимизации прибыли.

Краткосрочная перспектива

Краткосрочная перспектива

В краткосрочной перспективе, некоторые факторы производства нельзя оптимизировать. В зависимости от страны, это может быть либо труд либо капитал. В США рынок труда очень динамичен, поэтому считается кто капитал зафиксирован. Во многих странах Европы, увольть сотрудника, наоборот, гораздо сложнее чем избавиться от капитала.

И обычный, и условный спрос, можно найти в краткосрочном периоде. Это означает, что тот фактор, что менять нельзя, необходимо зафиксировать на каком то уровне. Например, мы можем зафиксировать капитал k на уровне $\hat{k}$.

Далее, необходимо перерешать все так, будто $\hat{k}$ это параметр задачи.

Definition 7

Назовем условным спросом в краткосрочном периоде $\tilde{x}_k(p, y, \hat{k})$ на факторы производства - решение задачи минимизации издержек, а обычным спросом в краткосрочном периоде

$$x_k^*(p, q, \hat{k}) = \tilde{x}_k(p, y^*(p, q, \hat{k}), \hat{k}).$$

Как связаны эти четыре спроса?

Краткосрочная перспектива

Обычный спрос - это условный спрос, в который подставили оптимальный уровень производства. А условный спрос - это условный спрос в краткосрочном периоде, в который подставили оптимальную условную k.

Также, обычный спрос - это обычный спрос в краткосрочном периоде, в который подставили оптимальную k.

Соответственно, вы можете решать задачу постепенно: сначала найти все в краткосрочном периоде, а потом дополнительно про-оптимизировать по фактору, который был зафиксирован.

Убывающая отдача от масштаба

Убывающая отдача от масштаба

На самом деле, можно заметить, что как бы ни была устроена минимизация издержек, нам абсолютно необходимо, чтобы в задаче максимизации прибыли:

$$\max_{y} \pi, \quad \pi(\vec{p}, q, y) = qy - TC(\vec{p}, y)$$

функция издержек была (желательно строго) выпуклой, иначе можно получить бесконечную прибыль.

Фирмы, обладающие вогнутой производственной функцией, обладают также выпуклой по y функцией издержек, это мы доказали.

Убывающая отдача от масштаба

На практике это означает, что когда фирма растет, ее общая эффективность постепенно падает, то есть, имеет место **убывающая отдача от масштаба**.

Считается, что все фирмы сначала проходят период быстрого роста, от стартапов и бутиков до компаний средних размеров, и затем испытывают сложности при дальнейшем расширении. Выходя за пределы своих локальных рынков, они принимают корпоративную структуру и становятся медленными и неповоротливыми, теряя эффективность.

Убывающая отдача от масштаба

Есть, конечно, исключения. Например, компания Google давно вышла за пределы своего штата и, даже, страны. Это говорит от том, что технология обработки поисковых запросов, скорее всего, обладает возрастающей отдачей от масштаба.

Оптимальное распределение производства

Оптимальное распределение производства

Предположим, что у нас есть два завода, обладающие производственными технологиями:

$$y_1 = F_1(\vec{x}), \quad y_2 = F_2(\vec{x}).$$

Как эффективно разделить уровень производства $y = y_1 + y_2$ и чему будет равна функция издержек $TC(y)$?

Как это соотносится с индивидуальными функциями издержек заводов $TC_1(y_1)$ и $TC_2(y_2)$?

Оптимальное распределение производства

Чтобы ответить на этот вопрос, выпишем лагранжиан:

$$\mathcal{L} = TC(y_1) + TC(y_2) - \lambda(y_1 + y_2 - y)$$

То есть, мы минимизируем суммарные издержки так, чтобы достичь определенного суммарного уровня производства.

Оптимальное распределение производства

Выпишем условия первого порядка:

$$MC(y_1) = \lambda = MC(y_2), \quad y_1 + y_2 = y.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Lemma 8

Эффективное производство устроено так, что маржинальные издержки равны друг другу.

Оптимальное распределение производства

К примеру, если у нас есть выпуклые издержки $TC_1 = y^2$ и $TC_2 = y^3$ то необходиму решить систему:

$$2y_1^* = 3(y_2^*)^2, \quad y = y_1^* + y_2^*$$

и затем определить функцию издержек двух заводов, как:

$$TC(y) := TC_1(y_1^*) + TC_2(y_2^*).$$

Оптимальное распределение производства

Обратите внимание, что мы не перерешиваем для каждого завода, как правильно закупить факторы производства $\vec{x}$, а только пользуемся их функциями издержек.

Это сильный ход, потому что мы не потребовали производственную функцию F_i каждого завода, а воспользовались более простым объектом TC_i, который проще откалибровать.

Это настоящая экономика.

Производственные цепочки

Производственные цепочки

Предположим, что у нас есть производственная функция

$$y = F(k, l)$$

и цены факторов производства равны r, w соответственно. Мы уже знаем, как решать такую задачу.

Однако, предположим, что мы обладаем также технологией с убывающей отдачей, которая позволяет нам производить k, l со следующими функциями издержек:

$$TC^K(k), \quad TC^L(l).$$

Как решать такую задачу?

Производственные цепочки

Если мы покупаем k, l на рынке, то мы платим rk и wl, условия первого порядка нам известны. Если мы производим k, l сами то мы платим $TC^K(k) + TC^L(l)$.

Сравним Лагранжианы:

$$\mathcal{L}^1 = TC^K(k) + TC^L(l) - \lambda(F(k,l) - y)$$
$$\mathcal{L}^2 = rk + wl - \lambda(F(k,l) - y).$$

Если случится так, что старые k^*, l^* такие, что

$$TC^K(k^*) + TC^L(l^*) < rk^* + wl^*$$

то очевидно, что дешевле произвести все самому, чем покупать на рынке. Но сколько именно?

Производственные цепочки

Интуиция подсказывает, что из-за убывающей отдачи от масштаба, вы захотите произвести какое то количество $\hat{k}, \hat{l}$ сами, а остальное купить на рынке.

Давайте запишем Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = TC^K(\hat{k}) + TC^L(\hat{l}) + r(k - \hat{k}) + w(l - \hat{l}) - \lambda(F(k, l) - y).$$

Производственные цепочки

Тогда условия первого порядка будут:

$$MC^K(\hat{k}) = r, \quad MC^L(\hat{l}) = w, \quad \frac{r}{w} = \frac{MPK}{MPL}.$$

Мы доказали еще одно любопытное свойство.

Lemma 9

Если фактор производства x_i можно либо купить по цене p_i либо (вогнуто) произвести самостоятельно с функцией расходов $TC^i(x_i)$, то он производится согласно условиям первого порядка:

$$p_i = MC^i(x_i)$$

а все остальное закупается по рыночным ценам.

Экспорт и потребление

Экспорт и потребление

Предположим, что фирма, производящая товар $\vec{y}$ с функцией издержек $TC(\vec{y})$, может либо отправить его на экспорт (продать свой товар на рынке) по цене $\vec{q}$ либо потребить его сама (раздать рабочим, установить в офисе) с вогнутой полезностью $U(\vec{y})$.

Как будет выглядеть оптимальное поведение фирмы?

Экспорт и потребление

Обозначим внутреннее потребление товара за $\hat{y}$, тогда:

$$\pi = U(\hat{y}) + \vec{q} \cdot (\vec{y} - \hat{y}) - TC(\vec{y}).$$

Условия первого порядка гласят:

$$\nabla U = \vec{q}, \quad \vec{q} = \nabla T(\vec{y}),$$

таким образом...

Экспорт и потребление

таким образом...

Lemma 10

Если товар можно потребить внутри фирмы, то он производится в том же объеме, как если бы такой возможности не было. Доля товара, потребленного внутри фирмы, совпадает с решением задачи потребителя, как если бы он просто покупал этот товар в магазине.

Кривые производственных возможностей

Кривые производственных возможностей

До сих пор, мы моделировали производство так, что из нескольких факторов, например, труд и капитал, производится один единственный конечный продукт по технологии

$$F(\vec{x}) \geqslant y,$$

где F - вогнутая производственная функция.

Кривые производственных возможностей

Альтернативный подход к моделированию производства - это когда много конечных продуктов $\vec{y}$ производится из одного абстрактного фактора x, в этом случае технология описывается

$$x \geqslant G(\vec{y}),$$

где G - функция, линии уровня которой описывают всевозможные комбинации конечных товаров, которые можно произвести с фиксированным количеством фактора x.

Эти линии уровня называются **кривыми производственных возможностей**.

Кривые производственных возможностей

Попробуем сформулировать задачу минимизации издержек:

$$\min_{\vec{x}\geqslant 0}\max_{\lambda\geqslant 0}\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = px - \lambda(x - G(\vec{y}))$$

Легко видеть, что для повторения тех же шагов, что с вогнутой производственной функцией F, нам тут необходимо, чтобы G была квази-выпуклой по y.

Кривые производственных возможностей

Выпуклой, потому что поменялся знак перед интересующей нас функцией в Лагранжиане. Квази, потому что, в отличие от предыдущего Лагранжиана:

$$\min_{\vec{x} \geqslant 0} \max_{\lambda \geqslant 0} \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \vec{p} \cdot \vec{x} - \lambda \cdot (F(\vec{x}) - y)$$

в котором присутствовала линейная деформация по x, способная поломать квази-вогнутость, в случае КПВ такой деформации нет.

Кривые производственных возможностей

Lemma 11

Функция издержек

- *вогнута по ценам факторов $\vec{p}$*
- *выпукла по уровню производства y,*

если функция G, задающая кривые производственных возможностей:

$$x = G(\vec{y})$$

квази-выпукла.

Перерыв