Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

9 февраля 2022 г.

Технологические множества

Технологические множества

В первой части мы фокусировались на минимизации издержек, однако, это накладывало определенные ограничения, поскольку описать технологию просто можно одним из двух способов:

$$x = G(\vec{y}), \quad F(\vec{x}) = y,$$

то есть либо один фактор, либо один конечный товар. Нам хотелось бы описать более сложные технологии, в которых есть много факторов и много конечных товаров.

Технологические множества

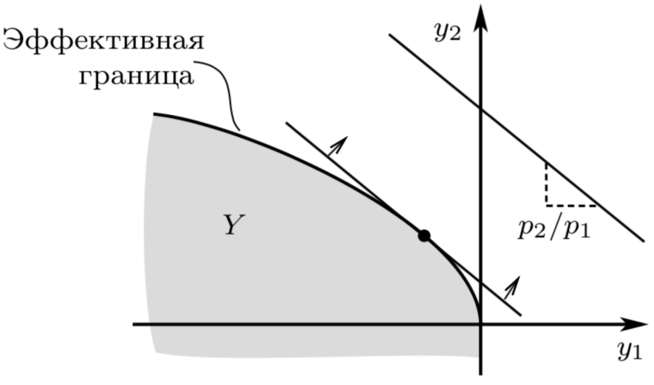
Оказывается, что удобнее всего отказаться от разделения между факторами и товарами и думать о них одинаково, а наша технология будет описывать как можно одни товары превращать в другие.

Пусть есть n товаров, которые можно произвести в количествах, описываемых точкой в $\mathbb{R}^n$ (не в $\mathbb{R}^n_+$), поскольку какие-то товары окажутся факторами, потраченными при производстве других.

Технологические множества

Одна технология это одна точка. Множество всех допустимых технологий это область в $\mathbb{R}^n$, то есть **технологическое множество**. Эффективное производство (то, что раньше описывалось F или G) теперь описывается границей этого множества, то есть **технологической границей**, см. иллюстрацию ниже.

Технологические множества



Формально технологическая граница состоит из точек $y \in Y$ таких, что не существует $y' \in Y$, так что $y'_i \geqslant y_i$ по всем координатам i и $y'_j > y_j$ по хотя бы одной координате j.

Lemma 1

Технологическая граница ищется как все точки $z \in Y$ т.ч.

$$z \in argmax\, \vec{q} \cdot \vec{y}, \quad \vec{y} \in Y,$$

для хотя бы одного вектора цен $\vec{q} \geqslant 0, \vec{q} \neq 0$.

Аксиомы производителя

Аксиомы производителя

Фирма воспринимает технологическое множество и максимизирует прибыль:

$$\vec{q} \cdot y \to \max, \quad \vec{y} \in Y.$$

Чтобы задача была выпуклой, нам понадобятся некоторые аксиомы.

Аксиомы производителя

Definition 2

Аксиомы технологического множества Y:

- A1: Y содержит $\vec{0}$ - A2: свобода расходования

$$y \in Y, y' < y \quad \Rightarrow \quad y' \in Y$$

- A3: невозрастающая отдача от масштаба:

$$y \in Y \Rightarrow \lambda Y \in Y, \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

- A4: непусто, замкнуто

- A5: отсутствие рога изобилия: $Y \cap \mathbb{R}^n_+ = \emptyset$.

Аксиомы производителя

Все эти аксиомы нужны, чтобы вывести из них свойства задачи максимизации полезности, которые нам хорошо известны наперед: непрерывность и выпуклость. Гладкость тоже желательна, но, на самом деле, можно обойтись выпуклостью Y, поскольку выпуклые функции почти всюду дифференцируемы.

Аксиомы производителя

Theorem 3 (БЖЦ)

Если выполнены аксиомы A1-A5, то технологическое множество выпукло. Более того, если производится один товар, то функция F, описывающая технологическую границу, непрерывна и вогнута.

Максимизация полезности

Максимизация полезности

В такой абстрактной постановке удобно анализировать задачу максимизации полезности:

$$\pi(q, y) = \vec{q} \cdot \vec{y} \to \max, \quad y \in Y$$

Как обычно, нас интересуют два объекта:

- координаты оптимума $y^*(\vec{q})$ - это **функция предложения**
- значение целевой функции $\pi^*(\vec{q}) = \pi(\vec{q}, y^*(\vec{q}))$

Максимизация полезности

В такой абстрактной постановке удобно анализировать задачу максимизации полезности:

$$\pi(q, y) = \vec{q} \cdot \vec{y} \to \max, \quad y \in Y$$

Как обычно, нас интересуют два объекта:

- координаты оптимума $y^*(\vec{q})$ - это **функция предложения**
- значение целевой функции $\pi^*(\vec{q}) = \pi(\vec{q}, y^*(\vec{q}))$

Поскольку тут происходит огибание в пространстве $\vec{q}$, постарайтесь ответить на следующие два вопроса:

Вопрос: Чему равен градиент $\pi^*(\vec{q})$?

Вопрос: Какова форма функции $\pi^*(\vec{q})$?

Максимизация полезности

Сложение технологических множеств

Сложение технологических множеств

Предположим, что у нас есть два завода. Первый обладает технологией Y_1, второй обладает технологией Y_2. Теперь представим себе, что компания владеет этими двумя заводами и может свободно перемещать товары с одного завода на другой и комбинировать любые технологические цепочки.

Как описать технологическое множество $Y_1 + Y_2$, соответствующее этой компании?

Сложение технологических множеств

Definition 4

Для двух множества A и B, их **евклидова сумма** $A + B$ определяется как:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in b\}.$$

Сложение технологических множеств

Действительно, компания может «сложить», в векторном смысле, любые два вектора из множеств A, B.

Первый вектор $a \in A$ означает, что партия товаров была произведена на первом заводе и была отправлена на склад. Второй вектор $b \in B$ означает, что партия товаров была произведена на втором заводе и тоже отправлена на склад.

На складе партии будут объеденены и суммарный обьем будет соответствовать вектору $a + b$.

Lemma 5

Арифметическая сумма двух выпуклых множеств выпукла.

Любая взвешенная сумма двух векторов из $A + B$ представляется как сумма двух взвешенных пар векторов из A и B, с теми же весами.

$$\alpha(a + b) + (1 - \alpha)(a' + b') = [\alpha a + (1 - \alpha)a'] + [\alpha b + (1 - \alpha)b']$$

Соответственно, она тоже лежит в $A + B$.

Сложение технологических границ

Сложение технологических границ

Предположим далее, что Y_1 описывается производственной функцией F_1, а Y_2 описывается производственной функцией F_2. Как будет выглядеть производственная функция для $Y_1 + Y_2$?

Какие есть кандидаты?

- $F_1 + F_2$ - $\max(F_1 + F_2)$ - $\nabla F_1 = \nabla F_2$

Сложение технологических границ

Легко видеть, что производственная функция F множества $Y_1 + Y_2$ определяется как верхняя огибающая семейства опорных функций:

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \max_{\hat{x}} \left(F_1(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) + F_2(x_1 - \hat{x}_1, \ldots, x_n - \hat{x}_n) \right),$$

то есть, мы сначала решаем сколько произвести на первом заводе, а потом производим остальное на втором заводе. Что нам говорит Теорема об Огибающей?

Сложение технологических границ

Наклон огибающей равен наклону опорной функции в точке касания:

$$\nabla F = \nabla F_2.$$

Сложение технологических границ

С другой стороны, можно сказать, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \max_{\hat{x}} \left(F_2(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) + F_1(x_1 - \hat{x}_1, \ldots, x_n - \hat{x}_n) \right),$$

то есть, мы сначала решаем сколько произвести на первом заводе, а потом производим остальное на втором заводе

Сложение технологических границ

И снова, Теорема об Огибающей:

$$\nabla F = \nabla F_1.$$

Сложение технологических границ

Получается, что необходимым условием для того, чтобы точка лежала на границе объединенного технологического множества $\vec{y} \in Y_1 + Y_2$ является то, что, при разложении $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ этой точки на вектор $\vec{y}_1 \in Y_1$ и вектор $\vec{y}_2 \in Y_2$:

$$\nabla F_1(\vec{y}_1) = \nabla F_2(\vec{y}_2).$$

Сложение технологических границ

С другой стороны, очевидно, что при разложении $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ этой точки, $\vec{y}_1$ на границе Y_1, а $\vec{y}_2$ лежит на границе Y_2.

Таким образом, для того, чтобы описать суммарную технологическую границу, надо сложить только те пары точек $y_1 = F_1(\vec{x}_1)$ и $y_2 \in F_2(\vec{x}_2)$, в которых наклоны равны, и сосчитать $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, y_1 + y_2)$.

Конец