

# Микроэкономика-I

---

Павел Андреянов, PhD

5 апреля 2022 г.

# Технологические множества

---

В первой части мы фокусировались на минимизации издержек, однако это накладывало определенные ограничения, поскольку описать технологию просто можно одним из двух способов:

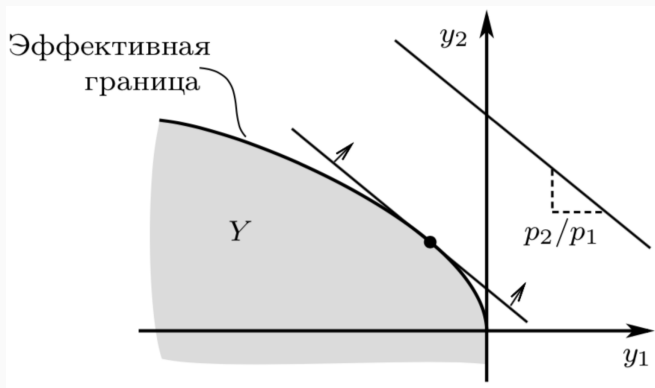
$$x = G(\vec{y}), \quad F(\vec{x}) = y,$$

то есть либо один фактор, либо один конечный товар. Нам хотелось бы описать более сложные технологии, в которых есть много факторов и много конечных товаров.

Оказывается, что удобнее всего отказаться от разделения между факторами и товарами и думать о них одинаково, а наша технология будет описывать, как можно одни товары превращать в другие.

Пусть есть  $n$  товаров, которые можно произвести в количествах, описываемых точкой в  $\mathbb{R}^n$  (не в  $\mathbb{R}_+^n$ ), поскольку какие-то товары окажутся факторами, потраченными при производстве других.

Одна технология – это одна точка. Множество всех допустимых технологий – это область в  $\mathbb{R}^n$ , то есть \*\*технологическое множество\*\*. Эффективное производство (то, что раньше описывалось  $F$  или  $G$ ) теперь описывается границей этого множества, то есть \*\*технологической границей\*\*, см. иллюстрацию ниже.



Формально технологическая граница состоит из точек  $y \in Y$  таких, что не существует  $y' \in Y$ , так что  $y'_i \geq y_i$  по всем координатам  $i$  и  $y'_j > y_j$  по хотя бы одной координате  $j$ .

## Lemma 1

*Технологическая граница ищется как все точки  $z \in Y$  т.ч.*

$$z \in \operatorname{argmax} \vec{q} \cdot \vec{y}, \quad \vec{y} \in Y,$$

*для хотя бы одного вектора цен  $\vec{q} \geq 0, \vec{q} \neq 0$ .*

# Аксиомы производителя

---



Фирма воспринимает технологическое множество и максимизирует прибыль:

$$\vec{q} \cdot y \rightarrow \max, \quad \vec{y} \in Y.$$

Чтобы задача была выпуклой, нам понадобятся некоторые аксиомы.

## Definition 2

Аксиомы технологического множества  $Y$ :

- A1:  $Y$  содержит  $\vec{0}$  - A2: свобода расходования

$$y \in Y, y' < y \Rightarrow y' \in Y$$

- A3: невозрастающая отдача от масштаба:

$$y \in Y \Rightarrow \lambda y \in Y, \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

- A4: непусто, замкнуто
- A5: отсутствие рога изобилия:  $Y \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$ .

Все эти аксиомы нужны, чтобы вывести из них свойства задачи максимизации полезности, которые нам хорошо известны наперед: непрерывность и выпуклость. Гладкость тоже желательна, но, на самом деле, можно обойтись выпуклостью  $U$ , поскольку выпуклые функции почти всюду дифференцируемы.

## Theorem 3 (БЖЦ)

*Если выполнены аксиомы A1-A5, то технологическое множество выпукло. Более того, если производится один товар, то функция  $F$ , описывающая технологическую границу, непрерывна и вогнута.*

# Максимизация полезности

---

В такой абстрактной постановке удобно анализировать задачу максимизации полезности:

$$\pi(q, y) = \vec{q} \cdot \vec{y} \rightarrow \max, \quad y \in Y$$

Как обычно, нас интересуют два объекта:

- координаты оптимума  $y^*(\vec{q})$  - это **функция предложения**
- значение целевой функции  $\pi^*(\vec{q}) = \pi(\vec{q}, y^*(\vec{q}))$

# Максимизация полезности

В такой абстрактной постановке удобно анализировать задачу максимизации полезности:

$$\pi(q, y) = \vec{q} \cdot \vec{y} \rightarrow \max, \quad y \in Y$$

Как обычно, нас интересуют два объекта:

- координаты оптимума  $y^*(\vec{q})$  - это **функция предложения**
- значение целевой функции  $\pi^*(\vec{q}) = \pi(\vec{q}, y^*(\vec{q}))$

Поскольку тут происходит огибание в пространстве  $\vec{q}$ , постарайтесь ответить на следующие два вопроса:

Вопрос: Чему равен градиент  $\pi^*(\vec{q})$ ?

Вопрос: Какова форма функции  $\pi^*(\vec{q})$ ?

# Максимизация полезности

---



# Сложение технологических множеств

---

Предположим, что у нас есть два завода. Первый обладает технологией  $Y_1$ , второй обладает технологией  $Y_2$ . Теперь представим себе, что компания владеет этими двумя заводами и может свободно перемещать товары с одного завода на другой и комбинировать любые технологические цепочки.

Как описать технологическое множество  $Y_1 + Y_2$ , соответствующее этой компании?

## Definition 4

Для двух множества  $A$  и  $B$ , их евклидова сумма  $A + B$  определяется как:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in b\}.$$

Действительно, компания может «сложить» в векторном смысле любые два вектора из множеств  $A, B$ .

Первый вектор  $a \in A$  означает, что партия товаров была произведена на первом заводе и была отправлена на склад.

Второй вектор  $b \in B$  означает, что партия товаров была произведена на втором заводе и тоже отправлена на склад.

На складе партии будут объединены и суммарный объем будет соответствовать вектору  $a + b$ .

## Lemma 5

*Арифметическая сумма двух выпуклых множеств выпукла.*

Любая взвешенная сумма двух векторов из  $A + B$  представляется как сумма двух взвешенных пар векторов из  $A$  и  $B$  с теми же весами.

$$\alpha(a + b) + (1 - \alpha)(a' + b') = [\alpha a + (1 - \alpha)a'] + [\alpha b + (1 - \alpha)b']$$

Соответственно, она тоже лежит в  $A + B$ .

# Сложение технологических границ

---

Предположим далее, что  $Y_1$  описывается производственной функцией  $F_1$ , а  $Y_2$  описывается производственной функцией  $F_2$ . Как будет выглядеть производственная функция для  $Y_1 + Y_2$ ?

Какие есть кандидаты?

$$- F_1 + F_2 - \max(F_1 + F_2) - \nabla F_1 = \nabla F_2$$

Легко видеть, что производственная функция  $F$  множества  $Y_1 + Y_2$  определяется как верхняя огибающая семейства опорных функций:

$$F(x_1, \dots, x_n) := \max_{\hat{x}} (F_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) + F_2(x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_n - \hat{x}_n)),$$

то есть мы сначала решаем сколько произвести на первом заводе, а потом производим остальное на втором заводе. Что нам говорит Теорема об Огибающей?



Наклон огибающей равен наклону опорной функции в точке касания:

$$\nabla F = \nabla F_2.$$

С другой стороны, можно сказать, что

$$F(x_1, \dots, x_n) := \max_{\hat{x}} (F_2(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) + F_1(x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_n - \hat{x}_n)),$$

то есть мы сначала решаем сколько произвести на первом заводе, а потом производим остальное на втором заводе

И снова Теорема об Огибающей:

$$\nabla F = \nabla F_1.$$

Получается, что необходимым условием для того, чтобы точка лежала на границе объединенного технологического множества  $\vec{y} \in Y_1 + Y_2$  является то, что, при разложении  $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$  этой точки на вектор  $\vec{y}_1 \in Y_1$  и вектор  $\vec{y}_2 \in Y_2$ :

$$\nabla F_1(\vec{y}_1) = \nabla F_2(\vec{y}_2).$$

С другой стороны, очевидно, что при разложении  $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$  этой точки,  $\vec{y}_1$  на границе  $Y_1$ , а  $\vec{y}_2$  лежит на границе  $Y_2$ .

Таким образом, для того, чтобы описать суммарную технологическую границу, надо сложить только те пары точек  $y_1 = F_1(\vec{x}_1)$  и  $y_2 \in F_2(\vec{x}_2)$ , в которых наклоны равны, и сосчитать  $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, y_1 + y_2)$ .

Конец

---