Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

1 апреля 2022 г.

Начала оптимизации

Начала оптимизации

Любая оптимизационная задача – это две вещи: - функция, которую мы максимизируем - область определения аргументов, по которым мы максимизируем

Ключевыми факторами тут являются непрерывность целевой функции и выпуклость области определения.

Непрерывность

Непрерывность

Существование решения, как правило, мы можем легко гарантировать при помощи следующей теоремы

Theorem 1 (Вейерштрасса)

Непрерывная функция на компакте гарантированно достигает своего минимума и максимума.

Что такое непрерывная функция, вы уже знаете.

Непрерывность

А **компакт** в $\mathbb{R}^n$ - это просто ограниченное и замкнутое множество.

В контексте одномерной оптимизации, $[a, b]$ - это компакт, а $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $[a, \infty)$,(a, ∞) - это все не компакты.

Непрерывность

Таким образом, у вас есть всего два сценария, как решение оптимизационной задачи с непрерывной функцией могло бы не существовать: либо оно вообще бесконечно, либо оно конечно, но достигается в точке которая попала на границу области.

Условия Первого Порядка

УПП

Если решение лежит внутри области, то обязательно выполнены условия первого порядка. Например, если функция $U(x, y, z)$ от трех переменных, и вы убедили себя, что решение надо искать внутри, то

$$\text{УПП (FOC)}: \quad \nabla U = 0$$

должны выполняться в оптимальной точке (x^*, y^*, z^*). Зачастую граничных точек не так уж и много, и их можно просто перебрать руками, сравнивая значения. Затем можно выбрать наилучшую из граничных и внутренних точек, удовлетворяющих УПП.

Иногда число кандидатов на оптимум, прошедших условия первого порядка, можно дополнительно сузить за счет условий второго порядка.

$$\text{УВП (SOC)}: \quad \nabla^2 U \; ? \; 0$$

Если Гессиан во внутренней точке отрицательно определен $\nabla^2 U \leqslant 0$ (парабола рогами вниз), то это локальный максимум и этот кандидат проходит отбор.

Если Гессиан положительно определен $\nabla^2 U \geqslant 0$ (парабола рогами вверх), то это локальный минимум и этот кандидат не проходит отбор.

УВП

Если у вас остался один кандидат, то он и является оптимумом.

Если кандидатов несколько, то надо опять сравнивать значения функции руками.

Выпуклость

Выпуклость

К счастью, в экономике зачастую удается показать, что поверх непрерывности функция полезности

- либо вогнутая
- либо она монотонное преобразование вогнутой
- либо она квази-вогнутая

Если вдобавок к этому область определения не только компакт, но и выпуклое множество, то, во-первых, решение всегда единственное, а во-вторых, условия второго порядка можно не проверять, поскольку они (или что-то очень похожее на них) выполнены глобально.

Выпуклость

Очень важно уметь, глядя на задачу, определять выпуклая она или нет, чтобы не тратить время на анализ второго порядка.

Общий алгоритм решения выпуклых и непрерывных задач на компакте очень простой:

- ищем решение, как будто оно внутреннее
- если оно оказалось не внутреннее - ищем на границе

В выпуклых задачах условия второго порядка не нужны.

Линии уровня

Линии уровня

Наконец, линии уровня - это очень удобный инструмент для отлова и классификации кандидатов на решение оптимизационной задачи.

Definition 2

Линией уровня полезности U, проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $U(y) = U(x)$.

И есть очень похожее определение для предпочтений...

Definition 3

Кривой безразличия предпочтений $\succcurlyeq$, проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $x \sim y$.

Совершенно ясно, что в контексте представлений предпочтений полезностями, кривая безразличия и линия уровня - это одно и то же.

Линейная полезность

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = ax + by$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = ax + by$$
$$c - ax = by$$
$$y = \frac{c - ax}{b}$$

Линия уровня - это прямая вида $y = \alpha x + \beta$.

Гиперболическая полезность

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = a \log x + \log y$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = a \log x + \log y$$
$$e^c = x^a y$$
$$y = \frac{e^c}{x^a}$$

Линия уровня - это гипербола вида $y = x^\alpha \beta$.

Полезность минимум

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = \min(ax, by)$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = \min(ax, by)$$
$$\frac{c}{b} = \min(\frac{a}{b}x, y), \quad \frac{c}{a} = \min(x, \frac{b}{a}y)$$
$$y = \frac{c}{b}\mathbb{I}(ax > c), \quad x = \frac{c}{a}\mathbb{I}(by > c)$$

Линия уровня - это конкатенация горизонтальной и вертикальной линий, соединенных вдоль $ax = by$.

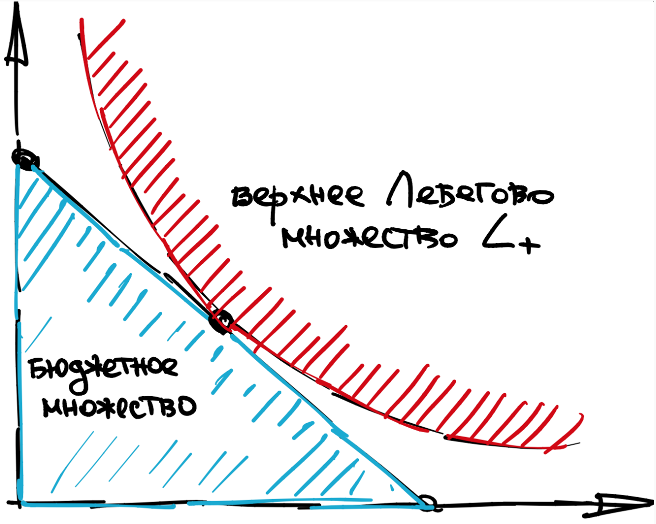
Зачем нужны линии уровня

Очень часто, в задачах есть выпуклое ограничение типа неравенства, например, бюджетное ограничение. В таком случае все кандидаты будут формально не внутренние.

Однако с точки зрения выпуклой оптимизации, такие точки можно интерпретировать как «внутренние», если решать методом Лагранжа. О методе Лагранжа мы поговорим на следующей лекции.

Внутреннее решение выпуклой (и гладкой) оптимизационной задачи можно охарактеризовать как точку касания линии уровня с выпуклым ограничением.

Квазивогнутость



Конец