Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

1 апреля 2022 г.

Тождество Роя

Тождество Роя

Мы хотим связать между собой три объекта: $x^*(p,q,I), y^*(p,q,I)$ и $V^*(p,q,I)$. Для этого мы воспользуемся фундаментальным свойством, что косвенная полезность – это полезность, в которую подставили спросы:

$$V(p,q,px+qy) = U(x,y),$$

Убедитесь, что это действительно корректная запись.

Что можно сделать с этим тождеством?

- продифференциировать по p
- продифференциировать по q

Тождество Роя

Заметим, что цены входят слева дважды, а справа не входят вообще. То есть с точки зрения дифференциирования по ценам, справа стоит константа, а слева сложная функция.

По правилам дифференцирования, полный дифференциал функции V по p равен:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial p} = 0$$

Поскольку $\frac{\partial I}{\partial p} = x$,

$$\frac{dV}{dp} = \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial I} \cdot x = 0$$

Тождество Роя

Аналогично для второй цены

$$\frac{dV}{dq} = \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial I} \cdot y = 0$$

Комбинируя это в векторной форме, мы получаем:

Theorem 1 (Тождество Роя)

Если $\vec{x}$ - весь вектор спросов, а $\vec{p}$ - весь вектор цен то

$$\vec{x} = -\nabla_{\vec{p}} V / \nabla_I V$$

Теорема об огибающей

Теорема об огибающей

Это чрезвычайно важная теорема. Рассмотрим семейство опорных функций $f(x,p)$, где x - переменная а p - параметр.

Определим огибающую $V(p)$ как результат оптимизации функции f по какому-то статическому множеству :

$$V(p) := \max_{x \in X} f(x,p),$$

Theorem 2 (Об огибающей)

Функция $V(p)$ дифференциируема (почти всюду) и

$$\frac{\partial V(p)}{\partial p} = \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\Big|_{x = x^*(p)}.$$

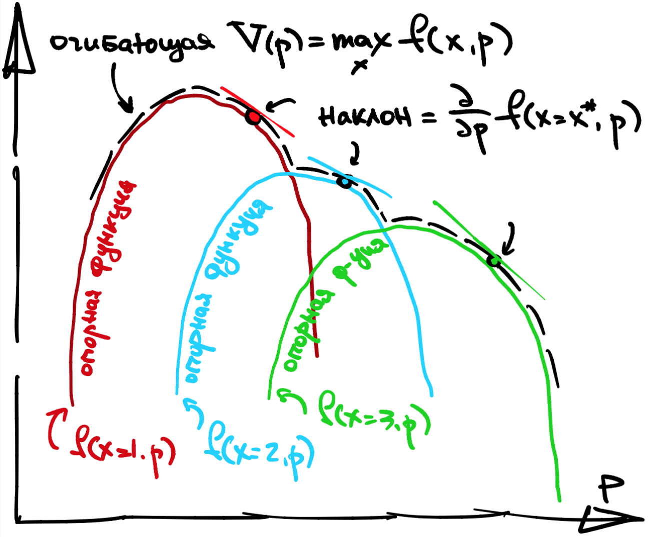
Теорема об огибающей

... то есть, наклон огибающей равен наклону опорной функции в точке касания.

Представьте себе, что вы сложили вместе крупные предметы разной формы (стол, компьютер, велосипед) и, чтобы они не пылились, накрыли все эластичной пленкой.

Пленка плотно прилегла к тем предметам, которые оказались, по разным причинам выше всех остальных. Можно сказать, что пленка - это (верхняя) огибающая вашего семейства опорных объектов, поскольку она лежит там, где находится самый высокий объект в каждой точке.

Теорема об огибающей



Теорема об огибающей

Запомните следующую мантру:

наклон огибающей равен наклону опорной функции в точке касания.

То есть, чтобы найти наклон огибающей в точке p нужно из всех опорных функций (они индексированы через x) выбрать ту, на которую в этой точке (точка это значение параметра p) опирается огибающая, и взять ее наклон, опять же, в пространстве параметра p.

Теорема об огибающей

Чтобы не перепутать, какие роли x и p, помните, что **огибающая - это функция от параметра**, а не от оптимизационной переменной, которая индексирует опорные функции.

Соответственно, **огибание происходит в пространстве парамера, а не в пространстве переменных, по которой вы оптимизировали**.

Практическая польза

Теорема об огибающей

Может показаться, что дифференцирование опорной функции и подстановка – это лишняя трата времени, ведь можно просто решить задачу и продифференцировать V по параметру, в лоб.

Это правда, однако если у вас абстрактная функция, вы не можете просто так ее промаксимизировать. Поэтому эта теорема очень удобна при доказательствах, но не только.

Зачастую видение огибающей позволяет сэкономить время при дифференцировании в том смысле, что вам не надо лишний раз протаскивать производную по правилу дифференциирования сложной функции.

Теорема об огибающей

К примеру, предположим, что у вас есть функция $F(x, y, p)$ и еще две функции $x = g(p), y = h(p)$. Если вас попросят найти полную производную $F(g(p), h(p), p)$ по p то получится:

$$\frac{d}{dp}F(g(p), h(p), p) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial p}.$$

Теперь предположим, что нам стало известно, что $x = g(p), y = h(p)$ это, на самом деле, оптимумы функции F.

Тогда, по Теореме об Огибающей

$$\frac{d}{dp}F(g(p), h(p), p) = \frac{\partial F}{\partial p}.$$

Получается, что Теорема об Огибающей позволяет нам **игнорировать параметр, находящийся внутри оптимальной точки,** при подсчете полного дифференциала.

Теорема об огибающей

Как насчет косвенной полезности?

Для того, чтобы активировать всю мощь Теоремы об Огибающей, вам достаточно взять любую функцию, которая является результатом оптимизации, и продифференциировать ее по любому параметру.

К примеру, мы могли бы продифференциировать косвенную полезность по ценам. Тогда Теорема об Огибающей даст вам связь этих производных с производными опорной функции в точках оптимума.

Теорема об огибающей

Чему равна $\partial V / \partial I$?

Теорема об огибающей

Она равна множителю Лагранжа λ.

Минимизация расходов

Минимизация расходов

Сейчас мы перейдем к задаче, на первый взгляд, никак не связанной с максимизацией полезности. Если быть точными, мы будем минимизировать сумму расходов на все товары при минимально заданном таргетированном уровне полезности $\bar{U}$.

Для простоты пусть будут два товара x, y с ценами p, q.

$$\text{P2:} \quad px + qy \to \min_{x,y \geqslant 0}, \quad \text{s.t.} \quad U(x, y) \geqslant 0.$$

Сравните с классической задачей максимизации полезности

$$\text{P1:} \quad U(x, y) \to \max_{x,y \geqslant 0}, \quad \text{s.t.} \quad px + qy \leqslant 0.$$

Минимизация расходов

Сравним лагранжианы

$$\mathcal{L}^1 = U(x, y) - \lambda(px + qy - I)$$
$$\mathcal{L}^2 = (px + qy - I) - \gamma(\bar{U} - U(x, y))$$

Сравним фоки (упп)

$$\text{P1:} \quad U'_x = \lambda p, \quad U'_y = \lambda q, \quad px + qy = I$$
$$\text{P2:} \quad p = \gamma U'_x, \quad q = \gamma U'_y, \quad U(x, y) = \bar{U}$$

Решения совпадают, если третьи уравнения эквивалентны.

Это свойство известно как Закон Вальраса.

Закон Вальраса

Закон Вальраса

Для начала приведем пример полезности, при которой Закон Вальраса не выполнен, это постоянная полезность $U(x, y) = 1$.

Действительно, с точки зрения полезности все бюджетное множество состоит из оптимумов. Однако лишь одна точка $(x, y) = (0, 0)$ по настоящему минимизирует издержки, при таргетированной полезности $\bar{U} = 0$.

Что тут произошло? Дело в том, что у полезности $U(x, y) = 1$ толстые линии уровня.

Чтобы Закон Вальраса заработал, необходимо исключить появление таких линий уровня. Это свойство называется локальной ненасыщаемостью в $\mathbb{R}^2_+$.

Закон Вальраса

Definition 3

Полезность **локально ненасыщаема** в X, если для каждой точки $x \in X$ и для любой сколько угодно малой окрестности этой точки в X, найдется вторая точка y в этой окрестности, такая что $U(y) > U(x)$.

Большинство полезностей в нашем курсе будет обладать локальной ненасыщаемостью. Теперь мы готовы сформулировать первую теорему

Закон Вальраса

Theorem 4 (Закон Вальраса)

Если полезность локально ненасыщаема в $\mathbb{R}^n_+$, то любое из решений задачи максимизации полезности всегда лежит на бюджетном ограничении.

Это утверждение доказывается от противного.

Пусть решение находится в бюджетном множестве, но не на бюджетной линии. Тогда существует точка в его окрестности, которая также содержится в бюджетном множестве (поскольку локальная ненасыщаемость именно в $\mathbb{R}^n_+$), но дает большую полезность. Противоречие.

Два спроса

Два спроса

Definition 5

Назовем **Хиксианским спрос** в задаче минимизации расходов, и **Маршалианским спрос** в задаче максимизации полезности.

Для товаров x, y будем обозначать Хиксианские спросы как

$$h_x(p, q, \bar{U}), \quad h_y(p, q, \bar{U}),$$

а Маршаллианские спросы как

$$m_x(p, q, I), \quad m_y(p, q, I).$$

Два спроса

Тогда в для задачи максимизации полезности с параметрами (p, q, I) существует

$$\bar{U}_0 := V(m_x(p, q, I), m_y(p, q, I))$$

такой, что задача минимизации расходов с $(p, q, \bar{U}_0)$ эквивалентна ей.

Аналогично, для задачи миимизации расходов с (p, q, I) существует

$$I_0 := ph_x(p, q, \bar{U}) + qh_y(p, q, \bar{U})$$

такой, что задача максимизации полезности с (p, q, I_0) эквивалентна ей.

Дуальность

Дуальность

Мы подошли к очень важному наблюдению.

Theorem 6 (Дуальность)

Если полезность (квази-)вогнутая и локально ненасыщаемая, то любое решение (как функция от цен) задачи минимизации расходов воспроизводится как одно из решений максимизации полезности и наоборот.

Причем, все это при одних и тех же ценах.

Это значит, что задача максимизации полезности и задача минимизации расходов по большому счету эквивалентны в определенном геометрическом смысле.

Есть только одна проблема - у Маршаллианского и Хиксианского спросов разный набор аргументов, поэтому они не могут совпадать номинально.

Для того, чтобы поправить ситуацию, нам понадобится еще одна новая функция.

Функция расходов

Функция расходов

Definition 7

Назовем **функцией расходов** значение целевой функции в оптимуме в задаче минимизации расходов:

$$E(p, q, \bar{U}) = ph_x(p, q, \bar{U}) + qh_y(p, q, \bar{U}).$$

Это совершенно аналогично тому, как мы ввели косвенную полезность $V(p, q, I)$ через значение целевой функции в оптимуме в задаче максимизации полезности.

Лемма Шепарда

Лемма Шепарда

Мы проходили сегодня уже Теорему об Огибающей и успешно применили ее к задаче максимизации полезности. А что произойдет, если мы применим ее к задаче минимизации расходов?

$$E(p,q,\bar{U}) = ph_x(p,q,\bar{U}) + qh_y(p,q,\bar{U}), \quad \frac{\partial E}{\partial p} = ?$$

Прежде всего мы должны ответить на следующий вопрос:

Лемма Шепарда

Что есть опорная функция для $E(p, q, I)$?

Лемма Шепарда

Правильный ответ – это Лагранжиан

$$\mathcal{L} = px + qy - I - \lambda(\bar{U} - U(x, y))\breve{}$$

это опорная функция.

Лемма Шепарда

Теперь, когда мы знаем чему равна опорная функция, мы можем сформулировать следующую теорему:

Theorem 8 (Лемма Шепарда)

Если $\vec{h}$ - весь вектор спросов, а $\vec{p}$ - весь вектор цен то

$$\vec{h} = \nabla_{\vec{p}} E,$$

то есть Хиксианский спрос является градиентом функции расходов.

Как не запутаться?

Как не запутаться?

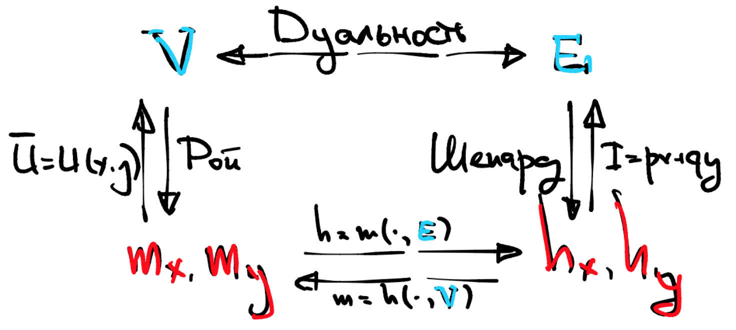
Подводя итог, у нас было две задачи: максимизации полезности и минимизации расходов. Каждая задача имела свой набор параметров: первая (p, q, I) а вторая $(p, q, \bar{U})$.

Каждая задача произвела три обьекта:

- оптимальные $m_x(p, q, I), m_y(p, q, I)$ и косвенная полезность $V(p, q, I)$ в первой задаче
- оптимальные $h_x(p, q, \bar{U}), h_y(p, q, \bar{U})$ и функция расходов $E(p, q, \bar{U})$ во второй задаче

Можно изобразить "схему перемещений"между объектами

Как не запутаться?



Решаем примеры до упора